

# Suche nach Makroskopischen Quanteneffekten in maßgeschneiderten $0$ - $\kappa$ -Josephsonkontakten

## **Dissertation**

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Eberhard Karls Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von  
Benjamin Neumeier  
aus Tübingen

Tübingen  
2016

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen  
Fakultät der Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:	12.05.2016
Dekan:	Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Reinhold Kleiner
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Dieter Kölle

# Kurzfassung

0- $\kappa$ -Josephsonkontakte sind faszinierende Bauelemente deren experimentelle Realisierung und Untersuchung in den letzten Jahren erst möglich wurde. Diese Arbeit gliedert sich in die Messung des makroskopischen Quantentunnels der Josephsonphase in einem 0- $\kappa$ -Kontakt und die Energielevelspektroskopie an solchen Kontakten.

Der 0- $\kappa$ -Josephsonkontakt wird dabei durch einen „gewöhnlichen“ Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Kontakt mit einem Strominjektorpaar realisiert. Durch Anlegen eines Injektorstromes lässt sich eine Phasendiskontinuität  $\kappa = \pi$  einstellen. Dadurch wird das System in einen entarteten Grundzustand gebracht, in dem zwei kritische Ströme  $I_{c\pm}$  gemessen werden können. Diese beiden kritischen Ströme sind charakteristisch für einen nicht allzu langen 0- $\kappa$ -Kontakt, dessen räumlich gemittelte Phase zwei Grundzustandswerte  $\pm\varphi$  in einem effektiven Doppelmuldenpotenzial annehmen kann. Durch Variieren des Injektorstromes in einem kleinen Bereich um dieses Minimum  $\kappa = \pi \pm \epsilon$ , lässt sich der Abstand der Werte der beiden kritischen Ströme  $I_{c\pm}$  beliebig einstellen. Für diese beiden kritischen Ströme kann nun der Escapeprozess sowohl im thermischen als auch im quantenmechanischen Regime untersucht werden. Dieser Escapeprozess kann im Bild des Teilchens im gekippten Waschbrettpotenzials beschrieben werden. Das Waschbrettpotenzial wird dabei durch Anlegen eines Biasstromes solange verkippt, bis die Barriere klein genug ist, dass das Teilchen aufgrund thermischer oder quantenmechanischer Fluktuationen über oder durch die Barriere entkommen kann. Die dafür benötigte Energie wird im Falle eines thermischen Escapeprozesses als Aktivierungsenergie bezeichnet und kann mittels Messung der Schaltwahrscheinlichkeit des Kontaktes statistisch bestimmt und mit theoretischen Modellen in verschiedenen Dämpfungsregimes beschrieben werden. Weiterhin wurden Messungen der Temperaturabhängigkeit der Aktivierungsenergie durchgeführt. Unterhalb

der Crossover-Temperatur  $T^*$  vom thermischen ins quantenmechanische Regime, bei diesen Kontakten ist  $T^* \approx 175\text{K}$ , wird der Escapeprozess vom makroskopischen Quantentunneln dominiert. Dies spiegelt sich in einer Sättigung der Verteilungsbreite der Schaltstatistikhistogramme wieder und ist ein erster Hinweis auf das Erreichen des quantenmechanischen Regimes. Es wurden weitere Messungen zur Abhängigkeit der Verteilungsbreite vom angelegten Injektorstrom durchgeführt und somit weitere Belege für das makroskopische Quantentunneln gesammelt. Jedoch konnten diese Messungen noch nicht mit den derzeit vorliegenden, theoretischen Vorhersagen in Einklang gebracht werden.

Neben den Messungen zum makroskopischen Quantentunneln wurden Spektroskopiemessungen der Energieniveaus, die sich innerhalb der Potenzialmulde ausbilden, durchgeführt. Zunächst wurde die Plasmafrequenz der untersuchten Kontakte experimentell bestimmt und nach parasitären Resonanzen gesucht. Anschließend wurden die Messungen zur Energielevelspektroskopie durchgeführt. In diesen Messungen traten interessante Strukturen auf, die Hinweise für die Anregung der Phase in höhere Energieniveaus innerhalb des Potenzialminimums sind. Da die auftretenden Strukturen weder mit klassischen Simulationen, noch mit dem Auftreten von Störresonanzen erklärbar sind, deutet vieles darauf hin, dass der Escape der Josephsonphase aus dem Grundzustand und höheren, angeregten Zuständen mittels spektroskopischen Untersuchungen nachgewiesen wurde. Deshalb ist ein Vergleich mit quantenmechanischen Simulationen nötig, welcher bisher, aufgrund der fehlenden quantenmechanischen Berechnungen, noch nicht durchgeführt werden konnte.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Experimente geben erste, klare Hinweise auf das quantenmechanische Verhalten von  $0-\kappa$ -Josephsonkontakten, konnten jedoch bisher noch nicht mit den theoretischen Modellen zufriedenstellend beschrieben werden. Diese Arbeit konnte dennoch eine Grundlage für weitere Untersuchungen des quantenmechanischen Verhaltens von  $0-\kappa$ -Josephsonkontakten schaffen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Josephson-Tunnelkontakte . . . . .	8
2.1.1	Punktförmige Josephsonkontakte . . . . .	9
2.1.2	Das RCSJ Modell Mechanisches Pendel Teilchen im Waschbrettspotenzial . . . . .	12
2.1.3	Josephsonkontakt im externen Magnetfeld . . . . .	15
2.1.4	Thermischer Escape und Makroskopisches Quantentunneln . . . . .	16
2.2	Lange Josephsonkontakte und das Sinus-Gordon-Modell . .	20
2.2.1	Plasmaoszillationen . . . . .	23
2.2.2	Fluxonen . . . . .	24
2.2.3	Thermische Aktivierung und Makroskopisches Quantentunneln in langen Kontakten . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Theorie fraktionaler Flusswirbel</b>	<b>29</b>
3.1	$\pi$ -Josephsonkontakte . . . . .	29
3.2	$0-\pi$ -Josephsonkontakte . . . . .	30
3.3	Fraktionale Flusswirbel . . . . .	33
3.4	$\varphi$ -Josephsonkontakte . . . . .	39
3.5	Eigenfrequenz eines fraktionalen Flusswirbels . . . . .	45
3.6	Thermische Aktivierung . . . . .	47
3.7	Resonante Aktivierung . . . . .	49
3.8	Makroskopische Quanteneffekte . . . . .	51

<b>4</b>	<b>Probenherstellung und experimenteller Aufbau</b>	<b>57</b>
4.1	Probenherstellung und Design . . . . .	57
4.2	Das 4.2 K Setup . . . . .	62
4.3	Der $^3\text{He}^4\text{He}$ -Mischkryostat . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Makroskopische Quanteneffekte in einem <math>\varphi</math>-Josephsonkontakt mit Strominjektoren</b>	<b>71</b>
5.1	Charakterisierung der Proben . . . . .	72
5.2	Makroskopisches Quantentunneln in einem $\varphi$ -Josephsonkontakt mit Strominjektoren . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Resonanter Escape</b>	<b>85</b>
6.1	Bestimmung der Plasmafrequenz . . . . .	85
6.2	Energielevelspektroskopie . . . . .	91
6.3	Energielevelspektroskopie mit angelegtem Injektorstrom . .	102
6.4	Diskussion . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>109</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Im Zuge der steten Miniaturisierung elektrischer Schaltungen in den letzten zwei Jahrzehnten gab es nicht nur im Bereich der Computertechnologie einen rasanten Fortschritt, welcher zu immer kürzeren Schaltzeiten und kleineren Speichereinheiten führte. Bei diesen Strukturen, welche im Nanometerbereich liegen und teilweise nur wenige atomare Lagen umfassen, wird der Einfluss quantenmechanischer Effekte immer größer. Diese Effekte gilt es im klassischen Design zu vermeiden, jedoch bieten sie die Möglichkeit neuer Konzepte. Ein Beispiel hierfür ist die Realisierung neuer Speichereinheiten, so genannter Quantenbits. Im Gegensatz zu klassischen Bits, in denen es nur die Zustände 0 und 1 gibt, können mittels Quantenbits jede mögliche Superposition dieser beiden Zustände realisiert werden. Es bietet sich somit die Möglichkeit komplizierte Systeme von einer ganz neuen Seite aus zu betrachten, was zur Bildung eines großen Forschungszweiges innerhalb der Physik geführt hat, dessen Fernziel die Realisierung eines Quantencomputers ist. Mit Hilfe eines solchen Quantencomputers wäre es möglich quantenmechanische Simulationen in endlicher Zeit zu bewerkstelligen, was mit klassischen Computern nicht machbar ist. Das heißt jedoch nicht, dass Quantencomputer prinzipiell schneller als klassische Computer sind, jedoch sind verschiedene Probleme in deutlich kürzerer Rechenzeit lösbar bzw. überhaupt lösbar, wie beispielsweise die Primfaktorzerlegung. Dabei werden große natürliche Zahlen als Produkt von Primzahlen dargestellt. Primzahlen spielen heutzutage in der Verschlüsselungstechnik eine große Rolle. Zwar gelang in den letzten Jahren die Herstellung eines Quantenbytes mit Ionen [HHR<sup>+</sup>05], bestehend aus acht Quantenbits, jedoch ist

die Realisierung eines Quantencomputers noch in weiter Ferne. Zunächst gilt es die Kontrolle über die äußerst komplexen Quantensysteme zu erlangen. Dies ist aufgrund der sehr kleinen Strukturen bei denen die quantenmechanischen Effekte auftreten problematisch.

Eine andere Möglichkeit bietet die Untersuchung von makroskopischen Quantenphänomenen. Die Entdeckung dieser kohärenten Materiezustände, beispielsweise der Bose-Einstein-Kondensation, suprafluides Helium oder die Supraleitung, bietet die Möglichkeit makroskopische Quanteneffekte in Systemen zu untersuchen, die kontrollierbar und mittels standardisierter Verfahren herstellbar sind.

Die Supraleitung bildet die Basis der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten  $0$ - $\kappa$ -Josephsonkontakte. Die Grundlage bilden dabei zwei schwach gekoppelte Supraleiter, der Josephsonkontakt. Durch Anlegen eines externen Magnetfeldes kann magnetischer Fluss in Form von magnetischen Flusswirbeln in den Kontakt eindringen. Diese Flusswirbel tragen genau ein Quantum  $\Phi_0 \approx 2.07 \cdot 10^{-15}$  Wb des magnetischen Flusses und können sich, aufgrund ihres solitonischen Charakters, frei entlang des Josephsonkontaktes bewegen. Die klassischen Eigenschaften dieser Fluxonen werden seit den 1980er Jahren untersucht und sind mittlerweile sehr gut verstanden. Überlegungen zum Einsatz solcher Bauteile im Bereich der Quanteninformationsverarbeitung und deren Untersuchung begann jedoch erst Anfang des 21. Jahrhunderts [WS07, CW08]. Im letzten Jahrzehnt wurden erstmals so genannte  $\pi$ -Josephsonkontakte realisiert. Diese haben im Vergleich zu herkömmlichen  $0$ -Josephsonkontakten eine negative Strom-Phasen-Beziehung. Ein interessantes Phänomen tritt auf, wenn man einen  $0$ - und einen  $\pi$ -Kontakt in Verbindung bringt. An der Grenze zwischen beiden Regionen kommt es zur spontanen Ausbildung einer Magnetisierung, welche durch zirkulierende Kreisströme hervorgerufen werden. Diese Kreisströme werden Semifluxonen genannt und tragen genau die Hälfte des magnetischen Flussquants  $\Phi_0/2$  [KTR<sup>+</sup>96, KTM99, GKK02, HAS<sup>+</sup>03, WKK<sup>+</sup>06]. Im Gegensatz zu Fluxonen sind Semifluxonen an ihren Entstehungsort gebunden und besitzen eine positive oder negative Polarität, analog zu einem Spin-1/2-System mit zwei diskreten Zuständen  $\uparrow$  und  $\downarrow$ . Es ist mittlerweile möglich  $0$ - $\kappa$ -Josephsonkontakte herzustellen. Hierbei erzeugen Strominjektoren einen beliebig einstellbaren Phasensprung in einem ansonsten herkömmlichen Josephsonkontakt in Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Technologie. Die  $0$ - $\kappa$ -Kontakte können als Verallgemeinerung der  $0$ - $\pi$ -Kontakte angesehen werden und bilden fraktionale Flusswirbel, welche einen beliebigen Teil  $\kappa/2\pi$  des magnetischen Flusses  $\Phi_0$  tragen, aus. Fraktionale Flusswir-

---

bel sind ebenfalls an ihren Entstehungsort gebunden, können jedoch elastisch verformt werden. Die Größe dieser fraktionalen Flusswirbel liegt im Bereich einiger  $\mu\text{m}$  und ist damit riesig im Vergleich zu anderen Teilchen, wie Atome oder Elektronen. Die klassischen Eigenschaften der fraktionalen Flusswirbel, sowie Moleküle bestehend aus zwei fraktionalen Flusswirbeln, die als Grundlage eines Quantenbits genutzt werden können, sind mittlerweile sehr gut verstanden [GSG<sup>+</sup>03, GKK04, GGS<sup>+</sup>05, VSK<sup>+</sup>09, Buc10]. Neben dem möglichen Einsatz als Quantenbit können fraktionale Flusswirbel vor allem für grundlegende Untersuchungen des Quantenverhaltens makroskopischer Objekte eingesetzt werden. Die quantenmechanischen Eigenschaften von Atomen sind heutzutage sehr gut verstanden, während es beim quantenmechanischen Verhalten makroskopischer Objekte noch viele offene Fragen gibt, so dass die Untersuchung makroskopischer Quantenphänomene Teil der aktuellen Forschung ist. Deshalb sind fraktionale Flusswirbel ein interessantes System an dem das Quantenverhalten makroskopischer Objekte studiert werden kann.

Weitere interessante Objekte sind so genannte  $\varphi$ -Josephsonkontakte. Im Vergleich zu  $\pi$ -Kontakten kann bei  $\varphi$ -Kontakten der Wert der Phase  $\phi$  im Grundzustand beliebige Werte  $\varphi$  annehmen und nicht nur 0 oder  $\pi$ . Im Experiment lässt sich dabei interessante Physik beobachten und es treten vielseitige Anwendungsgebiete auf. Beispielsweise können  $\varphi$ -Josephsonkontakte als Phasenbatterien genutzt werden. Wird ein  $\varphi$ -Kontakt in einen Schaltkreis eingesetzt, liefert dieser eine konstante Phase, ähnlich der konstanten Spannung einer herkömmlichen Batterie. Diese Phasenbatterie entlädt sich niemals und ist zudem dissipationslos, was bei einem eventuellen Einsatz in supraleitenden Quantenbits zur Verbesserung der Dekohärenz führen würde. Darüber hinaus ist der Grundzustand eines  $\varphi$ -Kontakts entartet, was zur Anwendung als ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System, welches einfach zu kontrollieren ist, dienen könnte. Für eine lange Zeit waren solche  $\varphi$ -Josephsonkontakte nur ein theoretisches Konstrukt. Erst in den letzten Jahren konnte erstmals ein  $\varphi$ -Kontakt mittels eines geeignet dimensionierten  $0-\pi$  SIFS-Kontaktes (Supraleiter - Isolator - Ferromagnet - Supraleiter) experimentell realisiert werden und die Anwendung als klassische Speicherzelle (Bit), Ratsche sowie das Retrapping der Phase gezeigt werden. Bei dieser Realisierung wird statt der räumlich variierenden, lokalen Josephson-Phasendifferenz dessen Mittelwert  $\Psi$  betrachtet. Wenn die Länge des Kontakts die Josephsoneindringtiefe  $\lambda_J$  nicht wesentlich überschreitet, ist  $\Psi$  eine wohl definierte Größe; die Energie des Kontakts lässt sich als Funktion von  $\Psi$  durch ein effektives Doppelmuldenpotenzial

mit Grundzustandswerten  $\pm\varphi$  beschreiben. Die SIFS-basierten  $\varphi$ -Kontakte waren allerdings aufgrund ihrer sehr geringen Crossover-Temperatur ( $T^* < 30\text{mK}$ ) für die Untersuchung makroskopischer Quantenphänomene ungeeignet [SLW<sup>+</sup>12, GSW<sup>+</sup>13, Sic13]. Deshalb entstand die Idee  $\varphi$ -Josephsonkontakte mittels 0- $\kappa$ -Kontakten, basierend auf Standard Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Technologie, zu realisieren. Diese haben eine deutlich höhere Crossover-Temperatur ( $T^* > 150\text{mK}$ ) und sind deshalb geeignete Kandidaten zur Untersuchung quantenmechanischer Effekte.

In dieser Arbeit wurden Josephsonkontakte mit Injektortechnologie realisiert. Diese Kontakte hatten eine mit  $\lambda_J$  vergleichbare Länge und können mit Bezug auf ihre lokale Phase als 0- $\kappa$ -Kontakte beschrieben werden oder alternativ mit Bezug auf  $\Psi$  als  $\varphi$ -Kontakte. Die Kontakte haben für  $\kappa \approx \pi$  einen entarteten Grundzustand mit den zugehörigen zwei kritischen Strömen  $I_{c\pm}$ , so dass erstmals das makroskopische Quantentunneln untersucht werden konnte. Darüber hinaus wurden Messungen für Injektorströme von  $\kappa = 0$  bis  $2\pi$  gemacht. Diese dienen zum Einen dafür, den interessanten Bereich um  $\kappa = \pi$  für die eben genannten Untersuchungen der  $\varphi$ -Kontakte herauszufinden, zum anderen ist das Verhalten der Kontakte für den gesamten Bereich von  $\kappa = 0$  bis  $2\pi$  sehr interessant. Insbesondere die Spektroskopiemessungen für  $\kappa = 0$  zeigten interessante Strukturen.

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen der Josephsonphysik erläutert und die Analogmodelle des mechanischen Pendels und des Teilchens im Waschbrettspotenzial eingeführt. Außerdem wird das Verhalten des Josephsonkontaktes im Magnetfeld (Kap. 2.1.3), sowie der thermische und quantenmechanische Escape der Josephsonphase (Kap. 2.1.4) erläutert. Anschließend wird das Modell für lange Josephsonkontakte (Kap. 2.2) erweitert.

In Kapitel 3 wird die Dynamik von  $\pi$ -Kontakten (Kap. 3.1) bzw. von 0- $\pi$ -Kontakten (Kap. 3.2), sowie die Dynamik fraktionaler Flusswirbel (Kap. 3.3) bzw.  $\varphi$ -Josephsonkontakten (Kap. 3.4), sowie deren Eigenschaften, wie die Eigenfrequenz (Kap. 3.5) und thermische bzw. resonante Aktivierung (Kap. 3.6 und 3.7) diskutiert.

Das Design der Proben sowie deren Herstellungsprozess wird in Kapitel 4.1 beschrieben. Die verwendeten Messaufbauten zur Charakterisierung bei 4.2 K (Kap. 4.2) und die Escape- bzw. Spektroskopiemessungen im mK-Bereich (Kap. 4.3) werden ebenfalls in Kapitel 4 erläutert.

In Kapitel 5 werden zunächst die Charakterisierungsmessungen (Kap. 5.1) gezeigt. Mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen konnten die Messungen zum makroskopischen Quantentunneln (Kap. 5.2) durchgeführt wer-

den und anschließend mit den theoretischen Vorhersagen verglichen werden.

In Kapitel 6 werden die Spektroskopiemessungen vorgestellt. Zunächst wurden die Eigenfrequenzen experimentell (Kap. 6.1) bestimmt. Anschließend wurden Messungen zur Energielevelspektroskopie (Kap. 6.2) durchgeführt, die mit Simulationen, welche auf klassischen Berechnungen beruhen, verglichen wurden. Anschließend wurden diese Messungen bei angelegtem Injektorstrom wiederholt (Kap. 6.3). Die Ergebnisse der Spektroskopiemessungen werden in Kap. 6.4 diskutiert.

In Kapitel 7 werden die durchgeführten Experimente zusammengefasst und es wird ein kurzer Ausblick auf zukünftige Untersuchungen gegeben.



# Kapitel 2

## Grundlagen

Die Supraleitung wurde 1911 von Heike Kamerlingh Onnes entdeckt. Sie ist ein makroskopisches Quantenphänomen und lässt sich in einer Vielzahl von Materialien beobachten. Weitere wichtige Entdeckungen, wie der Meissner-Effekt, die phänomenologische Theorie von Ginzburg und Landau, sowie die mikroskopische Theorie von Bardeen, Cooper und Schrieffer [BCS57] trugen zu einem besseren Verständnis bei. Bardeen, Cooper und Schrieffer konnten mit ihrer Arbeit zeigen, dass in Supraleitern die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Festkörpergitter, unterhalb einer materialspezifischen Temperatur  $T_c$ , zur Bildung so genannter Cooper-Paare führt. Diese korrelierten Elektronenpaare, die im einfachsten Fall entgegengesetzten Spin und Impuls besitzen, formen einen kollektiven Zustand, der entsprechend den Gesetzen der Quantenmechanik durch eine makroskopische Wellenfunktion

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\varphi} \quad (2.1)$$

beschrieben werden kann. Die Gesamtheit der Cooper-Paare bildet somit eine kohärente Materiewelle, dabei stellt  $\varphi$  die Phase und  $\Psi_0$  die Dichte der supraleitenden Teilchen dar. Es resultieren ein Vielzahl interessanter Phänomene aus der Existenz dieser makroskopischen Wellenfunktion. Der von den Cooper-Paaren getragene Suprastrom erfährt keinen Widerstand, d.h. es erlaubt einen verlustfreien Stromtransport. Außerdem folgt aus der makroskopischen Phasenkohärenz die so genannte Fluxoidquantisierung, d.h. magnetischer Fluss kann nicht beliebig in den Supraleiter eindringen, sondern nur in Form einzelner Flussquanten. Diese tragen jeweils ein magnetisches Flussquant  $\Phi_0 = h/2e \approx 2.07 * 10^{-15} \text{Wb}$ , wobei

$\hbar$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $e$  die Elementarladung bezeichnet. Desweiteren spielt die Phase der makroskopischen Wellenfunktion bei der Betrachtung des Stromflusses zwischen zwei schwach gekoppelten Supraleitern, dem so genannten Josephson-Effekt [Jos62], eine entscheidende Rolle. Grundlegendes kann hierzu in [Lik86, BK04] nachgelesen werden.

## 2.1 Josephson-Tunnelkontakte

Der Josephson-Effekt wurde 1962 von Brian D. Josephson [Jos62] für zwei, durch eine dünne isolierende Schicht getrennte Supraleiter vorhergesagt. Dabei kann ein von den Cooper-Paaren getragener Suprastrom  $I_S$  auch im spannungslosen Zustand ( $V = 0$ ) fließen. Dieser Tunnelstrom hängt vielmehr nur von der eichinvarianten Phasendifferenz

$$\phi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2e}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (2.2)$$

der makroskopischen Wellenfunktion ab, wobei das Vektorpotenzial  $\vec{A}$  entlang eines Weges über die Barriere auszuwerten ist. Der Suprastrom  $I_S$  lässt sich nun mit Hilfe von Gl. (2.2) in seiner einfachsten Form als

$$I_S = I_0 \sin \phi \quad (2.3)$$

beschreiben. Diese Gleichung wird auch als erste Josephson-Gleichung bezeichnet, wobei  $I_0$  den maximal möglichen, oder auch kritischen Strom bezeichnet. Dieser ist von der Geometrie und Struktur der Tunnelbarriere abhängig.

Die Phasendifferenz  $\phi$  steht mit der über den Kontakt angelegten Spannung  $V$  über die zweite Josephson-Gleichung in Beziehung:

$$\dot{\phi} = \frac{2e}{\hbar} V = \frac{2\pi}{\Phi_0} V \quad (2.4)$$

Wird an den Kontakt eine Spannung  $V$  angelegt, führt dies zu einer zeitlichen Änderung der Phasendifferenz  $\phi$ . Diese Beziehung kann auch in umgekehrter Richtung gelesen werden. Eine zeitliche Änderung der Phase führt zu einer Spannungsdifferenz zwischen beiden supraleitenden Elektroden. Aus Gl. (2.4) folgt, dass der Josephsonstrom bei konstanter Spannung mit der Josephsonfrequenz  $f_J = V/\Phi_0 = 483.6 \left[ \frac{\text{MHz}}{\mu\text{V}} \right] V$  oszilliert.

Im spannungsfreien Zustand kann nach Gl. (2.3) ein Suprastrom  $I_S$  über den Kontakt fließen, ohne dass Energie dissipiert wird. Die Arbeit

$$E = \int I_S V dt' = \frac{I_0 \Phi_0}{2\pi} \int_0^\phi \sin \phi' d\phi' = E_J [1 - \cos \phi] \quad (2.5)$$

die zum Aufbau dieses Suprastroms  $I_S$  notwendig ist, wird von einem externen System (z.B. einer Stromquelle) verrichtet und in Form der Josephsonkopplungsenergie  $E_J = I_0 \Phi_0 / 2\pi$  im Kontakt gespeichert.

Das Verhalten des Josephsonkontakts kann dabei mit einer nichtlinearen Induktivität

$$L_J = \frac{L_c}{\cos \phi}, L_c \equiv \frac{\Phi_0}{2\pi I_0} \quad (2.6)$$

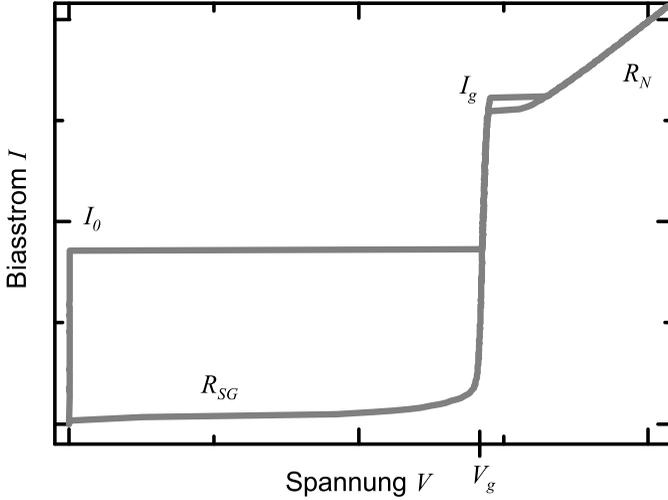
beschrieben werden, die im Gegensatz zu einer klassischen Induktivität auch negative Werte annehmen kann.

### 2.1.1 Punktförmige Josephsonkontakte

Für den spannungslosen Zustand  $V = 0$  des Tunnelkontakts kann der Strom durch den Kontakt hinreichend durch Gl. (2.3) beschrieben werden. Für den allgemeineren Fall  $V \neq 0$  müssen zusätzlich zum Suprastrom  $I_S$  weitere Stromkomponenten berücksichtigt werden.

#### 1. Quasiteilchenstrom $I_N$

Für endliche Temperaturen  $T > 0$  ist die Energie  $k_B T$  der thermischen Fluktuationen ausreichend, um einige Cooper-Paare aufzubrechen,  $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{23} J/K$  ist die Boltzmannkonstante. Aufgrund der Anwesenheit des Kondensats von Cooper-Paaren weisen die so erzeugten Elektronen Unterschiede zu Elektronen im Normalleiterzustand auf und werden deshalb als Quasiteilchen bezeichnet. Fällt eine Spannung über den Josephsonkontakt ab, können neben den Cooper-Paaren auch die Quasiteilchen tunneln. Dieser Quasiteilchenstrom  $I_N$  ist von der angelegten Spannung abhängig und resultiert in einer nichtlinearen Strom-Spannungs-(IV)-Kennlinie (siehe Abb. 2.1). Ist die über den Kontakt abfallende Spannung größer als die so genannte Gap-Spannung  $V_g = 2\Delta/e$ , können Quasiteilchen aus besetzten Zuständen einer Elektrode in freie Zustände der zweiten Elektrode tunneln.  $\Delta$  bezeichnet hierbei die Energielücke des Supraleiters. Dieser Strom dominiert den Spannungsbereich der IV-Kennlinie oberhalb von  $V_g$  und kann näherungsweise durch die ohmsche Beziehung



**Abbildung 2.1:** IV-Kennlinie eines Nb/Al-AIO<sub>x</sub>/Nb-Josephsonkontakts. Die Struktur bei  $I_g$  ist typisch für solche Kontakte und auf das Aluminium zurückzuführen. Diese Struktur taucht auch in späteren Messungen auf, hat jedoch keinerlei Auswirkungen auf die erhaltenen Ergebnisse (nach [Buc10]).

$I_N = \frac{V}{R_N}$  beschrieben werden. Kombiniert man diesen Widerstand mit dem kritischen Strom  $I_0$ , erhält man die charakteristische Spannung [AB63]

$$V_c = I_0 R_N. \quad (2.7)$$

Diese Spannung definiert wiederum die charakteristische Frequenz

$$\omega_c = (2\pi/\Phi_0)V_c. \quad (2.8)$$

Diese kann mit Hilfe von Gl. (2.4) und Gl. (2.6) umgeschrieben werden zu:

$$\omega_c^{-1} = \frac{L_c}{R_N}. \quad (2.9)$$

Die charakteristische Frequenz beschreibt also die inverse Relaxationszeit des normal- und supraleitenden Stroms eines Systems mit der Induktivität  $L_c$ . Sie definiert auch eine obere Frequenz (typischerweise GHz bis THz) für Bauteile in Mikrowellenschaltungen, die auf dem

Josephson-Effekt beruhen.

Für  $V < V_g$  und  $T < T_c$  können nur noch wenige Quasiteilchen tunneln. Der Quasiteilchenstrom ist deshalb exponentiell unterdrückt ( $I_N \propto \exp[-\Delta/k_B T]$ ) und der in diesem Bereich für den Strom angenäherte ohmsche Widerstand  $R_{SG}$  kann den normalleitenden Widerstand  $R_N$  um Größenordnungen überragen.

### 2. Verschiebungsstrom $I_D$

Ändert sich die am Kontakt anliegende Spannung  $V$  mit der Zeit,  $\dot{V} \neq 0$ , so tritt aufgrund der endlichen Kapazität  $C$  der Elektroden ein zusätzlicher Verschiebungsstrom

$$I_D = C\dot{V} \quad (2.10)$$

auf. Die charakteristische Schwingungsfrequenz, oder auch Plasmafrequenz genannt, wird definiert zu

$$\omega_0 = \frac{1}{L_c C} = \sqrt{\frac{2eI_0}{\hbar C}} = \sqrt{\frac{2\pi I_0}{\Phi_0 C}}. \quad (2.11)$$

Sie ist die Resonanzfrequenz des aus der Kapazität und der Induktivität des Josephsonkontakts gebildeten Schwingkreises. Die Dämpfung dieses Systems kann durch den dimensionslosen Stewart-McCumber-Parameter [Ste68, McC68]

$$\beta_C = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = \frac{2\pi}{\Phi_0} I_0 R_N^2 C \quad (2.12)$$

beschrieben werden. Josephsonkontakte mit  $\beta_C \ll 1$  sind überdämpft. Ihre IV-Kennlinie zeigt keine Hysterese. Kontakte mit  $\beta_C \gg 1$  sind unterdämpft. Ihre IV-Kennlinie weist eine Hysterese auf.

### 3. Rauschstrom $I_F$

Der Rauschstrom  $I_F$  ist die dritte zusätzliche Stromkomponente, die berücksichtigt werden muss. Das temperaturabhängige Nyquistrauschen des Widerstandes ist eine Quelle des Rauschstroms  $I_F$ . Es ist frequenzunabhängig und wird allgemein auch als weißes Rauschen bezeichnet. Zusätzlich muss bei niederen Frequenzen ein  $1/f$ -Rauschen berücksichtigt werden, wobei dieses eher durch Fluktuationen der Kontaktparameter, als durch den Rauschstrom beschrieben werden kann [CB04].

Als letztes können noch externe Rauschquellen, wie z.B. elektromagnetische Strahlung (Radio, Mobilfunk) oder elektrische Stromleitungen, zum Rauschstrom beitragen. Diese können jedoch durch einen geeigneten Messaufbau abgeschirmt werden.

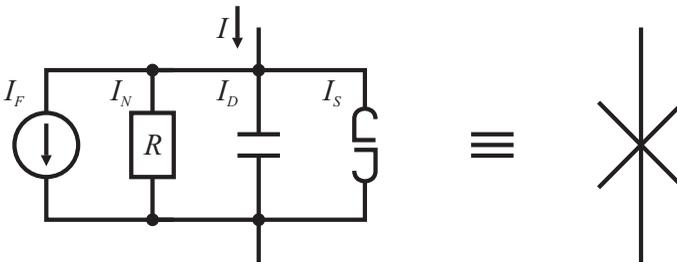
### 2.1.2 Das RCSJ-Modell

Zur Beschreibung punktförmiger Josephsonkontakte kann das RCSJ-Modell (resistively and capacitively shunted junction) verwendet werden. Der Gesamtstrom  $I$  durch den Kontakt setzt sich aus den oben beschriebenen Strömen  $I_S$ ,  $I_N$ ,  $I_D$  und  $I_F$  zusammen (siehe Abb. 2.2). Nach der Kirchhoffschen Knotenregel gilt

$$I - I_F = I_S + I_N + I_D \quad (2.13)$$

$$= I_0 \sin \phi + \frac{V}{R} + C\dot{V}. \quad (2.14)$$

Der Widerstand  $R$  kann, je nach betrachtetem Spannungsbereich, Werte zwischen  $R_{SG}$  und  $R_N$  annehmen, oder durch einen parallel geschalteten Widerstand bestimmt sein. Mit Hilfe von Gl. (2.4) kann die Spannung  $V$  durch  $\dot{\phi}$  ersetzt werden



**Abbildung 2.2:** Ersatzschaltbild [Sco70] eines punktförmigen Josephsonkontakts

$$I - I_F = I_0 \sin \phi + \frac{1}{R} \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\phi} + C \frac{\Phi_0}{2\pi} \ddot{\phi}. \quad (2.15)$$

Durch Normieren des Stroms  $I$  auf den kritischen Strom  $I_0$ , so dass  $\gamma = I/I_0$  und der Zeit auf die inverse Plasmfrequenz  $\tilde{t} = t \cdot \omega_0$ , kann Gl. (2.15) umgeformt werden zu

$$\gamma = \sin \phi + \alpha \dot{\phi} + \ddot{\phi} \quad (2.16)$$

mit dem dimensionslosen Dämpfungskoeffizienten  $\alpha = \omega_0/\omega_c = 1/\sqrt{\beta_C}$ . Es hat sich als hilfreich erwiesen, zwei mechanische Analogmodelle, das Mechanische Pendel und das Teilchen im Waschbrettpotenzial zu betrachten. Die Dynamik dieser Systeme wird durch die gleiche Differenzialgleichung beschrieben (mit passender Substitution der Variablen).

### Mechanisches Pendel

Die Bewegungsgleichung für ein Pendel im konstanten Gravitationsfeld mit Masse  $m$ , Länge  $l$  und Gravitationsbeschleunigung  $g$  ist gegeben durch

$$M = mgl \sin \phi + \Gamma \dot{\phi} + \Theta \ddot{\phi}. \quad (2.17)$$

Dabei ist  $M$  das auf das Pendel wirkende Drehmoment,  $\phi$  der Auslenkwinkel,  $\Gamma$  der Reibungskoeffizient und  $\Theta$  das Trägheitsmoment. Vergleicht man die Bewegungsgleichung des Pendels mit Gl. (2.16), erkennt man das die Phase  $\phi$  dem Auslenkungswinkel des Pendels entspricht, die Kapazität  $C$  ist proportional zum Trägheitsmoment  $\Theta$ , der Biasstrom  $I$  entspricht dem Drehmoment  $M$  und  $\frac{1}{R}$  beschreibt die Reibung  $\Gamma$  des Systems. Bei geringer Reibung führt das Pendel nach kleiner Auslenkung aus der Ruhelage, Oszillationen um seine Ruhelage aus. Beim Josephsonkontakt entsprechen diese Schwingungen der Plasmafrequenz  $\omega_0$ .

### Teilchen im Waschbrettpotenzial

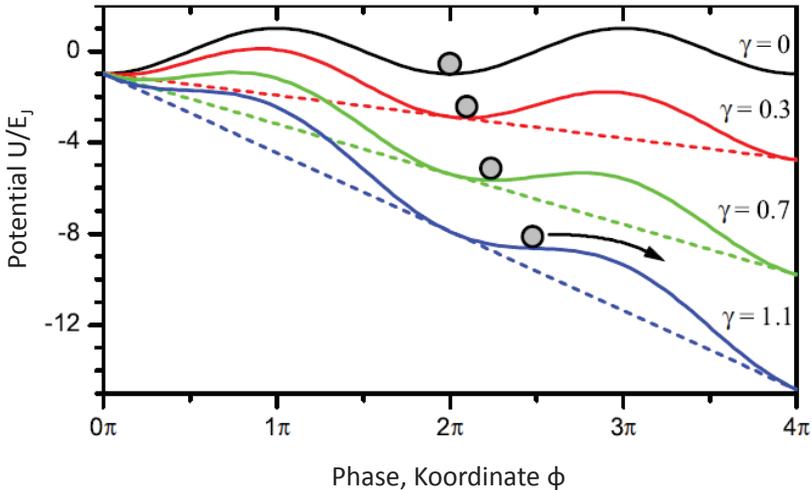
Dieses Modell dient der anschaulichen Beschreibung des hysteretischen Verhaltens des Josephsonkontaktes. Ein Teilchen der Masse  $m = C(\Phi_0/2\pi)^2$  befindet sich im eindimensionalen Potenzial

$$U(\phi) = -E_J(\cos \phi + \gamma \phi), \quad (2.18)$$

auch Waschbrettpotenzial genannt und bewegt sich entlang der generalisierten Koordinate  $\phi$ . Die dazugehörige Bewegungsgleichung ist:

$$m\ddot{\phi} + m\frac{1}{RC}\dot{\phi} + \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (2.19)$$

Ohne Biasstrom  $\gamma = 0$  ist das Teilchen in der Potenzialmulde des kosinusförmigen Potenzials gefangen. Wird nun der Biasstrom erhöht, so verkippt sich das Potenzial und es entsteht eine Serie metastabiler Potenzialmulden, deren Barrierenhöhe  $u_0$  mit steigendem  $\gamma$  immer kleiner



**Abbildung 2.3:** Mechanisches Analogon eines punktförmigen Josephsonkontakts: Teilchen im Waschbrettpotential. In Anlehnung an [Gab07].

wird und bei  $\gamma = 1$  verschwindet, siehe Abb. 2.3. Für  $\gamma > 1$  beginnt das Teilchen das Potenzial hinabzurollen. In diesem Fall ist  $\phi \neq 0$  und eine Spannung fällt über den Kontakt ab. Verringert man den Biasstrom wieder  $\gamma < 1$ , bilden sich erneut die Potenzialmulden.

Bei hoher Dämpfung  $\beta_C \leq 1$  kann das Teilchen die Barriere nicht mehr überwinden und der Josephsonkontakt geht sofort wieder in den spannungsfreien Zustand über. Dieser Fall entspricht einer nicht-hysteretischen IV-Kennlinie.

Bei geringer Dämpfung  $\beta_C > 1$  kann das Teilchen aufgrund der Trägheit die Barrieren weiterhin überwinden und es fällt trotz  $\gamma < 1$  eine Spannung über den Kontakt ab, bis das Teilchen bei sehr kleinem  $\gamma$  irgendwann in einer Potenzialmulde liegen bleibt. Dieser Fall entspricht einer hysteretischen IV-Kennlinie.

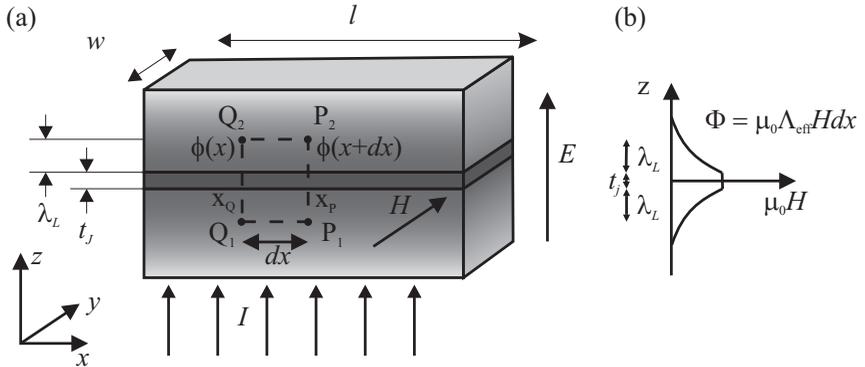
### 2.1.3 Josephsonkontakt im externen Magnetfeld

Wird ein Josephsonkontakt einem äußeren Magnetfeld  $B = \mu_0 H$  (in der Ebene der Barriere) ausgesetzt, muss die Restriktion eines punktförmigen Kontakts gelockert werden und eine Variation der Phase  $\phi(x)$  entlang der  $x$ -Achse (senkrecht zu  $B$ ) zugelassen werden. Die Ausdehnungen des Kontakts  $w$  und  $l$  (siehe Abb. 2.4) sollen dabei aber immer noch deutlich kleiner sein als die Josephsoneindringtiefe  $\lambda_J$ . Das Magnetfeld, welches in  $y$ -Richtung angelegt wird, wirkt sich über das Vektorpotenzial  $\vec{A}$  auf die Phase  $\phi$  aus und für den von den Punkten  $Q_1, Q_2, P_2$  und  $P_1$  umschlossenen magnetischen Fluss gilt:

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{F} = \oint \vec{A} d\vec{s} \quad (2.20)$$

$$= \int_{Q_2}^{Q_1} \vec{A} d\vec{s} + \int_{P_2}^{Q_2} \vec{A} d\vec{s} + \int_{P_1}^{P_2} \vec{A} d\vec{s} + \int_{Q_1}^{P_1} \vec{A} d\vec{s}. \quad (2.21)$$

Wählt man die Integrationspunkte so, dass sie sich weit genug im Innern



**Abbildung 2.4:** (a) Josephsonkontakt mit Integrationspfad im externen Magnetfeld. Das Feld zeigt entlang der  $y$ -Achse. (b) Magnetfeldprofil durch den Kontakt entlang der  $z$ -Achse. Modifiziert nach [BK04].

des Supraleiters befinden, d.h. in diesem Fall tiefer als die Londonsche Eindringtiefe  $\lambda_L$ , verschwinden die Terme 2 und 4 in Gl. (2.21), da die Abschirmströme exponentiell unterdrückt sind. Durch Einsetzen von Gl.

(2.2) in Gl. (2.21) erhält man

$$\frac{2\pi\Phi_k}{\Phi_0} = \phi(x + dx) - \phi(x). \quad (2.22)$$

Da im Innern der Supraleiter  $B$  exponentiell abfällt (vgl. Abb. 2.4), ist der von Punkten  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $P_2$  und  $P_1$  umschlossene Fluss gegeben durch  $\Phi = \mu_0 H \Lambda dx$ , wobei  $\Lambda = 2\lambda_L + t_J$  die effektive magnetische Eindringtiefe ist. Dies gilt streng genommen nur für dicke Elektroden ( $d \gg \lambda_L$ ).  $t_J$  beschreibt hierbei die Dicke der Tunnelbarriere. Allgemein gilt für die magnetische Eindringtiefe [Wei69, Fer65]:

$$\Lambda = t_J + \lambda_{L,1} \tanh\left(\frac{d_1}{2\lambda_{L,1}}\right) + \lambda_{L,2} \tanh\left(\frac{d_2}{2\lambda_{L,2}}\right), \quad (2.23)$$

wobei  $d_{1,2}$  die jeweiligen Dicken und  $\lambda_{1,2}$  die jeweiligen Londonschen Eindringtiefen der supraleitenden Elektroden bezeichnet.

Setzt man die Ausdrücke für  $\Phi$  und  $\Lambda$  in Gl. (2.22) ein, folgt für den magnetischen Fluss

$$\frac{\phi(x + dx) - \phi(x)}{dx} = \frac{d\phi}{dx} = \frac{2\pi\mu_0\Lambda}{\Phi_0} H. \quad (2.24)$$

Für die Phasendifferenz  $\phi$  folgt damit, dass ein homogenes Magnetfeld  $H$  einen Phasengradienten hervorruft, was nach Gl. (2.3) eine Oszillation des Suprastroms entlang der x-Achse zur Folge hat und somit zu einer Modulation des maximalen Suprastroms [BK04]

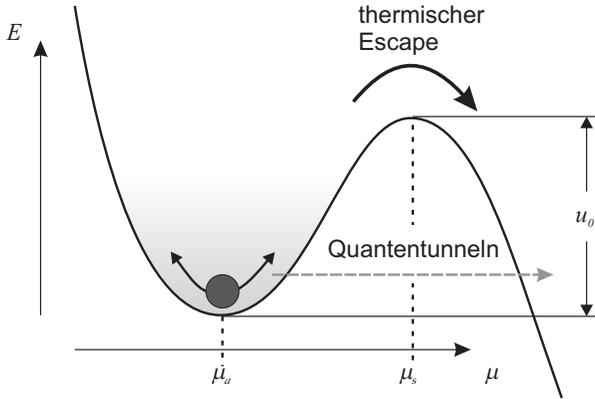
$$I_c(\Phi) = I_0 \left| \frac{\sin \pi\Phi/\Phi_0}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|, \text{ mit } \Phi = \Lambda L \mu_0 H \quad (2.25)$$

führt. Gleichung (2.25) beschreibt die Magnetfeldabhängigkeit des maximalen Suprastroms mit dem aus der Optik bekannten Fraunhofermuster, analog der optischen Beugung von Licht an einem Spalt.

### 2.1.4 Thermischer Escape und Makroskopisches Quantentunneln

Wie bereits in Abschnitt 2.1.2 erwähnt, kann zur Beschreibung eines Josephsonkontakts das Analogmodell des Teilchens im Waschbrettspotenzial

$U(\phi) = -E_J(\cos \phi + \gamma \phi)$  herangezogen werden. Das Anlegen eines Biasstroms  $\gamma$  führt dabei zur Verkipfung des Potentials und für  $\gamma = 1$  verschwinden die Potenzialbarriere der Höhe  $u_0$  und das Teilchen beginnt das Potenzial herunter zu rollen. Aufgrund thermischer [Kra40, FD74, BHL83, SLG88, SPC<sup>+</sup>88, TEU<sup>+</sup>89, HTB90, CLT<sup>+</sup>96] oder quantenmechanischer [CL81, ESA84, DMC85, EDM86, MDC87, CMC88, WLC<sup>+</sup>03] Fluktuationen ist es möglich, dass das Teilchen bereits für Biasströme  $\gamma < 1$  aus der Potenzialmulde entkommt (siehe Abb. 2.5). Die Dynamik eines Teil-



**Abbildung 2.5:** Schematische Darstellung der Escapeprozesse eines Teilchens in einer Potenzialmulde.

chens der Masse  $M = C(\Phi_0/2\pi)^2$  im Potenzial  $U(\phi)$  lässt sich, unter Vernachlässigung der Dämpfung, durch die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(\phi, \dot{\phi}) &= \frac{1}{2}C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\phi}^2 - U(\phi) \\ &= \frac{1}{2}C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\phi}^2 + E_J \cos \phi + \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \gamma \phi \end{aligned} \quad (2.26)$$

beschreiben. Mit dem Impuls

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\phi} \quad (2.27)$$

folgt somit für den Hamilton-Operator

$$\begin{aligned}
 H(\phi, \dot{\phi}) &= C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\phi})^2 \\
 &\quad - E_J \cos \phi - \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \gamma \phi \\
 &= \frac{1}{2} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\phi})^2 - E_J \cos \phi - \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \gamma \phi. \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Somit erhält man für die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\phi, t) &= H(\phi, \dot{\phi}) \Psi(\phi, t) \\
 &= \frac{1}{2} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi(\phi, t)}{\partial \phi^2} \\
 &\quad - E_J \cos \phi \Psi(\phi, t) - \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \gamma \phi \Psi(\phi, t). \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Auf die Schrödinger-Gleichung kann nun die WKB-Näherung (benannt nach Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers und Léon Brillouin) angewendet werden. Auf eine genauere Betrachtung wird an dieser Stelle verzichtet und auf die dazugehörige Literatur verwiesen [CL81, ESA84].

Je nach Temperaturbereich gibt es verschiedene Modelle die Escaperate anzugeben [Wei93]. Für hohe Temperaturen kann die klassische Transition-State-Theorie (TST) zur Beschreibung herangezogen werden. Dieser Theorie liegen die folgenden drei Annahmen zu Grunde. Erstens, das Teilchen befindet sich in einem schwachen, metastabilen Zustand, d.h.  $\hbar\omega_{pl}(\gamma) \ll k_B T \ll u_0$ , wobei

$$\omega_{pl} = \omega_0(1 - \gamma^2)^{1/4} \quad (2.30)$$

die Plasmafrequenz und

$$u_0 = 2E_J[\sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma \arccos \gamma], \gamma < 1, \quad (2.31)$$

$$\approx \frac{4\sqrt{2}E_J}{3}(1 - \gamma)^{3/2}, 1 - \gamma \ll 1 \quad (2.32)$$

die Barrierenhöhe (siehe Abb. 2.5) ist. Zweitens, das Teilchen kann, wenn es die Barriere einmal überwunden hat, nicht mehr zurück und drittens,

das Teilchen befindet sich immer im thermodynamischen Gleichgewicht. Somit folgt für die Escaperate

$$\Gamma^{TST} = \frac{\omega_{pl}}{2\pi} \exp\left(-\frac{u_0}{k_B T}\right). \quad (2.33)$$

Es stellt sich jedoch heraus, dass die TST-Escaperate eine obere Grenze darstellt. Unter Berücksichtigung der Dämpfung des Systems, gilt

$$\Gamma = a\Gamma^{TST}. \quad (2.34)$$

Der Vorfaktor  $a$  ist je nach Dämpfungsregime unterschiedlich und wurde in vielen theoretischen Arbeiten bereits ausführlich untersucht, im Allgemeinen ist aber  $a < 1$ .

Im Regime schwacher Dämpfung (LD) ist die Escaperate im Vergleich zur TST-Escaperate reduziert. Der Vorfaktor ist hierbei von der Temperatur und der Barrierenhöhe abhängig. Für die Näherung eines quadratischen plus eines kubisches Potentials ergibt sich

$$a_{LD} = \frac{\xi}{k_b T} \frac{36u_0}{5\omega_{pl}}, \quad (2.35)$$

wobei  $\xi = 1/R$  die Dämpfung des Systems wiedergibt. Diese Gleichung ist nur für  $a_{LD} < 1$  gültig und sollte für praktische Betrachtungen sogar nur für  $a \ll 1$  verwendet werden.

Für das so genannte Übergangsregime (ID), d.h. für einen Dämpfungsparameter  $\xi/\omega_b \lesssim 0.2$ , wobei  $\omega_b$  die Oszillationsfrequenz für kleine Amplituden im Minimum des umgedrehten Potentials  $-U$  beschreibt, kann nach [Wei93] ein präziserer Vorfaktor gefunden werden

$$a_{ID} = \frac{4}{\left(\sqrt{1 + Qk_B T/1.8u_0} + 1\right)^2}, \quad (2.36)$$

mit dem Gütefaktor  $Q = \omega_b/\xi$ .

Bei sehr tiefen Temperaturen  $T \rightarrow 0$ , genauer gesagt unterhalb der so genannten crossover-Temperatur  $T^* = \hbar\omega_0/2\pi k_B \ll 4.2K$  gewinnt das Quantentunneln gegenüber der thermischen Aktivierung immer mehr an Bedeutung. Die quantenmechanische Escaperate wird, wie oben erwähnt, mit der WKB-Näherung berechnet zu

$$\Gamma^{qm} = A \exp(-B), \quad (2.37)$$

mit

$$A = \sqrt{60}\omega_{pl} \left( \frac{B}{2\pi} \right)^{1/2} [1 + O(a)], \quad (2.38)$$

$$B = \frac{36u_0}{5\hbar\omega_{pl}} [1 + 1.74a + O(a^2)]. \quad (2.39)$$

Hierbei ist der Dämpfungskoeffizient  $a = 1/(2RC\omega_{pl}) = 1/(2Q)$  und der Gütefaktor  $Q = \omega_{pl}RC$ .

Für tiefe Temperaturen und geringe Dämpfung ist die Energie der Oszillationsfrequenz für kleine Amplituden der Phase am Boden der Potenzialmulde quantisiert. Durch das Einstrahlen einer externen Mikrowelle können Übergänge zwischen diesen Energieniveaus angeregt werden. Dies kann zur Energielevelspektroskopie genutzt werden [WDLU03].

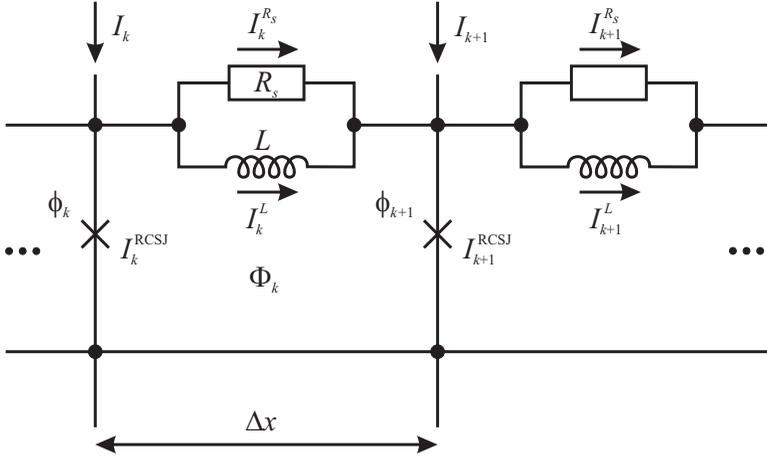
## 2.2 Lange Josephsonkontakte und das Sinus-Gordon-Modell

Mit zunehmender Länge  $l$  des Josephsonkontaktes gewinnen die Eigenfelder der parallel zur Barriere fließenden Supraströme immer mehr an Bedeutung. Ist die Länge  $l$  des Kontaktes sehr viel größer als die Josephsoneindringtiefe  $\lambda_J$  können die Eigenfelder schließlich nicht mehr vernachlässigt werden. Ist die Breite  $w$  des Josephsonkontakts immer noch viel kleiner als  $\lambda_J$ , aber  $l \gg \lambda_J$ , so spricht man im Folgenden von einem langen Josephsonkontakt. In Abb. 2.6 ist das Ersatzschaltbild eines langen Josephsonkontakts mit homogener Stromeinspeisung dargestellt. Hierbei sind einzelne punktförmige Josephsonkontakte über einen Oberflächenwiderstand  $R_S$  und eine Induktivität  $L$  parallel geschaltet. Ausgehend von der Flussquantisierung in den einzelnen Schleifen folgt

$$\phi_{k+1} - \phi_k = \Phi_k = \frac{2\pi}{\Phi_0} (\Phi_{ext} - LI_k^L), \quad (2.40)$$

mit dem externen magnetischen Fluss durch die  $k$ -te Schleife  $\Phi_{ext} = \mu_0 H \Lambda \Delta x$  und der effektiven magnetischen Eindringtiefe (siehe Gl. (2.23)). Nach der Kirchhoffschen Maschenregel folgt für den Strom am  $(k+1)$ -ten Knoten

$$I_k^{RS} + I_k^L + I_{k+1} = I_{k+1}^L + I_{k+1}^{RS} + I_{k+1}^{RCSJ}. \quad (2.41)$$



**Abbildung 2.6:** Ersatzschaltbild eines langen Josephsonkontakts mit homogenem Biasstrom, nach [Buc10].

Durch Umschreiben der Gleichungen (2.40) und (2.41) und dem Übergang zum differentiellen Limes folgt

$$\frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta x} \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{=} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\Phi_0} (\mu_0 \Lambda H - L^* I^L) \quad (2.42)$$

und

$$\frac{\partial I^L}{\partial x} = j - j^{RCSJ} - \frac{\partial I^{R_s}}{\partial x}. \quad (2.43)$$

Hierbei ist  $L^* = L/\Delta x$  die spezifische Induktivität,  $j = I/\Delta x$  die Biasstromdichte und  $j^{RCSJ} = I^{RCSJ}/\Delta x$  die lokale RCSJ-Stromdichte. Erneutes Ableiten von Gl. (2.42) nach  $x$  liefert

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left( \mu_0 \Lambda \frac{\partial H}{\partial x} - L^* \frac{\partial I^L}{\partial x} \right). \quad (2.44)$$

Setzt man nun  $I^{R_s} = -1/\rho_s \cdot (\partial V/\partial x)$  [Sco70], die RCSJ-Stromdichte in Gl. (2.44) ein und nimmt vereinfachend ein homogenes externes Magnetfeld ( $\partial H/\partial x = 0$ ) an, erhält man

$$\frac{\Phi_0}{2\pi L^*} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -j + j_0 \sin \phi + \frac{V}{\rho} + C^* \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (2.45)$$

Es ist  $C^* = C/\Delta x$  die spezifische Kapazität,  $\rho = R\Delta x$  der spezifische Widerstand und  $\rho_s = R_S\Delta x$  der Oberflächenwiderstand der supraleitenden Elektrode pro Längeneinheit. Ersetzt man noch die Spannung  $V$  durch  $\dot{\phi}$  entsprechend Gl. (2.4) erhält man eine eindimensionale, nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung für die Phase  $\phi$ , die so genannte gestörte Sinus-Gordon-Gleichung (gSGG)

$$\frac{\Phi_0}{2\pi L^*} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\Phi_0 C^*}{2\pi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - j_0 \sin \phi = -j + \frac{\Phi_0}{2\pi \rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\Phi_0}{2\pi \rho_s} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t}, \quad (2.46)$$

mit der kritischen Stromdichte  $j_0$ , der Biasstromdichte  $j$  und dem Quasiteilchenstrom pro Längeneinheit  $\rho$ .

Unter Verwendung der Plasmafrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi j_0}{\Phi_0 C^*}}, \quad \text{mit } C^* = \frac{\epsilon_0 \epsilon_j}{t_j}, \quad (2.47)$$

wobei  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante und  $\epsilon_j$  die relative dielektrische Konstante der Barriere beschreibt und mit Hilfe der Josephsoneindringtiefe

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi L^* j_0}}, \quad \text{mit } L^* = \mu_0 \Lambda_{eff}, \quad (2.48)$$

wobei  $\Lambda_{eff}$  nach [Wei69, Fer65] gegeben ist durch

$$\Lambda_{eff} = t_j + \lambda_{L,1} \coth\left(\frac{d_1}{2\lambda_{L,1}}\right) + \lambda_{L,2} \coth\left(\frac{d_2}{2\lambda_{L,2}}\right), \quad (2.49)$$

erhält man aus Gl. (2.46)

$$\lambda_J^2 \phi_{xx} - \frac{1}{\omega_0^2} \phi_{tt} - \sin \phi = -\frac{j}{j_0} + \frac{1}{\omega_0^2 C^* \rho} \phi_t - \frac{\lambda_J^2 L^*}{\rho_s} \phi_{xxt}. \quad (2.50)$$

Hierbei wurde die Kurznotation  $\phi_i$  für die partielle Ableitung  $\partial\phi/\partial i$  eingeführt. Durch Normieren der Zeit auf die inverse Plasmafrequenz  $\omega_0^{-1}$  und der Ortskoordinate auf die Josephsoneindringtiefe  $\lambda_J$  erhält man die dimensionslose Sinus-Gordon-Gleichung

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \sin \phi = -\gamma + \alpha \phi_t - \beta \phi_{xxt}. \quad (2.51)$$

Dabei sind  $\alpha = 1/\sqrt{\beta_c}$ , mit dem Stewart-McCumber-Parameter  $\beta_c = \omega_0^2 \rho^2 C'^2 = \frac{2\pi j_c \rho^2 C'}{\Phi_0}$  und  $\beta \ll \alpha$  dimensionslose Dämpfungsparameter und

$\gamma = j/j_c$  der normierte Biasstrom. An dieser Stelle sei angemerkt, dass nach [Sco64]  $\beta$  im Allgemeinen vernachlässigt werden kann.

Die für den punktförmigen Kontakt im Rahmen des RCSJ-Modells bereits diskutierten mechanischen Analogmodelle lassen sich für die Physik des langen Josephsonkontaktes geeignet erweitern.

Dabei wird das mechanische Pendel zu einer Pendelkette, wobei jedes einzelne Pendel für einen punktförmigen Kontakt im Ersatzschaltbild steht. Die einzelnen Pendel sind über Torsionsfedern miteinander gekoppelt. Diese Federn repräsentieren die Induktivität  $L$ . Die restlichen Größen können analog zum punktförmigen Kontakt verglichen werden, einzig die Phase  $\phi$  ist jetzt von der Ortskoordinate  $x$  abhängig.

Auch das Modell des Teilchens im Waschbrettspotenzial lässt sich für den langen Josephsonkontakt erweitern. Das Potenzial muss hierfür in die zweite Dimension erweitert werden, so dass man eine Potenziallandschaft erhält. Das Teilchen wird analog dem Pendel zu einer Kette aus Teilchen bzw. einem Gummiband.

### 2.2.1 Plasmaoszillationen

Lange Josephsonkontakte besitzen aufgrund des zusätzlichen Freiheitsgrades, der örtlichen Variation der Phase, ein weitaus größeres Anregungsspektrum als punktförmige Kontakte. Im Folgenden sollen die wichtigsten Anregungen beschrieben werden.

Für wellenförmige Anregungen der SGG von der Form

$$\phi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + \phi_0, \quad (2.52)$$

wobei  $\phi_0 = \arcsin \gamma$  ist, erhält man für kleine Amplituden ( $A \ll 1$ ) und vernachlässigbare Dämpfung durch Linearisieren von Gl. (2.50) die Dispersionsrelation

$$\omega^2(k) = \omega_0^2 \sqrt{1 - \gamma^2} + c_{sw}^2 k^2 \quad (2.53)$$

mit der Swihart-Geschwindigkeit [Swi61]

$$c_{sw} = \omega_0 \lambda_J = c \sqrt{\frac{t_j}{\epsilon_j \Lambda_{eff}}}. \quad (2.54)$$

Diese liegt typischer Weise bei einigen Prozent der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$ . Aus der Dispersionsrelation folgt, dass für den Fall  $\gamma = 0$  nur elektromagnetische Wellen, deren Frequenz größer als die Plasmafrequenz

$\omega_0$  ist, entlang des Josephsonkontakts propagieren können. Wellen, deren Frequenz innerhalb der so genannten Plasmabandlücke  $\omega < \omega_0$  liegen, werden dagegen exponentiell gedämpft.

Für lineare Kontakte normierter Länge  $l = L/\lambda_J$  ergibt sich durch die Randbedingung  $\phi_x(0) = \phi_x(l) = h$  eine Diskretisierung der  $k$ -Werte,  $k_n = \frac{\pi}{L}n$ , mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  und damit auch eine Diskretisierung des Spektrums.

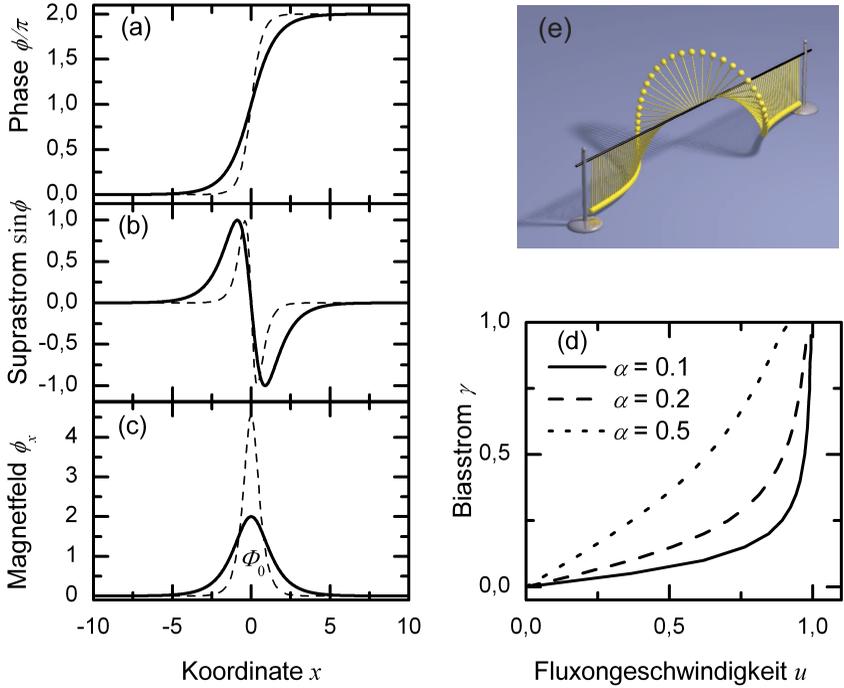
## 2.2.2 Fluxonen

Für die ungestörte ( $\gamma = 0$ ) Sinus-Gordon-Gleichung sind schon seit den 1930er Jahren [Ste36] solitonische Lösungen der Form

$$\phi_f(x, t) = 4 \arctan \left[ \exp \left( \pm \frac{x - (u/c_{sw})t - x_0}{\sqrt{1 - (u/c_{sw})^2}} \right) \right]. \quad (2.55)$$

bekannt. Gl. (2.55) beschreibt einen zirkulierenden Strom mit Zentrum  $x_0$ . Dieser Suprastromvortex bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $u/c_{sw}$  entlang des Kontakts, trägt genau ein magnetisches Flussquant  $\Phi_0$  und wird je nach Vorzeichen als Fluxon oder Antifluxon bezeichnet. In Gegenwart eines Solitons ändert sich die Phase von  $\phi(x \rightarrow -\infty)$  nach  $\phi(x \rightarrow \infty)$  um  $\Delta\phi = \pm 2\pi$ . Der größte Teil des Wirbels ist dabei auf einen Bereich  $\approx 2\lambda_J$  um  $x_0$  begrenzt. In Abb. 2.7 (a) - (c) sind Phase, Suprastrom und Magnetfeld eines Fluxons in Ruhe (durchgezogene Linie) und mit 90% der Swihart-Geschwindigkeit (gestrichelte Linie) dargestellt. Im Bild der Pendelkette lässt sich ein Fluxon als  $2\pi$  Überschlag darstellen (siehe Abb. 2.7 (e)). Fluxonen besitzen aufgrund ihres solitonischen Charakters viele teilchenartige Eigenschaften, wie z.B. Masse und Impuls. Durch Anlegen eines Biasstroms wird das Fluxon durch die auftretende Lorentzkraft beschleunigt. Hierbei stellt sich ein Gleichgewicht aus Beschleunigung durch die Lorentzkraft und der Dämpfung  $\alpha$  ein, d.h. das Fluxon kann nicht beliebig schnell werden. Für diese Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $u$  kann folgender Wert gefunden werden [MS78]

$$u = \left[ 1 + \left( \frac{4\alpha}{\pi\gamma} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.56)$$



**Abbildung 2.7:** (a) Phase (b) Suprastrom (c) Magnetfeld eines Fluxons in Ruhe (durchgezogene Linie) und mit 90 % der Swihart-Geschwindigkeit (gestrichelte Linie). (d) Geschwindigkeit eines Fluxons in Einheiten der Swihart-Geschwindigkeit für verschiedene Biasströme. (e) Fluxon im Bild der Pendelkette (aus [Buc10]).

Betrachtet man ein einzelnes Fluxon, der Geschwindigkeit  $u$ , in einem annularen Kontakt der Länge  $L$ , fällt im zeitlichen Mittel die Spannung

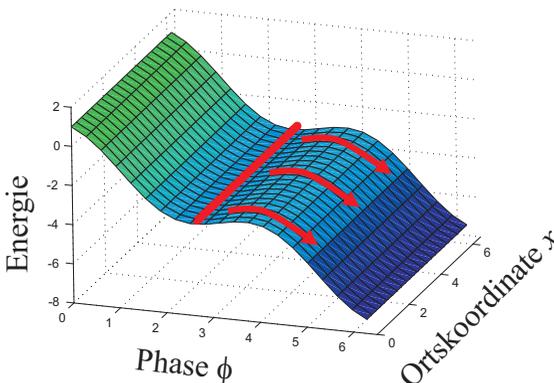
$$\langle V \rangle = \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\phi} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{2\pi u c_{sw}}{L} = \frac{u c_{sw} \Phi_0}{L} \quad (2.57)$$

ab. Diese Spannung nähert sich für  $u \rightarrow 1$  asymptotisch  $V_{ZFS} = c_{sw} \Phi_0 / L$  an. In der IV-Kennlinie eines Josephsonkontaktes manifestiert sich diese Fluxonbewegung als Stufe konstanter Spannung [FD73], der sogenannten Nullfeldstufe (engl. zero field step). Bei  $n$  Fluxonen beobachtet man die  $n$ te Nullfeldstufe bei der Spannung  $nV_{ZFS}$ .

In linearen Kontakten kann es auch zur Ausbildung dieser Nullfeldstufen kommen. Die Fluxonen können den linearen Kontakt an dessen Enden verlassen, trifft allerdings ein Fluxon mit genügend hoher Geschwindigkeit auf ein Kontaktende, kann es als Antifluxon reflektiert werden und umgekehrt. Der Vortex pendelt dann im Kontakt hin und her. Eine ausführliche Diskussion findet sich in [BL79, BL81, BHL83, HMS88, Büt89, BC95, CB98].

### 2.2.3 Thermische Aktivierung und Makroskopisches Quantentunneln in langen Kontakten

Wie in Abschnitt 2.2 bereits beschrieben, kann das mechanische Analogon des Teilchens im Waschbrettpotenzial für einen langen Josephsonkontakt erweitert werden. Berücksichtigt man nun die räumliche Variation der Phase, wird aus dem Teilchen eine Teilchenkette bzw. ein Gummiband. Ebenfalls muss das Waschbrettpotenzial um die dritte Dimension erweitert werden. In Abb. 2.8 ist die Situation für den langen Josephsonkontakt dargestellt. Mit zunehmender Länge  $L$  des Kontakts steigt die Aktivierungsenergie, die benötigt wird, um die Teilchenkette als Ganzes über die Potenzialbarriere zu heben. Um diesen Escapeprozess zu beschreiben, kann das Potenzial auf ein eindimensionales effektives Potenzial projiziert werden. Die Höhe der effektiven Potenzialbarriere ist dabei direkt proportional zur Josephsonkopplungsenergie  $E_J \propto I_0 \propto L$ . Aufgrund der elasti-



**Abbildung 2.8:** Schematische Darstellung des Escapeprozesses der Teilchenkette in einer Potenziellandschaft (aus [Buc10]).

schen Kopplung der Teilchen in der Kette kann es ab einer Kontaktlänge  $L \gtrsim \lambda_J$  zu einem alternativen Escapemechanismus kommen. Dabei wird die Teilchenkette erst lokal über die Barriere gehoben und anschließend wird der Rest mitgezogen. Dieser Prozess entspricht der Bildung eines Fluxon-Antifluxon-Paares [CTC<sup>+</sup>96, Kat00, Kat01, GK06].

Die für diesen Prozess nötige Energie ist konstant, so dass für Kontaktlängen  $L \gg \lambda_J$  dieser Escapeprozess dominiert und die Aktivierungsenergie unabhängig von der Länge wird.

Für  $T \rightarrow 0$  dominiert der quantenmechanische Escapeprozess wieder und das makroskopische Quantentunneln überwiegt den thermischen Escapeprozess. Aufgrund der vielen inneren Freiheitsgrade der Teilchenkette ist die Berechnung der Escaperate nicht trivial. Unter der Vereinfachung der Teilchenkette als starre Stange bzw. als ein String und unter Annahme weiterer Randbedingungen kann das System jedoch auf die Dynamik eines punktförmigen Kontakts abgebildet werden, so dass die Ausdehnung des Kontakts nur eine periphere Rolle spielt und man den bereits bekannten Ausdruck für die Escaperate erhält:

$$\Gamma^{qm} = A \exp(-B), \quad (2.58)$$

mit

$$A = \sqrt{60\omega_{pl}} \left( \frac{B}{2\pi} \right)^{1/2} [1 + O(a)], \quad (2.59)$$

$$B = \frac{36u_0}{5\hbar\omega_{pl}} [1 + 1.74a + O(a^2)]. \quad (2.60)$$

An dieser Stelle wird auf eine detaillierte Betrachtung verzichtet und auf die Literatur verwiesen [vdWtHW<sup>+</sup>00, Wal01, MSS01, WLL<sup>+</sup>03, WKU04].

### Bestimmung der Escaperate

Zur Bestimmung der Escaperate wird das von Fulton und Dunkelberger [FD74] vorgestellte Verfahren verwendet. Der kritische Strom des Josephsonkontakts wird dabei mittels einer Stromrampe bestimmt. Der Biasstrom  $I$  wird, beginnend von Null, mit einer konstanten Rate  $\dot{I}$  erhöht, bis eine Spannung über den Kontakt abfällt. Durch vielfaches Wiederholen dieser Messung erhält man eine Verteilung des kritischen Stroms  $I_c$ , wobei

die Schaltwahrscheinlichkeitsverteilung  $P(I)$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} P(I) &= \left(\frac{dI}{dt}\right)^{-1} \Gamma(I) \exp \left[ - \int_0^I P(I') dI' \right] \\ &= \left(\frac{dI}{dt}\right)^{-1} \Gamma(I) \exp \left[ - \int_0^I \left(\frac{dI}{dT}\right)^{-1} \Gamma(I') dI' \right], \quad (2.61) \end{aligned}$$

die mit der Fluchrate  $\Gamma(I)$  nach Gl. (2.34) verknüpft ist. Durch Umformung lässt sich somit die gesuchte Escaperate berechnen und mittels einer einfachen Strommessung bestimmen.

# Kapitel 3

## Theorie fraktionaler Flusswirbel

### 3.1 $\pi$ -Josephsonkontakte

In den bisherigen Betrachtungen wurden nur gewöhnliche oder 0-Josephsonkontakte beschrieben, doch bereits 1977 sagten Bulaevskii *et al.* [BKS77] vorher, dass in Josephsonkontakten, deren Tunnelbarriere magnetische Verunreinigungen aufweisen, einen negativen kritischen Strom bzw. eine negative Josephsonkopplungsenergie haben können. Die Phasendifferenz im Grundzustand für solche Kontakte ist  $\phi = \pi$  [BKS77, BKS78, GKI04, Hil08]. Für die Strom-Phasen-Beziehung der sogenannten  $\pi$ -Josephsonkontakte folgt

$$j_s = -j_0 \sin \phi = j_0 \sin(\phi + \pi). \quad (3.1)$$

Solche  $\pi$ -Kontakte sind mittlerweile in zahlreichen unterschiedlichen Systemen realisiert worden und bieten in Kombination mit 0-Kontakten einige interessante Anwendungsmöglichkeiten, z.B. als Phasenbatterie [UK03]. Wählt man beispielsweise als Material für die Tunnelbarriere einen Ferromagneten, kommt es aufgrund des magnetischen Austauschfeldes zur Oszillation des supraleitenden Ordnungsparameters innerhalb der Barriere. Bei geeigneter Wahl der Dicke der ferromagnetischen Schicht kann so ein  $\pi$ -Kontakt realisiert werden [BBP82, ROR<sup>+</sup>01]. Eine weitere Realisierungsmöglichkeit bildet die Verwendung von  $d$ - und  $s$ -Wellensupraleitern als Elektroden [WHL<sup>+</sup>93, GS09]. Am Übergang des  $d$ - zum  $s$ -Wellen-

supraleiter kann sich ebenfalls ein  $\pi$ -Kontakt ausbilden.

### 3.2 0- $\pi$ -Josephsonkontakte

Betrachtet man einen Josephsonkontakt dessen eine Hälfte ein 0-Kontakt und die andere Hälfte ein  $\pi$ -Kontakt ist, ein so genannter 0- $\pi$ -Kontakt, beobachtet man ein interessantes Phänomen. Zur Kompensierung des Phasensprungs  $\Delta\phi = \pi$  am Übergang von der 0- zur  $\pi$ -Facette, der so genannten Diskontinuität, bildet sich spontan ein Kreisstrom. Dieser Kreisstrom hat eine Magnetisierung [BKS78, XMT95] von genau der Hälfte eines magnetischen Flussquants  $\Phi_0$  zur Folge und der so entstehende Flusswirbel wird deshalb auch Semifluxon genannt [GKK02]. Diese Semifluxonen sind mittlerweile in den verschiedensten Systemen nachgewiesen worden [TKC<sup>+</sup>94, KTR<sup>+</sup>96, TK00, SYI02, HAS<sup>+</sup>03]. Im Gegensatz zu den in Abschnitt 2.2.2 erwähnten Fluxonen, sind Semifluxonen an ihren Entstehungsort gebunden und können sich nicht entlang des Josephsonkontaktes bewegen. Sie ähneln in ihrer Art eher Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen [ZG04]. Semifluxonen besitzen zwei entartete Zustände entgegengesetzter Polarität  $\pm\frac{1}{2}\Phi_0$  und bilden deshalb den zweifach entarteten Grundzustand des Systems. Zur Beschreibung der Dynamik eines 0- $\pi$ -Kontaktes wird auf die gestörte Sinus-Gordon-Gleichung (gSGG) aus Abschnitt 2.2 zurückgegriffen. Dabei wird ein zusätzlicher additiver Term zur Beschreibung des 0- $\pi$ -Übergangs bei  $x = 0$  in Form einer Stufenfunktion

$$\theta(x) = \pi H(x) \quad (3.2)$$

eingeführt, mit der Heaviside-Funktion  $H(x)$ . Diese muss in der gSGG in Form der zweiten Ableitung berücksichtigt werden und man erhält

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \sin \phi = -\gamma + \alpha\phi_t + \theta_{tt}(x). \quad (3.3)$$

Durch nähere Betrachtung von Gl. (3.3) zeigt sich, dass  $\phi(x)$  an den selben Orten wie  $\theta(x)$  diskontinuierlich sein muss, also am 0- $\pi$ -Übergang. Deshalb wird der Übergang auch Phasendiskontinuität genannt. Es ist nun vorteilhaft die magnetische Phase  $\mu(x)$  einzuführen. Sie stellt eine kontinuierliche Variation entlang des Kontakts dar und ist mit  $\phi$  über

$$\phi(x, t) = \mu(x, t) + \theta(x) \quad (3.4)$$

verknüpft [GKK02]. Durch Einsetzen in Gl. (3.3) folgt

$$\mu_{xx} - \mu_{tt} - \sin(\mu) \cos(\theta) = \alpha\mu_t - \gamma(x), \quad (3.5)$$

eine, besonders für Simulationen sehr praktische Version der gSGG. Für weitere Betrachtungen wird im Folgenden ein unendlich langer Kontakt angenommen und wir gehen von einer statischen Version von Gl. (3.5) aus

$$\mu_{xx}^{\mp} = \pm \sin \mu. \quad (3.6)$$

Dabei beschreibt  $\mu^{-}(x)$  die linke Hälfte des Josephsonkontakts ( $x < 0$ ),  $\mu^{+}(x)$  die rechte Seite des Josephsonkontakts ( $x > 0$ ) und der 0- $\pi$ -Übergang soll sich an der Stelle  $x = 0$  befinden. Für den unendlich langen Kontakt im Grundzustand sind folgende Randbedingungen gegeben:

$$\mu(-\infty) = 0, \quad \mu(+\infty) = \pi \quad (3.7)$$

$$\mu_x(\pm\infty) = 0. \quad (3.8)$$

Für die Lösungen von Gl. (3.6) erhält man:

$$\mu^{-}(x) = 4 \arctan(\mathcal{G}e^x), \quad (3.9)$$

$$\mu^{+}(x) = 4 \arctan \frac{1 - \mathcal{G}e^{-x}}{1 + \mathcal{G}e^{-x}}, \quad (3.10)$$

$$= \pi - 4 \arctan(\mathcal{G}e^{-x}), \quad (3.11)$$

dabei bezeichnet  $\mathcal{G} = \tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$  eine Integrationskonstante [GKK02]. Für die Phase  $\phi$  ergibt sich

$$\phi(x) = -4 \operatorname{sgn}(x) \arctan(\mathcal{G}e^{-|x|}). \quad (3.12)$$

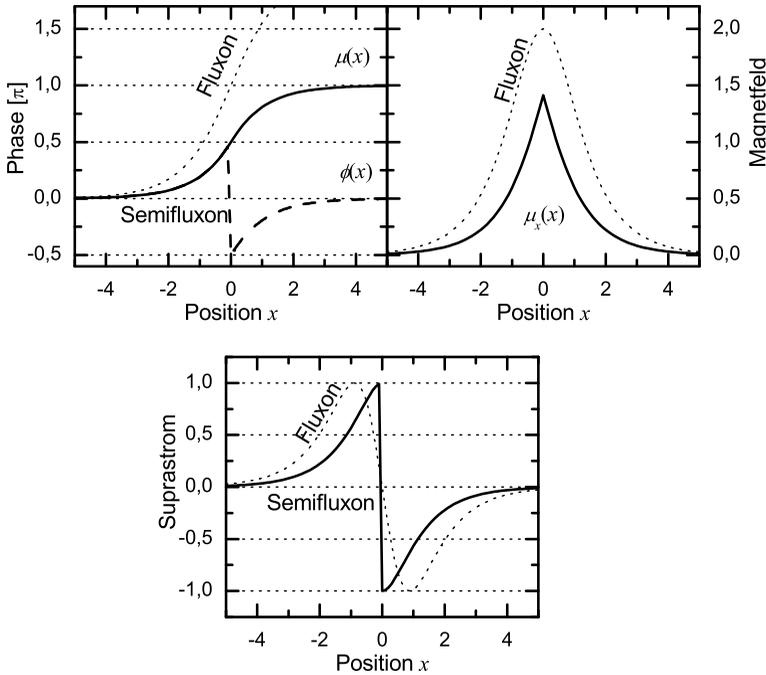
Desweiteren ist das magnetische Feld eines Fluxons

$$\mu_x(x) = \frac{2}{\cosh(|x| - \ln \mathcal{G})} \quad (3.13)$$

und die Suprastromverteilung

$$\sin(\mu) = \mu_{xx} = -2 \operatorname{sgn}(x) \frac{\sinh(|x| - \ln \mathcal{G})}{\cosh^2 |x| - \ln \mathcal{G}}. \quad (3.14)$$

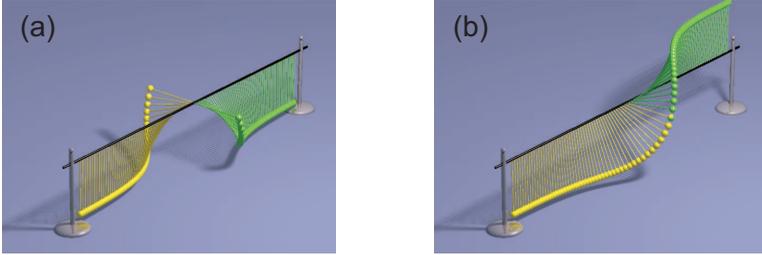
Phase  $\mu$  (durchgezogene Linie) und  $\phi$  (gestrichelte Linie), Magnetfeld  $\mu_x$  und Suprastrom  $\sin(\mu)$  für ein Semifluxon (durchgezogene Linie) sind in Abb. 3.1 dargestellt. Zum Vergleich wurde zusätzlich Phase, Magnetfeld und Suprastrom eines Fluxons (gepunktete Linie) dargestellt. Zur Veranschaulichung des Semifluxons kann ebenfalls die Pendelkette herangezogen



**Abbildung 3.1:** Phase  $\phi$  (gestrichelte Linie) bzw. kontinuierliche Phase  $\mu$  (durchgezogene Linie), Magnetfeld  $\mu_x$  und Suprastrom  $\sin(\phi)$  für ein Semifluxon (durchgezogene Linie) und ein Fluxon (gepunktete). Modifiziert nach [GKK02].

werden. Die Phasendiskontinuität wird dabei durch zwei benachbarte Pendel, die mit einer starren Stange verbunden sind, dargestellt (siehe Abb. 3.2 (a)). Für die kontinuierliche Phase  $\mu$  muss für die  $\pi$ -Facette des Kontakts negative Gravitation angenommen werden, was einer auf dem Kopf stehenden Pendelkette entspricht (siehe Abb. 3.2 (b)).

Die bisherige Lösung der gSGG beschreibt ein positives Semifluxon. Es gibt eine weitere Lösung für ein negatives Semifluxon, auch Antisemifluxon genannt, das den magnetischen Fluss  $-\frac{1}{2}\Phi_0$  trägt. In Gl. (3.12) ändert sich nur das Vorzeichen. Gleiches gilt auch für Gl. (3.13) und Gl. (3.14). Zusammen stellen Semifluxon und Antisemifluxon einen zweifach entarteten Grundzustand des Systems dar. Dabei ist die Polarität des Semifluxons unabhängig vom Vorzeichen von  $\theta(x)$ .



**Abbildung 3.2:** (a) Phase  $\phi$  und (b) kontinuierliche Phase  $\mu$  im Modell der Pendelkette (aus [Buc10]).

Die bisherigen Betrachtungen gingen stets von einem symmetrischen  $0-\pi$ -Kontakt aus. Für Betrachtungen asymmetrischer Facetten und komplexeren Systemen mit mehreren  $0-\pi$ -Übergängen wird auf die Referenzen verwiesen [BKS78, KMS97, GKK02, GKK03, ZG04, GSKK04].

### 3.3 Fraktionale Flusswirbel

Die bisherige Betrachtung des  $0-\pi$ -Übergangs kann für den Fall einer beliebigen Stufenhöhe  $\kappa$  verallgemeinert werden. Für Gl. (3.2) gilt von nun an die allgemeinere Form

$$\theta(x) = \kappa H(x). \quad (3.15)$$

Es zeigt sich, dass die Lösung des Grundzustandes durch fraktionale Flusswirbel, die den magnetischen Fluss  $\kappa/2\pi \cdot \Phi_0$  (direkter Vortex) oder  $(\kappa - 2\pi)/2\pi \cdot \Phi_0$  (komplementärer Vortex) tragen, wobei  $\kappa > 0$  gilt, gebildet wird. Für weitere Betrachtungen ist es sinnvoll wieder die kontinuierliche Phase  $\mu(x)$  zu verwenden (siehe [GKK04]) und für eine quantitative Betrachtung von der statischen SGG

$$\mu_{xx} = \sin(\mu + \theta) \quad (3.16)$$

auszugehen. Ähnlich wie bei den Betrachtungen zu den Semifluxonen erhalten wir unter der Annahme, dass die Energiedichte

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mu_x^2 + [1 - \cos(\mu + \theta)] \quad (3.17)$$

für  $x \rightarrow \pm\infty$  verschwindet, folgende Randbedingungen:

$$\mu_x(\pm\infty) = 0, \quad (3.18)$$

$$\mu(-\infty) = 0, \quad (3.19)$$

$$\mu(+\infty) = -\kappa + 2\pi n. \quad (3.20)$$

Zusätzlich setzt man voraus, dass die Lösung  $\mu(x)$  am Ort des Übergangs stetig und differenzierbar in der  $\theta$ -Funktion sein soll, d.h. es gilt:

$$\mu(+0) = \mu(-0), \quad (3.21)$$

$$\mu_x(+0) = \mu_x(-0). \quad (3.22)$$

Analog zur Betrachtung des Semifluxons erhalten wir für einen direkten Vortex ( $n = 0$ )

$$\mu^\kappa(x) = \begin{cases} 4 \arctan(e^{x-x_0}), & x < 0 \\ \kappa - 4 \arctan e^{-x-x_0}, & x > 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

mit

$$x_0 = -\ln \frac{\kappa}{8} > 0. \quad (3.24)$$

Für  $\kappa = \pi$  entspricht  $x_0$  genau der Konstanten  $\ln \mathcal{G}$ . Die gleiche Betrachtung kann nun für einen komplementären Vortex ( $n = -1$ ) durchgeführt werden und man erhält:

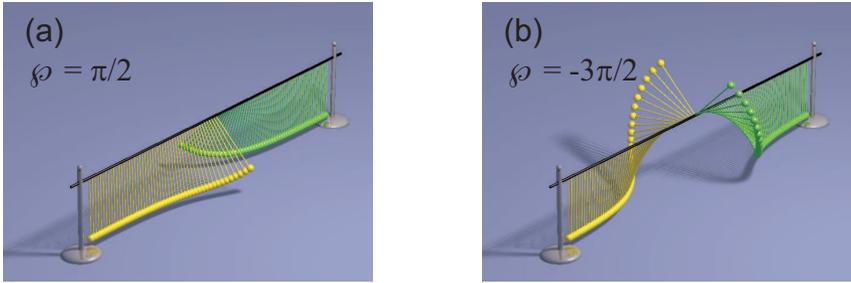
$$\mu^{\kappa-2\pi}(x) = \begin{cases} -4 \arctan(e^{x-x_0}), & x < 0 \\ \kappa - 2\pi + 4 \arctan e^{-x-x_0} & x > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

und

$$x_0 = -\ln \left( \frac{\kappa}{8} + \frac{\pi}{4} \right) > 0. \quad (3.26)$$

Zur Veranschaulichung kann nun wieder das Modell der Pendelkette herangezogen werden. Betrachtet man die Phase  $\phi(x)$  eines  $\kappa$ -Vortizes, so sind die beiden benachbarten Pendel an der Diskontinuität starr, unter dem Winkel  $\kappa$  miteinander verbunden (siehe Abb. 3.3). Im Gegensatz zu den Semifluxonen ist bei den fraktionalen Flusswirbeln die Symmetrie gebrochen und der Betrag des magnetischen Flusses von direktem und komplementären Vortex ist unterschiedlich.

An dieser Stelle ist es sinnvoll die topologische Ladung  $\wp$  [VSK<sup>+</sup>09], als



**Abbildung 3.3:** Veranschaulichung der Phase  $\phi$  im Modell der Pendelkette für einen  $-\pi/2$ -Vortex (a) und seinen komplementären Partner (b) (aus [Buc10]).

Maß für den magnetischen Fluss im Vortex, einzuführen. Ohne zusätzliche Fluxonen im Kontakt ist sie definiert durch

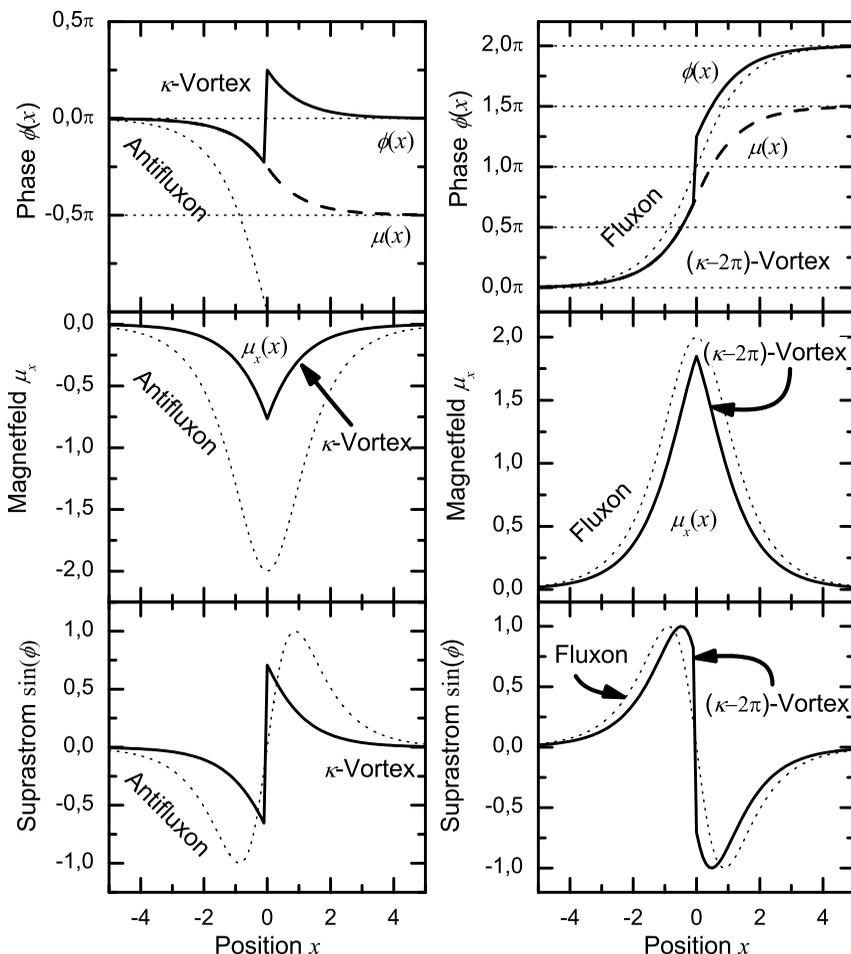
$$\varphi \equiv \mu(+\infty) - \mu(-\infty). \quad (3.27)$$

Daraus folgt für die Ladung eines direkten Vortex  $\varphi = -\kappa$  und für den komplementären Vortex  $\varphi = (2\pi - \kappa)$ . Somit trägt ein Fluxon die topologische Ladung  $\varphi = 2\pi$  und ein Semifluxon entsprechend  $\varphi = \pi$ . Desweiteren tragen „leichte“ Vortizes die Ladung  $\varphi < \pi$  und „schwere“ Vortizes die Ladung  $\varphi > \pi$ . Phase  $\phi$  bzw.  $\mu$ , Magnetfeld und Stromverteilung für einen direkten und komplementären Vortex für  $\kappa = \pi/2$  sind in Abb. 3.4 dargestellt. Bisher wurden nur die Lösungen für  $n = 0$  und  $n = -1$  betrachtet. Es kann nun nach weiteren Lösungen für andere  $n$  gesucht werden. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass  $|\varphi| = |\kappa + 2\pi n| > 4\pi$  keine expliziten und für  $4\pi > |\varphi| > 2\pi$  keine stabilen Lösungen existieren. Betrachtet man einmal die Energie dieses Systems wird auch klar, weshalb dies der Fall ist. Die Hamilton-Funktion (gleichzeitig auch ein Ausdruck für die Energiedichte) ist gegeben durch [GKK04]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\mu_x^2 + [1 - \cos(\mu + \theta)] - \gamma\mu, \quad (3.28)$$

mit der kinetischen Energie  $-\gamma\mu$ , der magnetischen Feldenergie  $\mu_x^2/2$  und der potenziellen Energie. Setzt man nun Gl. (3.25) ein und integriert über die Kontaktlänge erhält man, für den Fall  $\gamma = 0$ , für die Energie eines  $\varphi$ -Vortex

$$E(\varphi) = 16 \sin^2 \frac{\varphi}{8}. \quad (3.29)$$



**Abbildung 3.4:** Phase  $\phi(x)$  (durchgezogene Linie) bzw. kontinuierliche Phase  $\mu(x)$  (gestrichelte Linie), Magnetfeld  $\mu_x(x)$  und Suprastrom  $\sin \phi$  für einen direkten Vortex ( $\varphi = -\pi/2$ ) und seinen komplementären Vortex ( $\varphi = 3\pi/2$ ). Zum Vergleich ist zusätzlich ein Fluxon (gepunktete Linie) dargestellt [GKK04].

Daraus folgt für die Energie eines Fluxons  $E(2\pi) = 8$  und eines Semifluxons  $E(\pi) = 4(2 - \sqrt{2})$  und es gilt ferner

$$E(\varphi + 2\pi) > E(2\pi) + E(\varphi) \text{ für } 0 < \varphi < 2\pi. \quad (3.30)$$

Somit ist es für einen „schweren“ Vortex energetisch günstiger sich in Fluxon und einen „leichten“ Vortex aufzuspalten. Über diese Energiebetrachtung kann also verstanden werden, weshalb es keine Vortizes mit  $\varphi > 2\pi$  gibt.

In den bisherigen Betrachtungen wurde stets von einem unendlich langen Josephsonkontakt ausgegangen. Für lineare Kontakte endlicher Länge ist ein Vortex mit topologischer Ladung  $\varphi > \pi$  nur für Biasströme kleiner dem so genannten Depinningstrom  $\gamma_c(\varphi)$  des Vortex stabil. Wird  $\gamma_c(\varphi)$  jedoch überschritten, zerfällt der Vortex in seinen komplementären ( $\varphi = (\kappa - 2\pi)$ ) Vortex und ein Fluxon. Dieses wird über ein Kontaktende emittiert und es bleibt nur der komplementäre Vortex zurück. Fraktionale Flusswirbel sind, wie auch Semifluxonen, an die Diskontinuität gepinnt. Die Abhängigkeit des kritischen Stroms  $\gamma_c(\varphi)$  ist in Abb. 3.5 für einen sehr kurzen (gepunktete Linie) und einen sehr langen Kontakt (durchgezogene Linie) dargestellt. Für sehr kurze Kontakte ( $l \ll 1$ ) folgt nach [GG<sup>+</sup>05] für die Abhängigkeit des Depinningstroms von  $\kappa$

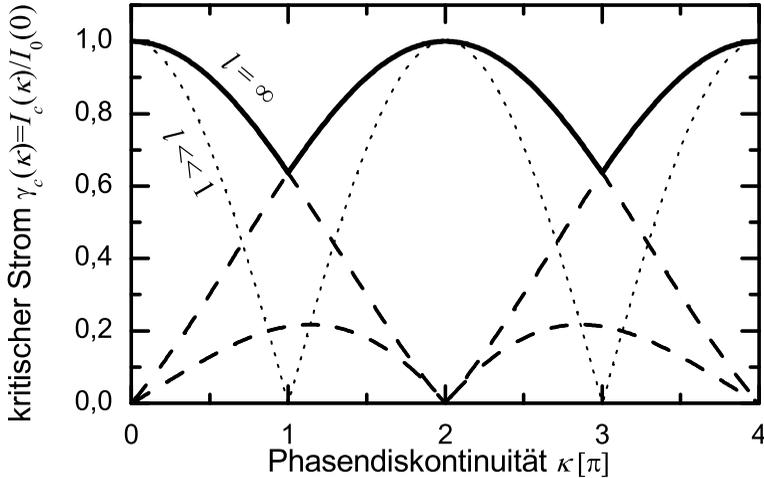
$$\gamma_c(\kappa) = \left| \cos\left(\frac{\kappa}{2}\right) \right|. \quad (3.31)$$

Für sehr lange Kontakte ( $l \rightarrow \infty$ ) gilt für den Bereich  $\pi < \kappa < \pi$

$$\gamma_c(\kappa) = \left| \frac{\sin \varphi/2}{\varphi/2} \right|, \quad (3.32)$$

da die Phase für modulo  $2\pi$  identisch ist und es keinerlei topologische Einschränkungen gibt. Deshalb wiederholt sich das Fraunhofer-Muster im Abstand  $2\pi$  periodisch (siehe Abb. 3.5). Wird bei festem  $\kappa$  der Biasstrom  $\gamma$  erhöht und kreuzt eine gestrichelte Lösung, wird ein Fluxon emittiert und ein kleinerer  $\varphi = (2\pi - \kappa)$ - Vortex bleibt zurück, welcher dann wiederum ein höheres  $\gamma_c$  besitzt (durchgezogene Linie.)

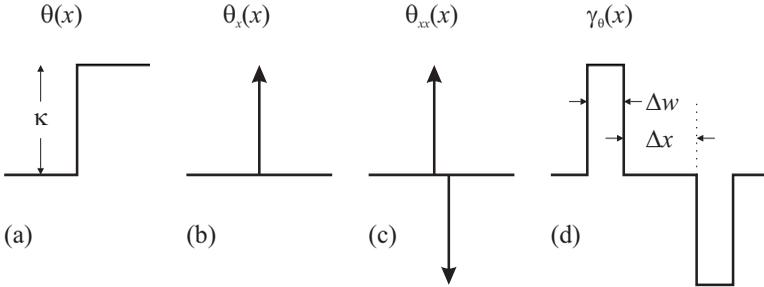
Für annulare Kontakte sehen die Lösungen, aufgrund der abgeschlossenen Topologie und den dadurch veränderten Randbedingungen, etwas anders aus. Da im Rahmen dieser Arbeit nur lineare Kontakte untersucht wurden, wird an dieser Stelle auf folgende Literatur verwiesen [DDKP85, NLC02, Mal04, GSKK04]. Um fraktionale Flusswirbel im Experiment zu realisieren, werden so genannte Strominjektoren verwendet. Diese erzeugen in einer der Elektroden des Josephsonkontakts einen Stromdipol  $\gamma_\theta(x)$ , der analog zum  $\theta_{xx}$ -Term einen additiven Beitrag zur gSGG liefert (siehe



**Abbildung 3.5:** Normierter, kritischer Strom  $\gamma(\kappa)$  in Abhängigkeit der Phasendiskontinuität  $\kappa$  für einen unendlich langen, linearen Kontakt (durchgezogene Linie) und für einen sehr kurzen Kontakt (gepunktete Linie). Modifiziert nach [GGS<sup>+</sup>05].

Abb. 3.6). Dieser Beitrag liefert, anders als bei  $0-\pi$ -Kontakten, eine variable Stufenhöhe  $\kappa$  für die zweimal abgeleitete Stufenfunktion  $\theta = \kappa H(x)$ . Es ist zu beachten, dass die Diskontinuität aus Geometrie Gründen und der Tatsache, dass man für eine punktförmige Diskontinuität eine unendlich hohe Stromdichte für den Dipol bräuchte, eine endliche Ausdehnung hat. Sind die Ausdehnungen der Strominjektoren deutlich kleiner als die Josephson Eindringtiefe  $\lambda_J$ , ist der Unterschied in erster Näherung jedoch sehr gering. In den verwendeten Systemen haben die Injektoren die Breite  $\Delta w$  und den Abstand  $\Delta x$  (beides  $\ll \lambda_J$ ) und die Diskontinuität  $\kappa$  ist direkt proportional zum Injektorstrom  $I_{Inj}$  und der Induktivität der Injektoren  $L_{Inj}$  [Ust02, GSG<sup>+</sup>03, Mal04, GGS<sup>+</sup>05]. Solche Systeme lassen sich mit Standard Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Kontakten realisieren. Diese zeichnen sich durch ihre geringe Dämpfung aus, weshalb die dynamischen Eigenschaften der fraktionalen Flusswirbel untersucht werden können. Desweiteren lässt sich die kritische Stromdichte  $j_0$  über mehrere Größenordnungen variieren (ca. 30 bis 4500 A/cm<sup>2</sup>), weshalb sie ohne größeren experimentellen Aufwand vermessen werden können und auch für die Untersuchung makroskopischer

Quanteneffekte äußerst interessant sind.



**Abbildung 3.6:** (a)-(c) Darstellung der Stufenfunktion  $\theta(x)$ , sowie deren erste und zweite Ableitung. (d) Näherung von  $\theta_{xx}$  durch den Stromdipol  $\gamma_\theta(x)$  mit der Breite  $\Delta w$  und dem Abstand  $\Delta x$  der Injektoren.

### 3.4 $\varphi$ -Josephsonkontakte

Ein  $\varphi$ -Josephsonkontakt ist die Verallgemeinerung eines  $\pi$ -Kontakts mit einer beliebigen Phase  $0 < \varphi < \pi$  im Grundzustand. Der  $\varphi$ -Kontakt ist eine Realisierungsmöglichkeit der in Abschnitt 3.1 kurz erwähnten Phasenbatterie. Der erste Vorschlag zur Realisierung eines solchen  $\varphi$ -Kontakts wurde 1998 von Mints [Min98] gemacht, der einen langen Kontakt mit vielen, abwechselnd kurzen  $0$  und  $\pi$  Facetten mit der bekannten Strom-Phasen-Beziehung  $j_s = \pm j_0 \sin \phi$  vorschlug.

In weiteren theoretischen Überlegungen von Mints *et al.* [MP00] und Buzdin *et al.* [BK03] folgt für die Phase  $\phi$  für ein System aus kurzen  $0$ - $\pi$ - $0$ - $\pi$ -...-Kontakten und kleinen Magnetfeldern

$$\phi(x) = \psi + \tilde{\zeta}(x) \sin \psi \quad (3.33)$$

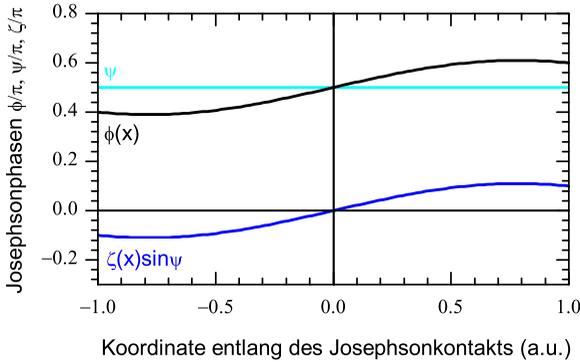
mit der konstanten, räumlich gemittelten Phase  $\psi$

$$\psi = \langle \phi(x) \rangle \quad (3.34)$$

und  $\tilde{\zeta}(x)$  einer rasch alternierenden Funktion der Größenordnung einer Facettenlänge, für die gilt  $|\tilde{\zeta}(x) \sin \psi| \ll 1$ . Abb. 3.7 zeigt die  $\phi$ ,  $\psi$  und  $\tilde{\zeta} \sin \psi$  exemplarisch für ein  $0$ - $\pi$ -Segment eines  $\varphi$ -Kontakts.

Im Unterschied zu fraktionalen Flusswirbeln, bei denen die Kontaktlänge

sehr viel größer ist als die Josephsoneindringtiefe  $L \gg \lambda_J$ , liegt die Länge bei  $\varphi$ -Kontakten im Bereich der Josephsoneindringtiefe  $L \sim \lambda_J$ . Zur Beschreibung der fraktionalen Flusswirbel wird die in Abschnitt 3.3 eingeführte kontinuierliche Phase  $\mu(x)$  verwendet, während zur Beschreibung eines  $\varphi$ -Josephsonkontaktes die oben eingeführte räumlich gemittelte Phase verwendet wird. Bildlich gesprochen heißt das, ist der Kontakt größer als die räumliche Ausdehnung des Vortizes, also „passt der Vortex gut in den Kontakt“, spricht man von fraktionalen Flusswirbeln und nutzt das Bild des direkten Vortex und seines komplementären Partners ( $\uparrow$  und  $\downarrow$ ). Gilt für die Länge  $L \sim \lambda_J$ , spricht man von einem  $\varphi$ -Josephsonkontakt und nutzt zur Beschreibung stets die lokale bzw. räumlich gemittelte Phase.



**Abbildung 3.7:** Schematische Darstellung der Phasen  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\zeta$  für einen kurzen  $0\text{-}\pi$ -Kontakt.

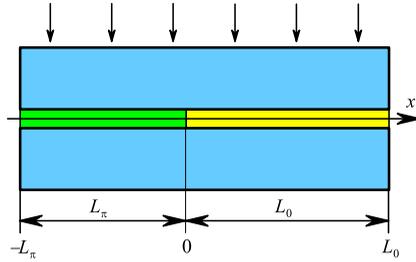
Für die Strom-Phasen-Beziehung eines  $\varphi$ -Josephsonkontaktes folgt nach [Min98, MPK<sup>+</sup>02, BK03]

$$j_s = j_1 \sin \psi + j_2 \sin(2\psi). \quad (3.35)$$

Hierbei ist  $j_1 = \langle j_c(x) \rangle$  die räumlich gemittelte Stromdichte und für den Term der zweiten Harmonischen ist die Amplitude  $j_2 < 0$  abhängig von den Längen und den kritischen Stromdichten der einzelnen Facetten. Der Grundzustand dieses Systems ist für  $j_2 < -j_1/2$  und

$$\varphi = \arccos[-j_1/(2j_2)] \quad (3.36)$$

zweifach entartet  $\psi = \pm\varphi$ , wobei die beliebige Phase  $0 < \varphi < \pi$  ist. Betrachtet man nun ein einzelnes  $0\text{-}\pi$ -Element der Länge  $L = L_0 + L_\pi$



**Abbildung 3.8:** Schematische Darstellung eines  $0$ - $\pi$ -Kontakts mit asymmetrischen Facettenlängen [GKKM11].

(siehe 3.8), dessen Facettenlängen  $L_0$  und  $L_\pi$  kurz im Vergleich zur Josephson Eindringtiefe,  $L_0, L_\pi \lesssim \lambda_J$  und asymmetrisch  $L_0 \neq L_\pi$  sein sollen, in einem externen Magnetfeld, folgt nach [GKKM11] mit dem Ansatz  $\phi(x) = \psi + \tilde{\zeta}(x) \sin \psi$  aus der statischen SGG

$$\phi_{xx} - \langle j_c \rangle [1 + g(x)] \sin \phi = -\gamma, \quad (3.37)$$

mit

$$j_c(x) = \begin{cases} -j_0, & \text{für } -L_\pi < x < 0 \\ +j_0, & \text{für } 0 < x < L_0 \end{cases} \quad (3.38)$$

und

$$g(x) = \begin{cases} g_\pi = \frac{-2L_0}{L_0 - L_\pi}, & \text{für } x < 0 \\ g_0 = \frac{+2L_\pi}{L_0 - L_\pi}, & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

wobei  $\langle g(x) \rangle = 0$  ist. Nach [GKKM11] folgt für die effektive Strom-Phasen-Beziehung

$$\gamma = \langle j_c \rangle \left[ \sin \psi + \Gamma_h h \cos \psi + \frac{\Gamma_0}{2} \sin(2\psi) \right], \quad (3.40)$$

bzw. für den Suprastrom

$$I_s = \langle I_c \rangle \left[ \sin \psi + \Gamma_h h \cos \psi + \frac{\Gamma_0}{2} \sin(2\psi) \right], \quad (3.41)$$

mit  $\langle I_c \rangle = \langle j_c \rangle L w$ , wobei  $w$  die Breite des Kontakts ist und dem extern angelegten Magnetfeld  $h = 2\pi \lambda_J \Lambda / \Phi_0$ . Diese effektive Strom-Phasen-Beziehung hat wie Gl. (3.35) eine negative zweite Harmonische (siehe auch [Min98, MPK<sup>+</sup>02, BK03]) und einen zusätzlichen Term  $\propto h \cos \psi$ , der die

Magnetfeldabhängigkeit beschreibt. Das heißt, dass die effektive Strom-Phasen-Beziehung durch ein externes Magnetfeld variiert werden kann (siehe Abb. 3.9). Die Josephsonenergie dieses Systems ist gegeben durch

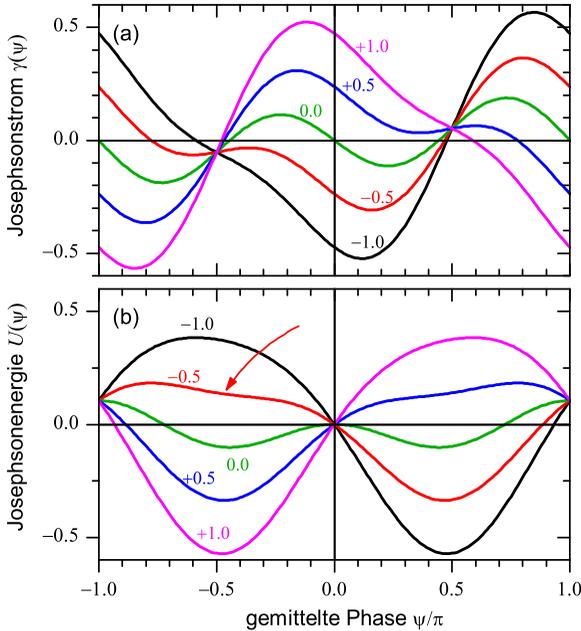
$$U(\psi) = \langle E_J \rangle \left[ 1 - \cos \psi + \Gamma_h h \sin \psi + \frac{\Gamma_0}{2} \sin^2 \psi \right], \quad (3.42)$$

mit den, nur von den Kontaktparametern abhängigen Koeffizienten

$$\Gamma_0 = -\frac{4}{3} \frac{L_0^2 L_\pi^2}{L_0^2 - L_\pi^2} \quad (3.43)$$

$$\Gamma_\pi = \frac{L_0 L_\pi}{L_0 - L_\pi}. \quad (3.44)$$

Die Magnetfeldabhängigkeit der effektiven Strom-Phasen-Beziehung und



**Abbildung 3.9:** a) Effektive Strom-Phasen-Beziehung  $\gamma(\psi)$  und b) effektive Josephsonenergie  $U(\psi)$  bei verschiedenen Magnetfeldern  $h$  für einen asymmetrischen  $-\pi$ -Kontakt mit  $L_0 = 1$  und  $L_\pi = 0.9$  [GKKM11].

der Josephsonenergie für einen asymmetrischen  $0$ - $\pi$ -Kontakt ist in Abb. 3.9 dargestellt. Man erkennt, dass ohne externes Magnetfeld sich das kosinusförmige Potenzial eines kurzen (normalen) Kontakts aufgrund der zweiten Harmonischen in ein Doppelmuldenpotenzial transformiert. Dieses Doppelmuldenpotenzial ist symmetrisch und hat zwei entartete Grundzustände. Durch Anlegen eines externen Magnetfeldes kann das Potenzial variiert werden und je nach Polarität des Magnetfeldes wird eine Potenzialmulde tiefer, während die andere Mulde flacher wird und bei genügend großem Magnetfeld verschwindet.

In den bisherigen Betrachtungen wurde stets von einer gleichen Stromdichte der beiden Facetten ausgegangen. Lipman *et al.* [LMK<sup>+</sup>14] erweiterten das System für unterschiedliche Stromdichten  $j_{c,0} \neq j_{c,\pi}$  in der  $0$ - und  $\pi$ -Facette. Die Koeffizienten sind nun definiert durch

$$\Gamma_0 = -\frac{l_0^2 l_\pi^2}{3} \frac{(j_{c,0} - j_{c,\pi})^2}{(j_{c,0} l_0 - j_{c,\pi} l_\pi)^2} \quad (3.45)$$

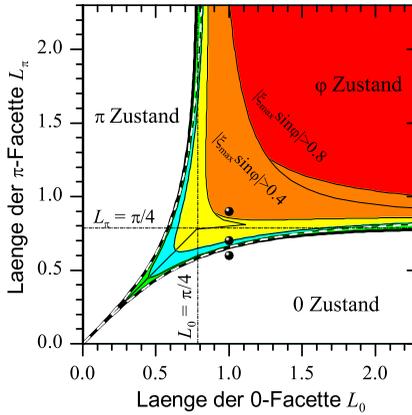
$$\Gamma_\pi = \frac{l_0 l_\pi}{2} \frac{j_{c,0} - j_{c,\pi}}{j_{c,0} l_0 - j_{c,\pi} l_\pi}, \quad (3.46)$$

mit den auf die Josephsoneindringtiefe  $\lambda_J(\langle j_c \rangle)$  normierten Längen  $l_0$  und  $l_\pi$  und der gemittelten Stromdichte  $\langle j_c \rangle = (L_0 j_{c,0} + L_\pi j_{c,\pi}) / (L_0 + L_\pi)$ . Mit Gl. (3.45) kann berechnet werden, für welche Facettenlängen  $L_0$  und  $L_\pi$  dieser zweifach entartete Grundzustand existiert. Eine Abschätzung für die Längen ist gegeben durch

$$L_0 \geq L_\pi \sqrt{\frac{3}{4L_\pi^2 + 3}} \quad (3.47)$$

$$L_\pi \geq L_0 \sqrt{\frac{3}{4L_0^2 + 3}}. \quad (3.48)$$

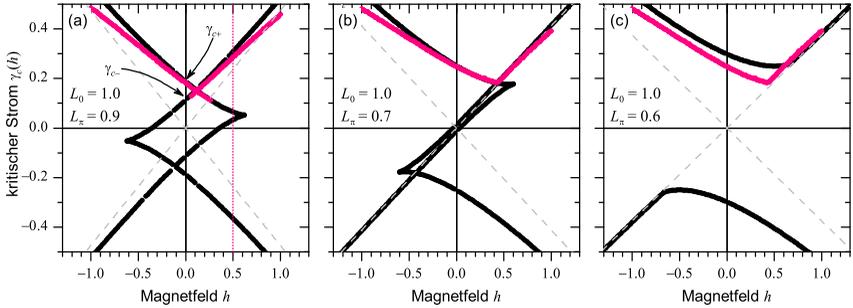
In Abb. 3.10 ist diese Näherung als gestrichelte Linie dargestellt und wird mit den exakten Lösungen (durchgezogene Linie) [BKS78] verglichen. Die Farbkodierung spiegelt dabei die Gültigkeit der Näherung  $|\tilde{\zeta}(x) \sin \psi| \ll 1$  wieder, von grün (gute Übereinstimmung) nach rot (Näherung ungültig). Es gibt viele Vorschläge  $\varphi$ -Josephsonkontakte zu realisieren [GS09, PGKK10, HPK<sup>+</sup>13, Tur13]. Eine Möglichkeit ist ein  $0$ - $\pi$ -Kontakt mit einer stufenförmigen, ferromagnetischen Tunnelbarriere, ein sogenannter  $0$ - $\pi$ -SIFS-Kontakt. Eine weitere Realisierungsmöglichkeit ist das Verwenden der in Abschnitt 3.3 bereits erwähnten Strominjektoren. Der zweifach entartete



**Abbildung 3.10:** Domäne in der der  $\varphi$ -Zustand existiert. Die Farbkodierung spiegelt dabei die Gültigkeit der Näherung  $|\tilde{\zeta}(x) \sin \psi| \ll 1$  wieder, von grün (gute Übereinstimmung) nach rot (Näherung ungültig)[GKKM11]

Grundzustand wird hierbei durch Anlegen eines geeigneten Stroms durch die Injektoren realisiert. Dieses System, welches auf Standard Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Kontakten basiert, hat den Vorteil einer höheren Stromdichte und dadurch einer höheren crossover-Temperatur, was es für Messungen makroskopischer quantenmechanischer Effekte äußerst interessant macht.

Zur experimentellen Bestimmung, ob man einen  $\varphi$ -Kontakt vorliegen hat, oder nicht, untersucht man die Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Stroms  $I_c$  für kleine Magnetfelder. In Abb. 3.11 ist die Abhängigkeit der kritischen Stromdichte vom Magnetfeld  $\gamma_c(h)$  für verschiedene Facettenlängen dargestellt, wobei immer  $L_0 \neq L_\pi$  ist. Dabei wurden die Längen (a)-(c) so gewählt, dass man zunächst tief in der  $\varphi$ -Region ist und anschließend langsam nach außen wandert (siehe Abb. 3.10). Für den Fall (a) erhält man vier mögliche kritische Ströme. Das liegt an der Escapemöglichkeit der Phase aus den beiden Potenzialmulden für zwei verschiedene Biasstromrichtungen. Für Magnetfelder  $|h| \leq 0.6$  verschwindet, wie bereits erwähnt eine der Potenzialmulden und man erwartet nur noch zwei kritische Ströme. Für eine größere Asymmetrie in den Facettenlängen (Abb. 3.11 (b) und (c)) ist die Wahrscheinlichkeit vier kritische Ströme zu finden geringer (Abb. 3.11 (b)) bis schließlich nur noch zwei kritische Ströme zu erwarten sind (Abb. 3.11 (c)). Weitere interessante Eigenschaften sind die Möglichkeiten



**Abbildung 3.11:** Abhängigkeit des kritischen Stroms  $\gamma_c(h)$  vom normierten Magnetfeld  $h$  für unterschiedliche Facettenlängen. Schwarze Linien wurden analytisch berechnet, cyanfarbene Linien entsprechen numerischen Simulationen [GKKM11].

$\varphi$ -Kontakte als Ratschen [Sic13] und als makroskopisches Zwei-Niveau-System zu verwenden.

Die in dieser Arbeit untersuchten Kontakte hatten eine Länge von  $L = 2 - 4\lambda_J$  und liegen somit im Übergangsbereich zwischen  $\varphi$ -Kontakt und fraktionalem Flusswirbel. Durch Anlegen eines Injektorstromes erhält man im Bereich um das Minimum der Injektorkennlinie, also für  $\kappa \approx \pi$ , die zuvor beschriebenen zwei kritischen Ströme  $I_{c\pm}$ , welche den beschriebenen zweifach entarteten Grundzustand eines  $\varphi$ -Kontaktes bilden. Aufgrund der Länge der Kontakte können zur Beschreibung der Ergebnisse sowohl die Theorie der  $\varphi$ -Josephsonkontakte, als auch die Theorie der fraktionalen Flusswirbel herangezogen werden.

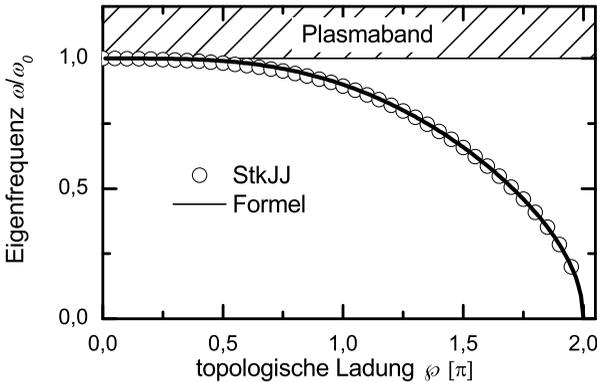
### 3.5 Eigenfrequenz eines fraktionalen Flusswirbels

Fraktionale Flusswirbel sind zwar, wie in Abschnitt 3.3 erwähnt, an ihren Entstehungsort gebunden, können aber elastisch verformt werden. In einem Gedankenexperiment übt man, durch Anlegen eines Biasstroms, eine Lorentzkraft auf den Flusswirbel aus. Durch abruptes Abschalten des Biasstroms, fängt der Flusswirbel an zu oszillieren. Seine Eigenfrequenz um

die Gleichgewichtslage ist dabei gegeben durch

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{4} \left( \cos \frac{\varphi}{4} + \sqrt{4 - 3 \cos^2 \frac{\varphi}{4}} \right)}. \quad (3.49)$$

Die genaue Herleitung kann in [GSK<sup>+</sup>05, Buc06] nachgelesen werden. Gl. (3.49) ist in Abb. 3.12 dargestellt. Für  $\varphi = 0$  ist kein Flusswirbel im Kontakt und die Eigenfrequenz ist gleich der Plasmafrequenz  $\omega_0$ . Für  $\varphi = 2\pi$  ist ein Fluxon im Kontakt injiziert worden, das nun nicht mehr gebunden ist, sondern im Gegenteil sich frei im Kontakt bewegen kann. Dem entsprechend ist die Eigenfrequenz gleich Null.

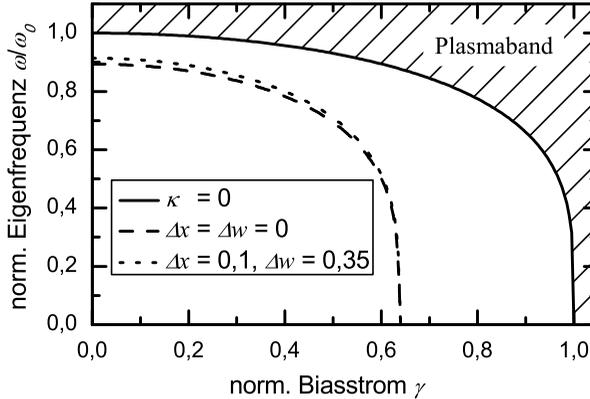


**Abbildung 3.12:** *Eigenfrequenz eines fraktionalen Flusswirbels in Abhängigkeit von seiner topologischen Ladung  $\varphi$ . Offene Kreise entspricht Simulationen mit StkJJ [GW08], durchgezogene Linie entspricht Gl. (3.49)*

Ähnlich den Störstellen in der Bandlücke eines Halbleiters liegt die Eigenfrequenz eines Flusswirbels stets innerhalb der so genannten Plasmafrequenz. Außerdem sei angemerkt, dass Gl. (3.49) nur für unendlich lange Josephsonkontakte gilt. Für Kontakte endlicher Länge kann sie jedoch numerisch berechnet werden (siehe [GSK<sup>+</sup>05, SGK<sup>+</sup>05, GW08]). Desweiteren kann für Biasströme  $\gamma > 0$  kein analytischer Ausdruck gefunden werden, jedoch gilt in guter Näherung

$$\omega(\varphi, \gamma) \approx \omega(\varphi, 0) \sqrt[4]{1 - \left( \frac{\gamma}{\gamma_c(\varphi)} \right)^2}. \quad (3.50)$$

Die Ausdehnung der Injektoren haben ebenfalls Einfluss auf die Eigenfrequenz. In Abb. 3.13 ist die numerisch bestimmte Eigenfrequenz für eine punktförmige Diskontinuität und eine Diskontinuität für Injektoren der Breite  $\Delta w = 0.35$  und dem Abstand  $\Delta x = 0.1$ , für  $\kappa = \pi$  dargestellt. Man erkennt, dass sich die Eigenfrequenz unter Berücksichtigung der ausgedehnten Diskontinuität zu leicht höheren Frequenzen hin verschiebt.

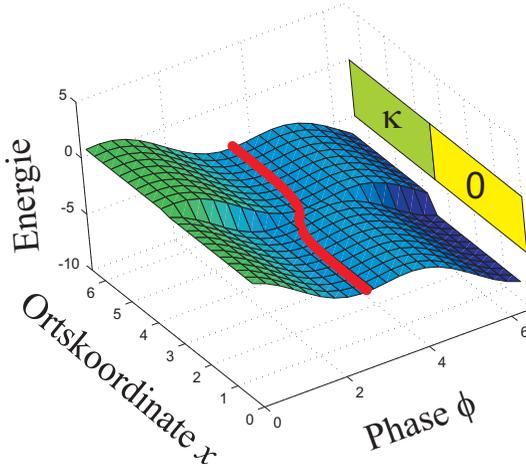


**Abbildung 3.13:** Eigenfrequenz eines fraktionalen Flusswirbels mit  $\varphi = \pi$  in Abhängigkeit vom Biasstrom. Die gestrichelte Linie entspricht einer punktförmigen Diskontinuität, die gepunktete Linie entspricht einer ausgedehnten Diskontinuität (aus [Buc10]).

In den bisherigen Betrachtungen wurde stets nur von einem Flusswirbel ausgegangen. Es wurden jedoch auch schon Moleküle aus zwei gekoppelten fraktionalen Flusswirbeln untersucht. Genaueres hierzu kann in [Buc10] nachgelesen werden.

## 3.6 Thermische Aktivierung

Wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, wird bei der thermischen Aktivierung der Phase in einem langen Kontakt die Teilchenkette als Ganzes über die Barriere gehoben bzw. ab einer gewissen Kontaktlänge ist es energetisch günstiger die Kette lokal über die Barriere zu heben und anschließend wird der Rest mitgezogen. Das heißt, das ab einer gewissen Länge der Aktivierungsprozess unabhängig von der Kontaktlänge wird und die Bar-



**Abbildung 3.14:** Analogmodell der Teilchenkette in einer Potenziallandschaft mit Diskontinuität  $\kappa$ , nach [Buc10].

rierenhöhe im Vergleich zu einem punktförmigen Kontakt kleiner wird,  $u < u_0$ . Für fraktionale Flusswirbel muss das Analogmodell nochmals modifiziert werden. Die Diskontinuität wird dabei durch eine Phasenverschiebung der  $\kappa$ -Facette zur 0-Facette um den Wert  $\kappa$  entlang der  $\phi$ -Achse berücksichtigt (siehe Abb. 3.14). Die Potenziallandschaft kann nun wieder auf ein eindimensionales, effektives Potenzial mit effektiver Barrierenhöhe  $u$  projiziert werden. Für lange Josephsonkontakte mit fraktionalem Flusswirbel kann nur in wenigen Fällen eine analytische Lösung gefunden werden. Nach [VSK<sup>+</sup>09] folgt für die normierte effektive Barrierenhöhe  $u(\kappa, \gamma)$  für einen  $-\kappa$ -Vortex in einem unendlich langen Josephsonkontakt

$$\frac{u}{E_J} = \frac{2}{3} |G| \left[ -\frac{\kappa}{G} (\gamma - \gamma_c) \right]^{3/2}, \quad (3.51)$$

mit

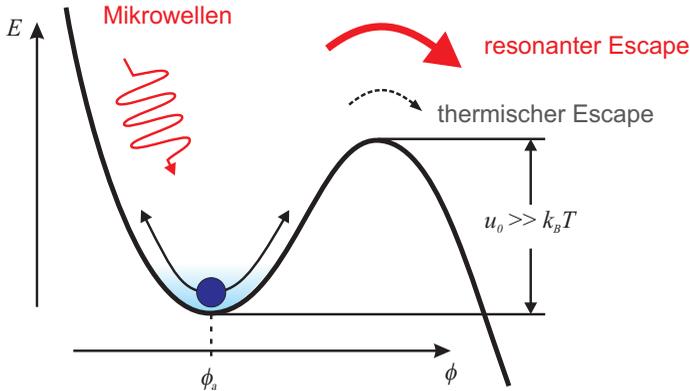
$$G = 4 \sin\left(\frac{\kappa}{2}\right) [\cos \varphi_c + \gamma_c (\varphi_c - \pi/2)], \quad (3.52)$$

$$\varphi_c = \arcsin \gamma_c \quad (3.53)$$

und der normierten Josephsonenergiedichte  $E'_J = E_J \lambda_J / L$ . Für allgemeine Parameter kann die Aktivierungsenergie auch numerisch berechnet werden (siehe [Buc10]).

### 3.7 Resonante Aktivierung

In den bisherigen Betrachtungen der Aktivierung wurde stets von einem Teilchen (bzw. einer Kette), das durch den DC-Biasstrom  $\gamma$  aktiviert wurde, ausgegangen. Bei der resonanten Aktivierung wird nun zusätzlich noch eine AC-Komponente, mit Frequenz  $\omega_{ext}$  und auf den kritischen Strom  $I_0$  normierter Amplitude  $\gamma_{ac}$ , addiert. Dieser Prozess ist in Abb 3.15 schematisch dargestellt. Für punktförmige Kontakte erhält man unter Berücksichtigung



**Abbildung 3.15:** Schematische Darstellung der resonanten Aktivierung eines Teilchens im Waschbrettspotenzial unter Mikrowelleneinstrahlung.

sichtigung des zusätzlichen Terms des AC-Stroms

$$\phi_{tt} + \alpha \phi_t + \sin \phi = \gamma + \gamma_{ac} \sin(\omega_{ext} t). \quad (3.54)$$

Für  $\gamma_{ac} = 0$  befindet sich das Teilchen im Potenzialminimum und kann durch thermische Aktivierung aus der Mulde entkommen. Für  $\gamma_{ac} > 0$  kann es durch die resonante Aktivierung zu einem alternativen Escapeprozess kommen. Aufgrund der anharmonischen Form des Potentials kann nicht einfach die biasstromabhängige Plasmafrequenz Gl. (2.30) als Resonanzfrequenz genommen werden. Es gibt im wesentlichen zwei Modelle,

auf die im folgenden kurz eingegangen wird.

Im ersten Modell liefert ein monochromatischer Ansatz  $\phi = \phi_0 + a \sin(\omega_{pl\star} t)$  in Gl.(3.54) für  $\alpha = \gamma_{ac} = 0$  explizite Lösungen [Lik86, GJCC<sup>+</sup>04, GJC04, BCGJ10], was zu einer effektiven Relation  $J_0(a) \sin \phi_0 = \gamma$  und

$$\omega_{pl\star}^2 = \frac{2J_1(a)}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{J_0(a)}\right)^2}, \quad (3.55)$$

mit der Besselfunktion  $J_n$   $n$ -ter Ordnung, führt. Da in Experimenten die Wahrscheinlichkeit für einen Escape des Teilchens in der Nähe der Resonanz hoch und für den nicht resonanten Fall gering ist, sollte  $\gamma_{ac}$  so gewählt werden, dass die resultierende Oszillationsamplitude  $a$  den Wendepunkt des effektiven Potentials erreicht, wie z.B.

$$a = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left( \frac{\gamma}{J_0(a)} \right), \quad (3.56)$$

so dass Oszillationen dieser Amplitude zu einer hohen Escerate führen. Für  $a \rightarrow 0$  geht Gl.(3.55) in  $\omega_{pl}(\gamma)$  über.

Im zweiten Modell (nichtlinearer Oszillator: physikalisches Pendel) lässt sich die Lösung von Gl. (3.54) nach Ref. [FU00] als Summe aus zwei Termen darstellen: ein schneller, resonant oszillierender Term und ein langsam variierender, quasistationärer Term für die Gleichgewichtslage  $\phi_0(t)$ . Letzterer ist näherungsweise durch die transzendente Gleichung

$$\gamma(\phi_0) = \sin(\phi_0) \left[ 1 - \frac{\gamma_{ac}^2/2}{(\omega_{ext}^2 - \cos \phi_0)^2 + \alpha^2 \omega_{ext}^2} \right] \quad (3.57)$$

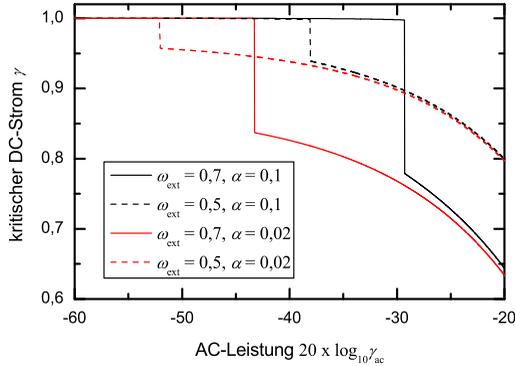
bestimmt. Es zeigt sich, dass unter der Annahme  $\alpha \ll \omega_{ext} \ll 1$ , ab einem bestimmten Schwellwert

$$\gamma_{ac} \geq \gamma_{ac,th} = \frac{4\omega_{ext}^2}{3^{3/4}} \sqrt{\alpha^3 \omega_{ext}} \quad (3.58)$$

zwei stabile Librationszustände existieren. Wird dieser Schwellwert überschritten, geht das Pendel entweder in den zweiten stabilen Librationszustand, oder direkt in den rotierenden Zustand über [FU00]. Für den direkten Übergang in den rotierenden Zustand ergibt eine Stabilitätsanalyse eine kritische Amplitude

$$\gamma_{ac,c} \cong \omega_{ext}^3 \alpha. \quad (3.59)$$

Je nach Librationszustand erhält man unterschiedliche, kritische DC-Ströme  $\gamma_c(\gamma_{ac})$  für den Übergang zum Rotationszustand. In Abb. 3.16 ist die nach dieser Methode ermittelte Abhängigkeit für  $\gamma_c(\gamma_{ac})$  exemplarisch dargestellt.

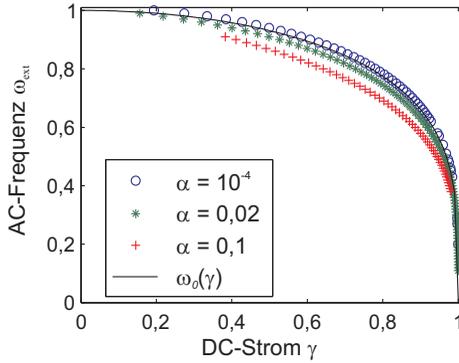


**Abbildung 3.16:**  $\gamma_c(\gamma_{ac})$  Abhängigkeit für verschiedene Frequenzen  $\omega_{ext}$  und Dämpfungsparameter  $\alpha$  (aus [Buc10]).

Die Sprunghöhe  $\Delta\gamma$  ist dabei von der Frequenz  $\omega_{ext}$  und dem Dämpfungsparameter  $\alpha$  abhängig. In Abb. 3.17 ist die  $\gamma_c(\gamma_{ac,c})$  Abhängigkeit für verschiedene Dämpfungsparameter dargestellt. Man erkennt, dass sich die Kurven für  $\alpha \rightarrow 0$  der biasstromabhängigen Plasmafrequenz  $\omega_{pl}(\gamma)$  annähern. Bei beiden Modellen ist der Resonanzpunkt um ca. 10% gegenüber der biasstromabhängigen Plasmafrequenz reduziert. Beim zweiten Modell nähern sich die  $\gamma_c(\gamma_{ac,c})$ -Kurven für verschiedene Dämpfungsparameter an, während das erste Modell unabhängig von der Dämpfung ist.

### 3.8 Makroskopische Quanteneffekte

Wie in Kapitel 3.3 erwähnt sind fraktionale Flusswirbel, wie auch Semifluxonen an ihren Entstehungsort gebunden, können aber verformt werden. Sie bilden somit ein Brückenglied zwischen dem unbeweglichen magnetischen Fluss und den freibeweglichen Fluxonen in einem Josephsonkontakt. Da für beide Fälle bereits Quantenverhalten beobachtet wurde, die Superposition von (makroskopischen) Flusszuständen [vdWtHW<sup>+</sup>00, FPC<sup>+</sup>00, CNHM03] und das Quantentunneln von Fluxonen [WLL<sup>+</sup>03], kann davon ausgegangen werden, dass auch fraktionale Flusswirbel bei genügend tiefen



**Abbildung 3.17:** Abhängigkeit des kritischen DC-Stroms  $\gamma$  von der AC-Frequenz  $\omega_{ext}$  für verschiedene Dämpfungen  $\alpha$  (Symbole). Zusätzlich ist die biasstromabhängige Plasmafrequenz  $\omega_{pl}(\gamma)$  (durchgezogene Linie) dargestellt (aus [Gab07]).

Temperaturen Quantenverhalten zeigen. Semifluxonen stellen durch ihre zwei entarteten Grundzustände  $\uparrow$  und  $\downarrow$  bereits auf natürliche Weise ein mesoskopisches Spin- $\frac{1}{2}$ -System dar. Auch bei  $\varphi$ -Josephsonkontakten stellen die Zustände  $\pm\varphi$  den zweifach entarteten Grundzustand des Systems dar. Beide Systeme können durch äußere Ströme und Felder manipuliert und ausgelesen werden. Deshalb sind sie interessant für die Untersuchung makroskopischer Quanteneffekte und Gegenstand aktueller Forschung.

Eines dieser Systeme ist ein Vortex-Molekül, das aus zwei fraktionalen Vortizes besteht. Dies wird durch einen langen Josephsonkontakt mit zwei Injektorstrompaaren realisiert. So ist es möglich zwei Zustände gleicher Energie zu realisieren, die durch eine Barriere mit einstellbarer Höhe, getrennt sind. Hierbei sind die asymmetrischen AFM Zustände die aussichtsreichsten Kandidaten, da sie dieses Kriterium der gleichen Energie erfüllen [GKK04]. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der Abstand  $a$  der beiden Injektorpaare zu einander. Um makroskopische Quanteneffekte beobachten zu können, muss der Abstand  $a_c < a \lesssim a_c + 0.02$  gewählt werden, mit dem kritischen Abstand

$$a_c(\kappa) = 2F \left( \frac{\pi}{4}, \sqrt{1 - \sin \frac{\kappa}{2}} \right). \quad (3.60)$$

Dabei beschreibt  $F$  das elliptische Integral, gegeben durch

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (3.61)$$

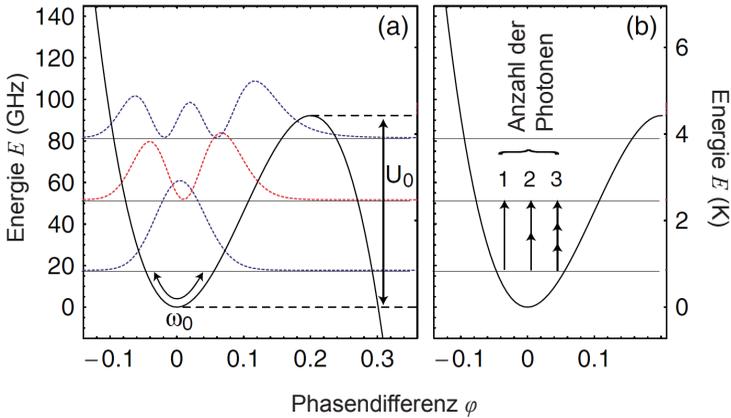
Der Wert von  $a_c$  liegt dabei im Bereich von  $a_c(\pi) = \pi/2 \approx 1.57$  bis  $a_c(0) = a_c(2\pi) = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 1.76$ . Diesen Abstand der Injektoren genau zu treffen ist eine der größeren Herausforderungen bei der Realisierung dieses Systems. Weitere Herausforderungen liegen in der Initialisierung, dem Manipulieren und dem Auslesen der Zustände. Eine genaue theoretische Betrachtung dieses Vortex-Moleküls kann in [Hei13] nachgelesen werden.

Bereits Mitte der 1980er Jahre machten Martinis *et al.* erste Experimente um das quantenmechanische Verhalten der Josephsonphase nachzuweisen [MDC87]. Mittels Schaltstatistikmessungen des kritischen Stromes eines kurzen Kontaktes für Temperaturen von 10mK bis 1000mK konnten sie ein Sättigen der Verteilungsbreite feststellen. Im Experiment wurde der Biasstrom mittels eines Stromrampengenerators solange erhöht bis der Kontakt vom supraleitenden in den resistiven Zustand schaltet. Dieser Zyklus wird mehrere tausend Mal wiederholt und auf diese Weise erhält man ein Histogramm für die Verteilung des kritischen Stromes, dessen Verteilungsbreite unterhalb der Crossover-Temperatur  $T^* \approx 50$  mK sättigte. Der genaue Messaufbau kann in [MDC87] nachgelesen werden, bzw. wird in Kapitel 4 ein ähnlicher Aufbau beschrieben. Das Beobachten des Makroskopischen Quantentunnels lieferte somit einen ersten Hinweis auf das quantenmechanische Verhalten der Josephsonphase. Anfang des 20. Jahrhunderts zeigten Wallraff *et al.* das Quantenverhalten von langen Josephsonkontakten [WLC<sup>+</sup>02, WLC<sup>+</sup>03] und von Vortizes in annularen Kontakten [WLL<sup>+</sup>03]. In beiden Experimenten konnte ebenfalls mittels Schaltstatistikmessungen des kritischen Stromes ein Sättigen der Verteilungsbreite nachgewiesen werden. Sowohl Martinis *et al.* als auch Wallraff *et al.* konnten ihre Ergebnisse durch theoretische Betrachtungen, basierend auf der bekannten Bewegungsgleichung der Phasendifferenz (siehe 2.19), verifizieren und lieferten somit erste Hinweise bzw. Beweise für das Makroskopische Quantenverhalten.

Einen weiteren Hinweis auf das Quantenverhalten der Josephsonphase liefert die Energielevelspektroskopie. Hierbei handelt es sich um den resonanten Escape der Josephsonphase aus verschiedenen Energieniveaus innerhalb der Potenzialmulde [MDC87, SPRR97, WDLU03, WLL<sup>+</sup>03, BLT<sup>+</sup>06]. Ähnlich der klassischen resonanten Aktivierung wird hierbei der Effekt

der angelegten Mikrowellen auf den Escape der Josephsonphase aus der Potenzialmulde betrachtet. Jedoch befinden wir uns weit unterhalb der Crossover-Temperatur zwischen thermischen und quantenmechanischem Regime, so dass der Escapeprozess durch das Makroskopische Quantentunneln dominiert wird. Innerhalb der Potenzialmulde bilden sich quantisierte Energieniveaus aus (siehe Abb. 3.18 (a)). Die Anzahl dieser Niveaus ist von den Kontaktparametern abhängig und kann durch Anlegen eines Biasstroms, also dem Variieren der Barrierenhöhe, gesteuert werden. Für die hier gemessenen Kontakte wurde für einen Biasstrom  $\gamma \approx 0.99$ , also nahe 1, eine Anzahl von 2-3 Niveaus berechnet. Durch Anlegen eines externen Mikrowellenfeldes können Übergänge zwischen dem Grundzustand und höheren Zuständen induziert werden. Aufgrund der resonanten Anregung der Übergänge nimmt somit die Besetzungswahrscheinlichkeit der höheren Zustände zu. Dies führt zu einer Erhöhung der Escaperate aus den angeregten Zuständen und zwar genau dann, wenn die Photonenenergie der Mikrowellenphotonen genau der Übergangsenergie zwischen zwei Energieniveaus entspricht. Somit können Übergänge zwischen dem Grundzustand und den ersten und zweiten (sofern vorhanden) angeregten Zustand induziert und gemessen werden. Ebenso ist es möglich Übergänge vom ersten zum zweiten angeregten Zustand, oder auch Mehrphotonenübergänge zwischen dem Grundzustand und dem angeregten Zustand zu induzieren (siehe Abb. 3.18 (b)). In den erwähnten Experimenten wurde die Abhängigkeit des kritischen Stromes von der Leistung der angelegten Mikrowelle bei fester Mikrowellenfrequenz gemessen. Bei geeigneter Mikrowellenleistung konnte das Ausbilden einer Doppelppeakstruktur beobachtet werden. Diese Doppelppeakstruktur konnte auf den induzierten Übergang der Josephsonphase vom Grund- in den ersten angeregten Zustand und anschließendem Escape aus der Potenzialmulde zurückgeführt werden. Zusätzlich zum Ein-Photonen-Übergang konnten in den erwähnten Experimenten auch Zwei- und Mehr-Photonen-Übergänge beobachtet werden. Zur theoretischen Betrachtung wurde die Schrödinger Gleichung für das vorliegende Problem numerisch gelöst, wobei das Potenzial durch ein kubisches Potenzial angenähert wurde. Die so berechneten Kurven waren mit den Messdaten in sehr gutem Einklang und somit wurde ein weiterer Hinweis auf das Quantenverhalten der Josephsonphase bzw. von Vortizes in einem Josephsonkontakt gefunden.

Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelte sich eine Gegenströmung zur bis dahin gängigen Meinung bzw. Betrachtung des Quantenverhaltens der Josephsonphase. Cirillo *et al.* konnten mittels numerischen Berechnungen auf



**Abbildung 3.18:** (a) Berechnete Abhängigkeit der Josephsonenergie von der Josephsonphase mit den zugehörigen Energieniveaus. (b) Mehrphotonenanregungen des Grundzustandes in den ersten angeregten Zustand (aus [WDLU03]).

rein klassischer Ebene die experimentellen Ergebnisse bezüglich der Energielevelspektroskopie von Martinis und Co. erklären [GJCC<sup>+</sup>04, BCGJ10]. Außerdem konnten sie mit klassischen Berechnungen sogar Rabi-ähnliche Oszillationen in Josephsonkontakten nachweisen [GJC05]. Ausgehend von der Bewegungsgleichung des RCSJ-Modells

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\varphi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + I_c \sin \varphi = I_{dc} + I_{ac} \sin(\omega_d t) + N(t), \quad (3.62)$$

wobei  $\varphi$  die Josephsonphase,  $C$  die Kapazität des Tunnelkontakts,  $R$  der Shunt-Widerstand,  $I_{dc}$  und  $I_{ac} \sin(\omega_d t)$  der kontinuierliche bzw. der alternierende Strom durch den Tunnelkontakt ist und  $N(t)$  das thermische Rauschen darstellen soll, wurden numerische Lösungen berechnet und mit den experimentellen Ergebnissen zur Energielevelspektroskopie verglichen. Sie konnten zeigen, dass die beobachteten Doppelppeakstrukturen auch mit rein klassischen Berechnungen erklärt werden können.

Für Experimente im Quantenregime bedeutet dies, dass das Sättigen der

Verteilungsbreite und das Auftreten von Doppelpeakstrukturen in Spektroskopiemessungen Hinweise auf das Quantenverhalten der Josephsonphase geben, jedoch keinen endgültigen Beweis liefern. Die experimentellen Ergebnisse müssen sowohl mit quantenmechanischen Simulation, basierend auf dem Lösen der Schrödinger Gleichung für das vorliegende Problem als auch rein klassische Simulationen basierend auf dem RCSJ-Modell bzw. der sinus-Gordon-Gleichung (im Falle langer Kontakte) verglichen werden. Außerdem sind die im Rahmen dieser Arbeit gemessenen Kontakte sehr lang zu den teils in den Referenzen verwendeten Kontakten, weshalb ein Beweis für das quantenmechanische Verhalten für Temperaturen  $T < T^*$  neu erbracht werden muss.

# Kapitel 4

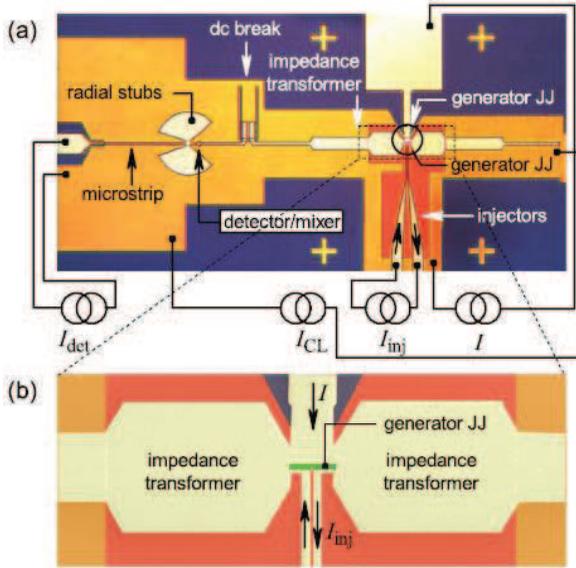
## Probenherstellung und experimenteller Aufbau

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Proben wurden zum einen am Kotel'nikov Institute of Radioengineering and Electronics in Moskau in der Gruppe von Prof. Koshelets und zum anderen am Institut für Mikro- und Nanoelektronische Systeme in Karlsruhe in der Gruppe von Prof. Siegel hergestellt. Zur Charakterisierung der Proben bei 4.2K stand ein einfacher Standardmessaufbau, der in einer Heliumkanne abgekühlt werden konnte, zur Verfügung. Für die Messungen bei variabler Temperatur stand ein konventionell erworbener Mischkryostat der Firma Leiden Cryogenics B.V. vom Typ MNK 126 zur Verfügung. Eine Beschreibung der Probenherstellung und der Messaufbauten findet sich in den folgenden Abschnitten.

### 4.1 Probenherstellung und Design

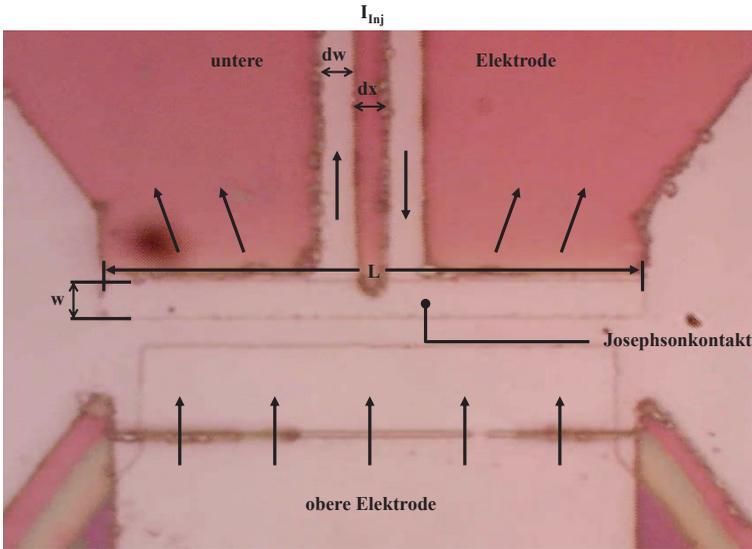
Bei den untersuchten Proben handelt es sich um Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Kontakte, die in einem Trilagenprozess hergestellt wurden, deren Herstellungsprozess sich jedoch unterscheidet, was vor allem zu einer unterschiedlichen Topographie und somit zu unterschiedlichen lateralen Ausdehnungen der Strukturen führt. Die Proben aus Moskau wurden mit konventioneller Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Technologie hergestellt [KKS<sup>+</sup>91, DLF<sup>+</sup>03, PFK<sup>+</sup>14], während für die Proben aus Karlsruhe eigens ein neuer, so genannter „self-planarized“ Prozess entwickelt wurde [MMB<sup>+</sup>13, Mec13]. Details zu den jeweiligen Prozes-

sen und den dazugehörigen Parametern kann in der angegebenen Literatur nachgelesen werden. An dieser Stelle wird der Herstellungsprozess nur kurz skizziert. Eine schematische Darstellung der in Moskau hergestellten



**Abbildung 4.1:** (a) Schematische Darstellung der Probe #M10. (b) Vergrößerung des langen Josephsonkontaktes mit Injektorpaar (übernommen aus [PFK<sup>+</sup>14]).

Probe (mit der internen Nummer #M10) ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Die Probe wurde ursprünglich für die Messung der emittierten Leistung und die Linienbreite der emittierten Strahlung eines Hochfrequenzgenerators, basierend auf einem rotierenden Semifluxon, designt. Das Semifluxon bildet sich spontan in einem Josephsonkontakt moderater Länge (siehe Abb. 4.1 (b)) durch die Diskontinuität  $\pi$  der Josephsonphase, welche mit einem Strominjektorpaar hervorgerufen wird. Die Strahlung wird mit einem on-chip Detektor, bestehend aus einem SIS-Josephsonkontakt, gemessen. Hierzu wurde zusätzlich ein Hochfrequenzkopplungskreis auf den Chip strukturiert (siehe Abb. 4.1 (b)), welcher zum einen die emittierte Strahlung zum Detektor leitet und zum anderen für die Linienbreitenmessung der emittierten Strahlung verwendet wird und wurde speziell für



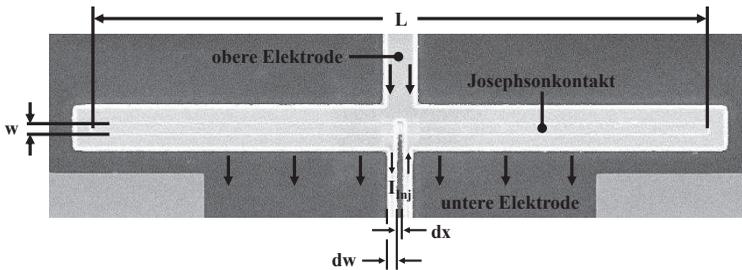
**Abbildung 4.2:** Optische Aufnahme des langen Josephsonkontaktes mit Injektorpaar der Probe #M25.

diese Messungen angepasst. Details zum Messaufbau und die Messungen der emittierten Leistung und der Linienbreite der emittierten Strahlung können in [PFK<sup>+</sup>14] nachgelesen werden.

Die Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb-Kontakte wurden in einem Standard Trilagenprozess hergestellt. Zuerst wird ein Siliziumwafer für mehrere Stunden oxidiert, sodass sich eine ca. 600nm dicke SiO<sub>2</sub> Schicht bildet. Anschließend wird Niob und Aluminium in-situ aufgesputtert, das Aluminium oxidiert und zu letzt eine weitere Nioblage aufgesputtert. Im nächsten Schritt wird eine SiO-Schicht als Isolierung aufgedampft und abschließend wird als Verdrahtungsebene eine weitere Schicht Niob aufgesputtert. Die einzelnen Schichtdicken sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.

Ein Injektorpaar ist mittig mit der oberen Elektrode des langen Josephsonkontaktes verbunden. In die untere Elektrode des langen Josephsonkontaktes ist eine Control-Line eingebunden. Diese liegt in-line mit dem Kontakt und dient zur Einkopplung eines Magnetfeldes. Der Kontakt von Probe #M25 hat eine Länge von  $L=32\mu\text{m}$  und eine Breite von

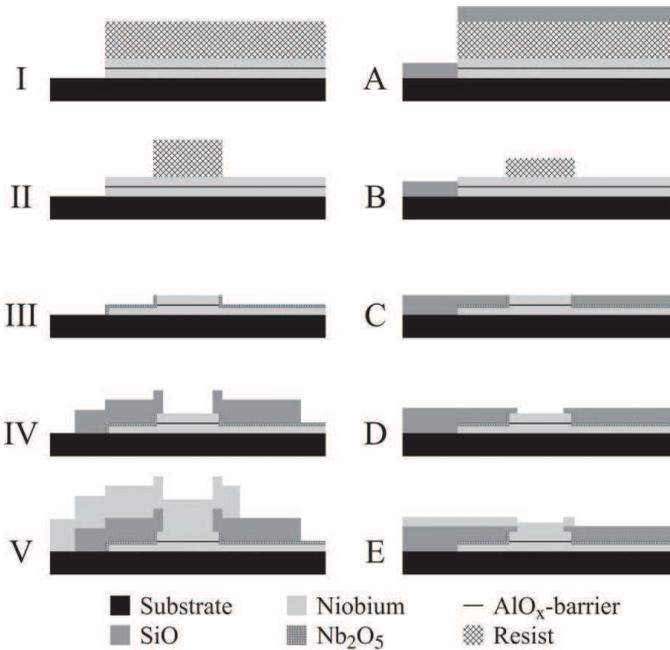
$w=2\mu\text{m}$ . Die Injektoren haben ebenfalls eine Breite  $dw=2\mu\text{m}$  und den Abstand  $dx=2\mu\text{m}$ . Die Enden des langen Josephsonkontakts sind jeweils an Hochfrequenzkopplungskreise gekoppelt, wobei ein Ende, das „tote“ Ende, einen Impedanztransformator enthält und das andere, „aktive“ Ende zwei Impedanztransformatoren und einen DC-Break enthält und wiederum an einen kurzen Kontakt gekoppelt ist. Dieses „aktive“ Ende dient der Messung der emittierten Leistung und der Linienbreite der emittierten Leistung und wird mit Hilfe des kurzen Kontaktes gemessen. Diese Arbeit beschränkt sich jedoch auf Messungen des langen Kontakts mit dem Injektorpaar (siehe Abb. 4.2) und dessen Eigenschaften. Da im Zuge neuer



**Abbildung 4.3:** REM Bild des Karlsruher Kontaktes #K144. Der Kontakt wurde mit dem neuen „self-planarized“ Prozess hergestellt.

Designs immer komplexere Strukturen entstehen und somit die Proben immer mehr Schichten bekommen, stößt der konventionelle Prozess aufgrund der immer höher werdenden Stufenhöhen an seine Grenzen. In der Gruppe von Prof. Siegel wurde deshalb ein neuer Herstellungsprozess entwickelt, der diese Stufenhöhen um bis zu 50% verringert. Details zu den Prozessparametern können in [MMB<sup>+</sup>13, Mec13] nachgelesen werden. Wie beim

konventionellen wird auch beim „self-planarized“ Prozess zuerst die Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb Trilage hergestellt und die entstehenden Lücken werden jetzt mit SiO aufgefüllt, so dass wieder eine fast ebene Oberfläche entsteht. Nach der Strukturierung der Josephsonkontakte und dem anschließenden Anodisieren ihrer Oberfläche in eine Nb<sub>2</sub>O<sub>5</sub>-Schicht als Isolierung, wird eine zweite SiO-Schicht zur Ebnung der Oberfläche aufgedampft. Im nächsten Schritt werden die Shunt-Widerstände und Vias strukturiert und nochmals eine dritte SiO-Schicht aufgedampft. Im letzten Schritt wird nun die Verdrahtungsebene strukturiert, sprich Kontaktzuleitungen und Injektoren. Da die Stufenhöhe der bisherigen Schichten  $\sim 30\text{nm}$  beträgt, kann eine Verdrahtungsebene mit einer Dicke von nur  $\sim 150\text{nm}$  strukturiert werden. Dies hat den Vorteil, dass die laterale Ausdehnung, vor allem von den Injektoren, mittels Elektronenstrahlolithographie problemlos im  $\text{sub}\mu\text{m}$  Bereich strukturiert werden kann, was dazu führt, dass die lateralen Ausdehnungen der gesamten Proben um ein Vielfaches kleiner gemacht werden können, als mit dem konventionellen Herstellungsprozess. Eine Übersicht über die Schichtdicken ist in Tabelle 4.1 zu sehen. Die neuen Kontakte sind somit deutlich unempfindlicher gegenüber äußeren Magnetfeldern, haben eine höhere kritische Stromdichte  $j_c$  und somit eine deutlich höhere Crossover-Temperatur  $T^*$ , was eine Vereinfachung für die Experimente, vor allem im Quantenregime, bedeutet. Eine Rasterelektronenmikroskopieaufnahme des Kontakts mit der internen Nummer #K144 ist in Abb. 4.3 zu sehen. Die Länge des Kontakts betrug  $L = 40\mu\text{m}$ , die Breite  $w = 0.83\mu\text{m}$ . Die Breite der Injektoren beträgt  $dw = 0.6\mu\text{m}$  und deren Abstand  $dx = 0.3\mu\text{m}$ . Die Strukturen sind im Vergleich zum konventionellen Prozess also deutlich kleiner. Die beiden Herstellungsprozesse sind in Abbildung 4.4 schematisch dargestellt. Beim konventionellen Prozess (I bis V) ist die größer werdende Stufenhöhe im Gegensatz zum „self-planarized“ Prozess (A bis E) deutlich zu erkennen. Bei der ersten Generation der neuen Kontakte traten Probleme bei den Injektoren auf. Entweder modulierten sie den kritischen Strom des Josephsonkontaktes nicht und ab einem Schwellwert von  $I_{Inj} \approx 1.5\text{mA}$  wurde schlagartig permanent magnetischer Fluss in den Kontakt eingekoppelt, oder die Modulation des kritischen Stroms erinnerte mehr an die  $I_c(H)$ -Kennlinie eines SQUIDs und konnte auch mit theoretischen Modellen nicht simuliert werden.



**Abbildung 4.4:** Schematische Darstellung des konventionellen Herstellungsprozesses (I-V) und des „self-planarized“ Prozesses (A-E). Die Abbildung wurde aus [MMB<sup>+</sup> 13] übernommen.

## 4.2 Das 4.2 K Setup

Für die Vorcharakterisierung der Proben wird ein Standardaufbau verwendet. Der untere Teil des Probenstabes, an den die Probe montiert wird, der in Abb. 4.2 gezeigt wird, befindet sich dabei in einem Bad aus flüssigem Helium. Als Kryostat dient hierbei eine Heliumkanne. Die Probe wird mit doppelseitigem Klebeband auf den Probenhalter aufgeklebt und mit 25  $\mu\text{m}$  Aluminiumdrähten, sogenannten Bonds, kontaktiert. Über den Probenhalter wird ein Kupferbecher geschraubt, auf den eine Spule gewickelt ist, mit deren Hilfe ein Magnetfeld an den Kontakt angelegt werden kann. Der Kupferbecher dient gleichzeitig noch als elektromagnetische Abschirmung. Zur Abschirmung externer Magnetfelder (z.B. Erdmagnetfeld) wird über den Kupferbecher ein Kryopermschild montiert, da die Proben sehr sensibel auf äußere Magnetfelder reagieren. Sollte diese Abschirmung nicht

Ebene	Material	konventioneller Prozess	self-planarized Prozess
Substrat	Si-SiO	$\sim 300\mu\text{m}$	$\sim 300\mu\text{m}$
untere Elektrode	Nb	90nm	90nm
Tunnelbarriere	Al-AlO <sub>x</sub>	6nm	6nm
obere Elektrode	Nb	90-100nm	30-90nm
Isolation 1	Nb <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	70nm	?
Isolation 2	SiO	$\sim 300\text{nm}$	$\sim 90\text{nm}$
Isolation 3	SiO	-	30-90nm
Isolation 4	SiO	-	30nm
Verdrahtungsebene	Nb	400-450nm	150-200nm

**Tabelle 4.1:** Auflistung der Schichtdicken der beiden Herstellungsprozesse.

ausreichend sein, kann ein zusätzliches zweites Kryopermschild montiert werden. Die elektrischen Zuleitungen werden über Durchführungsfilter, mit einer Abschneidefrequenz von ca. 5MHz bei 4.2K, nach außen geführt und direkt im Anschluss über ein optimiertes RC-Filterboard [MC93] geführt. Das Filterboard hat im Kalten eine Abschneidefrequenz von ca. 30kHz und dient als Tiefpassfilter. Vom Filterboard aus gehen verdrillte 140 $\mu\text{m}$  dicke Kupferdrähte zum Kopf des Stabes und von dort über ein gemeinsames, geschirmtes Kabel zur Anschlussbox. Zusätzlich kann der Aufbau in eine elektromagnetische Abschirmkammer, mit einer Abschneidefrequenz von  $\sim 20\text{GHz}$ , gestellt werden. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass es für die Charakterisierungsmessungen keine qualitativen Unterschiede gibt. Für die Messungen der Probenströme und Spannungen werden speziell entwickelte rauscharme Stromquellen und Vorverstärker, dessen äquivalentes Eingangsverstärkerrauschen ca. 2 $\mu\text{V}$  beträgt, verwendet. Diese werden mit dafür gebauten Batterien, den so genannten Akkuboxen betrieben, so dass das Problem des Rauschens vom Netzstrom umgangen wird. Zur Ansteuerung der Stromquellen und zum Auslesen des Vorverstärkers wurden 16-Bit ADC-/DAC-Computermesskarten vom Typ NI-6733 und NI-6052E verwendet, als Messprogramm wurde GoldExI [Gol13] verwendet. Für die Schaltstatistikmessungen des kritischen Stromes musste der Aufbau modifiziert werden. Für den Probenstrom und den Spannungsabgriff über den Kontakt wird nun ein Stromrampengenerator verwendet. Dieser wurde speziell für die Messungen des kritischen Stroms entwickelt [Bre06].

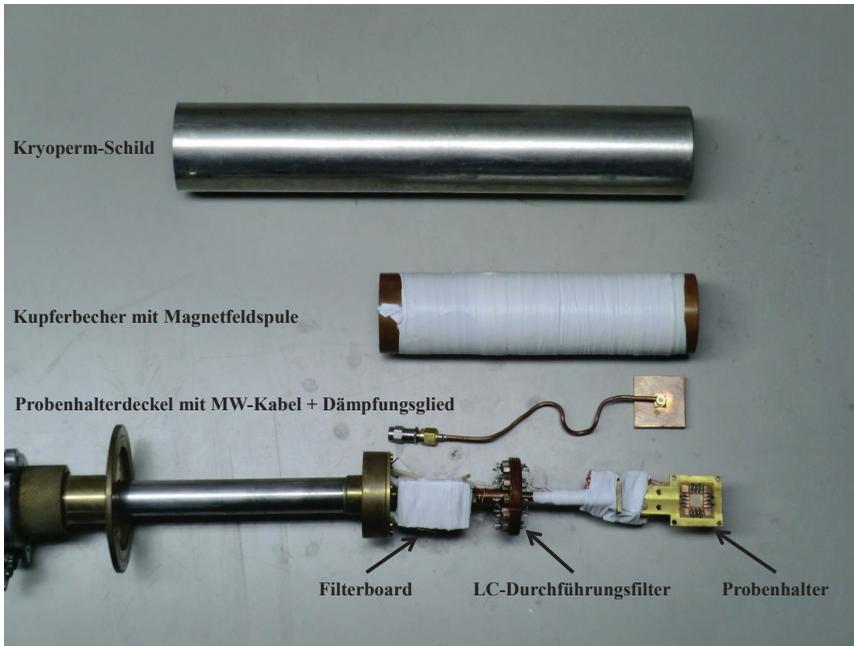
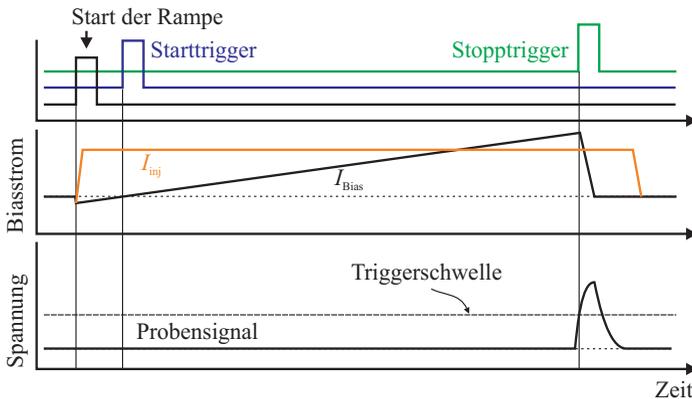


Abbildung 4.5: Aufnahme der unteren Hälfte des Probenstabes.

Eine Stromrampe wird mittels eines Trigger-Pulses gestartet und fährt den Biasstrom  $I$ , von einem leicht negativen Startwert kommend, mit konstanter Anstiegsgeschwindigkeit  $\dot{I}$  hoch, bis am Kontakt eine Spannung abfällt. Stromanstiegsgeschwindigkeit (Ramprate)  $\dot{I}$  und maximaler Strom können eingestellt werden. Beim Nulldurchgang wird ein Start-Trigger ausgelöst und sobald eine Spannung am Kontakt abfällt, wird ein Stop-Trigger ausgelöst. Die Zeit  $\Delta t$  zwischen Start- und Stop-Trigger wird mittels eines Zeitintervallzählers, vom Typ SR620 der Firma Stanford Research Systems, gemessen und somit kann der kritische Strom  $I_c = \Delta t \cdot \dot{I}$  bestimmt werden. Der Signalverlauf der Triggerpulse ist in Abb. 4.6 schematisch dargestellt. Diese Messung wird typischerweise 1000 bis 10000 mal wiederholt und so erhält man die Schaltstatistikwahrscheinlichkeit des kritischen Stroms (siehe 2.61). Die Injektoren und die Magnetfeldspule werden weiterhin über die oben erwähnten Stromquellen angesteuert. Probenstab, Rampengenerator und Stromquellen sind jedoch von der Ausleselektronik galvanisch

entkoppelt. Die Steuersignale werden in optische Pulse<sup>1</sup> übersetzt und mit Glasfaserkabeln mit dem Messaufbau verbunden. Auf diese Weise können wesentlich rauschärmere Messergebnisse erzielt werden, als mit der direkten Messmethode mit dem DAC über den Rechner. Steuerung und Auswertung erfolgt mittels selbstgeschriebenen LabView<sup>TM</sup>-Programmen. Zur



**Abbildung 4.6:** Darstellung des Signalverlaufs der Triggerpulse (oben), des Biasstroms bzw. Injektorstroms (Mitte) und der Spannung (unten).

Einkopplung von Mikrowellen kann zusätzlich ein semi-rigid Kabel in den Probenstab eingebaut werden. Die thermische Ankopplung erfolgt über ein Dämpfungsglied<sup>2</sup> (je nach Bedarf 3dB, 10dB oder 20dB), das über einen thermischen Anker mit dem Heliumbad verbunden ist. Zur Ankopplung der Mikrowellen an den Kontakt dient der Innenleiter eines SMP-Steckers. Der Stecker wurde mittig in den Kupferdeckel des Probenhalters gelötet, wobei darauf geachtet wurde, dass der Innenleiter keinen Kontakt zum Deckel hat. Der Innenleiter dient somit als Antenne für die Mikrowellen. Als Mikrowellenquelle dient ein Generator der Firma Rhode & Schwarz vom Typ SMR40.

<sup>1</sup>Agilent fiber optic components, HFBR-24xx Serie

<sup>2</sup>Fa. INMET Corp. via TACTRON Electronics

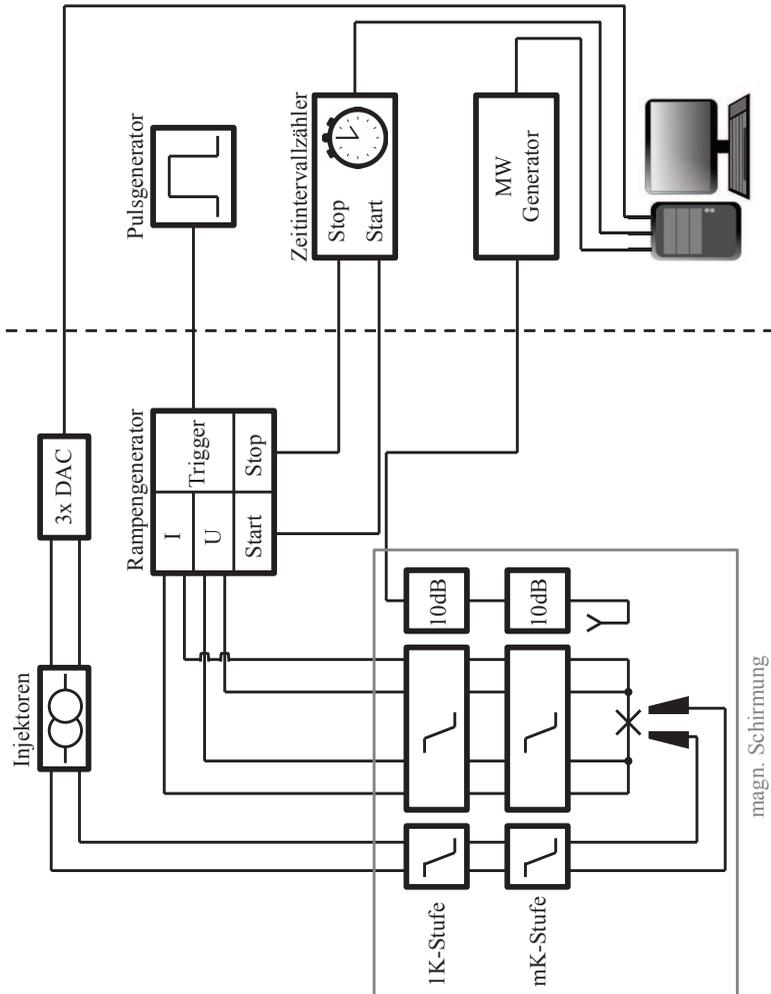
### 4.3 Der $^3\text{He}^4\text{He}$ -Mischkryostat

Für die Messungen bei tieferen Temperaturen wurde ein  $^3\text{He}^4\text{He}$ -Mischkryostat verwendet. Die grundlegende Funktionsweise eines solchen Gerätes wird in [RI64] beschrieben. Für die Experimente stand ein Mischkryostat der Firma Leiden Cryogenics<sup>3</sup> vom Typ MNK126 zur Verfügung. Dieser Mischkryostat hat eine Kühlleistung von  $400\mu\text{W}$  bei  $100\text{mK}$  und erreicht eine Basistemperatur von  $10\text{-}15\text{mK}$ . Der Kryostat befindet sich in einer Hochfrequenz-Abschirmkammer und ist zusätzlich von einem  $\mu$ -Metallschild, zur Abschirmung gegen das Erdmagnetfeld, umgeben. Die Elektronik ist die gleiche, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben und ist in Abb. 4.7 schematisch dargestellt. Sie ist galvanisch entkoppelt und die optischen Kabel werden dabei durch die Kammerwand geführt. Lediglich die Filterung der Zuleitungen im Mischkryostat sind unterschiedlich, eine Übersicht ist in Tab. 4.2 aufgelistet. Vom Kopf des Kryostaten bis zur Mischkammer wurden innerhalb der verschiedenen Temperaturstufen (siehe Abb. 4.8) Drähte aus Kupfer oder Manganin verwendet, die über Kupferblöcke an die jeweiligen Stufen thermisch angekoppelt sind. Zur Entkopplung der unterschiedlichen Temperaturstufen wurde verdrehter, supraleitender NbTi-Draht zwischen diesen eingesetzt. Auf der  $1\text{K}$ -Stufe befindet sich ebenfalls ein RC-Filterboard, das analog dem aus Abschnitt 4.2 aufgebaut ist. An die Mischkammer kann nun der Probenhalter angebaut werden. Zur Probe hin wurden verdrehte Kupferdrähte verwendet, die mit einem Kupferblock an den Probenhalter thermisch geankert sind und über Pi-Filter und selbstgebaute Powderfilter (Beschreibung siehe [BGH<sup>+</sup>03, LU08]) durch zwei Kupferbecher geschleust werden. Im inneren Kupferbecher befindet sich zusätzlich noch ein Kryopermschild zur magnetischen Abschirmung. An den Probenhalter kann zusätzlich ein Kupferzylinder montiert werden, um den eine Magnetfeldspule gewickelt ist. Zur Einkopplung von Mikrowellen ist ein Mikrowellenkabel eingebaut, das mit Dämpfungsgliedern auf der  $1\text{K}$ -Stufe ( $10\text{dB}$  oder  $20\text{dB}$ ) und auf der Mischkammer ( $10\text{dB}$  oder  $20\text{dB}$ ) thermisch geankert wurde. Aufgrund der thermischen Entkopplung der unterschiedlichen Temperaturstufen wurde ein Mikrowellenkabel aus Edelstahl<sup>4</sup> eingebaut. Für zukünftige Experimente wurde, analog zum ersten, ein zweites Mikrowellenkabel aus Edelstahl eingebaut, das auf der Mischkammer endet.

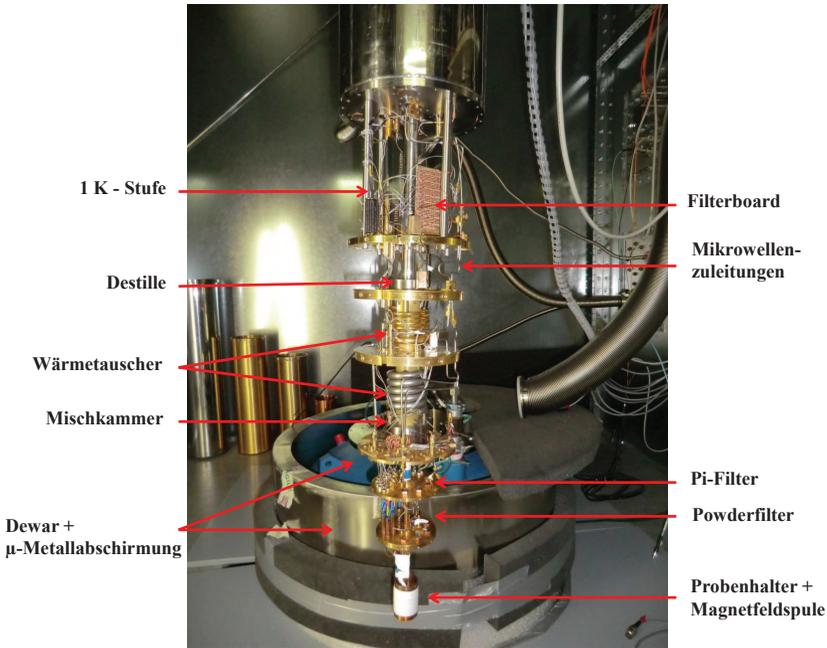
---

<sup>3</sup>Leiden Cryogenics B.V., <http://www.leidencryogenics.com>

<sup>4</sup>Fa. Elspec, UT85-SS-SS



**Abbildung 4.7:** Schematische Darstellung des Probenaufbaus zur Messung der Schaltstatistik des kritischen Stroms. Aufbauten links der gestrichelten Linie befinden sich innerhalb der Abschirmkammer, die restlichen außerhalb.



**Abbildung 4.8:** Aufnahme der Endstufe des Mischkryostaten mit eingebautem Probenhalter.

Zur Stabilisierung und Regelung der Temperatur dient ein PID-Regler<sup>5</sup>. Der dazugehörige Temperatursensor wird mittels einer Messbrücke<sup>6</sup> ausgelesen. Die Temperaturschwankungen konnten dabei auf etwa 0,5% der Badtemperatur beschränkt werden.

<sup>5</sup>Fa. Picowatt: TS-530A Temperature Controller

<sup>6</sup>Fa. Picowatt: AVS-47 Resistance Bridge

Filterstufe	elektrische Zuleitungen	Mikrowellen
1 K-Stufe	$RC$ -Tiefpass $R = 22 \Omega$ $C = 4,7 \mu\text{F}$	10dB bzw. 20dB
Destille	keine Filter	nur thermische Ankerung
Mischkammer	Pi-Filter $L = 1,8 \mu\text{H}$ $C = 1 \mu\text{F}$ Powderfilter	10dB bzw. 20 dB

**Tabelle 4.2:** Filterparameter der elektrischen Zuleitungen und der Mikrowellenkabel für den  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  Mischkryostaten.



# Kapitel 5

## Makroskopische Quanteneffekte in einem $\varphi$ -Josephsonkontakt mit Strominjektoren

In diesem Kapitel wird der Escape-Prozess der Josephsonphase aus den Potenzialminima eines  $\varphi$ -Josephsonkontakts untersucht. Wie in Kapitel 3.4 beschrieben, hat ein  $\varphi$ -Kontakt zwei entartete Grundzustände  $\pm\varphi$  und die Potenziallandschaft erinnert an ein  $2\pi$  periodisches Doppelmuldenpotential. In früheren Arbeiten wurde die Existenz solcher  $\varphi$ -Josephsonkontakte theoretisch vorhergesagt [GKKM11] und experimentell nachgewiesen [SLW<sup>+</sup>12, WKW<sup>+</sup>07, KWW<sup>+</sup>10, GSW<sup>+</sup>13]. Hierzu wurde ein  $\varphi$ -Kontakt, basierend auf einem konventionellen Niedertemperatursupraleiter mit ferromagnetischer Barriere, verwendet. Der Nachweis für die zwei Grundzustände wurde durch das Messen von zwei kritischen Strömen  $I_{c\pm}$  erbracht. Die Eigenschaften solcher  $\varphi$ -Josephsonkontakte wurde in verschiedenen Arbeiten diskutiert [GKKB07, GKKM13], die quantenmechanischen Eigenschaften solcher Kontakte wurden jedoch bisher noch nicht untersucht.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Makroskopische Quantentunneln der Josephsonphase in einem  $\varphi$ -Josephsonkontakt untersucht. Hierzu wurde ein konventioneller Josephsonkontakt (Probe #M25) mit einer Phasendis-

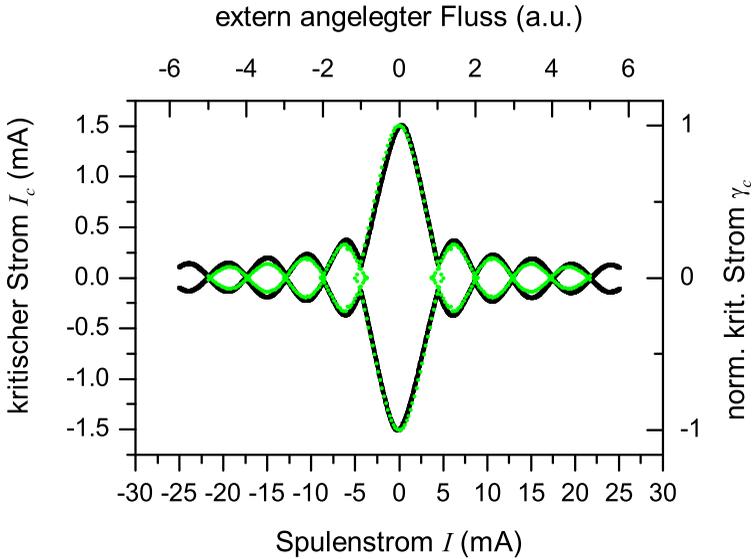
kontinuität  $\pi$ , die mit Hilfe eines Injektorpaars hervorgerufen wurde, verwendet (siehe Kap. 4.1). Für  $\kappa = \pi$  erhält man einen  $0-\pi$ -Josephsonkontakt, der effektiv ein periodisches Doppelmuldenpotenzial mit zwei entarteten Grundzuständen  $\phi = \pm\varphi$  besitzt. Die Existenz dieser beiden Grundzustände konnte durch Messen zweier kritischer Ströme  $I_{c\pm}$  bestätigt werden. Anschließend wurde der Escapeprozess aus beiden Potenzialminima, durch Aufnehmen von Histogrammen, untersucht. Diese Histogramme enthalten zwei Messpeaks, die den beiden kritischen Strömen  $I_{c\pm}$  zugeordnet werden können. Bei Absenken der Badtemperatur konnte ein Sättigen der Histogrammbreite festgestellt werden, welches einen Übergang von der thermischen Aktivierung zum makroskopischen Quantentunneln bei einer Crossover-Temperatur  $T^* \approx 175\text{mK}$  nahe legt. Um Verifizieren zu können, dass die Sättigung aufgrund des Quantentunnelns herrührt und nicht durch das Rauschen des Systems verursacht wird, wurden diesbezüglich weitere Messungen gemacht.

## 5.1 Charakterisierung der Proben

Die Charakterisierung der Proben wurde bei 4.2K mit dem in Kapitel 4.2 beschriebenen Setup durchgeführt. Zunächst wurde eine  $IV$ -Kennlinie aufgenommen. Diese diente zum einen zur Bestimmung diverser Kontaktparameter und zum anderen konnte sichergestellt werden, dass der Kontakt frei von magnetischem Fluss, in Form von Abrikosov-Vortizes in den Zuleitungen oder von Josephsonflusswirbeln zwischen den supraleitenden Elektroden, ist.

Als nächstes wurde eine  $I_c(H)$ -Kennlinie gemessen (siehe Abb. 5.1). Da die Magnetfeldabhängigkeit von der Länge des Kontakts abhängig ist, konnte so die Josephseindringtiefe  $\lambda_J$  und über die Beobachtung so genannter Fiske-Stufen die Plasmafrequenz  $\omega_0$  des Kontakts bestimmt werden. Diese Parameter sind für spätere Simulationen von großer Bedeutung.

Anschließend wurde eine  $I_c(I_{inj})$ -Kennlinie aufgenommen (siehe Abb. 5.2). Diese dient als Test dafür, dass die Injektoren richtig funktionieren. Außerdem werden dabei Eigenfeldeffekte, die von den Injektoren verursacht werden, sichtbar. Diese Effekte können die Kurven punktsymmetrisch zum Ursprung verzerren. Zusätzlich dient die Kennlinie der Kalibrierung der Strominjektoren, da  $I_{inj} \propto \kappa$  gilt. In der theoretischen Kurve (grün) ist deutlich die Kreuzung im Minimum der  $I_c(I_{inj})$ -Kennlinie zu erkennen. Diese Kreuzung liefert die zwei kritischen Stromwerte, welche für die in

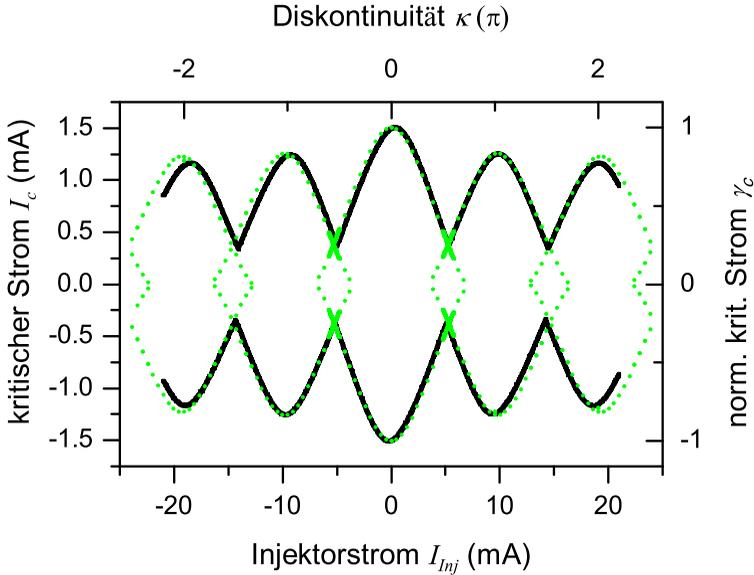


**Abbildung 5.1:** Messung einer  $I_c(H)$ -Kennlinie (schwarz) von Probe #M25 zusammen mit der zugehörigen Simulation (grün).

Abschnitt 5.2 folgenden Messungen von enormer Bedeutung sind. In der Messkurve sind die Kreuzungen in den Minima nicht zu sehen, da eine zu große Sweep-Geschwindigkeit gewählt wurde um diese auflösen zu können. Die Simulationen wurden mit dem Simulationsprogramm  $\varphi$ -sigo.c<sup>1</sup> geschriebenen Programm durchgeführt. Das Programm löst die eindimensionale sinus-Gordon-Gleichung unter Berücksichtigung sämtlicher Kontaktparameter, insbesondere eines oder mehrerer Strominjektorpaare endlicher Breite, mit anschließendem Mappen auf einen  $\varphi$ -Kontakt. Die zu lösende sinus-Gordon-Gleichung sieht dabei wie folgt aus:

$$\beta_C \ddot{\gamma} = \lambda_J^2 \gamma'' + j_{bias} + j_{inj}(x) - \dot{\gamma} - j_z^N - \sin(\gamma), \quad (5.1)$$

<sup>1</sup>R. Kleiner, Universität Tübingen (2014)



**Abbildung 5.2:** Messung einer  $I_c(I_{inj})$ -Kennlinie (schwarz) von Probe #M25 zusammen mit der zugehörigen Simulation (grün).

wobei  $\gamma$  hier die Phase bezeichnet. Sämtliche Variablen außer  $x$  sind dimensionslos. Die Strominjektoren werden wie folgt berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
 j_{inj}(x) &= I_{inj} [x_n \dots x_n + W], \\
 j_{inj}(x) &= -I_{inj} [x_n + W + D \dots x_n + 2W + D], \\
 &0 \quad \text{sonst.}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Mit diesem Programm können Strom-Spannungs-Kennlinien,  $I_c(H)$ -Kennlinien und  $I_c(I_{inj})$ -Kennlinien simuliert werden, aber auch das Verhalten des kritischen Stroms unter Mikrowelleneinstrahlung, sprich resonanter Escape der Josephsonphase, betrachtet werden. Diese Betrachtungen sind vor allem in Abschnitt 6.2 von Bedeutung.

Kleine Abweichungen zwischen Experiment und Simulation bezüglich des Maximums des kritischen Stroms sowie leichte Asymmetrien der  $I_c(H)$ -Kennlinie sind auf Flussfokussierung aufgrund einer senkrechten Feldkomponente bzw. einer inline Komponente des Biasstroms zurückzuführen. Als zusätzlicher Test für die Simulationsparameter wurde eine  $I_c(H)$ -Kennlinie

für  $\kappa = \pi$  gemessen. Hierbei muss in den Simulationen auf das Vorzeichen des Injektorstroms geachtet werden.

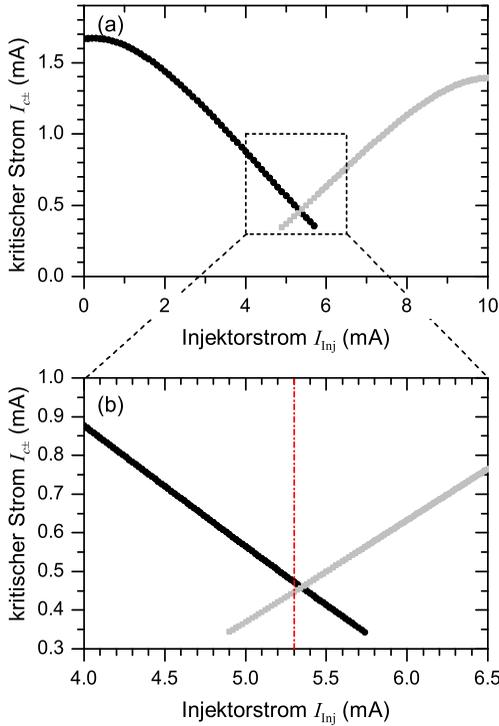
Im Laufe dieser Arbeit wurden mehrere Proben gemessen. Die im folgenden Abschnitt gezeigten Daten beschränken sich jedoch auf die Probe #M25. Aus den Messungen der  $IV$ -Kennlinie und der  $I_c(H)$ -Kennlinie erhält man einen kritischen Strom  $I_c = 1.53\text{mA}$  bei  $T = 4.2\text{K}$  was einer kritischen Stromdichte von  $j_c \approx \text{kA}/\text{cm}^2$  und einer Josephsoneindringtiefe von  $\lambda_J \approx 12\mu\text{m}$  (aus Fits der  $I_c(I_{inj})$ -Kennlinie) entspricht. Somit erhält man für den Kontakt #M25 eine normierte Länge von  $l = L/\lambda_J \approx 2.67$ . Die Parameter von Kontakt #M25 sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Zusätzlich sind die Parameter der Probe #K144 dargestellt. Messungen und Auswertung folgte analog zur Moskauer Probe. Die Parameter werden für spätere Simulationen benötigt.

Parameter	Probe #M25	Probe #K144
$I_c$	1.53 mA	1.086 mA
$j_c$	$2.39 \frac{\text{kA}}{\text{cm}^2}$	$3.27 \frac{\text{kA}}{\text{cm}^2}$
$\lambda_J$	$\approx 12 \mu\text{m}$	$\approx 11 \mu\text{m}$
$l = \frac{L}{\lambda_J}$	2.67	3.63
$c_{sw}$	$7.95 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$8.43 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$f_0$	105 GHz	122 GHz
$C^*$	$16.54 \frac{\mu\text{F}}{\text{cm}^2}$	$16.92 \frac{\mu\text{F}}{\text{cm}^2}$

**Tabelle 5.1:** Parameter für die Probe #M25 und die Probe #K144 für  $T = 4.2\text{K}$ .

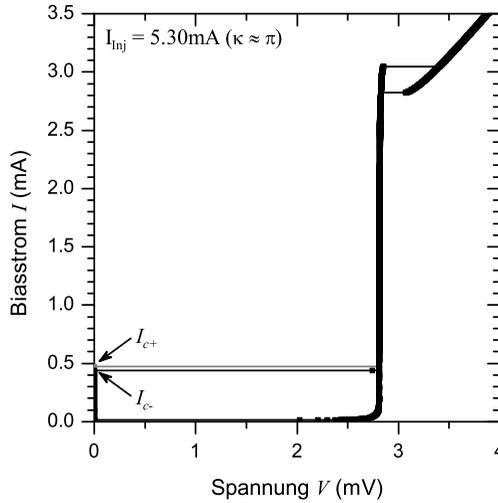
## 5.2 Makroskopisches Quantentunneln in einem $\varphi$ -Josephsonkontakt mit Strominjektoren

Für die Escapemessungen wurde die Probe #M25 in den in Abschnitt 4.3 beschriebenen  $^3\text{He}^4\text{He}$ -Mischkryostaten eingebaut und auf Basistemperatur ( $\sim 20\text{mK}$ ) abgekühlt. Da sich die Eigenschaften des Kontakts während des Abkühlvorgangs nochmals geringfügig ändern (kritischer Strom wird um ca. 8% größer) wird der Kontakt nochmals charakterisiert und eine erneute Injektorkalibrierung durchgeführt (siehe Abb. 5.3). Für einen sym-



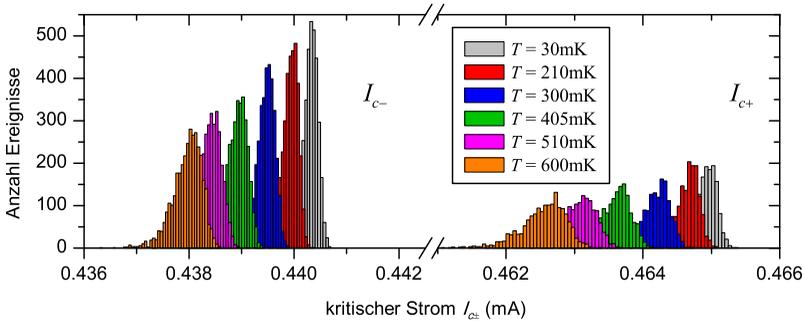
**Abbildung 5.3:** (a) Abhängigkeit des kritischen Stroms  $I_c$  vom Injektorstrom  $I_{inj}$  bei  $T = 20\text{mK}$ . (b) Zoom in Kreuzungsbereich der beiden Kurven nahe  $\kappa = \pi$ , verdeutlicht durch die vertikale Linie.

metrischen Josephsonkontakt, d.h. die Strominjektoren sind exakt in der Mitte des Kontakts platziert und keine Eigenfeldeffekte treten auf, liegt das erste Minimum der  $I_c(I_{inj})$ -Kennlinie bei  $\kappa = \pi$ . Für einen asymmetrischen Kontakt haben die ersten Minima der  $I_c(I_{inj})$ - und der  $-I_c(I_{inj})$ -Kennlinien leicht unterschiedliche Werte (siehe Abb. 5.2). Der Injektorstrom  $I_c(I_{inj})$ , für den  $\kappa = \pi$  gilt, liegt mittig zwischen den beiden erhaltenen Werten. Der Kontakt #M25 weist so eine leichte Asymmetrie auf und man erhält  $I_{inj} = I_{inj}^\pi = 5.30\text{mA}$ , siehe Abb. 5.3. Aufgrund dieser leichten Asymmetrie ist man für  $\kappa = \pi$  vom  $I_c(I_{inj})$  Minimum verschoben und erhält somit einen  $0$ - $\pi$ -Kontakt mit zwei kritischen Strömen. Abbildung 5.4 zeigt zwei  $IV$ -Kennlinien die für  $\kappa \approx \pi$  aufgenommen wurden.



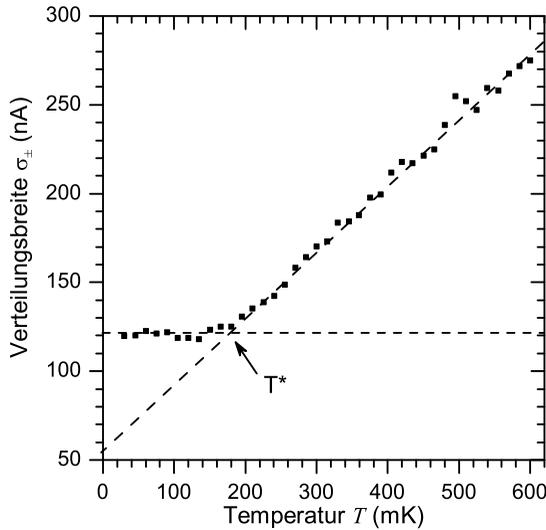
**Abbildung 5.4:** *IV-Kennlinie von Probe #M25 für  $I_{inj} = 5.30\text{mA}$  ( $\kappa \approx \pi$ ). Es sind deutlich die beiden kritischen Ströme  $I_{c+} > I_{c-}$  zu erkennen. Die Kurve wurde bei  $T = 20\text{mK}$  gemessen.*

Aufgrund von Fluktuationen im Biasstrom bzw. vorhergegangenen Messungen ist es möglich zwei kritische Ströme  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  zu messen, die dem jeweiligen Escape der Josephsonphase  $\psi$  aus den beiden Potenzialmulden, der jeweiligen  $+\varphi$ - und  $-\varphi$ -Zuständen zugeordnet werden können. Um beide kritischen Ströme messen zu können, muss die Dämpfung des Kontakts ausreichend gering sein [GKKB07, SLW<sup>+</sup>12]. Da die Dämpfung von Kontakt #M25 sehr viel kleiner ist, als in vorherigen Experimenten [SLW<sup>+</sup>12], können beide kritischen Ströme, wie auch das Überschneiden beider Äste in der  $I_c(I_{inj})$ -Kennlinie über einen großen Temperaturbereich ( $T = 20\text{mK} \dots 4.2\text{K}$ ) gemessen werden. Für die Escapemessungen wurde der in Abschnitt 4.2 beschriebene Messaufbau mit Stromrampengenerator verwendet. Bevor mit den Messungen gestartet werden kann, muss versucht werden die äußeren Einflüsse und somit das Rauschen im Kontakt zu minimieren. Hierzu können zusätzliche Filter zwischen Kryostat und Probenkabel eingebaut und die Messelektronik und Kryostat geerdet werden. Für die Schaltstatistikmessungen des kritischen Stroms wird der Biasstrom mit einer konstanten Ramprate von  $\dot{I} = 79.6\text{mA/s}$  gerampt und der exakte Wert des kritischen Stroms gemessen. Diese Messung wird  $N = 5000$ mal



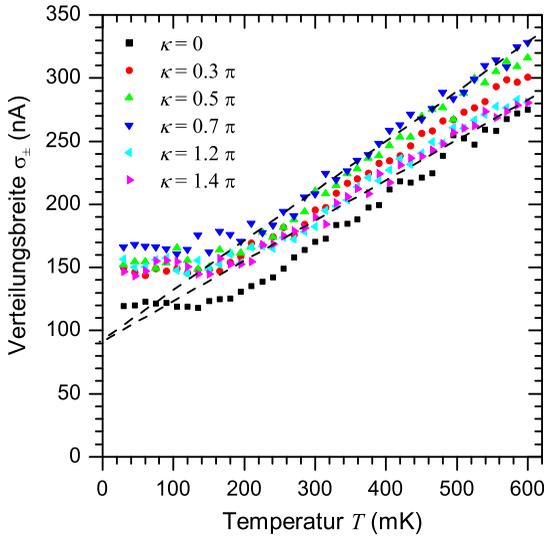
**Abbildung 5.5:** Histogramme für  $\kappa = \pi$  bei verschiedenen Temperaturen. Jedes Histogramm hat zwei Peaks, die dem Escape der Josephsonphase aus dem jeweiligen  $+\varphi$ - und  $-\varphi$ -Zustand zugeordnet werden können.

wiederholt und so erhält man ein Histogramm für die Verteilung des kritischen Stroms. Zunächst wurde die Abhängigkeit der Verteilungsbreite  $\sigma$  von der Temperatur  $T$  ohne angelegten Injektorstrom, also für  $\kappa = 0$ , gemessen. Diese ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Zusätzlich zu den gemessenen Datenpunkten wurde eine Extrapolation des thermischen Bereichs für  $T \rightarrow 0$  eingezeichnet. Es ist deutlich zu sehen, dass für  $T = 0$  die Verteilungsbreite größer null ist, nämlich  $\sigma = 55\text{nA}$ . Dies ist ein Maß für den „Hintergrund“ der Verteilungsbreite und ein Wert dafür, was theoretisch erreichbar wäre. Die Werte für  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$  fallen für die gezeigten Daten zusammen. Die Werte sind nur nahe  $\kappa = \pi$  unterschiedlich. Anschließend wurden die Messungen für verschiedene Injektorströme wiederholt (siehe Abb. 5.7). Es ist deutlich zu erkennen, dass mit steigendem Injektorstrom zunächst auch die Werte für die Verteilungsbreite größer werden und für  $\kappa > \pi$  wieder kleiner werden. Es wurden zusätzlich Extrapolationen für  $\kappa = 0.7\pi$  und  $\kappa = 1.4\pi$  des thermischen Bereiches für  $T \rightarrow 0$  gemacht (gestrichelte Linie). Für beide Extrapolationen erhält man eine Verteilungsbreite  $\sigma = 90\text{nA}$  für  $T = 0$ . Die Erhöhung im Vergleich zu  $\kappa = 0$  entsteht aufgrund des zusätzlichen Rauschens, welches durch die Injektorstromquelle hervorgerufen wird. Zwar kann ein Großteil des Rauscheintrages herausgefiltert werden, jedoch nicht der gesamte Anteil. Im nächsten Schritt wurde die Verteilungsbreite  $\sigma_{\pm}$  für  $\kappa = \pi$  gemessen. Aufgrund der geringen Dämpfung des Kontakts ist der Anfangszustand des Systems ( $+\varphi$  oder  $-\varphi$ ) zu Beginn jeder Einzelmessung willkürlich. Deshalb erhält man



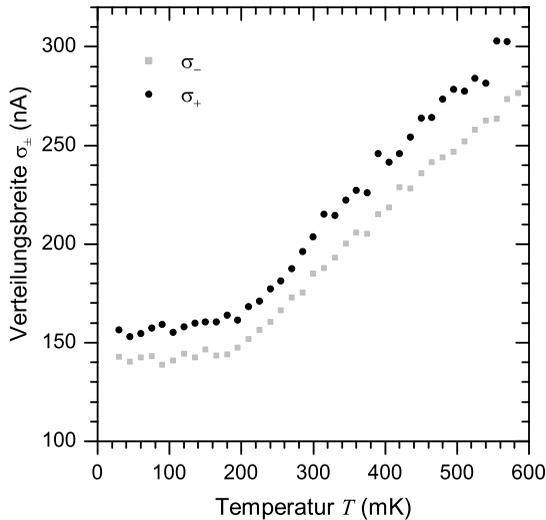
**Abbildung 5.6:** Abhängigkeit der Verteilungsbreiten  $\sigma_{\pm}$  für  $\kappa = 0$  von der Temperatur  $T$ . Zusätzlich wurde eine Extrapolation des thermischen Bereichs für  $T \rightarrow 0$  eingezeichnet (gestrichelte Linie).  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$  fallen für die gezeigten Daten zusammen.

Histogramme mit zwei Peaks, die den beiden kritischen Strömen  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  zugeordnet werden können. Abbildung 5.5 zeigt solche Histogramme für verschiedene Temperaturen  $T$ . Je kleiner die Temperatur ist, desto mehr schieben die Peaks nach rechts in Richtung des jeweiligen rauschfreien, kritischen Stromes  $I_{c0\pm}$ . Gleichzeitig nimmt die Verteilungsbreite des Histogramms ab. Die Verteilungsbreite  $\sigma_{\pm}(T)$  für verschiedene Temperaturen von 30mK bis 600mK ist für  $\kappa = \pi$  in Abbildung 5.8 aufgetragen, wobei die einzelnen Messpunkte aus den jeweiligen Histogrammen extrahiert wurden. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Verteilungsbreite  $\sigma_{\pm}(T)$  unterhalb einer Temperatur  $T < T^* \approx 175\text{mK}$ , bei Werten von  $\sigma_+^{sat}(T) \approx 165\text{nA}$  und  $\sigma_-^{sat}(T) \approx 145\text{nA}$ , sättigt. Eine solche Sättigung der jeweiligen Verteilungsbreiten der Histogramme ist ein Hinweis darauf, dass ein Übergang vom thermischen Regime hin zum Makroskopischen Quantentunneln der Josephsonphase aus den  $+\varphi$ - und  $-\varphi$ -Zuständen stattgefunden hat. Da viele Ergebnisse von Experimenten bezüglich Makroskopischen Quanteneffekten mit rein klassischen Methoden unter Berücksichtigung



**Abbildung 5.7:** Abhängigkeit der Verteilungsbreiten  $\sigma_{\pm}$  von der Temperatur  $T$  für Injektorströme  $\kappa = 0$  bis  $1.4\pi$ . Zusätzlich wurden Extrapolationen des thermischen Bereichs für  $T \rightarrow 0$  eingezeichnet (gestrichelte Linien).  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$  fallen für die gezeigten Daten zusammen.

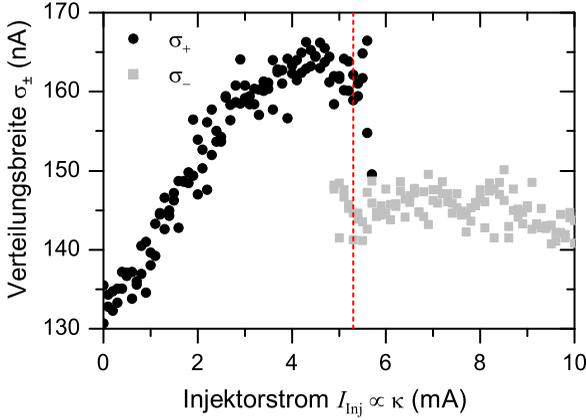
von thermischen Fluktuationen und nicht stationärer Dynamik in extrem unterdämpften Systemen erklärt werden können, vor allem solche mit Mikrowellenanregungen [GJC05, MCGJ06, MCGJ09, GJM CB10], müssen bei der Interpretation der Ergebnisse zusätzliche Überlegungen angestellt werden. Die Sättigung der Verteilungsbreite kann durch parasitäres Heizen der Proben, welches durch kurzzeitiges Schalten des Kontakts in den resistiven Zustand nach der eigentlichen Messung hervorgerufen wird, zu Stande kommen. Um die Möglichkeit dieses Überhitzens ausschließen zu können, wurden sämtliche Messungen mehrmals mit verschiedenen Rampraten und in verschiedenen Messzyklen wiederholt. Hierbei konnte kein qualitativer Unterschied festgestellt werden und dieser Aspekt ausgeschlossen werden. Ein weiterer Grund für die Sättigung der Verteilungsbreite kann Hintergrundrauschen des Messaufbaus sein. Dieses Rauschen kann verschiedene Ursachen haben. Zum Einen können die Zuleitungen als Antennen funktionieren, das Rauschen der Umgebung aufnehmen und somit für ein konstantes Hintergrundrauschen sorgen. Zum Anderen können sowohl Bias-



**Abbildung 5.8:** Verteilungsbreiten  $\sigma_{\pm}$  der Histogramme für die beiden kritischen Ströme  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  als Funktion der Temperatur  $T$ . Es ist deutlich zu erkennen, dass  $\sigma_{\pm}$  unterhalb  $T \approx 175\text{mK}$  sättigt.

strom als auch Injektorstrom ein zusätzliches Rauschen hervorrufen. Eine Standardtechnik, das elektronische Rauschen des Systems als Grund für die Sättigung der Verteilungsbreite auszuschließen, ist zu zeigen, dass im verwendeten Messaufbau und mit gleicher Probe Werte für  $\sigma$  gemessen werden können, deren Wert unterhalb der Sättigungswerte  $\sigma_{\pm}$  liegen. Aus Abbildung 5.8 ist sofort ersichtlich, dass die Werte für  $\sigma_{+}^{sat}$  nicht auf ein Hintergrundrauschen zurückzuführen sind, da gleichzeitig die Verteilungsbreite  $\sigma_{-}^{sat}$  gemessen wurde, deren Werte für den gleichen Injektorstrom deutlich kleiner sind als die von  $\sigma_{+}^{sat}$ . In MQT-Experimenten mit konventionellen, kurzen Josephsonkontakten wird als zusätzlicher Nachweis die Abhängigkeit von einem extern angelegten Magnetfeld gemessen. Dieses unterdrückt den kritischen Strom und somit auch die Verteilungsbreite (siehe [Gar95]). Im Fall von Diskontinuitäten, hervorgerufen mittels Strominjektoren, ist es sinnvoller die Verteilungsbreite als Funktion des Injektorstroms zu untersuchen.

Im Experiment wurde  $\sigma_{\pm}^{sat}(\kappa)$  bei einer Temperatur von  $T = 20\text{mK}$  gemessen, siehe Abb. 5.9. Es ist deutlich zu erkennen, dass die experimentellen



**Abbildung 5.9:** Abhängigkeit der Verteilungsbreite  $\sigma_{\pm}$  vom Injektorstrom  $I_{inj} \propto \kappa$  bei  $T = 20$  mK. Die vertikale Linie zeigt den Wert für  $\kappa = \pi$ . Der Einfachheit halber wurden die Symbole außerhalb des Bereichs mit zwei kritischen Strömen  $I_{c\pm}$  beibehalten.

Daten nicht mit dem theoretisch vorhergesagten Verlauf übereinstimmen. Dennoch ist klar zu sehen, dass  $\sigma_+^{sat}(\kappa)$  für  $\kappa \approx \pi$  ein Maximum hat. Somit kann gefolgert werden, dass für den Escape der Phase aus dem  $+\varphi$ -Zustand tatsächlich ein Übergang zum Makroskopischen Quantentunneln stattfindet. Im Falle von  $\sigma_-^{sat}(\kappa)$  ist das Maximum sehr schwach ausgeprägt. Jedoch kann aufgrund der Tatsache, dass es Werte für  $\sigma_-^{sat}(\kappa)$  gibt, die minimal sind, davon ausgegangen werden, dass die Verteilungsbreite nicht aufgrund von Rauschen des Systems sättigt. Sollte das Rauschen vom Injektorstrom hervorgerufen werden, würde die Verteilungsbreite monoton mit dem Injektorstrom ansteigen, was in Abb. 5.9 definitiv nicht der Fall ist. Nichts desto trotz ist eine nicht thermische Komponente des Hintergrundrauschens vorhanden. Durch Extrapolieren des thermischen Regimes der  $\sigma_{\pm}(T)$ -Abhängigkeit in Abbildung 5.8 für  $T \rightarrow 0$  erhält man einen minimalen Wert der Verteilungsbreite  $\sigma_{\pm} \rightarrow 70$  nA. Dieser Wert kann als vernünftige Abschätzung des parasitären Rauschens im System genommen werden.

In [GMB<sup>+</sup>15] wurde ein effektives Modell für kurze Josephsonkontakte mit einer Phasendiskontinuität eingeführt, mit dem die Verteilungsbreiten  $\sigma_{\pm}(\kappa)$  im Quantenregime approximativ berechnet wurden. Im Rah-

men dieses Modells ist  $\sigma_{\pm}$  für  $\kappa = 0$  und  $\kappa = 2\pi$  maximal und sinkt bei Annäherung an  $\kappa = \pi$  ab. Dies steht im Gegensatz zu den Messergebnissen. Weitere Modelle stehen derzeit nicht zur Verfügung.



# Kapitel 6

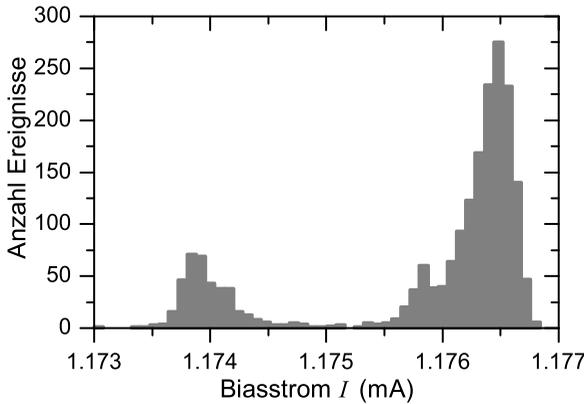
## Resonanter Escape

In diesem Kapitel werden Spektroskopiemessungen an Josephsonkontakten mit einer normierten Länge  $l = 2 - 3$  vorgestellt. Dabei wurden, der im Kapitel 5 vorgestellte Kontakt #M25, sowie der lineare Kontakt mit interner Bezeichnung #K144 vom Karlsruher Institut für Technologie verwendet. Die Charakterisierung von Kontakt #K144 wurde analog zu der von Kontakt #M25 durchgeführt. Die Parameter sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Der Großteil der hier vorgestellten Ergebnisse wurde an Kontakt #M25 gemessen. Kontakt #K144 diene, aufgrund ähnlicher Parameter, vor allem als Referenz um eventuelle parasitäre Resonanzen, welche auf den Messaufbau zurückzuführen sind, ausschließen zu können. Mittels der erhaltenen Kontaktparameter wurden Simulationen bezüglich des resonanten Escapeprozesses auf rein klassischer Ebene durchgeführt um diese anschließend mit den erhaltenen Messergebnissen zu vergleichen.

### 6.1 Bestimmung der Plasmafrequenz

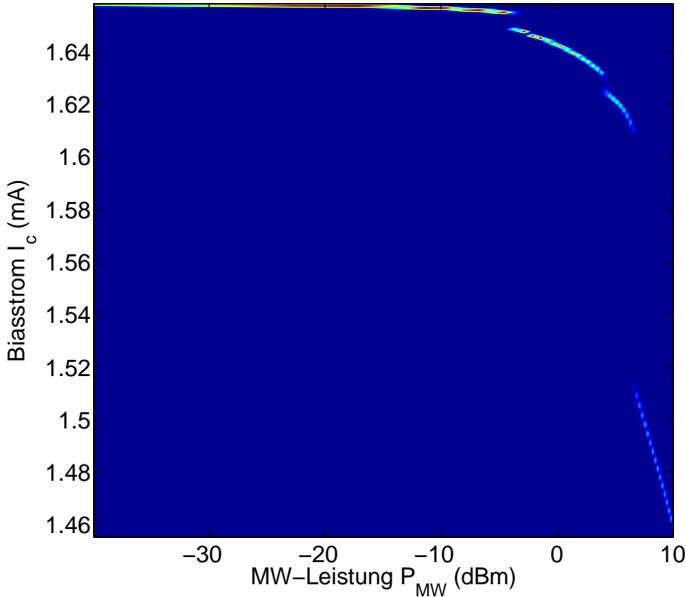
Für die Messungen der Biasstrom abhängigen Plasmafrequenz  $\omega_{pl}(I)$  wurde ebenfalls der in Kapitel 4.3 beschriebene Aufbau verwendet. Zusätzlich wurden jetzt noch Mikrowellen in den Kontakt eingekoppelt. Im klassischen Bild des Teilchens im Waschbrettspotenzial bedeutet dies, dass das Teilchen durch die Einstrahlung von Mikrowellen zu Schwingungen angeregt wird. Deshalb erhöht sich die Wahrscheinlichkeit eines Escapes bei geringerer Verkippung des Potenzials. Der kritische Strom  $I_c$  des Kontakts verschiebt sich deshalb zu niedrigeren Werten. Die resonante Akti-

vierung der Phase des Josephsonkontaktes erfolgt dann, wenn die biasstromabhängige Plasmafrequenz  $\omega_{pl}(I)$  mit der eingestrahlten Mikrowellenfrequenz  $\omega_{ext}$  übereinstimmt. Durch die Anregung führt das Teilchen immer stärkere Oszillationen durch und kann so möglicherweise die Potenzialbarriere überwinden, obwohl die thermischen Fluktuationen für einen Escape zu gering sind (siehe Abb. 3.15). In einem quantenmechanischen Bild müssen bei der resonanten Aktivierung Energielevels betrachtet werden, vgl. Abschnitt 6.2. Im Experiment strahlt man Mikrowellen konstanter



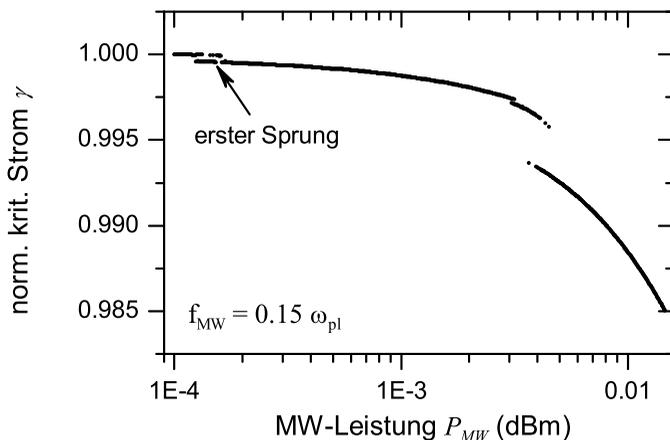
**Abbildung 6.1:** *Schaltstatistikmessung unter Mikrowelleneinstrahlung. Die Mikrowellenleistung wurde so gewählt, dass der Resonanzpeak (links) ca. 20% der Ereignisse umfasst und deutlich zu erkennen ist.*

Frequenz, wobei  $\omega_{ext} < \omega_0$  ist, ein und erhöht dabei den Biasstrom. Alle in Abschnitt 6.1 dargestellten Messungen und Simulationen wurden ohne angelegten Injektorstrom, also  $\kappa = 0$ , gemacht. Bei richtiger Wahl der Mikrowellenleistung erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass der Kontakt am Resonanzpunkt in den resistiven Zustand schaltet. Im  $I_C$ -Histogramm ist für diesen Fall neben dem thermischen Peak ein zusätzlicher Resonanzpeak zu erkennen (siehe Abb. 6.1). Dabei kommt es auf die richtige Wahl des Leistungsbereichs an. Für zu kleine Leistungen sieht man nur den thermischen Peak, für zu große Leistungen ist nur der Resonanzpeak zu erkennen. Diese Doppelpeakstruktur ist deshalb nur für einen sehr kleinen Bereich der Mikrowellenleistung zu beobachten. Multiphotonanregungen, wie in Abschnitt 3.8 beschrieben, spielen hierbei noch keine Rolle und sind für die Bestimmung der Plasmafrequenz nicht von Bedeutung.



**Abbildung 6.2:** Messung von  $I_c$ -Histogrammen in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung für Kontakt #M25 bei  $T = 20\text{mK}$ .  $f_{MW} = 20.79\text{GHz}$ ,  $P_{MW} = -40$  bis  $+10$  dBm, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5000$ . Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messung wurde bei  $T = 20\text{mK}$  gemacht.

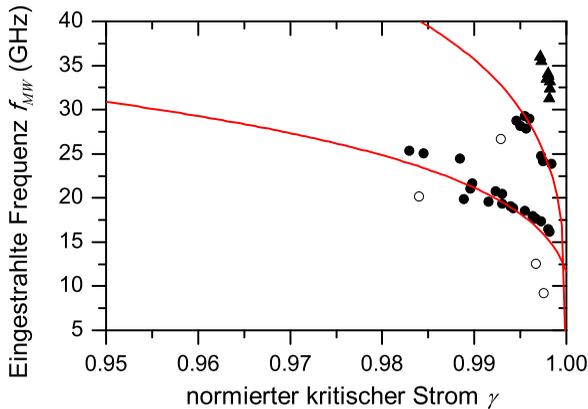
Zunächst wurde für verschiedene Frequenzen die Mikrowellenleistung von Hand variiert und so nach der Doppelpeakstruktur gesucht. Auf diese Weise konnte über ein Frequenzintervall von 15-40 GHz ein sinnvoller Leistungsbereich eingegrenzt werden, in dem eine Doppelpeakstruktur zu erwarten ist. Dieser Leistungsbereich lag typischerweise zwischen -40 dBm und +10 dBm. Anschließend wurden mit einem automatisierten Messprogramm Histogrammserien für konstante Mikrowellenfrequenz bei variierender Leistung gefahren, wobei die Mikrowellenleistung schrittweise erhöht wurde. Eine solche Serie ist in Abb. 6.2 dargestellt. Für niedrige Leistungen ist nur der thermische Peak sichtbar. Erhöht man die Leistung kommt es zum Auftreten eines  $I_c$ -Sprunges (siehe Abb. 6.3). Dieser Sprung des kritischen Stromes wird mit der in Abschnitt 3.7 beschriebenen klassischen Theorie vorhergesagt und ist auch Teil der theoretischen



**Abbildung 6.3:** Mittels  $\varphi$ -sigo.c berechnete Abhängigkeit des normierten kritischen Stromes  $\gamma$  von der Mikrowellenleistung  $P_{MW}$  für Kontakt #M25. Anregungsfrequenz  $f_{MW} = 0.15\omega_{pl}$ . Die Simulation wurde für den Injektorstrom  $\kappa = 0$  durchgeführt.

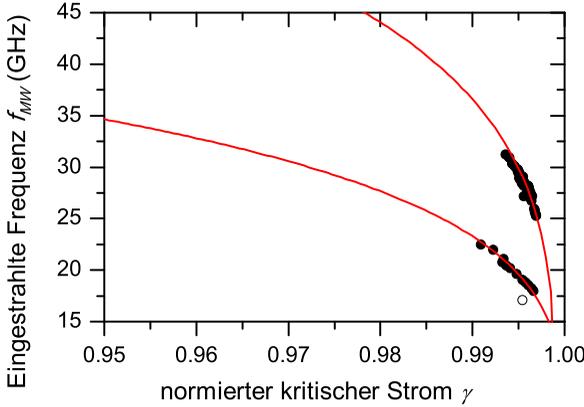
Betrachtungen bezüglich des resonanten Escapes der Josephsonphase in [GJCC<sup>+</sup>04, BCGJ10]. Wird die Mikrowellenleistung weiter erhöht, nähert sich die Wahrscheinlichkeit des resonanten Escapes dem Wert 1, der thermische Peak verschwindet und es ist nur noch der resonante Peak sichtbar. Wird die Leistung weiter erhöht, wird der kritische Strom immer stärker unterdrückt und es kann zu weiteren Sprüngen kommen (siehe Abb. 6.2), die durch höhere Harmonische der eingestrahlten Mikrowelle bewirkt wird. Dieses Verhalten stimmt ebenfalls mit den klassischen theoretischen Vorhersagen überein (siehe Abb. 6.3). Es zeigte sich, dass bei einigen (experimentellen)  $I_c$ -Histogrammen weitere Sprünge und komplexe Strukturen auftraten, die nicht mit den theoretischen Vorhersagen übereinstimmten. Diese Sprünge verschoben die Histogramme zu niedrigeren Biasströmen hin und konnten auf den Messaufbau zurückgeführt werden. Bei den Mikrowellenleistungen, bei denen diese Strukturen bzw. Sprünge auftreten, findet ein Umschalten interner Dämpfungsglieder des Mikrowellengenerators statt. Aufgrund dessen kommt es an der Mikrowellenantenne zu Reflexionen, da diese keinen definierten  $50 \Omega$ -Abschlusswiderstand besitzt. In vorangegangenen Arbeiten [Gab07, Buc10] wurde dieses Verhalten systematisch analysiert und für verschiedene Mikrowellenantennen untersucht.

Dabei stellte sich heraus, dass die Art der Mikrowelleneinkopplung für die frequenzabhängigen Messungen keinen nennenswerten Unterschied machte. Deshalb diente für sämtliche Spektroskopiemessungen der Innenleiter eines SMP-Steckers, welcher in den Kupferdeckel des Probenhalters eingebaut wurde, als Mikrowellenantenne (siehe Abschnitt 4.2), so dass die Einkopplung definiert gleich war.



**Abbildung 6.4:** Aus Schaltstatistik-Messungen extrahierte Positionen des Resonanzpeaks (volle Symbole) und die Plasmafrequenzabhängigkeit nach Gl. (3.50) (Linien) für die Probe #M25. Vermutliche parasitäre Resonanzen sind als offene Symbole, vermutlich durch Mikrowelleneinstrahlung erhöhter thermischer Escape als dreieckige Symbole dargestellt.

Zur experimentellen Bestimmung der Plasmafrequenz wurde aus den  $I_c$ -Histogrammserien die Position des Resonanzpeaks für verschiedene Frequenzen extrahiert. Dabei wurde die Mikrowellenleistung so gewählt, dass der Resonanzpeak ca. 10% der Ereignisse des Histogramms umfasste. Die Ergebnisse für die Probe #M25 und die Probe #K144 sind in den Abbildungen 6.4 bzw. 6.5 dargestellt. Aufgrund der hohen Plasmafrequenz beider Kontakte ( $\approx 100$  GHz), konnte nicht für alle Frequenzen eine Doppelpeakstruktur beobachtet werden, da der Resonanzpeak sehr nahe am maximalen kritischen Strom  $I_c \approx 0.98I_{c0}$  liegt. Dies liegt daran, dass der Mikrowellengenerator nur Mikrowellen bis 40 GHz einstrahlen kann und so keine Messungen nahe der Plasmafrequenz gemacht werden können. Zusätzlich wurden Kurven (rote Linie) nach Gleichung (3.50) eingefügt, um zusätzlich eventuelle parasitäre Mikrowellenfrequenzen (offene Symbo-

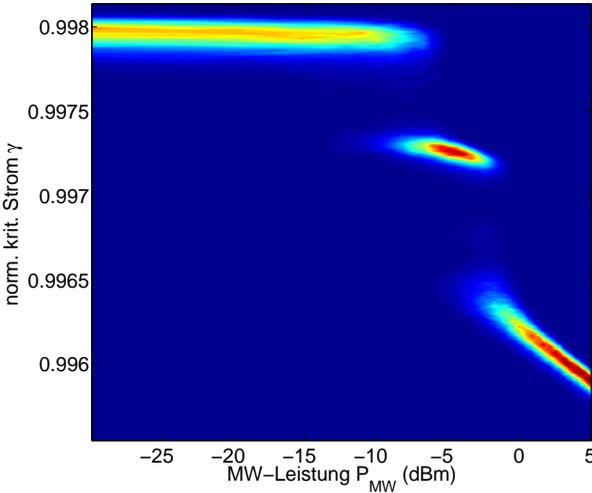


**Abbildung 6.5:** Aus Messungen extrahierte Positionen des Resonanzpeaks (volle Symbole) und die Plasmafrequenzabhängigkeit nach Gl. (3.50) (Linien) für die Probe #K144. Vermutliche parasitäre Resonanzen sind als offene Symbole dargestellt.

le) für spätere Messungen ausschließen zu können. Für die Probe #M25 liefern die Fits zwei Kurven für Plasmafrequenzen (von unten nach oben)  $f_{pl} \approx 55$  GHz und  $f_{pl} \approx 102$  GHz. Der Wert für  $f_{pl} \approx 102$  GHz stimmt mit dem in Abschnitt 5.1 bestimmten Wert für die Plasmafrequenz sehr gut überein. Der zweite Wert ist auf eine Harmonische der Plasmafrequenz zurückzuführen. Die dreieckigen Symbole sind höchstwahrscheinlich auf den, durch die Mikrowelleneinstrahlung erhöhten, thermischen Escape zurückzuführen. Analog erhält man für die Probe #K144 in Abb. 6.5 Werte für die Plasmafrequenz von  $f_{pl} \approx 62$  GHz und  $f_{pl} \approx 120$  GHz. Der Wert  $f_{pl} \approx 120$  GHz stimmt ebenfalls gut mit dem in Abschnitt 5.1 bestimmten Wert überein,  $f_{pl} \approx 62$  GHz ist wiederum auf eine Harmonische der eingestrahelten Frequenz zurückzuführen. Dies ist jedoch nur eine qualitative Analyse. Aufgrund der vielen unbekanntenen Größen, wie beispielsweise die Eindringtiefe  $\lambda_J$  oder die Kapazität des Kontaktes  $C$ , ist eine quantitative Analyse nicht möglich. Nimmt man jedoch einen Fehler von ca. 10% für die Bestimmung der Plasmafrequenz an, so stimmen die ermittelten Werte für die Plasmafrequenz relativ gut überein.

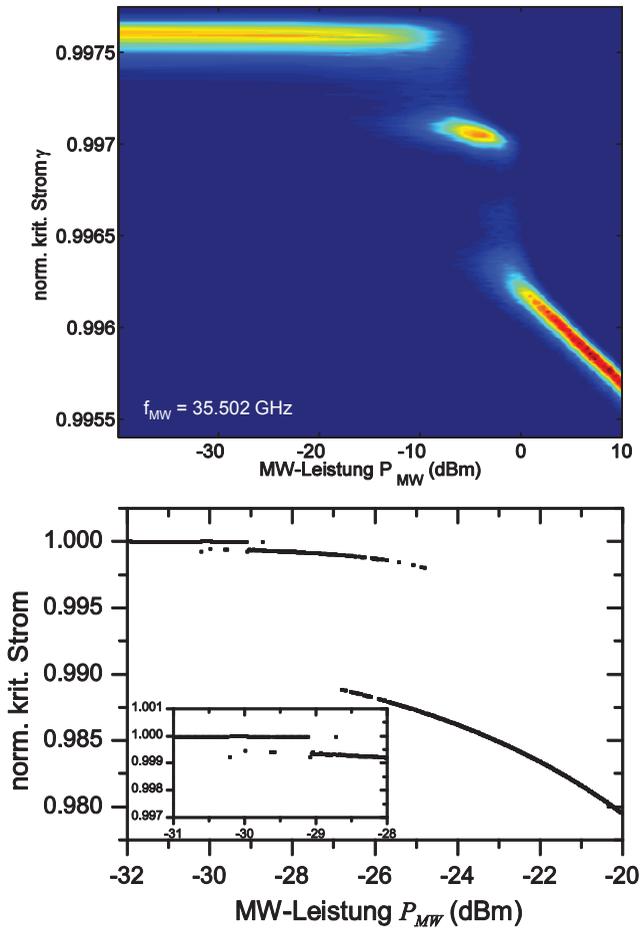
## 6.2 Energielevelspektroskopie

In den Messungen zur Plasmafrequenz trat bei einigen Frequenzen zusätzlich zur Doppelpeakstruktur ein weiterer Resonanzpeak auf. Dieser manifestierte sich in den Contourplots als ein zusätzliches Plateau zwischen den bekannten thermischen und resonanten Peaks. Bei niedrigen Leistungen, kleiner  $-10$  dBm, war zunächst nur der thermische Escapepeak zu sehen. Erhöhte man die Leistung auf  $-7$  dBm trat eine Doppelpeakstruktur auf. Bei erneuter Erhöhung der Mikrowellenleistung auf  $-2$  dBm sprang der Biasstrom erneut auf einen noch niedrigeren Wert und folgte schließlich bei weiterer Leistungserhöhung dem aus Abschnitt 6.1 bekannten Verlauf. Abbildung 6.6 zeigt einen Verlauf der  $I_c$ -Histogramme bei konstant gehaltener Mikrowellenfrequenz  $f_{MW} = 36.004$  GHz. Die Mikrowellenleistung wurde schrittweise von  $-30$  dBm auf  $+5$  dBm erhöht. Jedes  $I_c$ -Histogramm besteht dabei aus 5000 Einzelmessungen des kritischen Stromes. Die Anzahl der Ereignisse ist hier farbkodiert, wobei blau Null Ereignissen entspricht und rot einer hoher Anzahl an Ereignissen. Für Leistungen  $< -13$  dBm ist nur der thermische Escapepeak zu sehen. Zwischen  $-13$  dBm und  $-7$  bildet sich die Doppelpeakstruktur und ein Zwischenplateau aus. Bei  $-4$  dBm erfolgt dann der zweite Sprung und ab  $0$  dBm folgt der Verlauf des kritischen Stroms analog der klassischen Kurve. Bei genauerem Hinsehen sind zwischen den beiden großen Sprüngen noch weitere Ereignisse zu sehen. Aufgrund der geringen Anzahl an Histogrammpunkten ( $N = 5000$ ) gehen diese Escapepeaks jedoch im Rauschen der Messung unter. Die Ursache dieser Multipeakstrukturen sind höchstwahrscheinlich quantenmechanischen Ursprungs und es handelt sich hierbei um den resonanten Escape der Josephsonphase aus verschiedenen Energieniveaus innerhalb der Potenzialmulde, vgl. Kapitel 3.8 [MDC87, SPRR97, WDLU03, WLL<sup>+</sup>03, BLT<sup>+</sup>06]. Im Experiment wird bei konstanter Mikrowellenfrequenz  $f_{MW}$  und Leistung der Biasstrom variiert. Für  $f_{MW} \approx (E_n - E_m)/\hbar$  kann bei geeigneter Mikrowellenleistung der Escape aus dem angeregten Zustand gemessen werden, was einem niedrigeren, gemessenen kritischen Strom entspricht. Zunächst werden bei konstanter Mikrowellenfrequenz  $f_{MW}$  Histogrammserien, mit 5000 Messpunkten pro Histogramm, für 50 verschiedene Mikrowellenleistungen im Bereich von  $-40$  dBm bis  $+10$  dBm aufgenommen. Dies dient zum einen dem Herausfiltern der für die Energielevelspektroskopie geeigneten Mikrowellenfrequenzen und zum anderen zum Festlegen, des dafür benötigten Bereichs der Mikrowellenleistung. In Abbildung 6.7 ist eine Histogrammserie für die Probe #M25 bei der Mikrowellenfrequenz  $f_{MW} = 35.502$  GHz

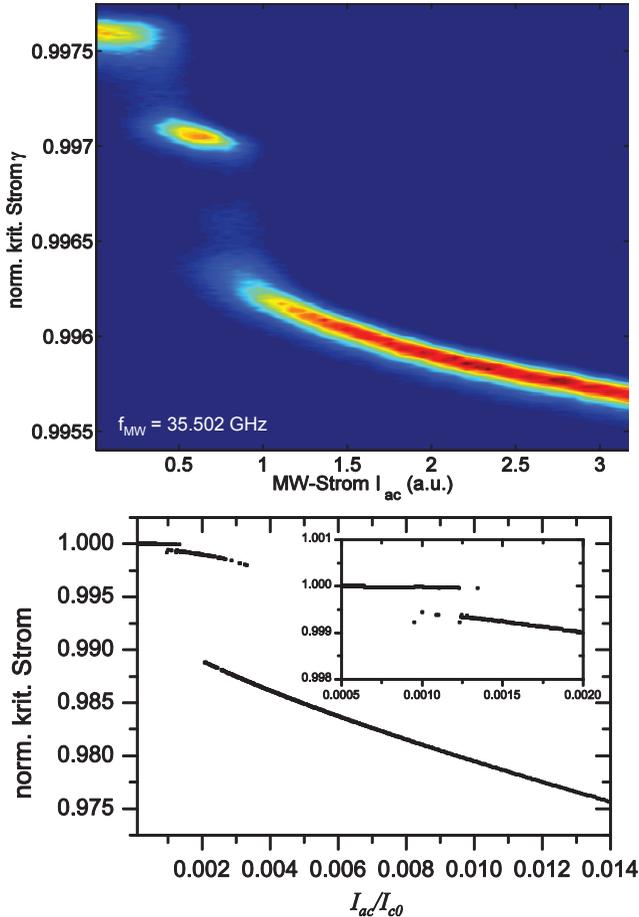


**Abbildung 6.6:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung  $P_{MW}$ . Die Mikrowellenfrequenz wurde dabei konstant bei  $f_{MW} = 36.004$  GHz gehalten, die Leistung schrittweise von  $-30$  dBm auf  $+5$  dBm erhöht. Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messung wurde bei  $T = 20$  mK gemacht.

und die zugehörige Simulation ( $\varphi$ -sigo.c) gezeigt. Die experimentellen Daten wurden auf  $I_{c0}$  normiert, dessen Wert aus quantenmechanischen Fits von  $I_c$ -Histogrammen ohne Mikrowelleneinstrahlung bestimmt wurde. Für die Messung wurde die Mikrowellenleistung in einem Bereich von  $-40$  dBm bis  $+5$  dBm in 50 Schritten variiert. Für Leistungen  $< -13$  dBm ist nur der thermische Escapepeak zu sehen. Zwischen  $-13$  dBm und  $-7$  bildet sich in den experimentellen Daten die Doppelppeakstruktur und ein Zwischenplateau aus. Bei  $-4$  dBm erfolgt dann der zweite Sprung und ab  $0$  dBm folgt der Verlauf des kritischen Stroms analog den klassischen Vorhersagen aus Kapitel 3.7. Zusätzlich zu den Messdaten wurde die Abhängigkeit des kritischen Stromes  $I_c$  von der Mikrowellenleistung  $P_{MW}$  berechnet (siehe Kap 5.1). Sowohl im Experiment, wie auch in der Simulation sind zwei Sprünge des kritischen Stromes zu sehen, jedoch ist die Sprünghöhe, vor allem des zweiten Sprunges, in der Simulation deutlich größer als im Experiment. Die Höhe der beiden Sprünge im Experiment entspricht der Höhe des ersten



**Abbildung 6.7:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung  $P_{MW}$  für die Mikrowellenfrequenz  $f = 35.502$  GHz und zugehörige Simulation von  $I_c$ -Histogrammen in Abhängigkeit von der Mikrowellenleistung  $P_{MW}$ . Der Contourplot besteht aus 50 Histogrammen zu je 5000  $I_c$ -Werten. Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$ mK gemacht.

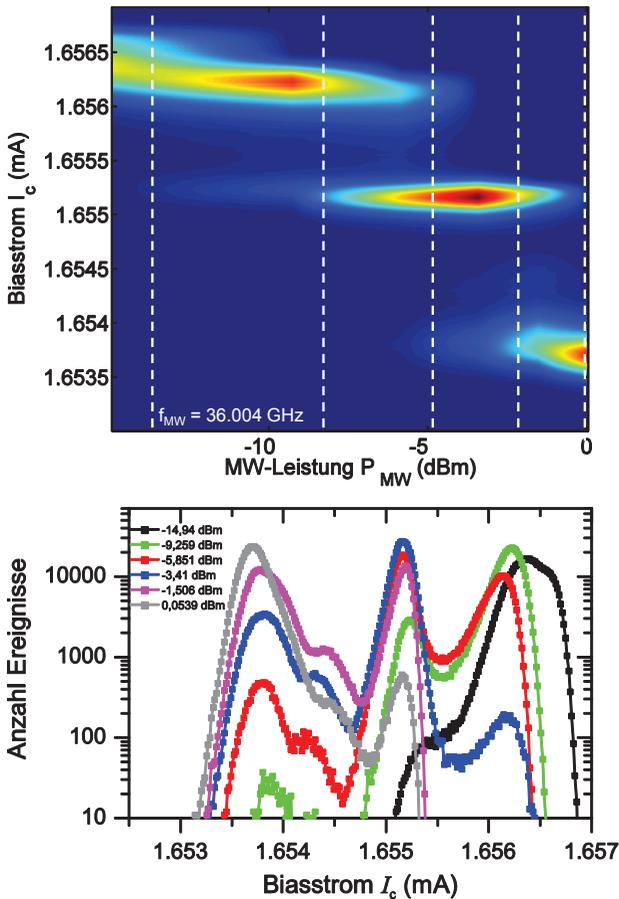


**Abbildung 6.8:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit vom Mikrowellenstrom  $I_{ac}$  für die Mikrowellenfrequenz  $f = 35.502 \text{ GHz}$  und zugehörige Simulation von  $I_c$ -Histogrammen in Abhängigkeit vom Mikrowellenstrom  $I_{ac}$ . Der Contourplot besteht aus 50 Histogrammen zu je 5000  $I_c$ -Werten. Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20\text{mK}$  gemacht.

Sprunges in der Simulation. Das heißt, das kleine Zwischenplateau in der Messung deutet eher auf den Escape aus einem angeregten Zustand hin, als darauf, dass der kritische Strom dem klassischen Verlauf folgt. Dieses Zwischenplateau konnte nicht mit den klassischen Berechnungen simuliert werden.

Es soll hier gesagt werden, dass die logarithmische Darstellung der Messdaten die Ergebnisse verzerrt. Der Bereich zwischen -40 dBm und -10 dBm scheint aus vielen Histogrammen zu bestehen, in Wirklichkeit stecken nur drei Histogramme hinter dem Kurvenabschnitt. In Abbildung 6.8 werden deshalb die Messdaten für die Frequenz  $f = 35.502$  GHz in Abhängigkeit des Mikrowellenstromes  $I_{ac}$  und die zugehörige Simulation dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die einzelnen Äste aus mehreren Histogrammen bestehen. Somit kann man ausschließen, dass die gefundenen Strukturen auf Messartefakte eines einzelnen Histogramms zurückzuführen sind. Bei genauerem Hinsehen sind in den Messdaten zwischen den beiden Sprüngen noch zusätzliche Ereignisse zu sehen. Dies deutet daraufhin, dass für diese Mikrowellenleistungen noch weitere Niveaus schwach besetzt wurden und zusätzliche Escapepeaks auftreten. Aufgrund der geringen Anzahl an Histogrammpunkten ( $N = 5000$ ) gehen diese Escapepeaks jedoch in der Messung unter. Neben den gezeigten Messdaten für die Frequenz  $f = 35.502$  GHz wurden ähnliche Strukturen im Bereich zwischen  $f = 17$  GHz und  $f = 36$  GHz gefunden auf deren Darstellung an dieser Stelle verzichtet wird.

Aufgrund dessen wurden die Messungen für einen kleineren Leistungsbe- reich und mit höherer Auflösung wiederholt. Dabei wurden für 6 verschiedene Mikrowellenleistungen  $I_c$ -Histogramme mit je 500.000 einzelnen  $I_c$ - Werten aufgenommen. Abbildung 6.9 zeigt den Contourplot (oben) und die sechs dazugehörigen Histogramme (unten) für Kontakt #M25 bei konstanten Frequenz  $f_{MW} = 36.004$  GHz. Die einzelnen Leistungspunkte der Histogramme sind durch die weißen gestrichelten Linien im Contourplot nochmals hervorgehoben. Die Strukturen zwischen den beiden großen Sprüngen sind im Contourplot nun deutlicher zu erkennen. Am besten sieht man diese jedoch in den Histogrammplots. Für die kleinste Leistung (schwarze Kurve) ist nur der thermische Peak zu sehen. Dieser ist aufgrund der eingestrahlten Mikrowelle und eines Drifts des kritischen Stroms zu Beginn der Messung etwas verbreitert. Wird die Leistung nun auf -10 dBm erhöht (grüne Kurve), so ist neben dem thermischen Peak auch der Resonanzpeak bei einem kritischen Strom von  $I_c = 1.65525$  mA deutlich zu sehen. Außerdem ist ein dritter Peak bei  $I_c = 1.6538$  mA zu erahnen.



**Abbildung 6.9:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung (oben) für 6 Histogramme und die zugehörigen Histogramme (unten) für  $f_{MW} = 36.004$  GHz. Die einzelnen Leistungspunkte der Histogramme sind zur Verdeutlichung eingezeichnet (gestrichelte Linien). Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5 \cdot 10^5$ .

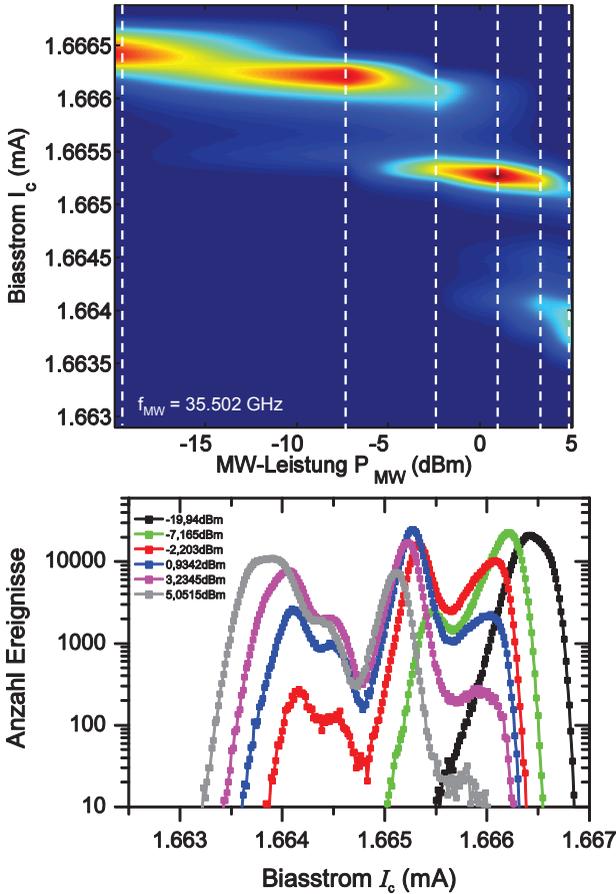
Dieser wird für die nächste Mikrowellenleistung ( $-5.8$  dBm, rote Kur-

ve) noch deutlicher sichtbar. Außerdem ist diesem noch ein weiterer, vierter Peak vorgelagert. Der Resonanzpeak ist ebenfalls deutlich zu sehen, sowie der thermische Peak, dessen kritischer Strom  $I_c$  aufgrund der zunehmenden Leistung weiter unterdrückt wird. Bei der nächsten Erhöhung der Leistung auf  $-3.4$  dBm (blaue Kurve) wird der thermische Peak nun stark unterdrückt, der Resonanzpeak erreicht sein Maximum und die Peaks drei und vier treten noch deutlicher hervor. Erhöht man die Leistung weiter (magentafarbene Kurve) verschwindet der thermische Peak komplett, die drei Resonanzpeaks sind immer noch deutlich zu erkennen. Bei der höchsten Leistung (graue Kurve) wird der erste Resonanzpeak nun ebenfalls stark unterdrückt und der dritte Peak erreicht seinen maximalen Wert.

Die gleiche Messung wurde nun für weitere Frequenzen wiederholt. In Abbildung 6.10 ist der Contourplot und die zugehörigen Histogramme für die Mikrowellenfrequenz  $f_{MW} = 35.502$  GHz dargestellt. Für diese Messung wurde ein Leistungsbereich von  $-20$  dBm bis  $+5$  dBm gewählt. Es wurden ebenfalls für 6 Leistungspunkte  $I_c$ -Histogramme mit 500.000 Punkten aufgenommen. Ähnlich wie für die vorherige Messung sind auch hier bis zu vier Peaks in einem Histogramm zu sehen (blaue und magentafarbene Kurven).

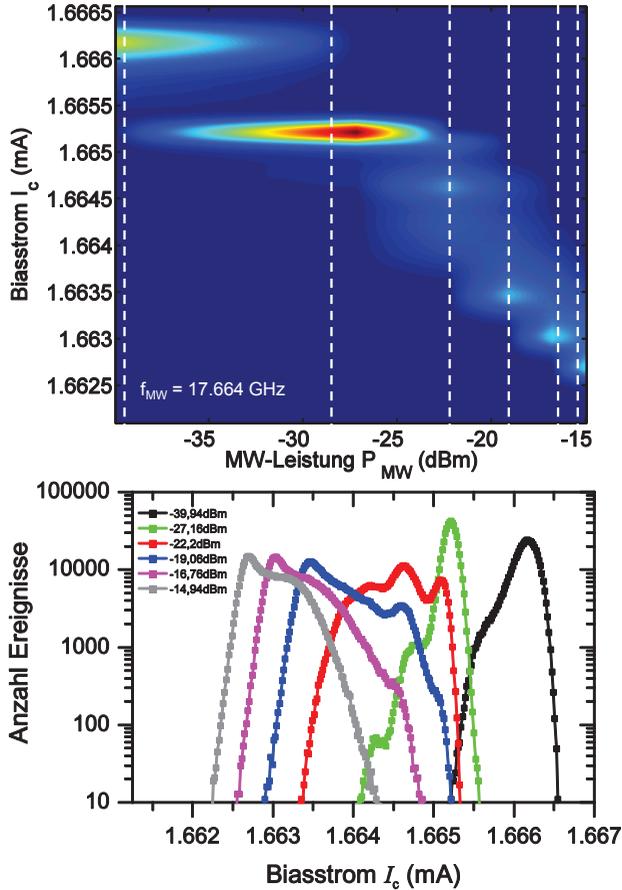
Analog wurde für eine Frequenz von  $f_{MW} = 17.664$  GHz verfahren (siehe Abb. 6.11). Bei dieser Frequenz sind die einzelnen Peaks nicht so deutlich zu sehen, dennoch sind bis zu drei Peaks in einem Histogramm zu erkennen (grüne und rote Kurve).

Die gemessenen Strukturen deuten darauf hin, dass es sich bei der Spektroskopie um den Nachweis der einzelnen Energieniveaus in der Potentialmulde handelt. Sie sind jedoch noch lange kein Beweis dafür. Die gemessenen Strukturen könnten auch von parasitären Resonanzen des Messaufbaus bzw. der Probenbeschaffenheit herrühren. Deshalb wurde zuerst die experimentelle Bestimmung der Plasmafrequenz durchgeführt, um auf diesem Weg bereits die Störresonanzen auszuschließen. Die hier gezeigten Ergebnisse können jedoch nicht auf die zuvor ermittelten Störresonanzen zurückgeführt werden, müssen also einen anderen Ursprung haben. Deshalb wurden die gleichen Messungen in einem weiteren Messzyklus mit einer Referenzprobe wiederholt. Als Referenzprobe diente der bereits erwähnte Kontakt #K144 aus dem Karlsruher Prozess. Dieser Kontakt hat ähnliche Kontaktparameter, wie die Probe #M25, durchlief jedoch einem vollkommen anderen Herstellungsprozess, so dass beim Auftreten ähnlicher Struk-



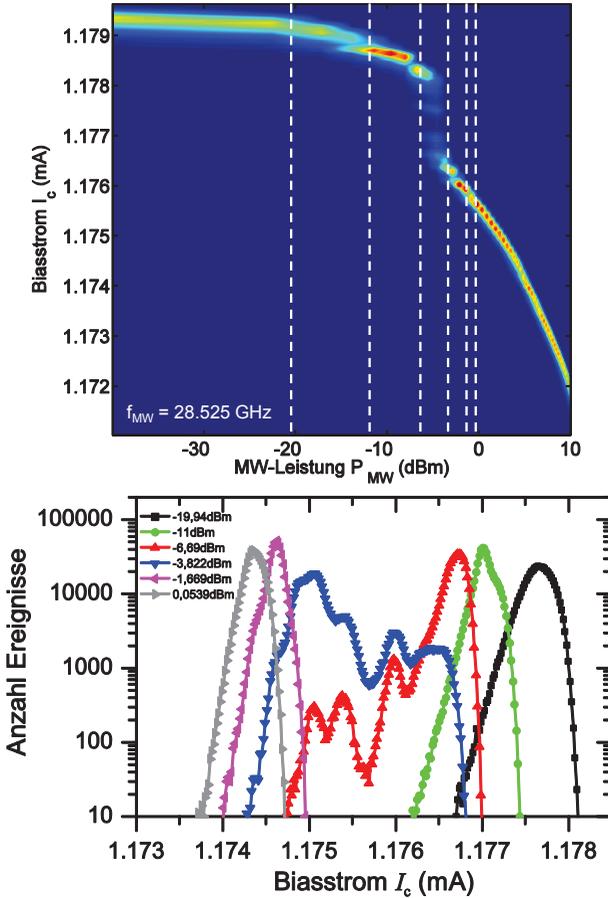
**Abbildung 6.10:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung (oben) für 6 Histogramme und die zugehörigen Histogramme (unten) für  $f_{MW} = 35.502$  GHz. Die einzelnen Leistungspunkte der Histogramme sind zur Verdeutlichung eingezeichnet (gestrichelte Linien). Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5 \cdot 10^5$ .

turen, wie oben gezeigt, ein weiterer Nachweis erbracht wäre.



**Abbildung 6.11:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung (oben) für 6 Histogramme und die zugehörigen Histogramme (unten) für  $f_{MW} = 17.664$  GHz. Die einzelnen Leistungspunkte der Histogramme sind zur Verdeutlichung eingezeichnet (gestrichelte Linien). Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5 \cdot 10^5$ .

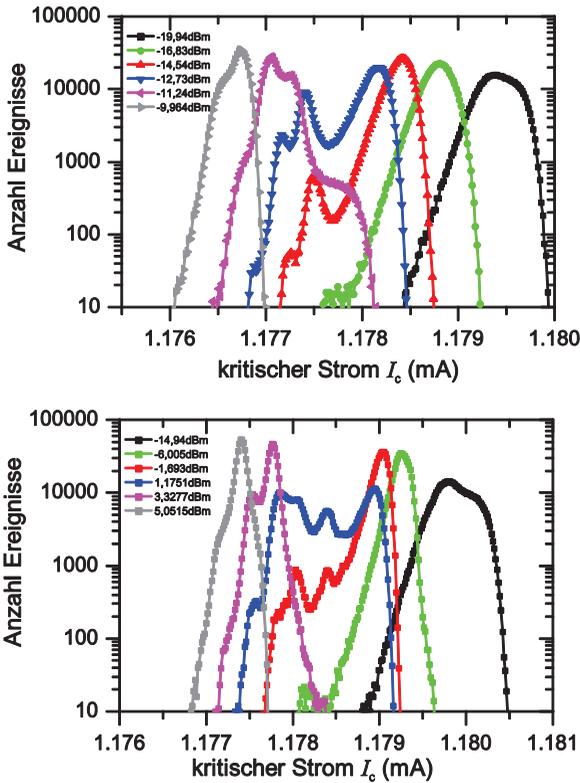
Zunächst wurde eine  $I_c$ -Histogrammserie mit  $N = 5000$  für 50 Leistungs-



**Abbildung 6.12:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #K144 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung (oben, 50 Histogramme mit  $N=5000$  Messpunkten) und die zugehörigen Histogramme (unten, 6 Histogramme mit  $N = 5 \cdot 10^5$  Messpunkte pro Histogramm) für  $f_{MW} = 28.525$  GHz. Die einzelnen Leistungspunkte der Histogramme sind zur Verdeutlichung eingezeichnet (gestrichelte Linien). Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht.

punkte über einen breiten Leistungsbereich bei konstanter Frequenz aufgenommen. In Abbildung 6.12(a) ist eine solche Serie für die Frequenz  $f_{MW} = 28.816$  GHz und einen Leistungsbereich von  $-40$  dBm bis  $+10$  dBm dargestellt. Der nach den theoretischen Vorhersagen zu erwartende Kurvenverlauf mit einem großen Sprung und dem anschließenden Abbiegen der Kurve ist klar zu sehen. Zusätzlich sind jedoch noch weitere Substrukturen zu erkennen. Zwischen  $-17$  dBm und  $-7$  dBm sind zwei weitere kleine Sprünge mit anschließendem Ausbilden eines Zwischenplateaus zu sehen. Zusätzlich sind innerhalb des großen Sprunges bei  $-5$  dBm weitere Substrukturen zu erkennen, welche auf das Vorhandensein weiterer Escapepeaks im  $I_c$ -Histogramm schließen lassen.

Im nächsten Schritt wurden zwischen  $-20$  dBm und  $0$  dBm für 6 Leistungspunkte  $I_c$ -Histogramme mit jeweils 500.000  $I_c$ -Messwerten aufgenommen (siehe Abb. 6.12(b)). Zunächst ist für den niedrigsten Leistungspunkt (schwarze Kurve) nur der thermische Escapepeak zu sehen. Erhöht man die Leistung (grüne Kurve) ist nur der Resonanzpeak zu sehen, der thermische Peak ist bereits verschwunden. Wird die Leistung weiter erhöht sind die erwarteten Multipeaks zu sehen (rote und blaue Kurve). Auf beiden Kurven (rot und blau) sind jeweils vier Escapepeaks pro Histogramm zu sehen. Wird die Leistung noch weiter erhöht, ist nur noch ein Resonanzpeak zu sehen (magentafarbene Kurve), dessen kritischer Strom bei noch größerer Mikrowellenleistung weiter unterdrückt wird (graue Kurve). Ähnliche Ergebnisse erhält man für weitere Mikrowellenfrequenzen. In Abbildung 6.13 sind die Histogramme für  $f_{MW} = 18.525$  GHz (oben) und  $f_{MW} = 27.196$  GHz (unten) dargestellt. Hier sind ebenfalls bei gewissen Leistungspunkten drei bzw. vier Escapepeaks pro  $I_c$ -Histogramm zu sehen.

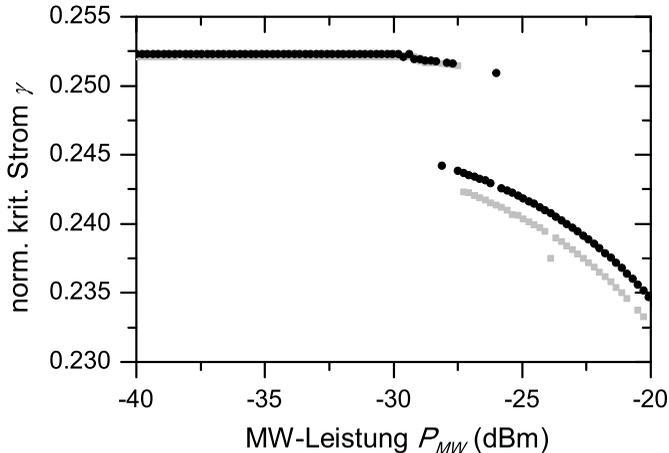


**Abbildung 6.13:**  $I_c$ -Histogramme für Probe #K144 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung für  $f_{MW} = 18.525$  GHz (oben) und  $f_{MW} = 27.196$  GHz (unten). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5 \cdot 10^5$ .

### 6.3 Energielevelspektroskopie mit angelegtem Injektorstrom

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der Kontakte unter Einstrahlung von Mikrowellen für angelegten Injektorstrom betrachtet werden. Von Interesse ist dabei der Injektorstrom  $\kappa \approx \pi$ . Wie in Kapitel 5.2 gezeigt,

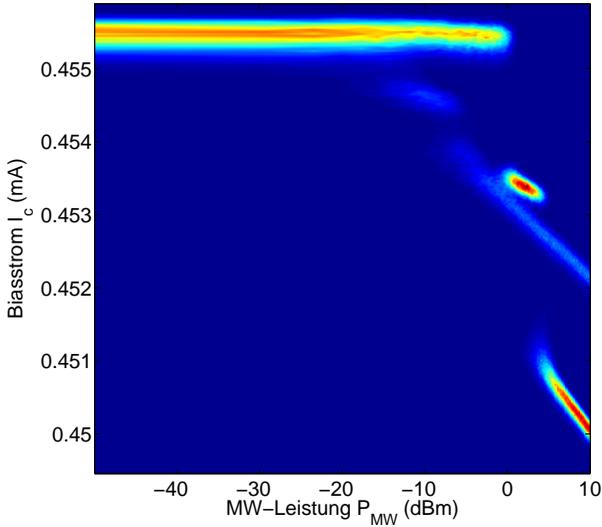
kommt es für  $\kappa \approx \pi$  zu einer Entartung des kritischen Stromes in die beiden Äste  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$ . Zunächst wurden Simulationen ( $\varphi$ -sigo.c) basierend auf den klassischen Betrachtungen durchgeführt und anschließend mit den Messergebnissen mit angelegtem Injektorstrom verglichen.



**Abbildung 6.14:** Berechnete Abhängigkeit ( $\varphi$ -sigo.c) des kritischen Stromes  $I_c$  von der Mikrowellenleistung  $P_{MW}$  für das Minimum des Injektorstroms. Es sind deutlich die beiden Äste des kritischen Stromes  $I_{c+}$  (schwarz) und  $I_{c-}$  (grau) zu erkennen.

Das klassisch erwartete Verhalten ist in Abb. 6.14 dargestellt. Die Simulation wurde für die Frequenz  $f = 0.34f_{pl}$ , dies entspricht den Messungen bei  $f = 36.004$  GHz, und dem Injektorstrom  $\kappa = \pi$  durchgeführt. Für sehr kleine Leistungen liegen die beiden Äste der kritischen Ströme  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  aufeinander, während sie nach dem Sprung gut erkennbar sind. Des weiteren sind außer dem Sprung des kritischen Stromes keinerlei weiteren Strukturen zu erkennen.

Die Messungen wurden wie im vorherigen Abschnitt beschrieben durchgeführt, das heißt es wurden für 50 verschiedene Mikrowellenleistungen jeweils Histogramme mit  $N = 5000$  Messpunkten aufgenommen. Zusätzlich wurde jetzt ein Injektorstrom  $\kappa = \pi$  an den Kontakt angelegt. In Abb. 6.15 sind die Ergebnisse für die Mikrowellenfrequenz  $f = 36.004$  GHz dargestellt. Das Verhalten des kritischen Stromes weicht deutlich von den Simulationen ab. Für kleine Leistungen liegen die beiden Äste der kritischen

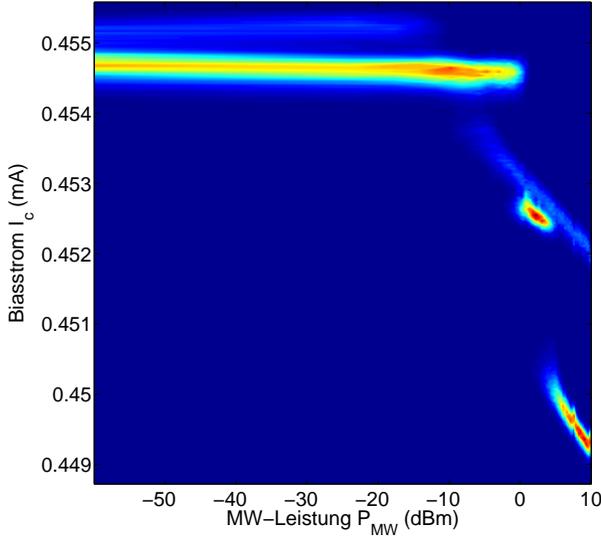


**Abbildung 6.15:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung für  $f_{MW} = 36.004$  GHz und  $\kappa = \pi$ . Die beiden Äste des kritischen Stromes  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  für den resonanten Escape sind deutlich zu erkennen. Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5000$ .

Ströme  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$ , analog zur Simulation aufeinander. Der Sprung des kritischen Stromes für den jeweiligen Ast erfolgt jedoch bei verschiedenen Leistungen, ähnelt in seinem Verhalten aber dem kritischen Strom ohne angelegten Injektorstrom. Während der deutlich erkennbare Ast ( $I_{c+}$ ) erst bei -1 dBm auf das Zwischenplateau springt und anschließend bei 4 dBm erneut springt, erfolgen die Sprünge für den  $I_{c-}$ -Ast bereits bei -15 dBm und -8 dBm. Außerdem ist die Sprunghöhe beim  $I_{c+}$ -Ast deutlich größer als beim  $I_{c-}$ -Ast. In den Simulationen ist die Sprunghöhe für beide kritischen Ströme ( $I_{c+}$  und  $I_{c-}$ ) ungefähr gleich groß.

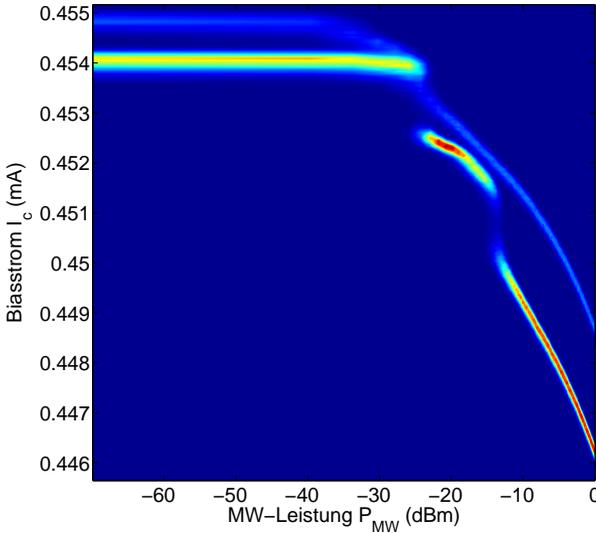
Im nächsten Schritt wurde auf den Injektorstrom  $\kappa$  ein kleines Detuning  $\epsilon$  gegeben, um somit einen Unterschied der beiden kritischen Ströme  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  bereits für den thermischen Peak zu erhalten. In den Abbildungen 6.16 und 6.17 sind die Messdaten für die Mikrowellenfrequenzen  $f_{MW} = 36.004$  GHz und  $f_{MW} = 17.664$  GHz für den Injektorstrom  $\kappa = \pi + \epsilon$  dargestellt.

Beide Kurven ähneln in ihrem Verhalten den Messungen aus Abschnitt 6.2, das heißt es bildet sich das bekannte Zwischenplateau zwischen dem großen Sprung aus. Durch das Detuning des Injektorstromes werden nun auch die beiden Äste der kritischen Ströme  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  deutlich erkennbar.



**Abbildung 6.16:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung für  $f_{MW} = 36.004$  GHz und  $\kappa = \pi$ . Die beiden Äste des kritischen Stromes  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  für den resonanten Escape sind deutlich zu erkennen. Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5000$ .

Dieses Verhalten des kritischen Stromes ist mit den klassischen Berechnungen nicht mehr erklärbar. Vor allem der qualitativ unterschiedliche Verlauf der beiden Äste des kritischen Stromes nach dem Sprung konnte nicht mit den klassischen Simulationen nachvollzogen werden. Um diese Besonderheiten erklären zu können, sind voraussichtlich quantenmechanische Berechnungen notwendig. Daher sollte allerdings die Situation  $\kappa = 0$  (quantenmechanisch) gut verstanden sein. Zusätzlich können weitere, hochaufgelöste Messungen (Histogramme mit  $N = 5 \cdot 10^5$  Punkten) gemacht werden, so dass die in den Sprüngen versteckten Niveaus sichtbar



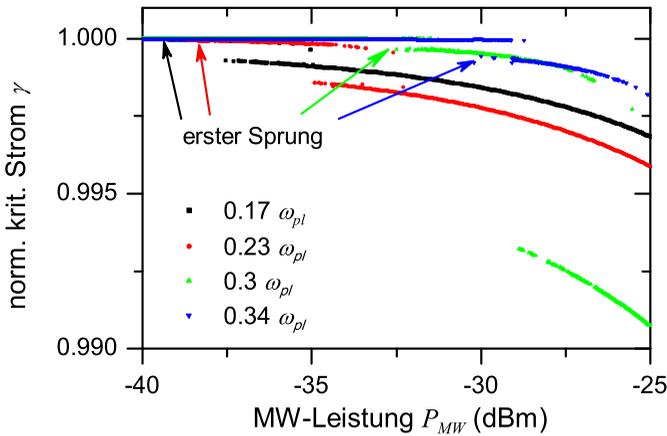
**Abbildung 6.17:** Schaltstatistikwahrscheinlichkeit für Probe #M25 in Abhängigkeit der Mikrowellenleistung für  $f_{MW} = 17.664$  GHz und  $\kappa = \pi + \epsilon$ . Die beiden Äste des kritischen Stromes  $I_{c+}$  und  $I_{c-}$  für den resonanten Escape sind deutlich zu erkennen. Die Anzahl der Ereignisse ist farbkodiert (blau: Null Ereignisse, rot: viele Ereignisse). Die Messungen wurden bei  $T = 20$  mK gemacht, Messpunkte pro Histogramm  $N = 5000$ .

werden.

## 6.4 Diskussion

Unter der Einstrahlung von Mikrowellen zeigt die Probe #K144 ein ähnliches Verhalten, wie die Probe #M25. Somit kann ausgeschlossen werden, dass die gemessenen Strukturen Artefakte der jeweiligen Proben und des Messaufbaus sind. Für beide Proben konnte das Auftreten von Multipeaks bei fester Mikrowellenfrequenz und Leistung nachgewiesen werden und dies für mehrere Frequenzen. Außerdem treten die Multipeaks bei der in Moskau hergestellten Proben in einem anderen Frequenzbereich auf, als bei der in Karlsruhe hergestellten Probe, was den Messaufbau als Verursacher der Resonanzen ebenfalls ausschließt.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Ergebnisse mit Hilfe der klassischen



**Abbildung 6.18:** Berechnete Abhängigkeit ( $\varphi$ -sigo.c) des normierten kritischen Stromes von der Mikrowellenleistung für Probe #M25. Die jeweiligen Anregungsfrequenzen sind angegeben. Der erste Sprung des kritischen Stromes ist gekennzeichnet. Substrukturen, ähnlich den Gemessenen, wurden keinerlei gefunden.

Theorie erklärbar sind. Zu diesem Zweck wurden Simulationen ( $\varphi$ -sigo.c) bezüglich des Verhaltens des kritischen Stromes unter Einfluss von Mikrowellen durchgeführt. Hierzu wurden  $I_c$ -Histogramme in Abhängigkeit des AC-Stromes der Mikrowelle sowohl für die Parameter der Probe #M25 als auch die der Probe #K144 berechnet. Die so erhaltenen Abhängigkeiten für Probe #M25 sind in Abbildung 6.18 dargestellt. Der kritische Strom bleibt für kleine Leistungen zunächst konstant, bis der Resonanzpunkt erreicht wird. Hier springt der kritische Strom auf den Wert für den resonanten Escape und man erhält die Doppelpeakstruktur. Wird die Leistung weiter erhöht, wird der kritische Strom immer stärker unterdrückt und die Kurve biegt nach unten ab. Für noch höhere Leistungen kann es zu weiteren Sprüngen kommen und der kritische Strom wird weiterhin unterdrückt. Mit zunehmender Mikrowellenfrequenz verschieben sich die Sprünge zu höheren Leistungen hin, außerdem wird die Sprunghöhe, also der Wert des kritischen Stromes auf den die Kurve im Fall des resonanten Escapes springt, immer größer. Der Grund hierfür sind, wie in Kapitel 3.7 bereits erwähnt, höhere Harmonische der eingestrahlten Frequenz, die auf die Plasmafrequenz treffen und somit eine geringere Verkippung des

Potenzials für einen Escape ausreicht. In den Simulationen treten ferner keinerlei Substrukturen, wie in den Messungen beobachtet auf. Weder die breiteren Zwischenplateaus, wie beispielsweise in Abbildung 6.6 zu sehen, noch die Multipeaks sind nachweisbar, obwohl darauf geachtet wurde, dass die Auflösung der Simulationen entsprechend den gemessenen Strukturen gewählt wird, so dass eventuelle Substrukturen in den Simulationen sichtbar sein müssten.

Da die gemessenen Strukturen und Multipeaks weder auf Störeffekte des Messaufbaus, noch auf die Charakteristiken der Proben zurückzuführen sind und auch nicht mit Hilfe der klassischen Berechnungen erklärt werden können, deutet vieles darauf hin, dass sie quantenmechanischen Ursprungs sind und es sich bei den Spektroskopiemessungen um Escape der Josephsonphase aus den einzelnen Energieniveaus in der Potenzialmulde handelt.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Experimente waren darauf ausgerichtet die quantenmechanischen Eigenschaften künstlicher  $0-\kappa$ -Josephsonkontakte zu untersuchen.

Dazu wurde zunächst der in Kapitel 4 beschriebene  $^3\text{He}-^4\text{He}$ -Mischkryostat umgebaut, um die beschriebenen Experimente durchführen zu können. Neben dem Einbau neuer Mikrowellenkabel für die Spektroskopiemessungen, wurde der Messaufbau für zukünftige Experimente mit supraleitenden Resonatoren und Qubits vorbereitet. Hierzu wurden auf der 1K-Stufe die Möglichkeiten zum Einbau von kryogenen Verstärkern geschaffen und getestet. Zusätzlich wurden die einzelnen Filterstufen im Kryostaten überarbeitet und verbessert.

Die in Kapitel 5 dargestellten Experimente zum Makroskopischen Quantentunneln zeigten eine Sättigung der als Funktion der Temperatur gemessenen Verteilungsbreite der kritischen Ströme der  $0-\kappa$ -Josephsonkontakte unterhalb von ca. 175 mK. Apparative Ursachen für die Sättigung konnten ausgeschlossen werden, so dass hier ein klarer Hinweis auf Makroskopisches Quantentunneln vorliegt. Allerdings steht die funktionale Abhängigkeit der Verteilungsbreite vom Injektorstrom noch nicht im Einklang mit theoretischen Modellen.

Die in Kapitel 6 dargestellten Spektroskopiemessungen lieferten zusätzliche Hinweise auf das quantenmechanische Verhalten der untersuchten Kontakte. Hierbei wurde das Schalten der Kontakte vom supraleitenden in den

resistiven Zustand unter der Einstrahlung von Mikrowellen untersucht. Bei großen Mikrowellenleistungen findet man ein klassisches und mittlerweile gut verstandenes Verhalten. Bei kleinen Leistungen traten in Auftragungen der Verteilungsbreite des Schaltstroms gegen die Mikrowellenleistung für  $\kappa = 0$  sowie bei  $\kappa \approx \pi$  Strukturen auf, die weder durch klassische Berechnungen, noch mittels dem Einfluss parasitärer Störresonanzen erklärt werden konnten und auf das Vorliegen diskreter Energieniveaus hinweisen. In Kooperation mit den Arbeitsgruppen von Prof. Schleich und von Prof. Ankerhold an der Universität Ulm werden derzeit Simulationen durchgeführt um den Escape der Josephsonphase quantenmechanisch zu berechnen und somit zu zeigen, dass  $0$ - $\kappa$ -Josephsonkontakte als „künstliche Atome“ mit einem nichttrivialen und noch genauer zu untersuchenden inneren Freiheitsgrad (dem Phasensprung  $\kappa$ ) dienen können.

# Literaturverzeichnis

- [AB63] V. Ambegaokar and A. Baratoff. Erratum to Tunneling Between Superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 11:104, 1963.
- [BBP82] A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskii, and S. V. Panyukov. Critical-current oscillations as a function of the exchange field and thickness of the ferromagnetic metal (F) in an S-F-S Josephson junction. *JETP Lett.*, 35:178, 1982.
- [BC95] M. Büttiker and T. Christen. Nucleation of weakly driven kinks. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1895, 1995.
- [BCGJ10] J. A. Blackburn, M. Cirillo, and N. Grønbech-Jensen. On the Classical Model for Microwave Induced Escape from a Josephson Washboard Potential. *arXiv*, 1001:4284, 2010.
- [BCS57] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957.
- [BGH<sup>+</sup>03] K. Bladh, D. Gunnarsson, E. Hurfeld, S. Devi, C. Kristofersson, B. Smalander, S. Pehrson, T. Claeson, P. Delsing, and M. Taslakov. Comparison of cryogenic filters for use in single electronics experiments. *Rev. Sci. Instr.*, 74:1323, 2003.
- [BHL83] M. Büttiker, E. P. Harris, and R. Landauer. Thermal activation in extremely underdamped Josephson-junction circuits. *Phys. Rev. B*, 28:1268, 1983.
- [BK03] A. Buzdin and A. Koshelev. Periodic alternating 0- and  $\pi$ -junction structures as realization of  $\phi$ -josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 67:220504(R), 2003.

- [BK04] W. Buckel and R. Kleiner. *Supraleitung*. WILEY-VCH, 6 edition, 2004.
- [BKS77] L. N. Bulaevskii, V. V. Kuzii, and A. A. Sobyenin. Superconducting system with weak coupling to the current in the ground state. *JETP Lett.*, 25:290, 1977.
- [BKS78] L. N. Bulaevskii, V. V. Kuzii, and A. A. Sobyenin. On possibility of the spontaneous magnetic flux in a Josephson junction containing magnetic impurities. *Solid Stat. Comm.*, 25:1053, 1978.
- [BL79] M. Büttiker and R. Landauer. Nucleation theory of overdamped soliton motion. *Phys. Rev. Lett.*, 43:1453, 1979.
- [BL81] M. Büttiker and R. Landauer. Nucleation theory of overdamped soliton motion. *Phys. Rev. A*, 23:1397, 1981.
- [BLT<sup>+</sup>06] T. Bauch, T. Lindström, F. Tafuri, G. Rotoli, P. Delsing, T. Claeson, and F. Lombardi. Quantum Dynamics of a d-Wave Josephson Junction. *Science*, 311:57–61, 2006.
- [Bre06] M. Brendle. *Strom-Rampen-Generator RampGen*. Physikalisches Institut, Universität Tübingen, 2006.
- [Buc06] K. Buckenmaier. Eigenfrequenzen von fraktionalem Flusswirbeln in langen Josephson Kontakten. Master's thesis, Universität Tübingen, 2006.
- [Buc10] K. Buckenmaier. *Aktivierungsenergie fraktionaler Flusswirbel und Spektroskopie an Vortex-Molekülen in langen Josephsonkontakten*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2010.
- [Büt89] M. Büttiker. *Transport and fluctuations in the driven and damped sine-Gordon chain*. Manchester University Press, 1989.
- [CB98] T. Christen and M. Büttiger. Diffusion controlled initial recombination. *Phys. Rev. B*, 58:1533, 1998.
- [CB04] J. Clarke and A. I. Braginski. *The SQUID Handbook*. WILEY-VCH, 2004.

- [CL81] A. O. Caldeira and A. J. Leggett. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 46:211, 1981.
- [CLT<sup>+</sup>96] M. G. Castellano, R. Leoni, G. Torrioli, F. Chiarello, C. Cosmelli, A. Costantini, G. Diambrini-Palazzi, P. Carelli, R. Cristiano, and L. Frunzio. Switching dynamics of Nb/AlO<sub>x</sub>/Nb Josephson junctions: Measurements for an experiment of macroscopic quantum coherence. *J. Appl. Phys.*, 80:2922, 1996.
- [CMC88] A. N. Cleland, J. M. Martinis, and J. Clarke. Measurement of the effect of moderate dissipation on macroscopic quantum tunneling. *Phys. Rev. B*, 37(10):5950–5953, 1988.
- [CNHM03] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit. *Science*, 299:1869, 2003.
- [CTC<sup>+</sup>96] M. G. Castellano, G. Torrioli, C. Cosmelli, A. Costantini, F. Chiarello, P. Carelli, G. Rotoli, M. Cirillo, and R. L. Kautz. Thermally activated escape from the zero-voltage state in long Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 54:15417, 1996.
- [CW08] J. Clarke and F. K. Wilhelm. Superconducting quantum bits. *Nature*, 453:1031, 2008.
- [DDKP85] A. Davidson, B. Dueholm, B. Kryger, and N. F. Pedersen. Experimental investigation of trapped sine-Gordon solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2059, 1985.
- [DLF<sup>+</sup>03] P. Dmitriev, I. Lapitskaya, L. Filippenko, A. Ermakov, S. Shitov, G. Propenko, S. Kovtonyuk, and V. P. Koshelets. High Quality Nb-based Tunnel Junctions for High Frequency and Digital Applications. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 13:107, 2003.
- [DMC85] M. H. Devoret, J. M. Martinis, and J. Clarke. Measurements of macroscopic quantum tunneling out of the zero-voltage state of a current-biased Josephson junction. *Phys. Rev. Lett.*, 55:1908, 1985.

- [EDM86] D. Esteve, M. H. Devoret, and J. M. Martinis. Effect of an arbitrary dissipative circuit on the quantum energy levels and tunneling of a Josephson junction. *Phys. Rev. B*, 30:6419, 1986.
- [ESA84] U. Eckern, G. Schön, and V. Ambegaokar. Quantum dynamics of a superconducting tunnel junction. *Phys. Rev. B*, 30:6419–6431, 1984.
- [FD73] T. A. Fulton and R. C. Dynes. Single vortex propagation in Josephson tunnel junctions. *Solid State Commun.*, 12:57, 1973.
- [FD74] T. A. Fulton and L. N. Dunkleberger. Lifetime of the zero-voltage state in Josephson tunnel junctions. *Phys. Rev. B*, 9:4760, 1974.
- [Fer65] R. A. Ferrell. Josephson tunneling and quantum mechanical phase. *Phys. Rev. Lett.*, 15:527, 1965.
- [FPC<sup>+</sup>00] J. R. Friedman, Vijay Patel, W. Chen, S. K. Tolpygo, and J. E. Lukens. Quantum superposition of distinct macroscopic states. *Nature*, 406:43, 2000.
- [FU00] M. V. Fistul and A. V. Ustinov. Libration states of a nonlinear oscillator: Resonant escape of a pinned magnetic fluxon. *Phys. Rev. B*, 63:024508, 2000.
- [Gab07] T. Gaber. *Dynamik fraktionaler Flusswirbel in langen Josephsonkontakten*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2007.
- [Gar95] A. Garg. Escape-field distribution for escape from a metastable potential well subject to a steadily increasing bias field. *Phys. Rev. B*, 51:15592, 1995.
- [GGS<sup>+</sup>05] T. Gaber, E. Goldobin, A. Sterck, R. Kleiner, and D. Koelle. Nonideal artificial phase discontinuity in long Josephson  $0 - \pi$  junctions. *Phys. Rev. B*, 72:054522, 2005.
- [GJC04] N. Grønbech-Jensen and M. Cirillo. AC-induced thermal vortex escape in magnetic-field-embedded long annular Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 70:214507, 2004.

- [GJC05] N. Grønbech-Jensen and M. Cirillo. Rabi-Type Oscillations in a Classical Josephson Junction. *Phys. Rev. Lett.*, 95:067001, 2005.
- [GJCC<sup>+</sup>04] N. Grønbech-Jensen, M. G. Castellano, F. Chiarello, M. Cirillo, C. Cosmelli, L. V. Filippenko, R. Russo, and G. Torrioli. Microwave-induced thermal escape in Josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 93:107002, 2004.
- [GJM CB10] N. Grønbech-Jensen, J. E. Marchese, M. Cirillo, and J. A. Blackburn. Tomography and Entanglement in Coupled Josephson Junction Qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 105:010501, 2010.
- [GK06] D. Gulevich and F. Kusmartsev. Switching phenomena in an annular Josephson junction. *Physica C*, 435:87, 2006.
- [GKI04] A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, and E. Ilichev. The current-phase relation in Josephson junctions. *Rev. Mod. Phys.*, 76:411, 2004.
- [GKK02] E. Goldobin, D. Koelle, and R. Kleiner. Semifluxons in long Josephson  $0-\pi$ -junctions. *Phys. Rev. B*, 66:100508, 2002.
- [GKK03] E. Goldobin, D. Koelle, and R. Kleiner. Ground states and bias current induced rearrangement of semifluxons in  $0-\pi$ -Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 67:224515, 2003.
- [GKK04] E. Goldobin, D. Koelle, and R. Kleiner. Ground states of one and two fractional vortices in long Josephson  $0-\pi$  junctions. *Phys. Rev. B*, 70:174519, 2004.
- [GKK B07] E. Goldobin, D. Koelle, R. Kleiner, and A. Buzdin. Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of  $\phi$  junctions. *Phys. Phys. B*, 76:224523, 2007.
- [GKK M11] E. Goldobin, D. Koelle, R. Kleiner, and R. G. Mints. Josephson junction with a magnetic-field tunable ground state. *Phys. Rev. Lett.*, 107:227001, 2011.

- [GKKM13] E. Goldobin, R. Kleiner, D. Koelle, and R. G. Mints. Phase retrapping in a point-like  $\varphi$  Josephson junction: The butterfly effect. *Phys. Phys. Lett.*, 111:057004, 2013.
- [GMB<sup>+</sup>15] E. Goldobin, S. Mironov, A. Buzdin, R. G. Mints, D. Koelle, and R. Kleiner. Effective model for a short Josephson junction with a phase discontinuity. *arXiv*, page 1508.04317, 2015.
- [Gol13] E. Goldobin. GOLDEXI, 2013. <http://www.uni-tuebingen.de/en/3761>.
- [GS09] A. Gumann and N. Schopohl. Phase diagram of geometric  $d$ -wave superconductor Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 79:144505, 2009.
- [GSG<sup>+</sup>03] E. Goldobin, A. Sterck, T. Gaber, D. Koelle, and R. Kleiner. Dynamics of semifluxons in Nb long Josephson  $0-\pi$  junctions. *Phys. Rev. Lett.*, 92:057005, 2003.
- [GSK<sup>+</sup>05] E. Goldobin, H. Susanto, D. Koelle, R. Kleiner, and S. A. van Gils. Oscillatory eigenmodes and stability of one and two arbitrary fractional vortices in long Josephson  $0-\pi$  junctions. *Phys. Rev. B*, 71:104518, 2005.
- [GSKK04] E. Goldobin, N. Stefanakis, D. Koelle, and R. Kleiner. Fluxon-semifluxon interaction in an annular long Josephson  $0-\pi$  junction. *Phys. Rev. B*, 70:094520, 2004.
- [GSW<sup>+</sup>13] E. Goldobin, H. Sickinger, M. Weides, N. Ruppelt, H. Kohlstedt, R. Kleiner, and D. Koelle. Memory cell based on a  $\varphi$  Josephson junction. *Appl. Phys. Lett.*, 102:242602, 2013.
- [GW08] E. Goldobin and A. Wallraff. *StkJJ — User’s Reference*. <http://www.uni-tuebingen.de/en/3761>, 2008.
- [HAS<sup>+</sup>03] H. Hilgenkamp, Ariando, H.-J. H. Smilde, D. H. A. Blank, G. Rijnders, H. Rogalla, J. R. Kirtley, and C. C. Tsuei. Ordering and manipulation of the magnetic moments in large-scale superconducting  $\pi$ -loop arrays. *Nature*, 422:50, 2003.

- [Hei13] D. M. Heim. *Tunneling in three scenarios: From the inverted harmonic oscillator, via Josephson junctions to fractional vortices*. PhD thesis, Universität Ulm, 2013.
- [HHR<sup>+</sup>05] H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chekhov, M. Chwalla, T. Körber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür, and R. Blatt. Scalable multiparticle entanglement of trapped ions. *Nature*, 438:643, 2005.
- [Hil08] H. Hilgenkamp. Pi-phase shift Josephson structures. *Supercond. Sci. Technol.*, 21:034011, 2008.
- [HMS88] P. Hänggi, F. Marchesoni, and P. Sodano. Nucleation of thermal Sine-Gordon solitons: Effect of many-body interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2563–2566, 1988.
- [HPK<sup>+</sup>13] D. H. Heim, N. G. Pugach, M. Yu Kupriyanov, E. Golubov, D. Koelle, and R. Kleiner. Ferromagnetic planar Josephson junction with transparent interfaces: a  $\varphi$  junction proposal. *J. Phys.: Condens. Matter*, 25:215701, 2013.
- [HTB90] P. Hänggi, P. Talkner, and M. Borkovec. Reaction-rate theory: fifty years after Kramers. *Rev. Mod. Phys.*, 62:251, 1990.
- [Jos62] B. D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunneling. *Phys. Lett.*, 1:251, 1962.
- [Kat00] T. Kato. Dimensional crossover by local inhomogeneity in soliton-pair nucleation. *J. Phys. Soc.*, 69:2735, 2000.
- [Kat01] T. Kato. Local inhomogeneity effects on a nucleation process in a high external bias. *Phys. Rev. B*, 64:134106, 2001.
- [KKS<sup>+</sup>91] V. P. Koshelets, S. Kovtonyuk, I. L. Serpuchenko, L. Filippenko, and A. Shchukin. High quality Nb-AlO<sub>x</sub>-Nb tunnel junctions for microwave and SFQ logic devices. *IEEE Trans. Magn.*, 27:3141, 1991.
- [KMS97] J. R. Kirtley, K. A. Moler, and D. J. Scalapino. Spontaneous flux and magnetic-interference patterns in  $0 - \pi$  Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 56:886, 1997.

- [Kra40] H. A. Kramers. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physika (Utrecht)*, 7:284, 1940.
- [KTM99] J. R. Kirtley, C. C. Tsuei, and K. A. Moler. Temperature dependence of the half-integer magnetic flux quantum. *Science*, 285:1373, 1999.
- [KTR<sup>+</sup>96] J. R. Kirtley, C. C. Tsuei, M. Rupp, J. Z. Sun, L. S. Yu-Jahnes, A. Gupta, M. B. Ketchen, K. A. Moler, and M. Bhushan. Direct imaging of integer and half-integer Josephson vortices in high- $T_c$  grain boundaries. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1336, 1996.
- [KWW<sup>+</sup>10] M. Kemmler, M. Weides, M. Weiler, M. Opel, S. T. B. Goennenwein, A. S. Vasenko, A. A. Golubov, H. Kohlstedt, D. Koelle, R. Kleiner, and E. Goldobin. Magnetic interference patterns in  $0-\pi$  SIFS Josephson junctions: Effects of asymmetry between  $0$  and  $\pi$  regions. *Phys. Rev. B*, 81:054522, 2010.
- [Lik86] K. K. Likharev. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. Gordon and Breach Publishers, 1986.
- [LMK<sup>+</sup>14] A. Lipman, R. G. Mints, R. Kleiner, D. Koelle, and E. Goldobin. Josephson junctions with tunable current-phase relation. *Phys. Rev. B*, 90:184502, 2014.
- [LU08] A. Lukashenko and A. V. Ustinov. Improved powder filters for qubit measurements. *Rev. Sci. Instr.*, 79:014701, 2008.
- [Mal04] B. A. Malomed. Creation of classical and quantum fluxons by a current dipole in a long Josephson junction. *Phys. Rev. B*, 69:064502, 2004.
- [MC93] C. D. Motchenbacher and J. A. Connely. *Low-Noise Electronic System Design*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [McC68] D.E. McCumber. Effect of ac impedance of dc voltage-current characteristics of Josephson junctions. *J. Appl. Phys.*, 39:3113, 1968.

- [MCGJ06] J. E. Marchese, M. Cirillo, and N. Grønbech-Jensen. Classical analysis of phase-locking transients and Rabi-type oscillations in microwave-driven Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 73:174507, 2006.
- [MCGJ09] J. E. Marchese, M. Cirillo, and N. Grønbech-Jensen. Investigation of resonant and transient phenomena in Josephson junction flux qubits. *Phys. Rev. B*, 79:094517, 2009.
- [MDC87] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke. Experimental tests for the quantum behavior of a macroscopic degree of freedom: The phase difference across a Josephson junction. *Phys. Rev. B*, 35(10):4682–4698, 1987.
- [Mec13] J. M. Meckbach. *Superconducting Multilayer Technology for Josephson Devices*. PhD thesis, Karlsruher Institut für Technologie, 2013.
- [Min98] R. G. Mints. Self-generated flux in Josephson junctions with alternating critical current density. *Phys. Rev. B*, 57:R3221–R3224, 1998.
- [MMB<sup>+</sup>13] J. M. Meckbach, M. Merker, S.J. Buehler, K. Ilin, B. Neumeier, U. Kienzle, E. Goldobin, R. Kleiner, D. Koelle, and M. Siegel. Sub- $\mu\text{m}$  Josephson Junctions for Superconducting Quantum Devices. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 23:1100504, 2013.
- [MP00] R. G. Mints and Ilya Papiashvili. Self-generated magnetic flux in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  grain boundaries. *Phys. Rev. B*, 62:15214, 2000.
- [MPK<sup>+</sup>02] R. G. Mints, Ilya Papiashvili, J. R. Kirtley, H. Hilgenkamp, G. Hammerl, and J. Mannhart. Observation of splintered Josephson vortices at grain boundaries in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 89:067004, 2002.
- [MS78] D. W. McLaughlin and A. C. Scott. Perturbation analysis of fluxon dynamics. *Phys. Rev. A*, 18:1652, 1978.
- [MSS01] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shirnman. Quantum-state engineering with Josephson-junction devices. *Rev. Mod. Phys.*, 73:357, 2001.

- [NLC02] C. Nappi, M. P. Lissitski, and R. Cristiano. Fraunhofer critical-current diffraction pattern in annular Josephson junctions with injected current. *Phys. Rev. B*, 65:132516, 2002.
- [PFK<sup>+</sup>14] M. Paramonov, M. Yu. Fominsky, V. P. Koshelets, B. Neumeier, D. Koelle, R. Kleiner, and E. Goldobin. Radiation power and linewidth of a semifluxon-based Josephson oscillator. *Appl. Phys. Lett.*, 104:062603, 2014.
- [PGKK10] N. G. Pugach, E. Goldobin, R. Kleiner, and D. Koelle. Method for reliable realization of a  $\varphi$  Josephson junction. *Phys. Rev. B*, 81(10):104513, 2010.
- [RI64] A. C. Rose-Innes. *Low Temperature Laboratory Techniques*. Elliott Bros. & Yeoman Ltd., 1964.
- [ROR<sup>+</sup>01] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov, and J. Aarts. Coupling of two superconductors through a ferromagnet: Evidence for a  $\pi$  junction. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2427, 2001.
- [Sco64] A. C. Scott. Distributed device applications of the superconducting tunnel junction. *Solid-State Electronics*, 7:137, 1964.
- [Sco70] W. C. Scott. Hysteresis in the dc switching characteristics of Josephson junctions. *Appl. Phys. Lett.*, 17:166, 1970.
- [SGK<sup>+</sup>05] H. Susanto, E. Goldobin, D. Koelle, R. Kleiner, and S. A. van Gils. Controllable plasma energy bands in a one-dimensional crystal of fractional Josephson vortices. *Phys. Rev. B*, 71:174510, 2005.
- [Sic13] H. Sickinger. *Realization of  $\varphi$  Josephson Junctions with a Ferromagnetic Interlayer*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2013.
- [SLG88] P. Silvestrini, O. Liengme, and K. E. Gray. Current distributions of thermal switching in extremely underdamped Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 37:001525, February 1988.

- [SLW<sup>+</sup>12] H. Sickinger, A. Lipman, M. Weides, R. G. Mints, H. Kohlstedt, D. Koelle, R. Kleiner, and E. Goldobin. Experimental Evidence of a  $\varphi$  Josephson Junction. *Phys. Rev. Lett.*, 109:107002, 2012.
- [SPC<sup>+</sup>88] P. Silvestrini, S. Pagano, R. Cristiano, O. Liengme, and K. E. Gray. Effect of dissipation on thermal activation in an underdamped Josephson junction: First evidence of a transition between different damping regimes. *Phys. Rev. Lett.*, 60:844, 1988.
- [SPRR97] P. Silvestrini, V. G. Palmieri, B. Ruggiero, and M. Russo. Observation of Energy Levels Quantization in Underdamped Josephson Junctions above the Classical-Quantum Regime Crossover Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3046, 1997.
- [Ste36] R. Steuerwald. Über Enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation. *Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 40:1–105, 1936.
- [Ste68] W. C. Stewart. Current-voltage characteristics of Josephson junctions. *Appl. Phys. Lett.*, 12:277, 1968.
- [Swi61] J. C. Swihart. Field solution for a thin-film superconducting strip transmission line. *J. Appl. Phys.*, 32:461, 1961.
- [SYI02] A. Sugimoto, T. Yamaguchi, and I. Iguchi. Temperature dependence of half flux quantum in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-y}$  tricrystal thin film observed by scanning SQUID microscopy. *Physica C*, 367:28, 2002.
- [TEU<sup>+</sup>89] E. Turlot, D. Esteve, C. Urbina, J. M. Martinis, M. H. Devoret, S. Linkwitz, and H. Grabert. Escape oscillations of a Josephson junction switching out of the zero-voltage state. *Phys. Rev. Lett.*, 62:1788, 1989.
- [TK00] C. C. Tsuei and J. R. Kirtley. Pairing symmetry in cuprate superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 72:969, 2000.
- [TKC<sup>+</sup>94] C. C. Tsuei, J. R. Kirtley, C. C. Chi, L. S. Yu-Jahnes, A. Gupta, T. Shaw, J. Z. Sun, and M. B. Ketchen. Pairing

- symmetry and flux quantization in a tricrystal superconducting ring of  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 73:593, 1994.
- [Tur13] M. Turad. *YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>x</sub>-Nb-Hybrid-Josephson-Rampenkontakte: Einfluss der 0- $\pi$ -Kopplung und geometrischer Parameter auf die Transporteigenschaften*. PhD thesis, Universität Tübingen, 2013.
- [UK03] A. V. Ustinov and V. K. Kaplunenko. Rapid single-flux quantum logic using  $\pi$ -shifters. *J. Appl. Phys.*, 94:5405–5407, 2003.
- [Ust02] A. V. Ustinov. Fluxon insertion into annular Josephson junctions. *App. Phys. Lett.*, 80:3153, 2002.
- [vdWtHW<sup>+</sup>00] C. H. van der Wal, A. C. J. ter Haar, F. K. Wilhelm, R. N. Schouten, C. J. P. M. Harmans, T. P. Orlando, S. Lloyd, and J. E. Mooij. Quantum superposition of macroscopic persistent-current states. *Science*, 290:773–777, 2000.
- [VSK<sup>+</sup>09] K. Vogel, W. P. Schleich, T. Kato, D. Koelle, R. Kleiner, and E. Goldobin. Theory of fractional vortex escape in a long Josephson junction. *Phys. Rev. B*, 80:134515, 2009.
- [Wal01] A. Wallraff. *Fluxon Dynamics in Annular Josephson Junctions: From Relativistic Strings to Quantum Particles*. Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2001.
- [WDLU03] A. Wallraff, T. Duty, A. Lukashenko, and A. V. Ustinov. Multiphoton transitions between energy levels in a current-biased Josephson tunnel junction. *Phys. Rev. Lett.*, 90(3):037003, 2003.
- [Wei69] M. Weihnacht. Influence of thin film thickness on dc Josephson current. *Phys. Status Solidi (b)*, 32:K169, 1969.
- [Wei93] U. Weiss. *Quantum dissipative systems. Series in Modern Condensed Matter Physics, Vol. 2*. World Scientific, 1993.

- [WHL<sup>+</sup>93] D. A. Wollman, D. J. Van Harlingen, W. C. Lee, D. M. Ginsberg, and A. J. Leggett. Experimental determination of the superconducting pairing state in YBCO from the phase coherence of YBCO-Pb dc SQUIDs. *Phys. Rev. Lett.*, 71:2134, 1993.
- [WKK<sup>+</sup>06] M. Weides, M. Kemmler, H. Kohlstedt, R. Waser, D. Koelle, R. Kleiner, and E. Goldobin.  $0-\pi$  Josephson tunnel junctions with ferromagnetic barrier. *Phys. Rev. Lett.*, 97:247001, 2006.
- [WKU04] A. Wallraff, A. Kemp, and A. V. Ustinov. *Quantum dynamics of vortices and vortex qubits. In Quantum Information Processing*. WILEY-VCH, Berlin, 2nd edition, 2004.
- [WKW<sup>+</sup>07] M. Weides, H. Kohlstedt, R. Waser, M. Kemmler, J. Pfeiffer, D. Koelle, R. Kleiner, and E. Goldobin. Ferromagnetic  $0-\pi$  Josephson Junctions. *Appl. Phys. A*, 89:613, 2007.
- [WLC<sup>+</sup>02] A. Wallraff, A. Lukashenko, C. Coqui, T. Duty, and A. V. Ustinov. High resolution measurements of the switching current in a Josephson tunnel junction: Thermal activation and macroscopic quantum tunneling. *arXiv:cond-mat*, page 0204527, 2002.
- [WLC<sup>+</sup>03] A. Wallraff, A. Lukashenko, C. Coqui, A. Kemp, T. Duty, and A. V. Ustinov. Switching current measurements of large area Josephson tunnel junctions. *Rev. Sci. Instr.*, 74:3740, 2003.
- [WLL<sup>+</sup>03] A. Wallraff, A. Lukashenko, J. Lisenfeld, A. Kemp, M. V. Fistul, Y. Koval, and A. V. Ustinov. Quantum dynamics of a single vortex. *Nature*, 425:155, 2003.
- [WS07] G. Wendin and V. S. Shumeiko. Quantum bits with Josephson junctions. *Low Temp. Phys.*, 33:724, 2007.
- [XMT95] J. H. Xu, J. H. Miller, and C. S. Ting.  $\pi$  - vortex state in a long  $0 - \pi$  - Josephson junction. *Phys. Rev. B*, 51:11958, 1995.

- [ZG04] A. Zenchuk and E. Goldobin. Analysis of ground states of  $0 - \pi$  long Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 69(2):024515, 2004.