Blätterungen asymptotisch flacher Mannigfaltigkeiten und ihre Evolution

Dissertation

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat)

vorgelegt von
Christopher Roman Nerz
aus Tübingen

Tübingen, 2014

Tag der mündlichen Qualifikation:	18. 12. 2014
Dekan	Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Gerhard Huisken
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Jan Metzger
3. Berichterstatter:	Prof. Piotr T. Chruściel, PhD

Für meine Großeltern

Danke, Hobbes!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei den zwanziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts hat sich die allgemeine Relativitätstheorie als vorherrschende physikalische Theorie für die Beschreibung gravitativer Systeme etabliert. In dieser Theorie verschmelzen Raum und Zeit zu der gemeinsamen vierdimensionalen *Raumzeit*, deren Krümmung in Zusammenhang mit der Gravitationskraft steht. Dieser Zusammenhang wird durch die *Einstein-Gleichungen* beschrieben, welche zu quasilinearen partiellen Differentialgleichungen korrespondieren.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir diese Theorie nur für isolierte gravitative Systeme. Das heißt, wir betrachten stellare Körper bzw. Systeme von Schwarzen Löchern und Sternen *quasi-endlicher* Größe, die nicht durch Effekte „außerhalb“ des Systems beeinflusst werden. Weiter vereinfachen wir unsere Betrachtung dadurch, dass wir uns auf den Standpunkt eines „in unendlicher Entfernung“ frei fallenden Beobachters[1] einschränken und entsprechend die Raumzeit in eine kontinuierliche Familie von *Zeitschnitten* zerlegen, die die Raumzeit (zu jeweils einem Zeitpunkt) aus Perspektive des Beobachters beschreiben. Derartige Zeitschnitte werden mathematisch durch *asymptotisch flache* Riemannsche Mannigfaltigkeiten modelliert und erste grundlegende Definitionen wie *Masse* und *Impuls* (eines solchen Schnitts) sind etabliert (bspw. [ADM61, Bar86]). Jedoch sind wir noch weit davon entfernt diese Systeme in aller Vollständigkeit zu verstehen; selbst Grundbegriffe wie der des *Massezentrums* bereiten noch Schwierigkeiten.

Betrachten wir nun ein sehr einfaches System, um uns eine dieser Schwierigkeiten klar zu machen. Stellen wir uns einen isolierten, vollkommen rotationssymmetrischen Stern vor. Intuitiv scheint es klar zu sein, dass das (Rotations-)Zentrum dieses Sterns auch das Massezentrum des Systems ist. Ersetzen wir nun in diesem Bild jedoch den Stern durch ein Schwarzes Loch, so ist dessen Inneres aus Perspektive des umliegenden Raums unerreichbar und daher ist auch vollkommen unklar, was wir als Zentrum dieses Systems zu verstehen haben (vgl. Schwarzschild-Lösung). Wenn wir jedoch im Stern-Modell anstelle des Rotationszentrums das Zentrum als (abstrakten) Mittelpunkt „aller um den Stern konzentrischen *Sphären*“ verstehen, so können wir diese Definition wiederum auf das Bild des schwarzen Lochs übertragen. Wir können hier allerdings Sphären nicht als Objekte definieren, die von ihrem Zentrum einen festen Abstand (den Radius) haben, da dieses Zentrum (wie gesagt) unerreichbar ist. Allerdings können wir Sphären auch als *geschlossene Flächen* charakterisieren, die überall „gleich gekrümmt sind“. Somit können wir in diesem einfachen Fall das Zentrum der Masse als Familie der konstant gekrümmten (*CMC*) Flächen definieren, falls diese Familie eindeutig ist.

Huisken-Yau zeigten 1996, dass eine solche Familie von CMC-Flächen nicht nur im Fall eines exakt rotationssymmetrischen Sterns oder Schwarzen Lochs existiert und eindeutig

[1] Genauer einer Familie von Beobachtern, die nahe unendlich frei fallend sind.

ist, sondern dass dies bereits für jedes System gilt, welches asymptotisch vergleichbare Eigenschaften hat: Das betrachtete System muss lediglich aus „ausreichend große Entfernung“ wie ein System aussehen, das nur aus einem einzelnen rotationssymmetrischen Schwarzen Loch bzw. Stern besteht. Seitdem hat sich diese Familie von CMC-Flächen als Werkzeug zur Untersuchung von (unter anderem) solchen *asymptotisch Schwarzschildschen* Systemen etabliert.

Dieses Existenz- und Eindeutigkeitsresultat von Huisken-Yau wurde später von Anderen verallgemeinert. So zeigte Metzger in seiner Dissertation, dass eine geometrischere asymptotische Rotationssymmetrie ausreicht: Während Huisken-Yau annehmen mussten, dass diese Symmetrien nicht nur für die geometrischen Größen der *Metrik* und der *Krümmungen* des Raums, sondern auch für Ableitungen der Krümmungen gilt, genügte Metzger die (asymptotische) Symmetrie der genannten geometrischen Größen. Gleichzeitig konnte er abschwächen, wie „schnell“ sich der betrachtete Zeitschnitt nahe unendlich dem Modell-Fall annäheren muss. Noch weiter verändern konnte Huang diese Annahmen: Sie zeigte, dass die (asymptotische) Rotationssymmetrie zu einer (asymptotischen) Punkt-Spiegelsymmetrie reduziert werde kann. Allerdings musste sie dafür wieder Asymptotik Verhalten von nicht-geometrischen Größen annehmen. Weitere Ergebnisse wurden bspw. von Eichmair-Metzger erreicht. Außerdem wurden alternative Blätterungen konstruiert. Hier möchten wir die Flächen *konstanter „vorgegebener Krümmung“* $\mathcal{H} \pm \mathcal{P} \equiv$ konst. von Metzger [Met04] bzw. [Met07], die Flächen von Willmore-Typ von Lamm-Metzger-Schulze [LMS11] und (im statischen Fall) die Niveau-Flächen der Lapse-Funktion von Cederbaum [Ced12] erwähnen.

Eines der Ergebnisse dieser Arbeit ist, dass das von Huisken-Yau entwickelte Werkzeug der Familie von CMC-Flächen tatsächlich für *jedes* isolierte gravitative System verwendet werden kann: Uns gelingt es erstmalig zu beweisen, dass diese CMC-Flächen auch ohne angenommene (asymptotischen) Symmetrie-Bedingungen existieren und eindeutig sind. Dabei erreichen wir mit der verwendeten Definition eines *isolierten Systems* konzeptionell die Voraussetzungen, die auch verwendet werden, um zu zeigen, dass die Masse dieses Systems wohldefiniert ist. Daher ist es intuitiv anzunehmen, dass diese Annahmen konzeptionell nicht weiter abgeschwächt werden können. Schließlich wäre es unplausibel anzunehmen, dass es physikalischen Systeme gibt, für die das durch die CMC-Flächen beschriebene Massezentrum wohldefiniert ist, ohne dass auch die Masse wohldefiniert ist.

Weiter zeigen wir, dass in wohldefinierter Weise der Quotient von Impuls und Masse gleich der „Geschwindigkeit“ des Systems ist, d. h. gleich der „zeitlichen Ableitung“ des durch diese Flächen definierten Zentrums. Damit gelingt es uns erstmalig beweisen, dass diese Begriffe miteinander verträglich sind: Würde für diese Definitionen nicht die bekannte Gleichung „Masse mal Geschwindigkeit = Impuls“ gelten, so widerspräche dies der physikalischen Interpretation dieser Begriffe.

Zuletzt verallgemeinern wir diese Ergebnisse auf Flächen, die konstante Krümmung nicht bzgl. eines Zeitschnitts sondern bzgl. ihres „Lichtkegels“ haben – diese Flächen sind eine natürliche Verallgemeinerung der Horizonte schwarzer Löcher. Existenz und Eindeutigkeit solcher Flächen wurde bereits von Metzger in dessen Dissertation gezeigt, jedoch erreichen wir auch hier allgemeinere Ergebnisse.

Neue Ergebnisse dieser Arbeit

Wir untersuchen in dieser Arbeit erstmalig die *zeitliche Evolution* der CMC-Flächen unter den Einstein-Gleichungen und zeigen dabei insbesondere, dass bzw. in welchem Sinn das *CMC-Massezentrum* (nach Huisken-Yau) mit den ADM-Definitionen von Impuls und Masse verträglich ist (Theorem III.3.3 und Theorem III.3.4). Dabei erhalten wir dieses Ergebnis sogar in einem gewissen punktweisen Sinn (Theorem III.3.9). Als Anwendung nutzen wir diese Ergebnisse um interessante Beispiele von asymptotisch flachen Mannigfaltigkeiten ohne wohldefiniertes Massezentrum zu konstruieren (Beispiel III.4.3), deren Existenz [HY96, Theorem 4.2] widerspricht.[2]

Weiter verallgemeinern wir die Existenz- und Eindeutigkeits[3]-Ergebnisse für die CMC-Flächen in Dimension drei auf $\mathcal{C}^2$-Nähe zum Euklidischen Raum (Theoreme III.1.1 und III.2.1). Dies ist insofern eine deutliche Verbesserung, da wir erstmalig *keine* Symmetrie-Annahmen an die Komponenten der Metrik machen müssen: weder (asymptotische) Rotationssymmetrie der Metrik selbst (vgl. [Met07, Theorem 6.2] und [EM12, Theorem 6.1]) noch (asymptotische) Spiegelsymmetrien an Metrik und Krümmung (vgl. [Hua10]) sind nötig. Wir erreichen damit diese Resultate unter *konzeptionell* den gleichen Annahmen, wie sie von Bartnik für die Wohldefiniertheit der (ADM-)Masse benötigt werden [Bar86] und daher ist davon auszugehen, dass dies konzeptionell die in Dimension drei bestmögliche Verallgemeinerung ist. Konzeptionell bedeutet hier, dass wir zur Vereinfachung der Techniken *punktweise* statt *Sobolev*-Abfall-Bedingungen annehmen und daher nicht genau die Annahmen erreichen, die für die Wohldefiniertheit der (ADM-)Masse benötigt werden [Bar86] – siehe Abschnitt „Offene Fragen in direktem Umfeld der Arbeit“ auf Seite 6.

Zusätzlich erhalten wir die korrespondierenden Ergebnisse für Flächen konstanter Expansion (CE-Flächen): Diese existieren für $\mathcal{C}^2$-Nähe zum Euklidischen Raum (Theorem IV.3.1), wobei wir die punktweise „Kleinheit“ der zweiten Fundamentalform (vgl. [Met04]) auf Kleinheit gewisser Integrale reduzieren können (siehe bspw. Theorem IV.1). Auch dabei erhalten wir die Eindeutigkeit dieser Flächen (Theorem IV.2.1).[4] Dies verallgemeinert die bisherigen Existenz- und Eindeutigkeitsergebnisse für diese Flächen. Das zu obigem Evolutionsergebnis korrespondierende Resultat ist, dass diese Flächen in gewissem Sinn „(in der Zeit) still stehen“ (Theorem IV.4.1). Dies ist in Abschnitt IV.4 genauer erklärt. Zusätzlich geben wir in den Bemerkungen IV.6 und IV.8 eine Verallgemeinerung der Interpretationen der CE-Flächen als Momente, wie sie von Metzger begonnen wurde.

[2] Dies ist Teil der Veröffentlichung [CN14], die in Kooperation mit Carla Cederbaum entstand. Jedoch sind die hier vorgestellten Beispiele vom Autor der vorliegenden Arbeit erarbeitet und daher hier wiedergegeben. Die weiteren Beispiele des zitierten Artikels wurden anschließend vorrangig von Carla Cederbaum erarbeitet und daher wird hier nicht genauer auf sie eingegangen.

[3] Es sei bemerkt, dass wir schwächere Annahmen an die umliegende Metrik machen als bisher gemacht wurden, aber die Klasse der Flächen einschränken müssen, in welcher die Eindeutigkeit gilt. Es ist jedoch durch Regularitätsargumente wie in den Arbeiten von Metzger möglich, diese Einschränkung zu entfernen, siehe auch [Ner14b].

[4] Wieder bemerken wir, dass wir die Klasse der Flächen eingeschränkt haben, innerhalb der die CE-Flächen eindeutig sind. Jedoch sollte man sich wieder klar machen, dass Regularitätsargumente wie in den Arbeiten von Metzger auch hier diese Einschränkung entfernt werden können, siehe auch [Ner14a].

Vergleich mit anderen Arbeiten

Wie bereits erwähnt, wurde das Existenz-Resultat für Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung (CMC-Flächen) erstmals von Husiken-Yau in [HY96, Theorem 4.1] gezeigt. Sie bewiesen, dass jede dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M},\overline{g})$, welche asymptotisch zur Schwarzschild-Metrik ist, eine Blätterung durch eine Familie von Flächen $\{{}_\sigma\Sigma\}_\sigma$ konstanter mittlerer Krümmung besitzt. Dabei setzten sie voraus, dass die Metrik $\overline{g}$ von $\overline{M}$ bis zur *vierten Ableitung* und bis zur (exkl.) *zweiten Ordnung* gleich der Schwarzschild-Metrik ist – in der hier verwendeten Notation $\mathcal{C}^4_2$-asymptotisch zu Schwarzschild.

Die Voraussetzungen wurden später von mehreren Autoren abgeschwächt (wie oben erklärt), von denen wir jedoch drei weiter ausführen möchten. Metzger zeigte, dass (in einem schwächeren Sinne) $\mathcal{C}^2$-Nähe zu Schwarzschild ausreicht [Met04, Theorem 5.3] bzw. [Met07, Theorem 6.2]. Später bewies Huang, dass (in einem noch schwächeren Sinne) $\mathcal{C}^5$-Nähe zur Euklidischen Metrik genügt, wenn zusätzlich $\mathcal{C}^2$-Symmetrie Annahmen an die Metrik gemacht werden [Hua10]. In beliebiger Dimension $n \geq 3$ wurde die Existenz und Eindeutigkeit der CMC-Blätterung von Metzger-Eichmair [EM12, Theorem 6.1] gezeigt. Sie mussten für die Existenz nur $\mathcal{C}^0$-Nähe zu Schwarzschild und $\mathcal{C}^2$-Nähe zum Euklidischen Raum annehmen.

Da unsere Haupt-Beweisstrukturen der der oben zitierten Arbeiten von Metzger entspricht, wollen wir diese Arbeiten näher erklären. Metzger zeigt dort die Existenz und Eindeutigkeit der Flächen, falls die umliegende Metrik bis zur *zweiten Ableitung* in der *höchsten Ordnung* nahe an der Schwarzschild-Metrik ist – $\mathcal{C}^2_1$-asymptotisch zu Schwarzschild –, falls die zugehörige Konstante ausreichend klein ist. Weiter verallgemeinert er dies derart, dass nicht nur CMC-Flächen sondern auch Flächen mit konstanter Krümmung $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$ existieren – CE-Flächen und $\mathcal{H} \pm \operatorname{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv$ konstant. Dabei ist $\mathcal{P}$ die zweidimensionale Spur bzgl. dieser Fläche eines zusätzlichen symmetrischen $(0,2)$-Tensors $\overline{\mathrm{k}}$, welcher durch die zweiten Fundamentalform einer dreidimensionalen raumartigen Hyperfläche einer Lorentz-Mannigfaltigkeit motiviert ist. Dabei fordert er, dass dieser Tensor $\overline{\mathrm{k}}$ $\mathcal{C}^1_2$-asymptotisch verschwindet und auch hier die zugehörige Konstante klein ist.

Zunächst beweist er, dass Flächen mit konstanter Expansion $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$, die eine zusätzliche schwache Regularität erfüllt, bereits in einem strikten Sinne regulär ist ([Met04, Abschnitt 1.5, Kapitel 2 und 3]). Anschließend (Kapitel 4) folgert er, dass die Linearisierung der Krümmungsabbildung $\mathcal{H} \pm \mathcal{P} : f \mapsto (\mathcal{H} \pm \mathcal{P})(\operatorname{graph} f)$ auf solchen Flächen invertierbar ist und zeigt eine untere Schranke ihrer Eigenwerte. In Kapitel 5 betrachtet er Konvexkombinationen ${}^\tau\overline{g} := {}^s\overline{g} - \tau\,({}^s\overline{g} - \overline{g})$ der tatsächlichen Metrik $\overline{g}$ und der Schwarzschild Metrik ${}^s\overline{g}$ sowie den skalierten Tensor ${}^\tau\overline{\mathrm{k}} := \tau\,\overline{\mathrm{k}}$. Durch ein Offen-Abgeschlossen-Argument kann er zeigen, dass das Intervall I der „Indices“ $\tau \in [0\,,1]$, für welche $\overline{M}$ eine solche Überdeckung bzgl. ${}^\tau\overline{g}$ und ${}^\tau\overline{\mathrm{k}}$ besitzt, das ganze Intervall $[0\,,1]$ ist. Er beweist also, dass dieses Intervall nicht-leer, offen und abgeschlossen in (und daher gleich) $[0\,,1]$ ist. Die Offenheit wurde dabei – mit der Invertierbarkeit des obigen Stabilitätsoperators – durch den impliziten Funktionensatz gezeigt und die Abgeschlossenheit durch ein Konvergenz-Argument. Ein abschließendes Regularitätsargument liefert die differenzierbare Abhängigkeit von τ.

Wir möchten an dieser Stelle noch einmal hervorheben, dass die Haupt-Beweisstruktur unserer hier ausgeführten Regularitäts-, Existenz- und Eindeutigkeitsergebnisse identisch zu diesem Vorgehen von Metzger ist:

- Die entscheidende Regularität (Abfall des spurfreien Anteils der zweiten Fundamentalform) der von uns betrachteten Flächen erhalten wir wie er durch Untersuchung der schwachen Formulierung der Simons-Identität für den Laplace der zweiten Fundamentalform. Allerdings verzichten wir darauf die Resultate von DeLellis-Müller [DLM05] für die daraus folgende Regularität zu verwenden, sondern zeigen diese der Vollständigkeit halber „von Hand“ im vorliegenden Fall der CMC-Flächen.
- Die Beweisidee für die Existenz (und Eindeutigkeit) ist wie bei ihm ein Offen-Abgeschlossen-Argument für ein äquivalent definiertes Intervall aller Indices $\tau \in [0\,,1]$ bzw. Gewichte $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$ für welche die gewünschte Überdeckung bzgl. der künstlichen Metrik ${}^{\tau}\overline{g} := {}^{s}\overline{g} + \tau(\overline{g} - {}^{s}\overline{g})$ beziehungsweise bzgl. der künstlichen zweiten Fundamentalform ${}^{\mathscr{b}}\overline{\mathrm{k}} := \mathscr{b}\,\overline{\mathrm{k}}$ existiert.
- Ebenso erhalten wir die Abgeschlossenheit durch ein Konvergenz-Argument und die Offenheit über den impliziten Funktionensatz, welcher angewendet werden kann, weil der (Pseudo-)Stabilitätsoperator invertierbar ist.

Anstatt wie Metzger gleichzeitig Metrik und zweite Fundamentalform zu verändern, betrachten wir dies nacheinander. Das heißt, zunächst zeigen wir, dass CMC-Flächen existieren, indem wir die Familie von Metriken ${}^{\tau}\overline{g} := {}^{s}\overline{g} - \tau\,({}^{s}\overline{g} - \overline{g})$ auf $\overline{M}$ betrachten und das äquivalente Offen-Abgeschlossen-Argument über die zugehörige Menge I von Indices τ führen. Anschließend zeigen wir, dass diese Flächen zu Flächen mit *konstanter Expansion* $\mathcal{H} + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}$ – in der Notation von Metzger $\mathcal{H} \pm \mathscr{b}\,\mathcal{P}$ – deformiert werden können und beweisen, dass auch hier das Intervall der Gewichte $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$, für die diese Flächen existieren, offen und abgeschlossen in und damit gleich $[-1\,,1]$ ist.

Für die hier gemachte Verallgemeinerung sind drei *zentrale* Neuerungen gegenüber bspw. der Arbeit von Metzger nötig. Die erste und kleinste Neuerung ist das tatsächlich in jedem Schritt – wie bspw. dem Beweis der Invertierbarkeit obiger Pseudo-Stabilitätsoperatoren – beachtet wird, dass nicht der ganze Funktionenraum L^2 (bzw. $\mathrm{W}^{2,p}$) betrachtet werden muss, sondern immer nur die ersten drei Eigenfunktionen des Laplace der Fläche untersucht werden müssen. Und diese erfüllen – gegenüber allen anderen nicht-konstanten Funktionen – zusätzliche Abschätzungen. Diese Erkenntnis ist nicht wirklich neu, jedoch scheint es so, als sei sie in der vorliegenden Arbeit erstmalig mit all ihren Folgen beachtet worden. So genügt es bspw. für die Invertierbarkeit obiger (Pseudo-)Stabilitätsoperatoren ${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1$ die Invertierbarkeit der 3×3-Matrix $A_{ij} := \int {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 f_i\, f_j \,\mathrm{d}\mu$ zu zeigen, wobei f_i und f_j die besagten Eigenfunktionen sind. Genauer wird auf diese Eigenfunktionen in Abschnitt II.4 und Satz II.5.9 eingegangen. Weiter wissen wir über diese Funktionen, dass sie zu Translationen der zugehörigen Fläche korrespondieren (Abschnitt II.6), und dass Translationen „einfache“ Deformationen mit vielen zusätzlichen Eigenschaften sind.

Die zweite zentrale Idee ist die Verwendung der verallgemeinerten Bochner-Lichnerowicz-Formel für $\Delta(g\,(\nabla f_i, \nabla f_j))$ (basierend auf [Lic58]), um Integrale der Form $\int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu)\, f_i f_j \,\mathrm{d}\mu$ für diese Eigenfunktionen des Laplace der Fläche Σ durch die Eigenwerte des Laplace darzustellen, ohne auch nur in höchster Ordnung Kenntnis des

Ricci-Tensors zu benötigen. Nach Kenntnis des Autors wurde dies erstmalig von Huang in einem vergleichbaren Kontext gemacht [Hua10, implizit in Lemma 3.7]. Wir verallgemeinern diese Technik auf den von uns betrachteten Fall und können daher die Stabilität der CMC-Flächen folgern, ohne mehr als Abfallbedingungen an die Ricci-Krümmung zu fordern. Wobei wir wieder beachten müssen, dass diese Eigenfunktionen „die einzige entscheidenden" sind (vgl. oben). Dadurch erhalten wir die Invertierbarkeit des Stabilitätsoperators in dem von uns betrachteten allgemeinen Setting einer $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flachen Metrik.

Um die dritte dieser Ideen zu erklären, bemerken wir, dass es in allen Existenz-Beweisen der oben zitierten Arbeiten zentral ist, die *Position* der CMC-Flächen abschätzen zu können: Es muss gezeigt werden, dass für jede der CMC-Flächen ein Bruchteil ihres Radius ausreicht, um den Abstand des Euklidischen Koordinaten-Zentrums der Fläche zum Koordinaten-Ursprung nach unten zu beschränken. Auch in der vorliegenden Arbeit ist es zentral eine ähnliche Abschätzung für das Koordinaten-Zentrum zu erhalten. Dafür benutzen wir die Technik, mit der üblicherweise gezeigt wird, dass diese Flächen konzentrisch sind (siehe bspw. [CS03, CW08, Hua10, CP11]). Passen wir diese Technik auf unsere Voraussetzungen an und kombinieren diese mit einer Kontrolle für die Ricci-Integrale $\int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu)\, f_i \,\mathrm{d}\mu$, so erhalten wir die benötigte Abschätzung für das Euklidische Koordinaten-Zentrum. Dabei ermöglicht es ein nach Kenntnis des Autors (zumindest in diesem Kontext) neuer technischer Trick diese Ricci-Integrale abzuschätzen – siehe Lemma A.1.3.

Wir verwenden diese drei Ideen außerdem, um im Fall der CE-Flächen die Invertierbarkeit des jeweils passenden Pseudo-Stabilitätsoperator zu zeigen. Dafür müssen wir nur annehmen, dass die dabei zusätzlich auftauchenden *Fourier-Koeffizienten* der zweiten Fundamentalform $\overline{\mathrm{k}}$ bzw. gewisse *Momente der Anfangsdaten* geeignet kontrolliert sind – vgl. Voraussetzung IV.3 sowie die Bemerkungen IV.5 und IV.6. Dies ermöglicht, dass wir auch die Existenz und Eindeutigkeit der CE-Flächen für $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,2}$-flache Anfangsdaten erhalten und damit auch für die CE-Flächen die Annahmen im Vergleich zu Metzger reduzieren können.[5] Dabei erhalten wir die Existenz der CE-Flächen insbesondere unter *geometrischen Bedingungen*, d. h. Bedingungen, die formuliert werden können ohne Koordinaten zu verwenden, sowie leicht zu formulierenden Bedingungen wir bspw. asymptotische Maximalität, $\mathcal{C}^1$-Regge-Teitelboim-Bedingungen kombiniert mit dem Verschwinden des (ADM-)Impulses. Zusätzlich erhalten wir weitere bzw. verallgemeinerte Erkenntnisse über die Bedeutung der CE-Flächen, siehe Bemerkung IV.8.

Offene Fragen in direktem Umfeld der Arbeit

Nachdem in dieser Arbeit gezeigt wird, dass jede $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-asymptotisch flache Mannigfaltigkeit durch CMC-Flächen geblättert wird, ergibt sich zunächst die Frage, ob umgekehrt

[5] Wir bemerken, dass in dieser Arbeit (im Gegensatz zu der zitierten von Metzger) angenommen wird, dass $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ Anfangsdaten sind, d. h. dass die Einsteingleichungen (I.1) erfüllt werden. Aufgrund der angenommenen (schwachen) Abfallbedingungen an $\overline{\mathrm{J}}$ und $\overline{\varrho}$ ist dies allerdings nur eine sehr schwache zusätzliche Annahme.

die Existenz einer solchen Blätterung bereits impliziert, dass die geblätterte Mannigfaltigkeit asymptotisch flach ist, wenn geeignete geometrische Annahmen an die CMC-Blätter gemacht werden.[6]

Als offene Frage in *direktem* Zusammenhang zu dieser Arbeit ergibt sich weiter, ob für die Existenz der CMC-Blätterung tatsächlich die Annahmen ausreichen, welche für die Wohldefiniertheit der Masse benötigt sind. Denn mit etwas technischen Mehraufwand sollte es möglich sein die Voraussetzung von der $\mathcal{C}^2$-punktweisen Annahme $g - {}^e\overline{g} = O_2(d^{-\varepsilon-1/2})$ auf die korrespondierende Sobolev-Annahme $(g - {}^e\overline{g}) \in \mathrm{W}^{2,p}_{-1/2}(\overline{M} \setminus \overline{K})$ (mit $p > 3$) zu reduzieren. Es wäre außerdem interessant nachzuweisen, dass bzw. ob die Hawking-Masse (oder ein anderer solcher Masse Begriff) monoton in der Zeit (und Radius) auf den CMC- und CE-Flächen ist – dies ist insbesondere zu erwarten, wenn man nicht zu jeder Zeit die Fläche mit der gleichen mittleren Krümmung bzw. gleiche Expansion betrachtet, sondern die entsprechend der Lichtgeschwindigkeit größeren Flächen. Außerdem könnten die in Kapitel I hergeleiteten Krümmungsidentitäten so umgeschrieben werden, dass sich ein *2+1+1-Formalismus* der Einstein-Gleichungen ergibt und es wäre interessant in diesem das Cauchy-Problem zu untersuchen. Dies könnte bspw. für numerische Betrachtungen der allgemeinen Relativitätstheorie interessant sein.

Struktur der Arbeit

Im Kapitel I zeigen wir Krümmungsgleichungen, die für Flächen der Kodimension zwei und die umliegende Mannigfaltigkeit gelten. Genauer erklären und definieren wir in diesem Kapitel zunächst die in dieser Arbeit verwendeten Schreibweisen, erklären welchen Vorzeichenkonventionen wir folgen und geben die grundlegenden Definitionen (Abschnitt I.1). Anschließend (Abschnitt I.2) erarbeiten wir kurz eine Darstellung des Ricci-Tensors einer vierdimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit durch Größen einer zweidimensionalen raumartigen Untermannigfaltigkeit und definieren damit (Pseudo-)Stabilitätsoperatoren, welche in den späteren Kapiteln eine zentrale Rolle spielen und daher dort näher untersucht und beschrieben werden. Schließlich definieren wir in Abschnitt I.3 die von uns verwendeten Abfallvoraussetzungen und definieren die von uns in der weiteren Arbeit verwendete Klasse von „fast-konzentrischen Sphären“.

Im Kapitel II führen wir die (fast) komplette Regularität-Theorie der in dieser Arbeit verwendeten zweidimensionalen Flächen durch, wie wir sie für die Existenzresultate und Evolutionsuntersuchungen benötigen. Genauer definieren wir Sobolev-Normen und zeigen im Abschnitt II.1 das wohlbekannte Ergebnis, dass auf den von uns betrachteten Flächen für diese Normen die bekannten Sobolev-Ungleichungen gelten. Äquivalent zum Vorgehen im zweiten und dritten Abschnitt in [Met04], [Met07] folgern wir im Abschnitt II.2 aus der Simons-Identität für den Laplace der zweiten Fundamentalform aus schwachen Abschätzungen der beteiligten Fläche deutlich striktere Abschätzungen. Durch den variierten Zugang zur Existenz-Problematik arbeiten wir hier unter deutlich verstärkten Voraussetzungen und können daher auf einen großen Teil der Techniken Metzgers ver-

[6] In leicht eingeschränkter Weise konnte dies bereits durch den Autor gezeigt werden.

zichten. Aus diesen Abschätzungen leiten wir im Abschnitt II.3 weitere Ungleichungen an die Normale und Koordinatisierung der Flächen her – wir verzichten dabei darauf entsprechende Resultate von DeLellis-Müller [DLM05, Theorem 1.1] zu verwenden, da unter den hier betrachteten Voraussetzungen weit einfachere Techniken die äquivalenten Ergebnisse liefern. Zusätzliche Ergebnisse zu den ersten Eigenwerten und Eigenfunktionen des Laplace erarbeiten wir im Abschnitt II.4. Im anschließenden Abschnitt II.5 zeigen wir die benötigen a priori Abschätzungen an den Stabilitätsoperator der beteiligten Fläche. Untersuchungen von Translationen schließen das Kapitel ab.

Im Kapitel III beschäftigen wir uns mit Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Zunächst wird im Abschnitt III.1 die Existenz und in Abschnitt III.2 die Eindeutigkeit dieser Flächen gezeigt – wie in den Arbeiten von Metzger führen wir den Beweis durch ein Offen-Abgeschlossen-Argument. Indem wir dabei allerdings die Invertierbarkeit der oben erwähnten Stabilitätsoperatoren anders zeigen, erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit der CMC-Flächen unter unseren schwächeren Voraussetzungen (vgl. Abschnitt „Vergleich mit verwandten Arbeiten“, Seite 4). Im Abschnitt III.3 beschäftigen wir uns dann erstmals mit der zeitlichen Entwicklung solcher Flächen. Das nach bestem Wissen des Autors neue Ergebnis dieses Abschnitts ist, dass sich die Flächen entsprechend dem Quotienten aus Impuls und Masse „bewegen“. Dies ist bereits durch die Interpretation von Huisken-Yau motiviert, die in [HY96] erklärten, dass die Flächen der CMC-Blätterung in gewisser Weise als Massezentrum zu interpretieren sind. In Abschnitt III.4 zeigen wir, dass das so definierte Massezentrum identisch zum ADM-Massenzentrum ist – dieses Ergebnis erhalten wir allerdings nur unter stärkeren Annahmen als im Rest der Arbeit benötigt werden.[7] Dieses Ergebnis wurde u. a. auch in [Hua10, EM12] erreicht, dort allerdings unter anderen Voraussetzungen. Wir erhalten diese Gleichheit allerdings auch im Sinne von Existenz, d. h. das ADM-Massezentrum ist genau dann wohl definiert, wenn das Massezentrum von Huisken-Yau wohldefiniert ist. In diesem Sinn ist auch dieses Ergebnis nach Kenntnisstand des Autors neu. Weiter geben wir in Beispiel III.4.3 neue Beispiele, welche u. a. zeigen, dass die Annahmen an die Skalarkrümmung aus [EM12, Theorem 6.1] notwendig sind. Dies widerspricht insbesondere dem Koordinaten-Ergebnis aus [HY96, Thm 4.2], da dort diese Annahme nicht gemacht wird.

Das Kapitel IV kann als Wiederholung des Kapitels III für den Fall der Flächen mit konstanter *Expansion* gesehen werden, d. h. Flächen, die nicht bzgl. des umliegenden Zeit-Schnitts sondern bzgl. ihres Lichtkegels konstante mittlere Krümmung haben. Genauer zeigen wir im Abschnitt IV.1, dass jede CMC-Fläche zu einer solchen Fläche konstanter Expansion (CE) deformiert werden kann – wieder zeigen wir dies durch ein Offen-Abgeschlossen-Argument. Im anschließenden, kurzen Abschnitt IV.2 zeigen wir die Eindeutigkeit der CE-Flächen – der Beweis hier entspricht genau dem aus den zitierten Arbeiten von Metzger. Dass die CE-Flächen (genau wie die CMC-Flächen) einer Blätterung des Raums bilden, zeigen wir in Abschnitt IV.3. Im letzten Abschnitt IV.4 untersuchen wir kurz, wie sich die CE-Flächen in der Zeit evolvieren. Genauer zeigen wir, dass sie unter den hier gemachten Voraussetzungen (u. a. verschwindenden Impuls) „still stehen“.

[7] Weiter verallgemeinert wird dies in [Ner14b].

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich zuerst Professor Gerhard Huisken für den Vorschlag der Thematik der CMC- und CE-Flächen, seine konstante Betreuung und die vielen inspirierenden Gespräche danken. An meine Co-Betreuerin Carla Cederbaum geht mein Dank einerseits für die fachlichen Diskussionen und gute Zusammenarbeit, andererseits aber noch mehr für die stete Hilfe beim Kampf mit den Formulierungen. Lan-Hsuan Huang danke ich für die Erläuterungen zu ihrer Arbeit, welche Proposition II.5.7 und damit eine Verallgemeinerung der Resultate dieser Arbeit möglich machten. Besonders möchte ich auch Katharina Radermacher für ihre Korrekturen und das Korrekturlesen der ersten Versionen dieser Arbeit danken. Für viele (nicht nur, aber auch) fachliche Gespräche möchte ich mich bei meinen Kommilitonen bedanken – allen voran Marc Hake, Markus Klein, Dhia Mansour, Jonathan Seyrich und Pirmin Vollert.

Ausdrücklich will ich auch den vielen nicht-fachlichen Unterstützern meinen Dank aussprechen, namentlich vor allem Philipp Buchegger, Martina Lösle und Eva Schwerwitz für regelmäßige Ablenkung, Aufmunterung und Hilfe. Unendlichen Dank schulde ich Alexander Seizinger und Stephanie Schäfer für ihre immerwährende Unterstützung in allen Lebenslagen. Nicht in Worten auszudrücken ist mein Dank an meine Lebensgefährtin Katharina Radermacher und meine Familie für ihr Interesse und ihre ununterbrochene Unterstützung aller Art.

I. Notationen und Blätterungen

In diesem Kapitel sollen die grundlegende Notations- und Vorzeichen-Konventionen erklärt werden, die in dieser Arbeit verwendet werden (Abschnitt I.1). In Abschnitt I.2 leiten wir dann die angekündigte Krümmungs-Identitäten für Kodimension zwei her. In Abschnitt I.3 wird dann definiert, welche asymptotischen Eigenschaften in dieser Arbeit angenommen werden – sowohl für die umliegende Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$ als auch für die betrachteten Hyperflächen Σ.

I.1. Notation und Begriffe

Zunächst sollen einige der häufiger verwendeten Notationen sowie Vorzeichen- und andere Konventionen eingeführt werden.

I.1.1 Notation (Über Konstanten)
Wir verwenden den Buchstaben C in Ungleichungen für die Aussage „es existiert unter den gegebenen Voraussetzungen eine Konstante C so, dass diese Ungleichung gilt“. Dabei wird nicht zwischen mehreren solchen Konstanten unterschieden und immer (nur) entweder zu Beginn des Abschnitts, in der Aussage oder in der Voraussetzung des zugehörigen Lemmas/Proposition/Satzes oder Theorems darauf hingewiesen, von welchen gegebenen Größen $c_0, \dots$ diese Konstanten C abhängen – die Notation dafür ist dabei $C = C(c_0, \dots)$. Vergleichbar entspricht die Formulierung „für ausreichend kleines bzw. großes K“ für eine gegebene Konstante K *innerhalb* von Beweisen, der Aussage „es existiert eine Konstante K_0 so, dass dieser Argumentationsschritt für $K \leq K_0$ bzw. $K \geq K_0$ gilt“ und auch hier wird nicht zwischen verschiedenen solchen Konstanten K_0 unterschieden und wieder (nur) zu Beginn des Abschnitts, in der Aussage oder in den Voraussetzung des zugehörigen Lemmas/Proposition/Satzes oder Theorems darauf hingewiesen, von welchen gegebenen Konstanten $c, \dots$ diese Konstanten K_0 abhängen – die Notation dafür ist $K \leq K(c, \dots)$ bzw. $K \geq K(c, \dots)$. ◇

Es sei erwähnt, dass alle Konstanten monoton in ihren Abhängigkeiten sind, d. h. gelten die Voraussetzungen auch für kleinere Konstanten $c, \dots$ als ursprünglich angenommen, so gilt die Aussage für die gleiche oder eine kleine Konstante $C = C(c, \dots)$. In den nachfolgenden Kapiteln werden wir außerdem die Notation $C_{\overline{\epsilon}} = C_{\overline{\epsilon}}([c, d], e)$ für Konstanten $C_{\overline{\epsilon}} = C(c, d, e)$ verwenden, die „klein sind“, falls c und d „klein sind“. Dies wird in den jeweiligen Abschnitten genauer erläutert.

I.1.2 Notation (Übliche Tensoren und Koordinatisierung)
Für eine Lorentz-/Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) bezeichnet $\mathfrak{X}(M)$ die Menge

der glatten Vektorfelder, $\exp_p$ die Exponentialabbildung in einem Punkt $p \in M$, ∇ den Levi-Civita Zusammenhang bzgl. g, ∇f den Gradienten einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1(M)$, tr die Spur, $\mathcal{R}$ den Riemann-, Ric den Ricci-Krümmungstensor und $\mathcal{S}$ die Skalarkrümmung sowie div die Divergenz. In einer Karte x entspricht dies für einen nicht-notwendigerweise skalarwertigen $(0,2)$-Tensor $T \in \Gamma(\operatorname{Bil}(TM, TM))$ bzw. einen beliebigen Tensor $U \in \Gamma(\operatorname{Hom}(TM))$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g(e_i, e_j), & \left(g^{ij}\right)_{ij} &= \left(g_{ij}\right)^{-1}_{ij}, & \Gamma_{ijk} &= g(\nabla_{e_i} e_j, e_k), \\ \mathcal{S} &= g^{ij}\operatorname{Ric}_{ij}, & \operatorname{Ric}_{ij} &= g^{kl}\mathcal{R}_{iklj}, & \mathcal{R}_{ijkl} &= g(\mathcal{R}(e_i, e_j)e_k, e_l), \\ \nabla f &= g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i} e_j, & \operatorname{tr} T &= g^{ij}\, T_{ij}, & \operatorname{div} U &= g^{ij}\,(\nabla_{e_i} U)(e_j), \end{aligned}$$

wobei wir hier und im Folgenden die Einstein-Konvention verwenden und die Hebung bzw. Senkung eines Index die Verjüngung mit g^{ij} bzw. g_{ij} bezeichnet, bspw. $\Gamma_{ij}{}^k := g^{kl}\Gamma_{ijl}$. Soweit keine Uneindeutigkeiten entstehen können, unterscheiden wir in der Notation nie zwischen einen Zusammenhang ∇ auf M und den von ihm auf Tensorbündeln von M induzierten Zusammenhängen. ◇

I.1.3 Definition (Einstein-Gleichungen und -Tensor)
Eine Lorentzsche Mannigfaltigkeit $(\widehat{M}, \widehat{g})$ erfüllt die *Einstein-Gleichungen* für den *Energie-Impuls-Tensor* $\widehat{\mathrm{T}}$, falls

$$8\pi\,\widehat{\mathrm{T}} = \widehat{\mathrm{Ein}} := \widehat{\mathrm{Ric}} - \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{S}}\,\widehat{g}$$

gilt[1], wobei $\widehat{\mathrm{Ein}}$ *Einstein-Tensor* von $(\widehat{M}, \widehat{g})$ heißt. ◇

Da diese Operation in der vorliegenden Arbeit häufig verwendet wird, führen wir eine eigene Notation für die „Verjüngung zweier Tensoren“ ein. Weiter erklären wir übliche Notationen für gewisse Tensoroperatorionen bzw. -anteile.

I.1.4 Notation (Schreibweise von Tensoroperationen)
Für Tensoren $S \in \Gamma(\operatorname{Hom}^{k+1}(TM))$ und $T \in \Gamma(\operatorname{Hom}^{l+1}(TM))$ über einer gemeinsamen Lorentz-/Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) schreiben wir $S \odot T$ für das *g-Spurprodukt* $(S \odot T)_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_l} := S_{i_1 \dots i_k}{}^l T_{l j_1 \dots j_k}$ und bemerken, dass $T \odot U \odot V$ wohldefiniert ist, falls U zumindest zwei Komponenten hat. Weiter bezeichnet $(\bullet \wedge \bullet)_b$ für Vektorbündel $E_1, E_2, E_3 \to M$ und eine Paarung $b : \Gamma(E_1) \otimes \Gamma(E_2) \to \Gamma(E_3)$ wie üblich das Wedge-Produkt über b. Zuletzt schreiben wir T° für den spurfreien Anteil eines symmetrischen Tensors $T \in \Gamma(\operatorname{Sym}(TM))$, d. h. $T^\circ := T - {}^{\operatorname{tr} T}/_{\operatorname{tr} g}\, g$, sowie $|T|^2_g$ für die vollständige Verjüngung eines Operators mit sich selbst, d. h. $|T|^2_g := {}^*g\,(T, T)$, wobei hier ${}^*g$ die von g induzierte Metrik auf den Tensoren-Bündel über M bezeichnet. ◇

Da wir im Folgenden Blätterungen einer Mannigfaltigkeit durch Hyperflächen derselbigen untersuchen wollen, werden wir meistens mehrere Mannigfaltigkeiten zugleich betrachtet

[1] Wir lassen im Folgenden den physikalischen Faktor 8π wegfallen und identifizieren $\widehat{\mathrm{Ein}}$ und $\widehat{\mathrm{T}}$ über diese Gleichung.

müssen. Um deren Größen eindeutig in der Notation unterscheiden zu können, führen wir die folgende allgemeine Konvention ein.

I.1.5 Notation (Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten)
Sind mehrere Lorentz-/Riemannsche Mannigfaltigkeiten bzw. Metriken involviert, werden Krümmungsgrößen etc. mit den gleichen Akzenten und Indices wie die zugehörige Metrik versehen. Betrachten wir bspw. zwei Mannigfaltigkeiten $(\overline{M}, \overline{g})$ und (M, g), so bezeichnen $\overline{\nabla}$, $\overline{\mathrm{Ric}}$, $\overline{\mathrm{tr}}$, $\overline{\odot}$ den Levi-Civita Zusammenhang, den Ricci-Krümmungstensor, die Spur und das Spurprodukt in $\overline{M}$ bzgl. $\overline{g}$ und ∇, Ric, tr und $\odot$ die entsprechenden Größen in M bzgl. g. ◇

Wie bereits erwähnt sind Hyperflächen von Lorentz- und Riemannschen Mannigfaltigkeiten zentraler Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Auf diesen wird durch die Metrik der umliegenden Mannigfaltigkeit bekannterweise die *zweite Fundamentalform* (*äußere Krümmung*) induziert. Da für diese verschiedene Konventionen in der Literatur etabliert sind, erklären wir welche Vorzeichen-Konvention der zweiten Fundamentalform verwendet wird.

I.1.6 Notation (Zweite Fundamentalform)
Für eine Hyperfläche (M, g) einer Lorentz-/Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$ bezeichnet $\mathrm{I\!I}$ die zweite Fundamentalform und k ihre skalarwertige Form bzgl. einer gewählten normierten Normalen ν von $\overline{M}$, d. h.

$$\mathrm{I\!I}\,(X,Y) \coloneqq \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \quad \mathrm{k}(X,Y) \coloneqq \overline{g}\,(\mathrm{I\!I}\,(X,Y), \nu) \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Es bezeichnet in diesem Fall $\mathcal{H} \coloneqq \mathrm{tr}\mathrm{k}$ die mittlere Krümmung. Die zweite Fundamentalform sowie die zugehörigen Größen erhalten dabei Akzente und Indices entsprechend der Metrik der eingebetteten („kleineren“) Mannigfaltigkeit. ◇

Ist $(\widehat{M}, \widehat{g})$ eine Lorentzsche Mannigfaltigkeit und $\overline{M} \hookrightarrow \widehat{M}$ eine raumartige Hyperfläche mit induzierter Metrik $\overline{g}$ und zweiter Fundamentalform $\overline{\mathrm{k}}$, so steht die zweite Fundamentalform mit der Krümmung des umliegenden Raums in dem wohlbekannten Zusammenhang

$$\overline{\mathrm{J}} \coloneqq \widehat{\mathrm{Ein}}\left(\overline{\vartheta}, \cdot\right) = \overline{\mathrm{div}}\Big(\overline{\mathcal{H}}\,\overline{g} - \overline{\mathrm{k}}\Big), \qquad \overline{\varrho} \coloneqq \widehat{\mathrm{Ein}}\left(\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta}\right) = \frac{1}{2}\Big(\overline{\mathcal{S}} - \left|\overline{\mathrm{k}}\right|_{g}^{2} + \overline{\mathcal{H}}^2\Big), \tag{I.1}$$

falls $(\widehat{M}, \widehat{g})$ die Einstein-Gleichungen erfüllt – vgl. auch Proposition I.2.1. Dies motiviert die Definition von *Anfangsdaten*, siehe bspw. [FB52, CBG69, Yor79].

I.1.7 Definition (Anfangsdaten)
Sind $(\overline{M}, \overline{g})$ eine dreidimensionale raumartige Riemannsche Mannigfaltigkeit sowie $\overline{\mathrm{k}}$ ein glatter, symmetrischer $(0,2)$-Tensor, $\overline{\mathrm{J}}$ eine glatte 1-Form und $\overline{\varrho}$ eine glatte Funktion auf $\overline{M}$, welche die *Einsteinschen Zwangsbedingungen* (*constraint equations*)

$$\overline{\mathrm{J}} = \overline{\mathrm{div}}\Big(\overline{\mathcal{H}}\,\overline{g} - \overline{\mathrm{k}}\Big), \qquad \overline{\varrho} = \frac{1}{2}\Big(\overline{\mathcal{S}} - \left|\overline{\mathrm{k}}\right|_{\overline{g}}^{2} + \overline{\mathcal{H}}^2\Big) \tag{I.2}$$

erfüllen, so heißt das Tupel $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ *Anfangsdaten* (*initial data set*), $\overline{\mathrm{J}}$ *Impulsdichte* und $\overline{\varrho}$ *Energiedichte.* ◇

I.1.8 Bemerkung (Erklärung der hier vorkommenden Größen)
Die Definition der Anfangsdaten ist durch raumartige Hyperflächen in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit motiviert. Wie wir an den Gauß-, Codazzi-Gleichungen (siehe auch Proposition I.2.1) erkennen, erfüllen die zweite Fundamentalform $\overline{\mathrm{k}}$, die Energiestromdichte $\overline{\mathrm{J}} = \widehat{\mathrm{Ein}}\,(\overline{\vartheta}, \cdot)$ und die Energiedichte $\overline{\varrho} = \widehat{\mathrm{Ein}}\,(\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta})$ einer solchen Hyperfläche gerade die Zwangsbedingungen (I.2), falls $(\widehat{M}, \widehat{g})$ die Einstein-Gleichungen erfüllt.[2] ◇

Da der Begriff der *Blätterungen* für diese Arbeit zentral ist, wollen wir hier eine exakte Definition geben – einmal im Lorentzschen und einmal im Riemannschen Fall. Wir bemerken dabei, dass wir für diese Definition nicht zwischen einer Blätterung des gesamten Raums und einer Blätterung eines Teils des Raumes unterscheiden.

I.1.9 Definition (Zeitliche Blätterung)
Für eine Mannigfaltigkeit $\overline{M}$, ein nicht-triviales Intervall $I \supseteq (-\varepsilon\,, \varepsilon)$ und eine Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M}, \widehat{g})$ heißt eine injektive Immersion $\Phi : I \times \overline{M} \to \widehat{M} : (t,p) \mapsto \Phi(t,p) =: {}^t\overline{\Phi}(p)$ *zeitliche Blätterung* von $\widehat{M}$, falls $(\overline{M}, {}^t\overline{g})$ für ${}^t\overline{g} := {\Phi_t}^*\widehat{g}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ${}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial t}$ *zeitartig* ist, d. h. $\widehat{g}\;({}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial t}, {}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial t}) < 0$. Weiter heißt $\widehat{e}_0 := {}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial t}$ *Geschwindigkeitsvektor* und $\overline{\alpha} := |\widehat{g}\;(\widehat{e}_0, \widehat{e}_0)|^{1/2}$ *Lapse-Funktion* der Blätterung. Die Blätterung heißt *orthogonal*, falls $\widehat{e}_0$ zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ orthogonal auf ${}^t\overline{M} := \mathrm{Bild}\,{}^t\overline{\Phi}$ steht. ◇

I.1.10 Definition (Räumliche Blätterung)
Für eine Mannigfaltigkeit M, ein nicht-triviales Intervall $R \supseteq (-\varepsilon\,, \varepsilon)$ und eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$ heißt eine injektive Immersion $\Phi : R \times M \to \overline{M} : (r,p) \mapsto \Phi(r,p) =: {}_r\Phi$ *räumliche Blätterung* von $\overline{M}$, falls $\overline{g}\;({}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial r}, {}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial r}) > 0$. Weiter heißt $\bar{e}_1 := {}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial r}$ *Geschwindigkeitsvektor* und $u := \overline{g}\;(\bar{e}_1, \bar{e}_1)^{1/2}$ *Lapse-Funktion* der Blätterung. Die Evolution heißt *orthogonal*, falls $\bar{e}_1$ zu jedem Index $r \in R$ orthogonal auf ${}_rM := \mathrm{Bild}\,{}_r\Phi$ steht. ◇

In der vorliegenden Arbeit werden räumliche Blätterungen $({}^t_\sigma\Sigma)_\sigma$ von Riemannsche Mannigfaltigkeiten $({}^t\overline{M}, {}^t\overline{g})_t$ betrachtet, welche wiederum eine zeitliche Blätterung einer Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M}, \widehat{g})$ bilden. Wir vereinbaren dabei:

I.1.11 Notation (Akzente von Mannigfaltigkeiten)
Jede Lorentz-Mannigfaltigkeit wird mit einem Dach-Akzent versehen, d. h. mit $(\widehat{M}, \widehat{g})$ bezeichnet. Dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten werden mit einem Querstrich versehen, d. h. mit $(\overline{M}, \overline{g})$ bezeichnet. Werden gleichzeitig mehrere dreidimensionale Mannigfaltigkeiten oder Metriken betrachtet, so werden diese durch einen linken oberen Index unterschieden, d. h. $({}^t\overline{M}, {}^t\overline{g})$, welcher sich auf ihre zweidimensionalen Hyperflächen vererbt, d. h. eine Hyperfläche in $({}^t\overline{M}, {}^t\overline{g})$ wird ebenfalls mit dem Index t versehen $({}^t\Sigma, {}^tg)$. Mehreren zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten oder Metriken werden durch einen linken unteren Index unterschieden, d. h. $({}_r\Sigma, {}_rg)$ bzw. $({}^t_r\Sigma, {}^t_rg)$. Diese Akzente und Indices werden entsprechend Notation I.1.5 auf die abgeleiteten Größen (Tensoren) vererbt.

[2] Wobei wir den Faktor 8π zwischen dem Einstein Tensor und der Momenten- bzw. Energiedichte zur Verkürzung unterdrückt haben.

Teile dieser Arbeit werden sich nicht auf eine spezifische Dimension festlegen. In diesem Fall erhalten die Mannigfaltigkeiten niedrigster Dimension $n-1$ keinen Akzent, die Mannigfaltigkeiten mit einer Dimension mehr einen Querstrich und die größte Mannigfaltigkeit (Dimension $n+1$) einen Dach-Akzent. $\diamond$

Es ist bekannt, dass jede Blätterung durch ihren Anfangswert ${}^0\overline{\Phi}$ und die Werte der Lapse-Funktionen ${}^t\overline{\alpha}$ und des Shift-Vektorfelder ${}^{\partial\Phi}/_{\partial t} - {}^t\overline{\alpha}\,{}^t\overline{\vartheta}$ (zu allen Zeiten t) vollständig charakterisiert ist. Daher sprechen wir von einer infinitesimalen Blätterung, wenn diese Daten nur für $t = 0$ gegeben sind. Da wir vorrangig an den Flächen ${}^t\overline{M} := \operatorname{Bild}{}^t\overline{\Phi}$ interessiert sind, unterdrücken wir dabei den Shift, d. h. nehmen ${}^{\partial\Phi}/_{\partial t} = {}^t\overline{\alpha}\,{}^t\overline{\vartheta}$ an.

I.1.12 Bemerkung (Infinitesimale Blätterung)
Es ist wohlbekannt, dass für glatte Daten jede infinitesimale zeitartige Blätterung lokal zu einer zeitartigen Blätterung fortgesetzt werden. Das heißt, sei $(\widehat{M},\widehat{g})$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\overline{M}$ eine raumartige Hyperfläche darin mit normiertem, zeitartigen Normalenfeld $\overline{\vartheta}$. Ist $0 \leq \overline{\alpha} \in \mathcal{C}^1(\overline{M})$ eine Funktion auf $\overline{M}$ und $p \in \overline{M}$, so existiert eine Umgebung $U \subseteq \overline{M}$ von $p \in \overline{M}$, ein $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ und eine zeitliche Blätterung $\Phi : (-\varepsilon\,,\varepsilon) \times \overline{M}$ so, dass auf $\overline{M}$ bereits ${}^{\partial\Phi}/_{\partial t} = \overline{\alpha}\,\overline{\vartheta}$ gilt. Dies kann bspw. gezeigt werden, in dem man die Exponentialabbildung $\widehat{\exp}(\overline{\alpha}\,\overline{\vartheta})$ in einer Umgebung von $p \in \overline{M}$ betrachtet. $\diamond$

Entsprechend definieren wir infinitesimale räumliche Blätterungen und erhalten auch hier lokale Fortsetzbarkeit.

I.2. Krümmungsgleichungen von Blätterung

In diesem Abschnitt kombinieren wir zeitliche und räumliche Blätterungen. Genauer betrachten wir für eine zeitliche Blätterung $\overline{\Phi} : I \times \overline{M} \to \widehat{M}$ eine Familie von raumartigen Blätterungen ${}^t\Psi : t \times M \to \overline{M}$ (welche glatt von t abhängt). Wir werden nun herleiten, wie die Krümmungen der inneren Blätter ${}^t_r\Sigma := {}^t\Psi(r, M)$ mit denen der Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M},\widehat{g})$ gekoppelt sind. Der Vollständigkeit halber leiten wir dafür in Proposition I.2.1 wohlbekannte Gleichungen wie bspw. die Gauß- ((I.6) bzw. (I.10)) und Codazzi-Gleichung ((I.5) bzw. (I.8)) her, bevor wir in Proposition I.2.3 die analogen Gleichungen für Kodimension zwei wiederholen. Anschließend geben wir die Definition und erste Charakterisierung der im weiteren Verlauf betrachteten (Pseudo-)Stabilitätsoperatoren – eine genauere Erklärung und Untersuchung wird in Abschnitt II.5 nachgeliefert.

Um in der nachfolgenden Proposition I.2.1 die beiden Fälle „zeitartige Blätterung $\Psi : (-\varepsilon\,,\varepsilon) \times \overline{M}^n \to \widehat{M}^{n+1}$“ und „raumartige Blätterung $\overline{\Phi} : (-\varepsilon\,,\varepsilon) \times M^{n-1} \to \overline{M}^n$“ nicht einzeln bearbeiten zu müssen, verstoßen wir hier insofern kurz gegen unsere übliche Notation indem wir $\overline{M}$ für eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen oder Lorentzschen Mannigfaltigkeit $\widehat{M}$ schreiben.

I.2.1 Proposition (Krümmung bzgl. Blätterung der Kodim. 1)
Ist $\Phi : I \times (\overline{M}^n,\overline{g}) \hookrightarrow (\widehat{M},\widehat{g})$ eine orthogonale zeitliche resp. räumliche Blätterung mit Einheitsnormale $\overline{\vartheta}$ und Geschwindigkeitsvektor $\bar{e}_1 = \overline{\alpha}\,\overline{\vartheta}$ sowie $\operatorname{sgn} := -1$ resp. $\operatorname{sgn} := 1$,

so gilt im Sinne von Tensor-Gleichheiten auf $\overline{M}$

$$2\overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{k}} = -\dot{\overline{\mathscr{g}}}, \tag{I.3}$$

$$\widehat{\mathscr{R}}(e_0,\cdot,\cdot,e_0) = \overline{\alpha}\Big(\dot{\overline{\mathrm{k}}} + \overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{k}} \odot \overline{\mathrm{k}} - \operatorname{sgn}\overline{\mathrm{Hess}}\;\overline{\alpha}\Big), \tag{I.4}$$

$$\widehat{\mathscr{R}}(\cdot,\cdot,\cdot,e_0) = \overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{d}}_1\overline{\mathrm{k}}, \tag{I.5}$$

$$\widehat{\mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}} + \operatorname{sgn}\left(\overline{\mathrm{k}} \wedge \overline{\mathrm{k}}\right)_{\otimes}, \tag{I.6}$$

$$\dot{\overline{\mathrm{tr}\mathrm{k}}} = \dot{\overline{\mathscr{H}}} - 2\overline{\alpha}\left|\overline{\mathrm{k}}\right|^2_{\overline{\mathscr{g}}} \tag{I.7}$$

$$\widehat{\mathrm{Ric}}(e_0,e_0) = \overline{\alpha}\left(\dot{\overline{\mathscr{H}}} - \overline{\alpha}\left|\overline{\mathrm{k}}\right|^2_{\overline{\mathscr{g}}} - \operatorname{sgn}\overline{\Delta}\overline{\alpha}\right), \tag{I.8}$$

$$\widehat{\mathrm{Ric}}(e_0,\cdot) = \overline{\alpha}\left(D\overline{\mathscr{H}} - \overline{\mathrm{div}\mathrm{k}}\right), \tag{I.9}$$

$$\overline{\alpha}\,\widehat{\mathrm{Ric}} = \overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{Ric}} + \operatorname{sgn}\left(2\overline{\alpha}\overline{\mathrm{k}} \odot \overline{\mathrm{k}} - \overline{\alpha}\overline{\mathscr{H}}\overline{\mathrm{k}} + \dot{\overline{\mathrm{k}}}\right) - \overline{\mathrm{Hess}}\;\overline{\alpha}, \tag{I.10}$$

$$\widehat{\mathscr{S}} = \overline{\mathscr{S}} + \operatorname{sgn}\left(2\widehat{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) + \left|\overline{\mathrm{k}}\right|^2_{\overline{\mathscr{g}}} - \overline{\mathscr{H}}^2\right) \tag{I.11}$$

◇

wobei $\overline{\mathrm{d}}_1$ die äußere Ableitung in der ersten Komponente, $\dot{\bullet} := \partial\bullet/\partial t$ und $\overline{\mathrm{Hess}}\;\overline{\alpha}$ die Hessische der Lapse-Funktion bezeichnet, d. h. für drei Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $\overline{\mathrm{d}}_1\overline{\mathrm{k}}(X,Y,Z) := (\overline{\nabla}_X\overline{\mathrm{k}})(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y\overline{\mathrm{k}})(X,Z)$ und $\overline{\mathrm{Hess}}\;\overline{\alpha}(X,Y) := D_X D_Y\overline{\alpha} - D_{\overline{\nabla}_X Y}\overline{\alpha}$.

Beweis

Wir identifizieren ${}^0\overline{M}$ mit $\overline{M}$ und beachten, dass es genügt die Gleichungen in einer Kartenumgebung zu zeigen. Es sei daher x eine Karte von $\overline{M}$ um einen beliebigen Punkt $p \in \overline{M}$. Damit ist $\widehat{x} := (\,\mathrm{id}, x) \circ \Phi^{-1}$ eine Karte von $\widehat{M}$ um $\Phi(p)$ und wir identifizieren wir Kartenurbild und -bild. Wir bezeichnen mit $\widehat{e}_\alpha$ die Koordinatenvektorfelder mit den Einschränkungen $\overline{e}_i := \widehat{e}_i|_{\overline{M}}$, wobei $\widehat{e}_0 = \overline{\alpha}^{-2}\widehat{\nabla}t$ für $t := \widehat{x}_0$. Nach Voraussetzung steht $\widehat{e}_0$ orthogonal auf allen $\overline{e}_i$. Als Index reichen im Folgenden die lateinischen Buchstaben i bis m von 1 bis n und griechische Buchstaben von 0 bis n. Wir erhalten mit der Symmetrie von $\overline{\mathrm{k}}$

$$\overline{\alpha}\overline{\mathrm{k}}_{ij} = -\frac{1}{2}\Big(\widehat{\mathscr{g}}\left(\overline{e}_j, \widehat{\nabla}_{\widehat{e}_0}\overline{e}_i\right) + \widehat{\mathscr{g}}\left(\overline{e}_i, \widehat{\nabla}_{\widehat{e}_0}\overline{e}_j\right)\Big) = \left(-\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\widehat{e}_0}\overline{\mathscr{g}}\right)_{ij},$$

also gilt (I.3). Weiter gilt (I.4) direkt mittels

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{R}}_{0ij0} &= D_0\Big(\widehat{\mathscr{g}}\left(\widehat{\nabla}_{\overline{e}_i}\overline{e}_j, \widehat{e}_0\right)\Big) - \widehat{\mathscr{g}}\left(\widehat{\nabla}_{\overline{e}_i}\overline{e}_j, \widehat{\nabla}_{\widehat{e}_0}\widehat{e}_0\right) \\
&\quad - D_i\Big(\widehat{\mathscr{g}}\left(\widehat{\nabla}_{\widehat{e}_0}\overline{e}_j, \widehat{e}_0\right)\Big) + \widehat{\mathscr{g}}\left(\widehat{\nabla}_{\widehat{e}_0}\overline{e}_j, \widehat{\nabla}_{\overline{e}_i}\widehat{e}_0\right) \\
&= \overline{\alpha}\,D_0\overline{\mathrm{k}}_{ij} + D_0\overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{k}}_{ij} - \overline{\mathrm{k}}_{ij}D_0\overline{\alpha} - \overline{\mathscr{g}}^{kl}\widehat{\mathscr{g}}\left(\overline{\nabla}_{\overline{e}_i}\overline{e}_j, \overline{e}_l\right)\widehat{\mathscr{g}}\left(\overline{e}_k, \widehat{\nabla}_{\widehat{e}_0}\widehat{e}_0\right) \\
&\quad - D_i(\operatorname{sgn}\overline{\alpha}\,D_j\overline{\alpha}) + \operatorname{sgn}D_j\overline{\alpha}\,D_i\overline{\alpha} + \overline{\alpha}^2\,\widehat{\mathscr{g}}^{kl}\,\overline{\mathrm{k}}_{jk}\,\overline{\mathrm{k}}_{li} \\
&= \overline{\alpha}\,D_0\overline{\mathrm{k}}_{ij} + \operatorname{sgn}\overline{\alpha}\,\overline{\mathscr{g}}^{kl}\,\widehat{\mathscr{g}}\left(\overline{\nabla}_{\overline{e}_i}\overline{e}_j, \overline{e}_l\right)D_k\overline{\alpha} - D_i(\operatorname{sgn}\overline{\alpha}\,D_j\overline{\alpha}) \\
&\quad + \operatorname{sgn}D_j\overline{\alpha}\;D_i\overline{\alpha} + \overline{\alpha}^2\,\widehat{\mathscr{g}}^{kl}\,\overline{\mathrm{k}}_{jk}\,\overline{\mathrm{k}}_{li} \\
&= \overline{\alpha}\,D_0\overline{\mathrm{k}}_{ij} - \operatorname{sgn}\overline{\alpha}\;\overline{\mathrm{Hess}}\;\overline{\alpha}_{ij} + \overline{\alpha}^2\widehat{\mathscr{g}}^{kl}\,\overline{\mathrm{k}}_{jk}\,\overline{\mathrm{k}}_{li}
\end{aligned}$$

aus der Definition des Riemann-Krümmungs-Tensors und gleichartig folgt (I.5) mit

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{R}}_{ijk0} &= \widehat{g}\left(\widehat{\nabla}_{\bar{e}_i}\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_j}\bar{e}_k + \operatorname{sgn}\overline{\mathrm{k}}_{jk}\frac{\widehat{e}_0}{\overline{\alpha}}\right) - \widehat{\nabla}_{\bar{e}_j}\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_k + \operatorname{sgn}\overline{\mathrm{k}}_{ik}\frac{\widehat{e}_0}{\overline{\alpha}}\right), \widehat{e}_0\right)\\
&= \widehat{g}\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\overline{\nabla}_{\bar{e}_j}\bar{e}_k + \operatorname{sgn}\left(\left(\overline{\mathrm{k}}\Big(\bar{e}_i, \overline{\nabla}_{\bar{e}_j}\bar{e}_k\Big) + D_i\overline{\mathrm{k}}_{jk}\right)\frac{\widehat{e}_0}{\overline{\alpha}} + \overline{\mathrm{k}}_{jk}\widehat{\nabla}_{\bar{e}_i}\frac{\widehat{e}_0}{\overline{\alpha}}\right), \widehat{e}_0\right)\\
&\quad - \widehat{g}\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_j}\overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_k + \operatorname{sgn}\left(\left(\overline{\mathrm{k}}\Big(\bar{e}_j, \overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_k\Big) + D_j\overline{\mathrm{k}}_{ik}\right)\frac{\widehat{e}_0}{\overline{\alpha}} + \overline{\mathrm{k}}_{ik}\widehat{\nabla}_{\bar{e}_j}\frac{\widehat{e}_0}{\overline{\alpha}}\right), \widehat{e}_0\right)\\
&= \overline{\alpha}\left(\overline{\mathrm{k}}\Big(\bar{e}_i, \overline{\nabla}_{\bar{e}_j}\bar{e}_k\Big) + D_i\overline{\mathrm{k}}_{jk} - \overline{\mathrm{k}}\Big(\bar{e}_j, \overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_k\Big) - D_j\overline{\mathrm{k}}_{ik}\right).\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung des Riemann-Tensors beachten wir, dass die Tangentialkomponente von $\widehat{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_k$ gleich $\overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_k$ ist und erhalten (I.6) daher mit

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{R}}_{ijkl} &= \widehat{g}\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\overline{\nabla}_{\bar{e}_j}\bar{e}_k + \operatorname{sgn}\frac{\overline{\mathrm{k}}_{jk}}{\overline{\alpha}}\widehat{\nabla}_{\bar{e}_i}\widehat{e}_0 - \overline{\nabla}_{\bar{e}_j}\overline{\nabla}_{\bar{e}_i}\bar{e}_k - \operatorname{sgn}\frac{\overline{\mathrm{k}}_{ik}}{\overline{\alpha}}\widehat{\nabla}_{\bar{e}_j}\widehat{e}_0, \bar{e}_l\right)\\
&= \overline{\mathcal{R}}_{ijkl} - \operatorname{sgn}\overline{\mathrm{k}}_{jk}\overline{\mathrm{k}}_{il} + \operatorname{sgn}\overline{\mathrm{k}}_{ik}\overline{\mathrm{k}}_{jl}.\end{aligned}$$

Gleichung (I.7) ergibt sich direkt durch (I.3) und

$$\overline{\mathrm{tr}}\mathcal{L}_{\widehat{e}_0}\overline{\mathrm{k}} = \overline{g}^{ij}\partial_0\Big(\overline{\mathrm{k}}_{ij}\Big) = \partial_0\overline{\mathcal{H}} + \overline{g}^{ik}(\partial_0\overline{g}_{kl})\overline{g}^{lj}\overline{\mathrm{k}}_{ij}.$$

Mit (I.7) ist (I.8) nur die Spur von (I.4). Ebenso ist (I.9) wegen $\overline{\nabla}\overline{g} = 0$ nur die Spur von (I.5). Zudem erkennen wir (I.10) mit (I.6) und der Spur von (I.4). Zuletzt ergibt sich (I.11) als Spur von (I.10) unter Zuhilfenahme von (I.8) und (I.7). ////

I.2.2 Definition (Blätterung der Kodimension 2)
Ist $\overline{\Phi} : I \times \overline{M} \to (\widehat{M}, \widehat{g})$ eine zeitliche und ${}^t\Psi : J \times M \to (\overline{M}, {}^t\overline{g})$ für ${}^t\overline{g} := {}^t\overline{\Phi}_*\widehat{g}$ mit ${}^t\overline{\Phi} := \overline{\Phi}(t, \cdot)$ und alle $t \in I$ räumliche Blätterung, so heißt $\overline{\Psi} : I \times J \times M \to \widehat{M} : (t, r, p) \mapsto {}^t_r\Phi(p) := \overline{\Phi}(t, {}^t\Psi(r, p))$ *Blätterung von Kodimension* 2, falls diese Abbildung glatt ist. Weiter heißt $\overline{\Psi}$ *orthogonal* zum Zeitpunkt $t_0 \in I$, falls $\overline{\Phi}$ orthogonal ist und ${}^t\Psi \equiv {}^{t_0}\Psi$ unabhängig von t orthogonal bzgl. der Metrik ${}^{t_0}\overline{g}$ ist. Dabei heißt die Lapse-Funktion ${}^tu : J \times M \to \mathbb{R}$ zu ${}^t\Phi$ *räumliche* und $\overline{\alpha} : I \times \overline{M} \to \mathbb{R}$ zu $\overline{\Phi}$ *zeitliche* Lapse-Funktion. Äquivalent heißen die Geschwindigkeitsvektor $\bar{e}_1$ zu ${}^t\Phi$ und $\widehat{e}_0$ zu $\overline{\Phi}$ *räumlicher* und *zeitlicher* Geschwindigkeitsvektor, wobei wir $\bullet' := \partial\bullet/\partial r$ bzw. $\dot{\bullet} := \partial\bullet/\partial t$ für die zugehörigen Ableitungen setzen. ◇

Wir bemerken, dass wir die „zwischen liegende“ Mannigfaltigkeit $\overline{M}$ in der Notation einer Deformation von Kodimension 2 unterdrücken, aber jeweils annehmen, dass sich die Abbildung der Deformation in dieser Form zerlegen lässt.

I.2.3 Proposition (Krümmung bzgl. zeitlicher Blätterung der Kodim. 2)
Sei $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \times M^{n-1} \to (\widehat{M}^{n+1}, \widehat{g})$ eine zum Zeitpunkt $t = 0$ orthogonale Blätterung der Kodimension 2 in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M}, \widehat{g})$. Bezeichnen u und $\overline{\alpha}$ die räumliche und zeitliche Lapse-Funktion sowie $\bar{e}_1$ und $\widehat{e}_0$ den räumlichen und zeitlichen

Geschwindigkeitsvektor, so gilt für $\overline{\mathrm{k}_\nu}(X) := \overline{\mathrm{k}}\,(\nu, X)$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$, $\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu} := \overline{\mathrm{k}}\,(\nu,\nu)$ und $\nu := \bar{e}_1/u$ im Sinne von Tensor-Gleichheiten auf M^n

$$\overline{\mathrm{k}}(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = -\frac{u\dot{u}}{\overline{\alpha}}, \qquad \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu} = -\frac{\dot{u}}{\overline{\alpha}u} \tag{I.12}$$

$$(u\mathcal{H})^{\boldsymbol{\cdot}} = \left(\overline{\alpha}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right)' - 2u\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla\overline{\alpha}) - 2\overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla u) - 2\overline{\alpha}u\,\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu} \tag{I.13}$$

$$\widehat{\mathrm{Ric}}(e_0, e_0) = \overline{\alpha}\left(\left(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} + \left(\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \overline{\alpha}\left(\left|\overline{\mathrm{k}}\right|_{\mathcal{g}}^2 + 4\left|\overline{\mathrm{k}_\nu}\right|_{\mathcal{g}}^2 + \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}{}^2\right) + \Delta\overline{\alpha} + \frac{\overline{\alpha}''}{u^2} - \mathcal{H}\frac{\overline{\alpha}'}{u}\right) \tag{I.14}$$

$$\widehat{\mathrm{Ric}}(e_0, e_1) = \overline{\alpha}\left(\left(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right)' - 2\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla u) + u\left(\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\,\mathcal{H} - \mathrm{div}\overline{\mathrm{k}}_\nu - \mathrm{tr}\left(\mathrm{k} \odot \overline{\mathrm{k}}\right)\right)\right) \tag{I.15}$$

$$\widehat{\mathrm{Ric}}(e_0, \cdot) = \overline{\alpha}\left(D\overline{\mathcal{H}} - \mathrm{div}\overline{\mathrm{k}} + \overline{\mathrm{k}_\nu}\,\mathcal{H} + \overline{\mathrm{k}_\nu} \odot \mathrm{k} - \overline{\mathrm{k}}\left(\frac{\nabla u}{u}, \cdot\right) - \overline{\nabla}_\nu\overline{\mathrm{k}_\nu}\right) \tag{I.16}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Ric}}(e_1, e_1) &= u\left(\mathcal{H}' - u\,|\mathrm{k}|_{\mathcal{g}}^2 - \Delta u\right) - \frac{1}{\overline{\alpha}}\left(\overline{\mathrm{k}}_{11}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} \\ &\quad - u^2\left(2\left|\overline{\mathrm{k}_\nu}\right|_{\mathcal{g}}^2 - \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}^2 - \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} + \frac{\overline{\alpha}''}{\overline{\alpha}u^2}\right)\end{aligned} \tag{I.17}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Ric}}(e_1, \cdot) &= u\left(D\mathcal{H} - \mathrm{div}\mathrm{k} - 2\overline{\mathrm{k}_\nu} \odot \mathrm{k} - 2\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\,\overline{\mathrm{k}_\nu} + \overline{\mathcal{H}}\,\overline{\mathrm{k}_\nu}\right) \\ &\quad - \frac{u}{\overline{\alpha}}\left(\dot{\overline{\mathrm{k}_\nu}} + D\left(\frac{\overline{\alpha}'}{u}\right) - \mathrm{k} \odot D\overline{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{I.18}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Ric}} &= \mathrm{Ric} + 2\left(\mathrm{k} \odot \mathrm{k} - \overline{\mathrm{k}} \odot \overline{\mathrm{k}} - \overline{\mathrm{k}_\nu} \otimes \overline{\mathrm{k}_\nu}\right) + \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\,\overline{\mathrm{k}} - \mathcal{H}\,\mathrm{k} \\ &\quad - \frac{\dot{\overline{\mathrm{k}}}}{\overline{\alpha}} + \frac{\mathrm{k}'}{u} - \frac{\mathrm{Hess}\ u}{u} - \frac{\mathrm{Hess}\ \overline{\alpha}}{\overline{\alpha}} - \frac{\overline{\alpha}'}{u\overline{\alpha}}\,\mathrm{k} + \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\,\overline{\mathrm{k}}.\end{aligned} \tag{I.19}$$

◇

Beweis

Zunächst kombinieren wir (I.10) mit (I.8) bzw. (I.9) und erhalten damit (I.17) bzw. (I.18). Ebenso erhalten wir (I.19) direkt durch doppelte Anwendung von (I.10).

Nun wählen wir eine Normalen-Karte $x = (x_2, \ldots, x_n)$ von M^{n-1} um $p \in M^{n-1}$, d. h. eine Karte mit $x(p) = 0$ und $|\mathcal{g}_{pq} - \delta_{pq}| \leq C|x|^2$ für eine Konstante $C = C(\mathrm{Ric}, p)$, und erhalten durch Betrachtung von $(\widehat{x}_0, \ldots, \widehat{x}_n) := \widehat{x} := (\mathrm{id}, \mathrm{id}, x) \circ \Phi^{-1}$ eine lokale Karte von $\widehat{M}$, wobei für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p \in \{2, \ldots, n\}$ insgesamt

$$\widehat{\mathcal{g}}_{0i} = 0, \quad \widehat{\mathcal{g}}_{1p}\Big|_{\overline{M}} = 0, \quad \widehat{x}|_{M^{n-1}} = (0, 0, x), \quad \frac{\partial}{\partial\widehat{x}^0}\bigg|_{\overline{M}} = \widehat{e}_0, \quad \frac{\partial}{\partial\widehat{x}^1}\bigg|_{M^{n-1}} = \bar{e}_1$$

gilt. Es reichen im Folgenden griechische Buchstaben im Index von 0 bis n, die lateinischen Buchstaben i bis m von 1 bis n und die lateinischen Buchstaben p bis u von 2 bis n. Es bezeichnen $\widehat{e}_\alpha$ die Koordinatenvektorfelder der Karte und $\bar{e}_i := \widehat{e}_i|_{\overline{M}}$ sowie $e_p := \bar{e}_p|_{M^{n-1}}$ deren Einschränkungen auf die jeweiligen Hyperflächen. Per Konstruktion steht $\widehat{e}_0$ senkrecht auf allen $\bar{e}_i$ und $\bar{e}_1$ senkrecht auf allen e_p.

Nun definieren wir $\widehat{f}$ als die orthogonale Projektion von $\widehat{e}_1$ auf den Normalenraum von ${}_tM^{n-1} := \widehat{x}^{-1}(t, 0, \mathbb{R}^n)$, d. h. $\widehat{f} := \widehat{e}_1 - \widehat{\mathcal{g}}_{1p}\,\widehat{\mathcal{g}}^{pq}\,\widehat{e}_q$, und erkennen für $\widetilde{u} := |\widehat{f}\,|_{\widehat{\mathcal{g}}}$ auf der spezifischen Fläche M^{n-1} einerseits $\widetilde{u} = u$ und andererseits auch $\dot{\widetilde{u}} = \dot{u}$. Nach (I.3) gilt damit $-2\overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{k}} = \dot{\overline{\mathcal{g}}}$ und $-2\widetilde{u}\,\mathrm{k} = \partial\mathcal{g}/\partial(\widehat{f}\nu)$, somit folgt direkt (I.12). Da $\widehat{e}_\alpha$ Koordinatenvektorfelder sind, folgt auf M^{n-1} $[\widehat{e}_0, \widehat{f}] = 2\overline{\alpha} u\, \overline{\mathrm{k}^\nu}$, wobei $\overline{\mathrm{k}^\nu} := \overline{\mathrm{k}_{\nu p}}\, \mathscr{g}^{pq}\, e_q$. Da mit $\overline{\mathrm{k}^\nu} \in \mathfrak{X}({}_tM^{n-1})$ durch die Annahme an die Karte im betrachteten Punkt auch $D_{\overline{\mathrm{k}^\nu}}\, \widehat{\mathscr{g}}^{pq}|_p = 0$ gilt, folgt damit auf M^{n-1} in den gewählten Normalkoordinaten

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\dot{\mathrm{k}} &= \frac{\dot{u}}{2u^2}\mathrm{tr}\Big(\mathcal{L}_{\widehat{e}_1}\widehat{\mathscr{g}}\Big) - \frac{1}{2u}\mathrm{tr}\Big(\mathcal{L}_{\widehat{e}_1}\mathcal{L}_{\widehat{e}_0}\widehat{\mathscr{g}}\Big) - \frac{1}{2u}\mathrm{tr}\mathcal{L}_{[\widehat{e}_0,\widehat{f}]}\widehat{\mathscr{g}} \\
&= -\frac{\dot{u}}{u}\mathscr{H} + \frac{\overline{\alpha}}{u}\,\mathrm{tr}\Big(\overline{\mathrm{k}}'\Big) + \frac{\overline{\alpha}'}{u}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} - \frac{1}{u}\mathscr{g}^{rs}\Big(D_r\Big(\overline{\alpha}\, u\, \overline{\mathrm{k}}_{\nu s}\Big) + D_s\Big(\overline{\alpha}\, u\, \overline{\mathrm{k}}_{\nu r}\Big)\Big) \\
&= \overline{\alpha}\, \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\mathscr{H} + \frac{\overline{\alpha}}{u}\,\mathrm{tr}\Big(\overline{\mathrm{k}}'\Big) + \frac{\overline{\alpha}'}{u}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} - 2\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla\overline{\alpha}) - 2\frac{\overline{\alpha}}{u}\,\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla u) - 2\overline{\alpha}\,\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu}.
\end{aligned}$$

Da weiter

$$\dot{\mathscr{H}} = \mathrm{tr}\dot{\mathrm{k}} - \mathscr{g}^{pr}\,\dot{\mathscr{g}}_{rs}\,\mathscr{g}^{sq}\,\mathrm{k}_{pq} = \mathrm{tr}\dot{\mathrm{k}} + 2\overline{\alpha}\,\mathscr{g}^{pr}\,\overline{\mathrm{k}}_{rs}\,\mathscr{g}^{sq}\,\mathrm{k}_{pq} = \mathrm{tr}\dot{\mathrm{k}} - \frac{\overline{\alpha}}{u}\,\mathscr{g}^{pr}\,\overline{\mathrm{k}}_{rs}\,\mathscr{g}^{sq}\,\dot{\mathscr{g}}_{pq}$$

gilt, erhalten wir (durch Wiederholung dieser Rechnung)

$$\dot{\mathscr{H}} = \overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\mathscr{H} + \frac{\overline{\alpha}}{u}\,\Big(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big)' + \frac{\overline{\alpha}'}{u}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} - 2\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla\overline{\alpha}) - 2\frac{\overline{\alpha}}{u}\,\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla u) - 2\overline{\alpha}\,\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu}.$$

Also folgt (I.13). Weiter erkennen wir (I.14) unter Verwendung von (I.4) durch

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\mathrm{Ric}}(e_0,e_0)}{\overline{\alpha}} &= \partial_0\overline{\mathscr{H}} - \overline{\alpha}\Big|\overline{\mathrm{k}}^2\Big|_{\overline{\mathscr{g}}} + \overline{\Delta}\overline{\alpha} \\
&= \partial_0\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} + 2\partial_0\Big(\overline{\mathscr{g}}^{1i}\overline{\mathrm{k}}_{1i}\Big) + \partial_0\left(\frac{\overline{\mathrm{k}}_{11}}{u^2}\right) - \overline{\alpha}\,\Big|\overline{\mathrm{k}}^2\Big|_{\mathscr{g}} + 2\frac{\overline{\alpha}}{u^2}\mathscr{g}^{pq}\overline{\mathrm{k}}_{1p}\overline{\mathrm{k}}_{1q} \\
&\quad + \frac{\overline{\alpha}\,\overline{\mathrm{k}}_{11}{}^2}{u^4} + \Delta\overline{\alpha} + \frac{\overline{\alpha}''}{u^2} - \mathscr{H}\frac{\overline{\alpha}'}{u} - \mathscr{H}\frac{\overline{\alpha}'}{u}.
\end{aligned}$$

Dies impliziert (I.15) durch (I.9) und

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\mathrm{Ric}}(\overline{e}_1,\widehat{e}_0)}{\overline{\alpha}} &= \Big(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big)' + \Big(\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\Big)' - \overline{\mathscr{g}}^{ij}\left(\frac{\partial\overline{\mathrm{k}}_{1j}}{\partial x^i} - \overline{\mathrm{k}}\Big(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{e}_1,\overline{e}_j\Big) - \overline{\mathrm{k}}\Big(\overline{e}_1,\overline{\nabla}_{\overline{e}_i}\overline{e}_j\Big)\right) \\
&= \Big(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big)' + \Big(\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\Big)' - \overline{\mathscr{g}}^{11}\left(\Big(\overline{\mathrm{k}}_{11}\Big)' - 2\overline{\mathrm{k}}\Big(\frac{u'}{u}\,\overline{e}_1 - u\,\mathscr{g}^{pq}\,D_pu\,e_q,\overline{e}_1\Big)\right) - \overline{\mathscr{g}}^{pq}\frac{\partial\overline{\mathrm{k}}_{1q}}{\partial x^p} \\
&\quad + \overline{\mathscr{g}}^{pq}\,\overline{\mathrm{k}}\Big(\frac{D_pu}{u}\overline{e}_1 - u\mathscr{g}^{rs}\mathrm{k}_{rp}e_s, e_q\Big) + \overline{\mathscr{g}}^{pq}\overline{\mathrm{k}}\Big(\overline{e}_1,\frac{\mathrm{k}_{pq}}{u}\overline{e}_1 + \nabla_{e_p}e_q\Big) \\
&= \Big(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big)' + \Big(\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\Big)' - \Big(\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\Big)' - 2\mathscr{g}^{pq}\,D_pu\,\overline{\mathrm{k}}_{\nu q} - u\,\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}}_\nu \\
&\quad - \overline{\mathscr{g}}^{pq}\Big(u\,\mathscr{g}^{rs}\,\mathrm{k}_{rp}\,\overline{\mathrm{k}}_{sq} - u\,\mathrm{k}_{pq}\,\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\Big).
\end{aligned}$$

Wiederum mit (I.9) erhalten wir schließlich (I.16) mittels

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\mathrm{Ric}}(e_p,\widehat{e}_0)}{\overline{\alpha}} &= \frac{\partial\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}}{\partial x^p} + \frac{\partial\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}}{\partial x^p} + \frac{\overline{\mathrm{k}}(e_p, u'\nu - u\,\mathscr{g}^{qr}D_qu\,e_r)}{u^2} \\
&\quad - \frac{u'\,\overline{\mathrm{k}}_{\nu p}}{u^2} - \frac{1}{u}\,\Big(\overline{\nabla}_{\overline{e}_1}\overline{\mathrm{k}_\nu}\Big)_p - \mathrm{div}\overline{\mathrm{k}} + \mathrm{k}\Big(\overline{\mathrm{k}^\nu}, e_p\Big) + \mathscr{H}\,\overline{\mathrm{k}}(e_p,\nu) \\
&= \frac{\partial\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}}{\partial x^p} + \frac{\partial\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}}{\partial x^p} - \frac{\Big(\overline{\mathrm{k}}\odot Du\Big)_p}{u} - \Big(\overline{\nabla}_\nu\overline{\mathrm{k}_\nu}\Big)_p - \mathrm{div}\overline{\mathrm{k}} + \mathscr{H}\,\overline{\mathrm{k}}(\nu,e_p) + \mathrm{k}\Big(\overline{\mathrm{k}^\nu},e_p\Big). /\!/\!/
\end{aligned}$$

Da ein zentrales Mittel der Haupttheoreme dieser Arbeit die *Deformation* einer Fläche ist, wollen wir nun neben *Blätterungen* auch *Deformationen* von Flächen betrachten.

I.2.4 Definition (Räumliche Deformation)
Für eine Mannigfaltigkeit M^{n-1}, ein nicht-triviales Intervall $R \supseteq (-\varepsilon\,,\varepsilon)$ und eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M}^n, \overline{g})$ heißt eine glatte Abbildung $\Phi : R \times M \to \overline{M} : (\sigma, p) \mapsto {}_\sigma\Phi(p) := \Phi(\sigma, p)$ *räumliche Deformation* von Kodimension 1 von ${}_0M := \operatorname{Bild}{}_0\Phi$, falls ${}_\sigma\Phi$ für alle $\sigma \in R$ eine injektive Immersion ist und ${}_\sigma M := \operatorname{Bild}{}_\sigma\Phi$ ein normiertes Normalenfeld ${}_\sigma\nu$ besitzt. Weiter heißt ${}_\sigma\bar{e}_1 := {}^{\partial\Phi}\!/\!{}_{\partial\sigma}$ *Geschwindigkeitsvektor* und ${}_\sigma u := \overline{g}\ ({}_\sigma\bar{e}_1, {}_\sigma\nu)$ *Lapse-Funktion* der Deformation. Die Deformation heißt *orthogonal*, falls ${}_\sigma\bar{e}_1$ zu jedem Index $\sigma \in R$ orthogonal auf ${}_\sigma M := \operatorname{Bild}{}_\sigma\Phi$ steht. ◇

Das heißt, Blätterungen und Deformationen unterscheiden sich nur insofern als dass die erzeugten Flächen ${}_rM$ von Blätterungen paarweise disjunkt sind (und daher die Lapse-Funktionen strikt positiv sind), während dies für Deformationen nicht gefordert wird. Wieder betrachten wir auch den Fall von Kodimension zwei.

I.2.5 Definition (Räumliche Deformation, Kodimension zwei)
Für eine zeitliche Blätterung $\overline{\Phi} : I \times \overline{M}^n \to (\widehat{M}^{n+1}, \widehat{g})$, eine Mannigfaltigkeit M^{n-1} und ein nicht-triviales Intervall $R \supseteq (-\varepsilon\,,\varepsilon)$ heißt eine glatte Abbildung $\Psi : I \times R \times M \to \widehat{M} : (t, \sigma, p) \mapsto {}^t_\sigma\Psi(p) := \Psi(t, \sigma, p)$ *Deformation von Kodimension* 2 *von* ${}^0M := \operatorname{Bild}{}^0\Psi$ *in* $\{{}^t\overline{M} := \operatorname{Bild}{}^t\overline{\Phi}\}_t$, falls ${}^t\Psi : R \times M \to {}^t\overline{M} : (\sigma, p) \mapsto \Psi(\sigma, t, p)$ für alle t eine wohldefinierte räumliche Deformation (von Kodimension eins) ist. Weiter heißt ${}^t_\sigma\bar{e}_1 := {}^{\partial\Phi}\!/\!{}_{\partial\sigma}$ *räumlicher Geschwindigkeitsvektor* und ${}^t_\sigma u := {}^t\overline{g}\ ({}^t_\sigma\bar{e}_1, {}^t_\sigma\nu)$ *räumliche Lapse-Funktion* der Deformation. Die Deformation heißt *orthogonal*, falls ${}^t_\sigma\bar{e}_1$ zu jeder Zeit $t \in I$ und jedem Index $\sigma \in R$ orthogonal auf ${}^t_\sigma M := \operatorname{Bild}{}^t_\sigma\Phi$ steht. ◇

Wir verzichten auf die Indices r bzw. t, r, falls dadurch keine Uneindeutigkeiten entstehen. Ebenso bemerken wir wiederum, dass wir in der Notation einer Deformation von Kodimension 2 die „zwischenliegenden Mannigfaltigkeit" ${}^t\overline{M}$ erneut unterdrückt haben, obwohl deren Existenz weiterhin vorausgesetzt ist.

I.2.6 Bemerkung (Krümmung bzgl. Deformation)
Wir bemerken, dass die Gleichungen aus Proposition I.2.1 ebenso für eine räumliche, orthogonale Deformation anstelle einer räumlichen Blätterung gelten, ebenso gelten diese Gleichungen aus Proposition I.2.3 für eine orthogonale Deformation der Kodimension 2 anstelle einer Blätterung der Kodimension 2, wenn wir (I.14), (I.16) und (I.17) mit u bzw. α multiplizieren, um eine Division durch Null zu verhindern. Wir können diese Gleichungen auch in einem infinitesimalen Sinn anwenden – vgl. Bemerkung I.1.12.

Wir erkennen dies, da es sich um lokale Gleichungen handelt, die innerhalb von $[u > 0]$ – und aus Symmetrie-Gründen auch innerhalb von $[u < 0]$ – gelten. Im Inneren von $[u = 0]$ erhalten wir die Gleichungen ohne Abhängigkeit von u, indem wir stattdessen eine Teilüberdeckung mit $u = 1$ betrachten (s. Bemerkung I.1.12). Alle anderen Gleichungen entsprechen in $[u = 0]$ direkt der trivialen Identität $0 = 0$. Aus der Stetigkeit beider Gleichungsseiten erhalten wir damit alle Gleichungen überall. ◇

I.2.7 Notation (Änderung $\partial/\partial(f\,\nu)$ entlang infinitesimalen Deformation $f\,\nu$)
Für eine Hyperfläche $M \hookrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ mit normiertem Normalenfeld ν, eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ so wie einen Tensor T auf $\overline{M}$ bezeichne

$$\mathcal{L}_{f\nu} T := \frac{\partial T}{\partial(f\,\nu)} := \frac{\partial\Big(\Phi_f^*\, T\Big)}{\partial\sigma},$$

die Lie-Ableitung dieses Tensors, wobei $\Phi_f : (-\varepsilon\,, \varepsilon) \times M \to \overline{M} : (\sigma, p) \mapsto \Phi_f(\sigma, p)$ eine beliebige Deformation mit dem Geschwindigkeitsvektor $f\,\nu$ auf M ist. Wir verwenden die selbe Notation für andere Größen, deren Ableitung in diesem Sinne wohldefiniert ist. Beispielsweise ist dies für die Spur eines $(0, 2)$-Tensors T auf M möglich, indem wir $\Phi_f^*(\mathrm{tr}T)$ als Rückzug der Spur von T auf der korrespondierenden Fläche $\Phi_f(\sigma, M)$ interpretieren. ◇

Durch Beachtung von (I.3) erkennen wir, dass in diesem Sinne $\mathcal{L}_{u\nu}(\mathrm{d}\mu) = -\mathcal{H}\,u$ gilt. Betrachten wir nun die (in diesem Sinne) zweite Ableitung (zweite Variation) des *Flächenfunktionals* $\mathrm{d}\mu$, so erhalten wir den etablierten Stabilitätsoperator, siehe bspw. [Bd12] oder in diesem Kontext [HY96].

I.2.8 Definition (Stabilitätsoperator)
Ist $M^{n-1} \hookrightarrow (\overline{M}^n, \overline{g})$ eine Hyperfläche in einer Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$ mit normierten Normalenfeld ν, so heißt

$${}^0\mathscr{L}_1 : \mathcal{C}^2(M) \to \mathcal{C}(M) : f \mapsto \mathcal{L}_{f\nu}\,\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(f\,\nu)}$$

Stabilitätsoperator von $(M, g) \hookrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$. Dieser ist nach (I.8) aus Proposition I.2.1 wohldefiniert und erfüllt

$${}^0\mathscr{L}_1 f = \Big(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu, \nu) + |\mathrm{k}|_g^2\Big) f + \Delta f \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}^2(M). \tag{I.20}$$

◇

Da wir im Folgenden nicht nur Flächen konstanter mittlerer Krümmung $\mathcal{H}$ betrachten, sondern auch Flächen konstanter Expansion $\mathcal{H} \pm \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}$ untersuchen, ist es natürlich nicht nur die Variation der mittleren Krümmung sondern auch die der Expansion zu untersuchen. Darüber hinaus deformieren wir in den Abschnitten III.3 und IV.4 auch in zeitlicher Richtung, wodurch sich der zeitliche Pseudo-Stabilitätsoperator erklären wird. Für ein Offen-Abgeschlossen Argument lassen wir dabei ein zusätzliche Gewichtung $\mathscr{b} \in [-1\,, 1]$ zu – dies wird in Kapitel IV ausführlich erklärt werden.

Diese Art von Operator wurde nach Kenntnis des Autors erstmalig in [Met04] verwendet. Die Bezeichnung als (Pseudo-)Stabilitätsoperator soll lediglich die „Nähe“ zu obigem Stabilitätsoperator hervorheben. Weitere Informationen zu diesen Operatoren geben wir in Abschnitt II.5.

I.2.9 Definition ((Pseudo-)Stabilitätsoperatoren)
Seien $(\overline{M}^n, \overline{g}) \hookrightarrow (\widehat{M}^{n+1}, \widehat{g})$ eine orientierte räumliche Hyperfläche einer Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M}^{n+1}, \widehat{g})$ und $M^{n-1} \hookrightarrow \overline{M}^n$ eine orientierte Hyperfläche. Für eine Konstante

$\mathscr{b} \in [-1\,,1]$, eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(M^{n-1})$ und eine Funktion $\overline{g} \in \mathcal{C}^2(\overline{M}^n)$ heißen

$$
{}^{\mathscr{b}}\!\mathscr{L}_1 f := \frac{\partial\Big(\mathcal{H} + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big)}{\partial(f\,\nu)}, \qquad {}^{\mathscr{b}}\!\mathscr{L}_0 \overline{g} := \frac{\partial\Big(\mathcal{H} + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big)}{\partial\Big(\overline{g}\,\overline{\vartheta}\Big)}
$$

$\mathscr{b}$-gemischter (Pseudo-)Stabilitätsoperator von f bzw. *zeitliche Änderung der $\mathscr{b}$-gemischten Krümmung bzgl. $\overline{\alpha}$*, wobei ν bzw. $\overline{\vartheta}$ das normierte Normalenfeld von $M^{n-1} \hookrightarrow \overline{M}^n$ bzw. $\overline{M}^n \hookrightarrow \widehat{M}^{n+1}$ bzgl. der jeweiligen Orientierung bezeichnet. ◇

Wir bemerken, dass ${}^{\mathscr{b}}\!\mathscr{L}_0 \overline{g}$ *nicht* durch die Werte von $\overline{g}$ auf M^{n-1} charakterisiert ist, sondern Werte aus einer infinitesimalen Umgebung von M^{n-1} einfließen (siehe (I.22)).

Ebenso wie in Definition I.2.8 die Charakterisierung des Stabilitätsoperators durch Größe der Fläche M angegeben ist, geben wir nun eine Charakterisierung dieses weiteren (Pseudo-)Stabilitätsoperators und der zeitlichen Änderung der gemischten Krümmung. Entsprechend der Bemerkungen I.1.12 und I.2.6 nehmen wir dabei an, dass die Funktionen f bzw. $\overline{g}$ Lapse-Funktionen einer Deformation von Kodimension zwei sind.

I.2.10 Proposition ((Pseudo-)Stabilitätsoperatoren)
Sei $(\widehat{M}, \widehat{g})$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit mit Einsteintensor $\widehat{\mathrm{Ein}}$ und sei $\Phi : (-\varepsilon\,,\varepsilon)^2 \times (M^n, g) \to (\widehat{M}, \widehat{g})$ eine räumliche Deformation der Kodimension 2 mit räumlicher und zeitlicher Lapse-Funktion u und $\overline{\alpha}$ sowie räumlicher und zeitlicher Deformationsnormalen $\nu = \bar{e}_1/u$ und $\overline{\vartheta} = \widehat{e}_0/\overline{\alpha}$. Für jede Konstante $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$ gilt

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathscr{b}}\!\mathscr{L}_1 f ={}& \Big(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) + |\mathrm{k}|^2_g + \mathscr{b}\,\widehat{\mathrm{Ein}}\,\Big(\overline{\vartheta},\nu\Big) - \mathscr{b}\,\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\mathcal{H} + \mathscr{b}\,\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu} + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}\Big(\mathrm{k}\odot\overline{\mathrm{k}}\Big)\Big) f \\
&+ 2\mathscr{b}\,\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla f) + \Delta f,
\end{aligned} \tag{I.21}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathscr{b}}\!\mathscr{L}_0 \overline{\alpha} ={}& \overline{\alpha}\,\Big(\widehat{\mathrm{Ein}}\,\Big(\nu,\overline{\vartheta}\Big) + \mathscr{b}\,\widehat{\mathrm{Ein}}\,\Big(\overline{\vartheta},\overline{\vartheta}\Big) + \mathscr{b}\,\widehat{\mathrm{Ein}}\,(\nu,\nu) - \mathscr{b}\,\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)\Big) \\
&+ \overline{\alpha}\,\Big(-\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu} + \mathscr{b}\,\Big|\overline{\mathrm{k}}\Big|^2_g + 6\mathscr{b}\,\Big|\overline{\mathrm{k}_\nu}\Big|^2_g - \mathscr{b}\,\overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big) \\
&+ \overline{\alpha}\,\mathrm{tr}\Big(\mathrm{k}\odot\overline{\mathrm{k}}\Big) - 2\overline{\mathrm{k}_\nu}(\nabla\overline{\alpha}) + \mathscr{b}\,\frac{\overline{\alpha}'}{u}\Big(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} + \mathcal{H}\Big) - \mathscr{b}\,\Delta\overline{\alpha}.
\end{aligned} \tag{I.22}
$$
◇

Beweis
Es folgt mit (I.15) und $\widehat{\mathrm{Ein}}\,(\overline{\vartheta},\nu) = \widehat{\mathrm{Ric}}\,(\overline{\vartheta},\nu)$ durch (I.20) direkt (I.22). Betrachten wir (I.13), so erhalten wir mit (I.14), (I.17), (I.20) und der Definition des Einsteintensors

$$
\widehat{\mathrm{Ein}}\,\Big(\overline{\vartheta},\overline{\vartheta}\Big) + \widehat{\mathrm{Ein}}\,(\nu,\nu) = \frac{\Big(\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\Big)^{\boldsymbol{\cdot}}}{\overline{\alpha}} - \Big|\overline{\mathrm{k}}\Big|^2_g - 6\,\Big|\overline{\mathrm{k}_\nu}\Big|^2_g + \frac{\Delta\overline{\alpha} - \mathcal{H}\overline{\alpha}'}{\overline{\alpha}} + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) + \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}
$$

und daher folgt die zweite Gleichung (I.22). ///

Die Gleichung (I.21) wurde auch von Metzger hergeleitet [Met04, Met07]. Dieser bezeichnet sie als *Linearisierung der $\mathcal{H} \pm \mathcal{P}$-Abbildung*[3]. Diese Bezeichnung und die Operatoren selbst werden in Abschnitt II.5 und Kapitel IV weiter erklärt und untersucht.

[3] Wobei $\mathcal{P}$ in unserer Notation $\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}$ ist. Die hier punktweise ausgeführte Gleichung (I.21) kann nach Integration in die „Integral-Formel" für $\int {}^{\mathscr{b}}\!\mathscr{L}_1 f\, f\, \mathrm{d}\mu$ aus [Met04, Prop. 2.4] umgeformt werden.

I.3. Abfallbedingungen und Masse

Wir werden in den folgenden Kapiteln Riemannsche Mannigfaltigkeiten bzw. Anfangsdaten betrachtet, die asymptotisch flach sind. Das heißt, wir betrachten Mannigfaltigkeiten die (außerhalb eines Kompaktums) diffeomorph zum Euklidischen Raum sind und deren Metrik etc. gewisse asymptotische Annahmen erfüllen. Um diese nicht jedes Mal ausführen zu müssen und da es für diese verschiedene Definitionen in der Literatur gibt, führen wir hier ein, welche Definition dieser Begriffe wir verwenden und erklären diese Annahmen in der nachfolgenden Bemerkung I.1.8 weiter. Die hier verwendete Definition einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, die asymptotisch flach ist, wird bspw. auch in [Met07, Hua10, EM12] verwendet.

I.3.1 Definition (Asymptotische Voraussetzungen (flach))
Eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$ heißt $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$*-flach*, falls außerhalb eines Kompaktums $\overline{L} \subseteq \overline{M}$ für ein $R_0 > 0$ eine Karte $\overline{x} : \overline{M} \setminus \overline{L} \to \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_0}(0)$ existiert, für eine Konstante $\overline{c}_0$, den Euklidischen Koordinatenabstand vom Koordinatenursprung $d : \overline{M} \setminus \overline{L} \to (0\,,\infty) : \overline{p} \mapsto |\overline{x}(\overline{p})|$ und die Euklidische Metrik ${}^e\overline{g}$

$$\left| \frac{\partial^{|\gamma|}\left(\overline{g}_{ij} - {}^e\overline{g}_{ij}\right)}{\partial \overline{x}^\gamma} \right| \leq \frac{\overline{c}_0}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon+|\gamma|}} \qquad \forall\, |\gamma| \leq k,$$

gilt und die Skalarkrümmung $\overline{\mathcal{S}}$ mit punktweiser Abschätzung integrabel ist, d. h.

$$\overline{\mathcal{S}} \in \mathrm{L}^1\left(\overline{M} \setminus \overline{K}\right), \qquad |\overline{\mathcal{S}}| \leq \frac{\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(d)}{d^3} \quad \text{mit} \quad \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(d) \xrightarrow{d\to\infty} 0.$$

Gilt dies für $\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(d) = {}^{\overline{c}_0}/_{d^\varepsilon}$, so heißt $(\overline{M}, \overline{g})$ $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$*-flach mit stark abfallender Skalarkrümmung.*

Sind $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ Anfangsdaten für die $(\overline{M}, \overline{g})$ $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flach ist und für die Konstanten δ und $\overline{c}_1$ existiert so, dass in der asymptotisch flachen Karte

$$\left| \frac{\partial^{|\gamma|}\overline{\mathrm{k}}_{ij}}{\partial \overline{x}^\gamma} \right| \leq \frac{\overline{c}_1}{d^{\delta+|\gamma|}} \qquad \forall\, |\gamma| \leq k-1 \tag{I.23}$$

gilt, so heißt $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ $\mathcal{C}^k_{\varepsilon,\delta}$*-flach*. Die Energiestromdichte heißt *integrabel*, falls $\overline{\mathrm{J}} \in \mathrm{L}^1(\overline{M} \setminus \overline{K})$ gilt. Gilt zusätzlich

$$\left|\overline{\mathrm{J}}\right| \leq \frac{\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d)}{d^3} \quad \text{mit} \quad \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d) \xrightarrow{d\to\infty} 0,$$

so heißt sie *mit punktweiser Abschätzung integrabel*. Ist dabei $\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d) = {}^{\overline{c}_1}/_{d^\varepsilon}$, so heißen die Anfangsdaten *mit stark abfallender Energiestromdichte.* ◇

I.3.2 Bemerkung (Erklärung der Abfallbedingungen der weiteren Größen)
Passenderweise werden wir zumeist $\delta = \varepsilon + {}^3/_2$ annehmen, wie es für eine Ableitung der Metrik zu erwarten ist. Im Kapitel IV werden wir jedoch $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,2}$-flach annehmen müssen.

Weiter bemerken wir, dass weder die punktweise Abschätzung an $\overline{\mathcal{S}}$ bzw. $\overline{\mathrm{J}}$ die Integrabilität von $\overline{\mathcal{S}}$ bzw. $\overline{\mathrm{J}}$ impliziert, noch umgekehrt. Die zusätzliche technischere, punktweise Abschätzung an $\overline{\mathcal{S}}$ bzw. $\overline{\mathrm{J}}$ wird die Stabilität bzw. „korrekte zeitliche Bewegung" der CMC-Flächen implizieren. Wir werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}$ monoton fallend ist, sowie

$$\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} \le \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(r), \qquad \frac{\overline{c}_0}{r^\varepsilon} \le \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(r), \qquad \left|\frac{\partial \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(r)}{\partial r}\right| \le \frac{\overline{c}_0}{r^{1+\varepsilon}}, \tag{I.24}$$

erfüllt. Weiter bezeichnet $\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}$ im Fall integrabler Energiestromdichte eine monoton fallende Funktion mit

$$\left\|\overline{\mathrm{J}}\right\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} \le \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(r), \qquad \frac{\overline{c}_0}{r^\varepsilon} \le \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(r), \qquad \left|\frac{\partial \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(r)}{\partial r}\right| \le \frac{\overline{c}_1}{r^{1+\varepsilon}}$$

und ist $\overline{\mathrm{J}}$ punktweise abgeschätzt integrabel, so nehmen wir außerdem

$$\left|d^3\overline{\mathrm{J}}\right| \le \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d)$$

an. ◇

Für asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten hat sich der Begriff der ADM-Masse m_{ADM} in der Literatur etabliert, welcher von Arnowitt-Deser-Misner definiert wurde [ADM61] und nach diesen benannt ist.

I.3.3 Definition (ADM-Masse)
Die ADM-Masse m_{ADM} einer $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-asymptotisch flachen Riemannschen Mannigfaligkeit $(\overline{M},\overline{g},\overline{x})$ ist durch

$$m_{\mathrm{ADM}} := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi r} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \left(\frac{\partial \overline{g}_{jj}}{\partial \overline{x}^i}\,\overline{x}^i - \frac{\partial \overline{g}_{ji}}{\partial \overline{x}^j}\,\overline{x}^i \right) \mathrm{d}\mathring{\mu}$$

definiert, wobei $\mathring{\mu}$ das Euklidische Flächenmaß ist. ◇

Diese Masse-Definition ist für $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-asymptotisch flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten wohldefiniert [Mur86, Bar86, Chr88]. Wir werden in dieser Arbeit die alternative Darstellung

$$m = \lim_{r\to\infty} \frac{-1}{8\pi r} \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathrm{Ric}}_{ij}\,\overline{x}^i\,\overline{x}^j\,\mathrm{d}\mathring{\mu} \tag{I.25}$$

verwenden, welche auf einer Idee von Schoen basiert [CS03, CW08].[4] Wir wiederholen in Lemma A.1.2 die Wohldefiniertheit dieser Masse.

[4] Es sei angemerkt, dass die Gleichheit $m = m_{\mathrm{ADM}}$ zunächst nur für konform flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten $(\overline{M},\overline{g})$ mit Skalarkrümmung $\overline{\mathcal{S}} \in \mathrm{L}^1(\overline{M})$ gilt. Durch Anwendung des bekannten Dichtheitsergebnisses von Corvino-Schoen [CS03, Theorem 5] erhalten wir das gleiche Ergebnis für $\mathcal{C}^3_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Dabei können die punktweisen Abfall-Annahmen auch durch Sobolev-Annahmen ersetzt werden. Wir erhalten mit der gleichen Argumentation wie im konform flachen Fall, dass auch für $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten dieser Limes existiert. Die Gleichheit mit der ADM-Masse verbleibt unter diesen Voraussetzungen jedoch zu zeigen. Da wir im weiteren keine anderen Masse-Begriffe untersuchen werden, bezeichnen wir die so definierte Masse stets mit m und nehmen an, dass sie nicht Null ist.

Für kleine Teile der Arbeit werden wir die in der Literatur etablierten *Regge-Teitelboim-Bedingungen* benötigen, welche besagt, dass die Metrik $\overline{g}$ in höchster Ordnung symmetrisch ist [RT74] – für weitere Erklärungen siehe bspw. [BÓ87, Hua10] und die darin zitierten Arbeiten. Wir bemerken, dass die hier von uns gemachten Bedingungen schwächer als die üblichen Regge-Teitelboim-Bedinungen sind, weswegen wir die hier gemachten als *Pseudo-Regge-Teitelboim-Bedingungen* bezeichnen.

I.3.4 Definition (Asympt. Voraussetzungen (Pseudo-Regge-Teitelboim))
Eine $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M},\overline{g})$ erfüllt die $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+3/2}$-*Pseudo-Regge-Teitelboim-Bedingungen*, falls

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}\left(\overline{g}_{ij}-\overline{g}_{ij}\circ\overline{\varphi}_{Sp}\right)}{\partial\overline{x}^\gamma}\right|\leq\frac{\overline{c}_0}{d^{\frac{3}{2}+\varepsilon+|\gamma|}}\qquad\forall\,|\gamma|\leq k,\qquad|\overline{S}-\overline{S}\circ\varphi_{Sp}|\leq\frac{\mathrm{E}_{\overline{S}}(d)}{d^4}$$

gilt, wobei $\overline{\varphi}_{Sp}(\overline{p})=\overline{x}^{-1}(-\overline{x}(\overline{p}))$ die (außerhalb eines Kompaktums $\overline{L}_2\subseteq\overline{M}$ wohldefinierte) Spiegelung am Koordinaten-Ursprung bezeichnet.

$\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flache Anfangsdaten $(\overline{M},\overline{g},\overline{\mathrm{k}},\overline{\mathrm{J}},\overline{\varrho})$ erfüllen die $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+3/2,\varepsilon+5/2}$-*Pseudo-Regge-Teitelboim-Bedingungen*, falls deren Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M},\overline{g})$ die $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+3/2}$-Pseudo-Regge-Teitelboim-Bedingungen erfüllt und

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}\left(\overline{\mathrm{k}}_{ij}+\overline{\mathrm{k}}_{ij}\circ\overline{\varphi}_{S}\right)}{\partial\overline{x}^\gamma}\right|\leq\frac{\overline{c}_0}{d^{\frac{5}{2}+\varepsilon+|\gamma|}}\qquad\forall\,|\gamma|\leq k-1.$$

gilt. ◇

Wir werden für asymptotisch Schwarzschilde Riemannsche Mannigfaltigkeiten zusätzliche Aussagen beweisen und geben daher hier die entsprechende Definition, vgl. bspw. [Met07, Hua10, EM12].

I.3.5 Definition (Asymptotische Voraussetzungen (Schwarzschild))
Eine $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flache, dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M},\overline{g})$ bzw. eine Anfangsdaten $(\overline{M},\overline{g},\overline{\mathrm{k}},\overline{\mathrm{J}},\overline{\varrho})$ heißt $\mathcal{C}^k_{1+\varepsilon}$-*asymptotisch zu Schwarzschild*, falls

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}\left(\overline{g}_{ij}-{}^s\overline{g}_{ij}\right)}{\partial\overline{x}^\gamma}\right|\leq\frac{\overline{c}_0}{d^{1+\varepsilon+|\gamma|}}\qquad\forall\,|\gamma|\leq k$$

◇

gilt, wobei ${}^s\overline{g}:=(1+{}^m\!/_{2d})^4\,{}^e\overline{g}$ die Schwarzschild-Metrik bezeichnet.

In dieser Arbeit werden wir immer $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach und für einzelne Aussagen auch $\mathcal{C}^1_{1+\varepsilon}$-Asymptotik zu Schwarzschild fordern – wir bemerken, dass die vorgeführten Beweise auch unter geeigneten Sobolev-Annahmen (vgl. [Bar86]) statt punktweisen-Annahmen gültig bleiben. Wir bemerken außerdem, dass der (ADM-)Impuls wohldefiniert ist, falls die Anfangsdaten mit punktweise abgeschätzter, integrabler Impulsdichte sind und zeigen dieses bekannte Ergebnis in Proposition III.3.7.

Ebenso wie wir oben asymptotische Annahmen an Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Anfangsdaten gemacht haben, betrachten wir nun ganze Familien von solchen – genauer betrachten wir zeitliche Blätterungen von Lorentz-Mannigfaltigkeiten. Wie oben erklärt können diese in wohldefinierter Weise infinitesimal erklärt werden.

I.3.6 Definition (Asymp. Voraussetzungen an Blätterungen)
Sei $\overline{\alpha}$ eine strikt positive Funktion auf $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flachen Anfangsdaten $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ (bzw. diese Anfangsdaten $\mathcal{C}^k_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild). Gilt für eine Konstante $\overline{c}_1$

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}(\overline{\alpha}-1)}{\partial^t\overline{x}^\gamma}\right| \leq \frac{\overline{c}_1}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon+|\gamma|}} \qquad \forall\,|\gamma| \leq k-1,$$

so heißt $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho}, \overline{\alpha})$ *$\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flache infinitesimale Blätterung* (bzw. *$\mathcal{C}^k_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild*) und $\overline{\alpha}$ heißt *Lapse-Funktion* dieser infinitesimalen Blätterung.

Eine zeitliche Blätterung $\Phi : I \times \overline{M} \to (\widehat{M}, \widehat{g})$ einer Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M}, \widehat{g})$ heißt *gleichmäßig $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flach bzw. $\mathcal{C}^k_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild*, falls außerhalb eines Kompaktums $\overline{L} \subseteq \overline{M}$ eine Karte $\overline{x} : \overline{M} \setminus \overline{L} \to \mathbb{R}^3 \setminus B_{r_0}(0)$ sowie Konstanten $\overline{c}_0$, $\overline{c}_1$ und $\overline{c}_2$ existieren so, dass alle Hyperflächen $({}^t\overline{M}, {}^t\overline{g}, {}^t\overline{\mathrm{k}}, {}^t\overline{\mathrm{J}}, {}^t\overline{\varrho}, \overline{\alpha})$ bzgl. der induzierten Karte und den gegebenen Konstanten $\mathcal{C}^k_{\varepsilon+1/2}$-flach bzw. $\mathcal{C}^k_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild sind. Dabei bezeichnet ${}^t\overline{g}$ die induzierte Metrik auf ${}^t\overline{M} := \Phi(t, \overline{M})$, ${}^t\overline{\mathrm{k}}$ die zweite Fundamentalform, ${}^t\overline{\mathrm{J}} := \widehat{\mathrm{Ein}}\,({}^t\overline{\vartheta}, \cdot)$ die *Energiestromdichte*, ${}^t\overline{\varrho} := \widehat{\mathrm{Ein}}\,({}^t\overline{\vartheta}, {}^t\overline{\vartheta})$ die *Energiedichte* und $\overline{\alpha} := |\widehat{g}\,({}^t\overline{\vartheta}, {}^{\partial\Phi}\!/\!_{\partial t})|$ die Lapse-Funktion, wobei ${}^t\overline{\vartheta}$ die zukunftsgerichtete Normale an ${}^t\overline{M}$ ist. ◇

Wir werden in dieser Arbeit vorrangig mit Flächen arbeiten, die *fast konzentrisch* sind, d. h. die in wohldefinierter Weise nicht zu weit von einer Koordinaten-Sphäre mit Zentrum im Ursprung entfernt sind. Um auf diese leichter zu referieren, definieren wir hier die zugehörige Klasse von Flächen.

I.3.7 Definition (Asymptotisch fast-konzentrische Flächen $\mathcal{K}^{\delta,\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$)
Seien $(\overline{M}, \overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c_S, c_0, c_1 \geq 0$ und $\delta \geq 0$ Konstanten mit $\delta > 0$ oder $c_0 < 1$. Eine $\mathcal{C}^{1,1}$-Hyperfläche $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ heißt *$\mathcal{C}^0_{\delta,\varepsilon+3/2}$-fast konzentrische Sphäre mit Radius vergleichbar zu $\sigma > 0$*, in Symbolen $\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta,\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$, falls

- Σ homöomorph zur Sphäre ist;
- die Fläche approximativ der einer Euklidischen Sphäre vom Radius σ entspricht, d. h.
$$\Big||\Sigma| - 4\pi\sigma^2\Big| \leq c_1\,\sigma^{\frac{3}{2}-\varepsilon};$$
- die Sobolev-Ungleichung mit Sobolev-Konstanten c_S gilt, d. h.
$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq c_S \left(\int |f|\,\mathrm{d}\mu + \sqrt{\frac{|\Sigma|}{4\pi}}\int |\nabla f|_g\,\mathrm{d}\mu\right) = c_S\,\|f\|_{\mathrm{W}^{1,1}(\Sigma)} \quad \forall\, f \in \mathcal{C}^1(\Sigma);$$

- ein Punkt[5] $\vec{z} = \vec{z}(\Sigma) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$|\vec{z}\,| \le c_0\,\sigma^{1-\delta}, \qquad \max_{\Sigma}|d_{\vec{z}} - \sigma| \le c_1\,\sigma^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

existiert, wobei $d_{\vec{z}} : \overline{M} \setminus K \to (0\,,\infty) : \overline{p} \mapsto |\overline{x}(\overline{p}) - \vec{z}\,|$. ◇

Später wird σ der Krümmungs-Radius von Σ sein, siehe Bemerkung II.1. Wir werden im Folgenden immer annehmen, dass die Konstanten c_S, c_0, und c_1 im Vergleich zum Krümmungs-Radius σ klein sind. Weiter wird die Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{W^{1,1}(\Sigma)}$ hier nur zur Vergleichbarkeit zu den späteren Abschnitten (insbesondere Voraussetzung II.1.1) verwendet. Allgemein werden die Sobolev-Normen in Definition II.3 eingeführt.

I.3.8 Bemerkung (Ausreichende, allgemeinere Klasse von Flächen)
Die Voraussetzungen an $\mathcal{K}$ können abgeschwächt werden, vgl. auch Bemerkung II.2.4. Dies wird durch den Autor in [Ner14b] bzw. [Ner14a] ausgeführt, der Vollständigkeit halber geben wir diese Bedingungen hier trotzdem wieder: Eine Fläche $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ ist *schwach* $\mathcal{C}^0_{\eta,\varepsilon+3/2}$*-fast konzentrisch mit Radius vergleichbar zu* $\sigma > 0$ und zugehörigen Konstanten $c_1 \ge 0$ und $\eta \in (0\,,1]$, falls

$$\Big|4\pi\sigma^2 - |\Sigma|\Big| \le c_1\,\sigma^{\frac{3}{2}-\varepsilon}, \qquad \sigma^{4+\eta} \le \min_{\Sigma} d^{5+2\varepsilon},$$

$$\int_{\Sigma} \mathcal{H}^2\,\mathrm{d}\mu - 16\pi\,(1-g) \le \frac{c_1}{\sigma^{\eta}}, \qquad \sum_{i=1}^{3}\left|\fint_{\Sigma} \overline{x}_i\,\mathrm{d}\mu\right|^2 \le (1-\eta)\,\sigma$$

gilt, wobei g das topologische Geschlecht von Σ ist. In dieser Arbeit kann die Bedingung, dass eine Fläche Σ „$\mathcal{C}^0_{\delta,3/2+\varepsilon}$-fast konzentrisch mit Radius $\sigma > 0$ ist ($\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta,\varepsilon}_{\sigma}(c_0, c_1, c_S)$)“ überall durch „$\Sigma$ ist schwach $\mathcal{C}^0_{\eta,3/2+\varepsilon}$-fast konzentrisch mit Radius $\sigma > 0$“ ersetzt werden, siehe [Ner14b] bzw. [Ner14a]. ◇

[5]Dieser kann damit als Euklidisches Zentrum von Σ gewählt werden, siehe Proposition II.3.3 und Definition II.6.3.

II. A priori Abschätzungen von und in Sphären

Dieses Kapitel ist der Untersuchung der Regularität der betrachteten „Sphären" gewidmet. Im Folgenden bezeichnet Σ eine geschlossene Hyperfläche einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\overline{M},\overline{g})$, wobei Σ fast konstante mittlere Krümmung $\mathcal{H}$ habe und diffeomorph zur Einheitssphäre sei.[1] Dabei setzen wir voraus, dass $(\overline{M},\overline{g})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach ist. Wir werden die Ergebnisse des Kapitels dann einmal auf Flächen tatsächlich konstanter mittlerer Krümmung $\mathcal{H} =: -2/\sigma$ und einmal auf Flächen mit konstanter Expansion $\mathcal{H} + \mathscr{b}\operatorname{tr}\overline{\mathrm{k}} =: -2/\sigma$ anwenden.[2] Erstere haben per Definition konstante mittlere Krümmung, zweitere haben asymptotisch konstante mittlere Krümmung, falls $\overline{\mathrm{k}}$ auf geeignete Weise ausreichend klein ist. Entsprechend unterscheidet sich auch das Abfallverhalten dieser Flächen. Damit wir trotzdem nicht alle Regularitätssätze zweimal zeigen müssen, bearbeiten wir die Regularität allgemeiner, so dass beide Fälle enthalten sind. Dadurch werden jedoch einige zusätzliche Exponenten nötig. Wir erklären nun, wofür im Folgenden welches Exponenten-Symbol verwendet wird, also zu welcher Eigenschaft diese korrespondieren.

- ε: Wird immer zum Grad der Asymptotik der Metrik von $\overline{M}$ korrespondieren – entsprechend Abschnitt I.3;
- $\overline{K}$: Wird auch immer zum Grad der Asymptotik der Metrik von $\overline{M}$ korrespondieren: Im Fall asymptotisch flacher Riemannsche Mannigfaltigkeiten sei $\overline{K} := \varepsilon + 1/2$ und sonst $\overline{K} = \varepsilon + 1$;
- $\overline{L}$: Korrespondiert im Fall der Flächen konstanter Expansion zum Grad des Abfalls der zweiten Fundamentalform $\overline{\mathrm{k}}$ der Anfangsdaten. Im Fall Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist $\overline{L} := \varepsilon + 3/2$. Damit gilt in jedem Fall $\overline{L} > 3/2$.
- κ: Entspricht dem Grad des Abfalls des spurfreien Anteils $\mathring{\mathrm{k}}$ der zweiten Fundamentalform k der betrachteten Fläche $M \hookrightarrow \overline{M}$. In Proposition II.2.2 ergibt sich $\kappa = \min\{\overline{K}+1, \overline{L}+1\}$;
- δ: A priori angenommene „Zentriertheit der Fläche", genauer gesagt gilt $|d - \sigma| \leq c_0\,\sigma^{1-\delta}$ für den Euklidischen Koordinaten Abstand d vom Koordinaten Ursprung.

  Ist $(\overline{M},\overline{g})$ mit stark abfallender Skalarkrümmung, so wird für die von uns betrachteten Flächen $\delta = \varepsilon$ und $c_0 < \infty$ gelten. Ist dies nicht der Fall, so betrachten wir

[1] Wir erklären im Folgenden, was wir unter fast konstanter mittlerer Krümmung verstehen.
[2] Wir werden im gesamten Kapitel etwas schwächere Voraussetzungen annehmen als wir später vorfinden werden, damit wir Aussagen für allgemeinere Fälle erhalten.

später nur Familien von Flächen $\{{}_\sigma\Sigma\}_\sigma$ so, dass diese Ungleichung für $\delta = 0$ und $c_0 = c_0(\sigma)$ mit $c_0(\sigma) \to 0$ für $\sigma \to \infty$ gilt.

τ: „Zentriertheit der Fläche um ihr Koordinaten-Zentrum, d. h. für den Euklidischen Koordinaten Abstand d_0 vom Koordinaten-Zentrum $\vec{z}$ von Σ gilt $|d_0 - \sigma| \le C\,\sigma^{1-\tau}$. A posteriori ergibt sich in Proposition II.3.3, dass dies für alle $\tau \in (0\,,\kappa)$ und je eine Konstante $C = C(\tau)$ gilt. In den von uns später betrachteten Fällen gilt sogar $\tau = \kappa$.

Es sei dabei angemerkt, dass dies *konzeptionelle* Erklärungen sind, d. h. die korrespondierenden Ungleichungen gelten für gewisse Konstanten (wie c_0), die sich von Abschnitt zu Abschnitt ändern. Außerdem werden alle Aussagen nur für Flächen von ausreichendem *Radius* gelten, wobei die Bedeutung von „ausreichend“ von obigen Exponenten (ε, $\overline{K}$, $\overline{L}$, κ, δ, τ) und der zugehörigen Konstanten (z. B. c_0) abhängt. Weiter bemerken wir, dass (in geeignet konstruierten Karten) jede Fläche $\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta;\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) die Voraussetzungen der folgenden Abschnitte erfüllt, wobei die dort verwendeten Exponenten κ, $\overline{K}$, $\overline{L}$ und τ wie oben erklärt gesetzt werden.

Wir werden zwischen den Abschnitten die Radius-Definition verändern, dabei aber jeweils Vergleichbarkeit der verschiedenen Radien erhalten.

II.1 Bemerkung (Über den Radius)
Wir bemerken, dass der Begriff des „Radius“ für geschlossene Flächen im $\mathbb{R}^3$ auf verschiedene Weisen definiert werden kann und führen daher im Folgenden auch verschiedene Schreibweisen dafür ein. Für die Definition des Radius *über den Flächeninhalt*, d. h. $|\Sigma| =: 4\pi\varsigma^2$, schreiben wir ς, für die *über den größten „ganz in Σ“ enthaltenen konzentrischen Ball* schreiben wir $r := \min\{|p| \,:\, p \in \Sigma\}$ und für die *über die Krümmung* $\mathcal{H} \equiv: {}^{-2}\!/\!_\sigma$ (bzw. $\mathcal{H} + \ell\operatorname{tr}\overline{k} \equiv: {}^{-2}\!/\!_\sigma$) schreiben wir σ – falls eine dieser beiden Krümmungen konstant ist.

In diesem Kapitel werden wir insbesondere erkennen, dass diese Radius-Begriffe in den von uns betrachteten Fällen im Wesentlichen äquivalent sind, d. h. für Konstanten $c_S, c_0, c_1 \ge 0$ und $\delta \in [0\,,\varepsilon]$ existieren Konstanten $C = C(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \delta, c_0, c_1)$ und $C' = C'(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, c_1)$ so, dass für alle $\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta;\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7)

$$|\varsigma - r| + |\varsigma - \sigma| \le C\,\sigma^{1-\delta}, \quad \text{bzw.} \quad |\varsigma - r| + |\varsigma - \sigma| \le c_0\,C'\,\sigma + C\,\sigma^{1-\varepsilon} \qquad \diamond$$

gilt, falls $\delta > 0$ bzw. $c_0 < 1$.

II.2 Bemerkung (Aufbau dieses Kapitels)
Im Abschnitt II.1 werden wir das bekannte Resultat wiederholen, dass auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten Σ^n für welche die erste Sobolev-Ungleichung $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \le {}^{C}\!/\!_{\varsigma}\,\|f\|_{\mathrm{W}^{1,1}_\varsigma(\Sigma)}$ gilt, auch alle anderen Sobolev-Ungleichungen erfüllt werden. Weiter zeigen wir die bekannte L^∞-, H und H^2-Regularität des Laplace-Operators unter Annahmen an die Ricci-Krümmung. Um weiteren technischen Aufwand zu sparen, verzichten wir dabei vollständig auf Hölder-Räume und betrachten für den Laplace-Operator auch keine $\mathrm{W}^{2,p}$-Räume mit $p \neq 2$. Im darauf folgenden Abschnitt II.2 verwenden wir diese Regularität,

um ein „Bootstrap“-Argument durchzuführen: Eine zweidimensionale geschlossene Hyperfläche mit (im oben erklärten Sinne) *fast konstanter mittlerer Krümmung* innerhalb einer Riemannsche Mannigfaltigkeitn $(\overline{M},\overline{g})$ erfüllt bereits starke (insb. punktweise) Abschätzungen an die zweite Fundamentalform, falls sie schwache Abschätzungen erfüllt und die Ricci-Krümmung der umliegende Mannigfaltigkeit auf Σ geeignet kontrolliert ist.

Die Normale und Koordinatisierung einer solche Fläche wird in Abschnitt II.3 untersucht, wobei an $(\overline{M},\overline{g})$ weitere asymptotische Regularitätsannahmen gemacht werden müssen. Wir weisen darauf hin, dass äquivalente $\mathrm{H}(\Sigma)$-Ergebnisse in [DLM05] (und die punktweisen Ergebnisse in [DLM06]) unter weit schwächeren Annahmen erreicht werden – diese benötigen jedoch weit größeren technischen Aufwand.

Nachdem wir in Abschnitt II.4 Abschätzungen an die ersten drei Eigenwerte des Laplace-Operators auf solchen Flächen Σ hergeleitet haben, kommen wir in Abschnitt II.5 zu den Abschätzungen für den Stabilitätsoperators.

Abgeschlossen wird dieses Kapitel von Abschnitt II.6, in dem wir zeigen, wie Deformationen solcher Flächen durch ihre Lapse-Funktion charakterisiert werden. ◇

Zur Verkürzung der Schreibweisen wiederholen wir skalierende Normen.

II.3 Definition (Skalierende $\mathrm{W}^{k,p}$-Normen und Räume)
Für eine kompakte, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (Σ^n,g) ist die $\mathrm{W}^{k,p}$-*Norm* eines k-fach differenzierbaren Tensors T durch

$$\|T\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n)} := \sum_{\kappa=0}^{k} r^\kappa \left\| |\nabla^\kappa T|_g \right\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma^n)}$$

definiert, wobei $\varsigma := \sqrt[n]{|\Sigma^n|/\omega_n}$ für die Euklidische Fläche ω_n der n-dimensionalen Einheitssphäre *Flächen-Radius* von Σ^n heißt und die Selbstverjüngung eines (m,n)-Tensors T in einer beliebigen Karte definiert ist durch

$$|T|_g := \left(g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_n j_n} \, g_{k_1 l_1} \cdots g_{k_m l_m} \, T^{k_1,\dots,k_m}_{i_1,\dots,i_n} \, T^{l_1,\dots,l_m}_{j_1,\dots,j_n} \right)^{1/2}.$$

Die zugehörigen Räume werden entsprechend bezeichnet, d. h. $\mathrm{L}^p_{f,l}(\Sigma^n)$ bezeichnet die Vervollständigung der stetigen Funktionen in Σ^n bzgl. der $\mathrm{L}^p(\Sigma^n)$-Norm und $\mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n)$ diejenigen $\mathrm{L}^p(\Sigma^n)$-Funktion mit endlicher $\mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n)$-Norm, wobei schwache Ableitungen verwendet werden. Außerdem werden die Kurzschreibweisen $\mathrm{H}^k(\Sigma^n) := \mathrm{W}^{k,2}(\Sigma^n)$ und $\mathrm{H}(\Sigma^n) := \mathrm{H}^1(\Sigma^n)$ verwendet. Zuletzt bezeichnet $\mathrm{W}^{-k,p}(\Sigma^n)$ den Dualraum von $\mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n)$, welcher mit der induzierten Norm ausgestattet wird, d. h.

$$\|\varpi\|_{\mathrm{W}^{-k,p}(\Sigma^n)} := \sup\left\{ \varpi(f) \;\middle|\; f \in \mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n),\ \|f\|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n)} = 1 \right\} \qquad \forall\, \varpi \in \mathrm{W}^{-k,p}(\Sigma^n).$$

◇

Wir bemerken, dass diese Normen wie die jeweils zugehörige Lebesgue-Norm skalieren.

II.1. Sobolev-Ungleichungen und a priori Abschätzungen des Laplace-Operators

Um in nachfolgenden Kapiteln aus der Kenntnis des Werts ${}^{b}\mathscr{L}_1 f$ für den jeweiligen Stabilitätsoperators einer Funktion f bereits punktweise Abschätzungen für f zu erhalten, leiten wir in Abschnitt II.5 allgemeine a priori Abschätzungen für ${}^{0}\mathscr{L}_1$ her. Als ersten Schritt hierfür zeigen wir in diesem Abschnitt Sobolev-Ungleichungen und a priori Abschätzungen für den Laplace-Operator. Für eine allgemeinere Einführung in diese Thematik verweisen wir auf [GT01].

II.1.1 Voraussetzung (für Abschnitt II.1)
Es sei (Σ^n, g) für $1 < n \in \mathbb{N}$ eine n-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand sowie $c_S > 0$ eine Konstante so, dass die erste Sobolev-Ungleichung gilt, d. h.

$$\|f\|_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1}}(\Sigma^n)} \leq \frac{c_S}{\varsigma}\, \|f\|_{\mathrm{W}^{1,1}(\Sigma^n)} \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}^1(\Sigma^n), \tag{II.1}$$

wobei wieder $\varsigma := \sqrt[n]{|\Sigma^n|/\omega_n}$ den Flächen-Radius und ω_n die Fläche der n-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet. ◇

Es sei wiederum angenerkt, dass wir die Sobolev-Normen so definiert haben, dass beide Seiten der ersten Sobolev-Ungleichung wie ς^{n-1}-skalieren.

Wie in [Sta60] verwenden wir das folgende Lemma für $\varphi(t) := \mu(|f| > t)$, um L^∞-Abschätzungen einer Funktion $f \in \mathrm{W}^{1,n+\varepsilon}(\Sigma^n)$ zu erhalten.

II.1.2 Lemma ([Sta60, Lemme 1, II])
Ist $\varphi : [t_0\,, \infty) \to [0\,, \infty)$ monoton nicht-wachsend und sind $0 < c, \alpha$ und $1 < \beta$ Konstanten so, dass

$$|t-s|^\alpha\, \varphi(t) \leq c\, \varphi(s)^\beta \qquad \forall\, t_0 < s < t < \infty$$

gilt, so folgt $\varphi(t) = 0$ für $t \geq t_0 + T$, wobei

$$T := 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} \left(c\, \varphi(t_0)^{\beta-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$ ◇

Beweis (Nach [Sta60, Lemme 1, II])
Wir setzen $t_k := t_0 + (1 - 2^{-k})\, T$ und zeigen

$$\varphi(t_k) \leq 2^{\frac{\alpha k}{1-\beta}}\, \varphi(t_0) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Für $k = 0$ gilt dies direkt und induktiv erhalten wir

$$\varphi(t_{k+1}) = \varphi\Big(t_k + 2^{-k-1}\Big) \leq 2^{\alpha\,(k+1)}\, T^{-\alpha}\, c\, \varphi(t_k)^\beta \leq 2^{\frac{\alpha(k+1)}{1-\beta}}\, \varphi(t_0).$$

Mit der Monotonie, $\beta > 1$ und $\alpha > 0$ folgt die Aussage. ////

Nun kommen wir zu den Sobolev-Ungleichungen. Da diese wohl-etabliert sind, wollen wir hier keine weitere Einführung geben und verweisen nur wieder auf [GT01]. Allerdings bemerken wir, dass aus diesen insbesondere folgt, dass jede $\mathrm{W}^{k+1,p}(\Sigma^n)$-Funktion mit $p > n$ zumindest $k \in \mathbb{N}_0$-mal stetig-differenzierbar ist. Wir betrachten dafür eine beliebige Folge $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma^n)$ mit $f_n \to f$ in $\mathrm{W}^{k+1,p}(\Sigma^n)$ und bemerken, dass mit der dritten (II.4) der folgenden Ungleichungen die ersten $k-1$-Ableitungen gleichmäßig konvergieren, da sie bzgl. der L^∞-Norm konvergieren.

II.1.3 Proposition (Sobolev-Ungleichungen)
Für die skalierenden Sobolev-Normen (siehe Definition II.3) auf Σ^n gelten für eine Konstante $C = C(c_S, n, p)$ die Sobolev-Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathrm{L}^{q(p)}(\Sigma^n)} &\le \frac{c_S(n-1)}{n}\, q(p)\, \varsigma^{-1}\, \|f\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Sigma^n)} && \forall\, f \in \mathrm{W}^{1,p}(\Sigma^n),\ p \in [1\,,n), && \text{(II.2)}\\
\|f\|_{\mathrm{L}^{p}(\Sigma^n)} &\le \frac{c_S(n-1)}{n}\, p\, \varsigma^{\frac{n}{p}-1}\, \|f\|_{\mathrm{W}^{1,n}(\Sigma^n)} && \forall\, f \in \mathrm{W}^{1,n}(\Sigma^n),\ p \in [1\,,\infty), && \text{(II.3)}\\
\|f\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\Sigma^n)} &\le 2^{\frac{n(p-1)}{p-n}} c_S\, \varsigma^{-\frac{n}{p}}\, \|f\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Sigma^n)} && \forall\, f \in \mathrm{W}^{1,p}(\Sigma^n),\ p \in (n\,,\infty], && \text{(II.4)}\\
\|f\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Sigma^n)} &\le C\left(\varsigma\, \|\nabla f\|_{\mathrm{L}^{p}(\Sigma^n)} + \varsigma^{\frac{n}{p}-n}\, \|f\|_{\mathrm{L}^{1}(\Sigma^n)}\right) && \forall\, f \in \mathrm{W}^{1,p}(\Sigma^n),\ p \in [1\,,\infty], && \text{(II.5)}
\end{aligned}$$

wobei $q(p) := {}^{np}\!/_{(n-p)}$, falls $1 \le p < n$ und formal ${}^{n}\!/_{\infty} := 0$. In allen Ungleichungen kann $\varsigma^{\pm n/p}$ durch $\mu(\operatorname{supp} f)^{\pm 1/p}$ ersetzt werden, wobei $\operatorname{supp} f := \text{Abschluss}([f \neq 0])$ den Träger von f bezeichnet. ◇

Beweis
Nach Voraussetzung (II.1) gilt die erste Ungleichung (II.2) für $p = 1$ und durch Betrachtung von $g := |f|^{q(n-1)/n}$ erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung daraus die ersten zwei Ungleichungen (II.2) und (II.3). Für die dritte Ungleichung (II.4) sei $p > n$ und $f \in \mathrm{W}^{1,p}(\Sigma^n)$ beliebig. Mit der ersten Ungleichung (II.2) erhalten wir für $t \ge s \ge 0$, $f_t := \max(|f| - t, 0)$ und $A_t := \operatorname{supp} f_t$

$$\begin{aligned}
|t-s|^{\frac{n}{n-1}} \mu(A_t) &\le \int_{A_t} \big||f| - s\big|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{d}\mu \le \int_{A_s} |f_s|^{\frac{n}{n-1}}\, \mathrm{d}\mu = \|f_s\|^{\frac{n}{n-1}}_{\mathrm{L}^{\frac{n}{n-1}}(\Sigma^n)}\\
&\le \left(c_S\, \varsigma\, \|f_s\|_{\mathrm{W}^{1,1}_\varsigma(\Sigma^n)}\right)^{\frac{n}{n-1}} \le \left(\frac{c_S}{\varsigma}\, \mu(A_s)^{1-\frac{1}{p}}\, \|f\|_{\mathrm{W}^{1,p}_\varsigma(\Sigma^n)}\right)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Mit Lemma II.1.2 für $t_0 = 0$, $\alpha = {}^{n}\!/_{(n-1)}$ und $\beta = {}^{n(p-1)}\!/_{((n-1)p)} > 1$ erhalten wir somit die dritte Ungleichung (II.4). Die vierte (II.5) folgt direkt durch die anderen. ////

Wie angekündigt kommen wir nun zu den a priori Abschätzungen des Laplace-Operators. Dafür definieren wir für alle $f \in \mathrm{W}^{1,1}(\Sigma^n)$ die lineare Abbildung $[\Delta f]$ durch die schwache Form des Laplace-Operators, d. h.

$$[\Delta f](h) := -\int g(\nabla f, \nabla h)\, \mathrm{d}\mu \qquad \forall\, h \in \mathcal{C}^1(\Sigma^n).$$

Wir bemerken, dass die Konstanten der folgenden Proposition nicht optimal gewählt sind und die Einschränkung für (II.9) und (II.11) auf Dimension $n = 2$ zur technischer

Vereinfachung gemacht wurden. Weiter gilt (II.10) auch für eine $\mathrm{L}^{1+\varepsilon}$- anstelle einer L^2-Schranke an den Ricci-Tensor.

II.1.4 Proposition (A priori Abschätzungen für den Laplace-Operator)
Es gilt für $f \in \mathrm{W}^{1,1}(\Sigma^n)$ und $g \in \mathrm{W}^{2,2}(\Sigma^n)$

$$\|f\|_{\mathrm{H}(\Sigma^n)} \leq 2\Big(\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \varsigma^2 \,\|[\Delta f]\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Sigma^n)}\Big), \tag{II.6}$$

$$\|g\|_{\mathrm{W}^{2,2}(\Sigma^n)} \leq 3\Big(\Big(1+\varsigma^2 \||\mathrm{Ric}^-|\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma^n)}\Big)\,\|g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \varsigma^2\,\|\Delta g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\Big), \tag{II.7}$$

wobei $|\mathrm{Ric}^-|(p) := \max\{|\min(0, \mathrm{Ric}(\xi,\xi))| : \xi \in \mathrm{T}_p\Sigma^n, |\xi|_{\mathcal{g}} = 1\}$ die $\mathcal{g}$-Norm des negativen Anteils von Ric bezeichnet.

Ist dabei $n = \dim\Sigma \geq 3$ und $c_R := \||\mathrm{Ric}^-|\|_{\mathrm{L}^{n/2}(\Sigma^n)} < {}^{(n-2)^2}\!/_{(8c_S{}^2\,(n-1)^2)} =: c_n$, so gilt für eine Konstante $C = C({}^{c_n}\!/_{(c_n-c_R)}, c_S, n)$ auch

$$\|g\|_{\mathrm{W}^{2,2}(\Sigma^n)} \leq C\Big(\|g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \varsigma^2\,\|\Delta g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\Big). \tag{II.8}$$

Ist dagegen $n = \dim\Sigma = 2$, so existiert für alle $1 \leq p < 2$ bzw. $2 < q$ eine Konstante $C = C(c_S, (2-p)^{-1})$ bzw. $C = C(c_S, (q-2)^{-1})$ so, dass für alle Funktionen $f \in \mathrm{L}^1(\Sigma^n)$ mit $[\Delta f] \in \mathrm{W}^{-1,p}(\Sigma^n)$ bzw. $g \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ bzw. $h \in \mathrm{W}^{2,q}(\Sigma)$

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq C\Big(\varsigma^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \varsigma^{\frac{2}{p}}\|[\Delta f]\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Sigma)}\Big), \tag{II.9}$$

$$\|g\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma^n)} \leq C\left(1+\varsigma\||\mathrm{Ric}^-|\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)}\right)\Big(\|g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \varsigma^2\,\|\Delta g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\Big), \tag{II.10}$$

$$\|h\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq \frac{C}{\varsigma}\Big(\Big(1+\varsigma^{3-\frac{4}{q}}\|\mathrm{Ric}\|^2_{\mathrm{L}^q(\Sigma)}\Big)\,\|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \varsigma^{3-\frac{2}{q}}\|\Delta h\|_{\mathrm{L}^q(\Sigma)}\Big) \tag{II.11}$$

gilt. Da hier $\dim\Sigma = 2$ vorausgesetzt ist, ist dabei $2\,\mathrm{Ric} = \mathcal{S}\,\mathcal{g}$ und daher insbesondere auch $2\,|\mathrm{Ric}^-| = |\mathcal{S}^-| := |\min\{0, \mathcal{S}\}|$. ◇

Beweis
Es folgt (II.6), da wir durch partielle Integration für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma^n)$

$$\begin{aligned}\|\nabla f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} &= -\int f\,\Delta f\,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_{\mathrm{H}(\Sigma^n)}\,\|\Delta f\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Sigma^n)}\\ &\leq \frac{1}{2\varsigma^2}\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \varsigma^2\|\Delta f\|^2_{\mathrm{H}^{-1}(\Sigma^n)}.\end{aligned}$$

erhalten. Bekannterweise gilt für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^2(\Sigma^n)$

$$\mathrm{div}\nabla X = \mathcal{g}^{rs}\mathrm{Ric}(X, e_r)e_s + \nabla\mathrm{div}X,$$

damit erhalten wir für jedes solche Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^2(\Sigma^n)$ durch zweifache partielle Integration die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\nabla X\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} &= \int_\Sigma (\mathrm{div}X)^2\,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma \mathrm{Ric}(X,X)\,\mathrm{d}\mu\\ &\leq \|\mathrm{div}X\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \big\|\mathrm{Ric}^-\big\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma^n)}\,\|X\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)}.\end{aligned}$$

Durch Betrachtung von $X := \nabla g$ für $g \in \mathcal{C}^3(\Sigma^n)$ und eine weitere partielle Integration ergibt sich damit (II.7). Für $n \geq 3$ erhalten wir (II.8) äquivalent zu (II.7), da vergleichbar zu oben auch

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Hess}\ f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} &\leq \|\Delta f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \|\mathrm{Ric}^-\|_{\mathrm{L}^{n/2}(\Sigma^n)} \|\nabla f\|^2_{\mathrm{L}^{2n/(n-2)}(\Sigma^n)} \\ &\leq \|\Delta f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \frac{8{c_S}^2\,(n-1)^2}{(n-2)^2\,\varsigma^2}\,\|\mathrm{Ric}^-\|_{\mathrm{L}^{n/2}(\Sigma^n)} \\ &\qquad \left(\|\nabla f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \varsigma^2\,\|\mathrm{Hess}\ f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)}\right)\end{aligned}$$

gilt, wobei wir die erste Sobolev-Ungleichung (II.2) verwendet haben. Durch die angenommene Abschätzung folgt die Aussage aus (II.6).

Für die weiteren Abschätzungen sei $n = 2$. Für (II.9) definieren wir für $1 \leq p < 2$ und $f \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ zunächst $f_k := \max\{|f| - k, 0\}$ und $A_k := \operatorname{supp} f_k$. Insbesondere ist $f_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)$ und

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(f_k^{\frac{3}{2}}\right)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} &= -\frac{9}{4}\int g(\nabla f_k, \nabla f) f_k + f_k\,\Delta f\ f_k\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq -\left\|\nabla\left(f_k^{\frac{3}{2}}\right)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{9}{4}\|\Delta f\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Sigma)}\left\|f_k^2\right\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Weiter gilt für $s := {}^{2p}/_{(2-p)} \geq 2$ mit der Sobolev Ungleichung (II.3)

$$\begin{aligned}\left\|f_k^2\right\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Sigma)} &\leq \|f_k\|_{\mathrm{L}^s(\Sigma)}\,\|f_k\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + 2\varsigma\|f_k\|_{\mathrm{L}^s(\Sigma)}\,\|\nabla f_k\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\ &\leq \frac{2p}{2-p}\frac{c_S}{\varsigma}\,\mu(A_k)^{\frac{2-p}{2p}}\,\|f_k\|^2_{\mathrm{H}(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also

$$\left\|\nabla\left(f_k^{\frac{3}{2}}\right)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{9p}{4(2-p)}\frac{c_S}{\varsigma}\,\mu(A_k)^{\frac{2-p}{2p}}\,\|\Delta f\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Sigma)}\,\|f_k\|^2_{\mathrm{H}(\Sigma)}.$$

Für $h > k > 0$ erhalten wir mit der Sobolev Ungleichung (II.2), der Hölder Ungleichung und anschließend der Sobolev Ungleichung (II.5)

$$\begin{aligned}|h-k|^3\mu(A_h) &\leq \int_{A_h}|f-k|^3\,\mathrm{d}\mu \leq \int_{A_k}|f-k|^3\,\mathrm{d}\mu = \left\|f_k^{\frac{3}{2}}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\ &\leq \frac{C}{\varsigma^2}\,\mu(A_k)\left(\varsigma^{-1}\left\|f_k^{\frac{3}{2}}\right\|_{\mathrm{L}^1(\Sigma)} + \varsigma\left\|\nabla\left(f_k^{\frac{3}{2}}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\right)^2 \\ &\leq C\,\varsigma^{-\frac{2+p}{p}}\mu(A_k)^{\frac{2+p}{2p}}\left(\varsigma^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \varsigma^{\frac{2}{p}}\|\Delta f\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Sigma)}\right)\|f\|^2_{\mathrm{H}(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Daher erhalten wir (II.9) mit Lemma II.1.2 für $\alpha = 3$ und $\beta = {}^{(2+p)}/_{(2p)}$ und (II.6).

Um aus (II.7) auch (II.10) zu erhalten beachten wir, dass wie im Beweis von (II.7)

$$\begin{aligned}\|\nabla X\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} &= \int_\Sigma (\mathrm{div} X)^2 \,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma \mathrm{Ric}(X,X)\,\mathrm{d}\mu \\ &\le \|\mathrm{div} X\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \|\mathrm{Ric}^-\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \|X\|^2_{\mathrm{L}^4(\Sigma)}\end{aligned} \tag{II.12}$$

gilt. Also müssen wir $\|X\|_{\mathrm{L}^4(\Sigma)}$ abschätzen. Dafür bemerken wir, dass – wiederum durch partielle Integration – die Youngsche Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\nabla g\|^4_{\mathrm{L}^4(\Sigma)} &\le \int (|\Delta g| + 2|\mathrm{Hess}\ g|)\,|g|\,|\nabla g|^2\,\mathrm{d}\mu \\ &\le \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \Big(\|\Delta g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + 2\|\mathrm{Hess}\ g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\Big) \|\nabla g\|^2_{\mathrm{L}^4(\Sigma)}\end{aligned}$$

liefert. Durch Anwendung von (II.12) für $X := \nabla g$ und erneute Anwendung der Youngschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\nabla g\|^2_{\mathrm{L}^4(\Sigma^n)} &\le C\|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \Big(\|\Delta g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \|\mathrm{Ric}^-\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)}\Big) \\ &\le \varsigma\|\Delta g\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + C\,\|g\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \Big(\|\mathrm{Ric}^-\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \varsigma^{-1}\Big).\end{aligned}$$

Verwenden wir nun (II.7) für $p = 2$, so impliziert dies

$$\|\nabla g\|_{\mathrm{L}^4(\Sigma^n)} \le \frac{C}{\varsigma} \Big(\|\mathrm{Ric}^-\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma^n)} + \varsigma^{-1}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\|g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \varsigma^2\|\Delta g\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\Big).$$

Setzen wir dies in (II.12) ein, so ergibt dies (II.10).

Für (II.11) sei zunächst $h \in \mathcal{C}^3(\Sigma)$, $f \in \mathcal{C}^1(\Sigma)$ mit $\|f\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} \le 1$ und $q^{-1} = 1 - p^{-1}$, wobei $2 > p$. Wir erkennen direkt

$$\left|\int \Delta h\, f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \|\Delta h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\, \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \le \varsigma^{1-\frac{2}{q}} \|\Delta h\|_{\mathrm{L}^q(\Sigma)},$$

insbesondere können wir (II.9) auf h anwenden. Weiter gilt für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ mit $\|X\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Sigma)} \le 1$

$$\begin{aligned}\int \mathscr{g}(\Delta\nabla h, X)\,\mathrm{d}\mu &= \int \mathscr{g}(\nabla\Delta h, X) + \mathrm{Ric}(\nabla h, X)\,\mathrm{d}\mu \\ &\le \frac{\|X\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Sigma)}}{\varsigma} \|\Delta h\|_{\mathrm{L}^q(\Sigma)} + \|X\|_{\mathrm{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\Sigma)} \|\mathrm{Ric}\|_{\mathrm{L}^q(\Sigma)} \|\nabla h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)},\end{aligned}$$

d. h.

$$\|\Delta\nabla h\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Sigma)} \le \frac{C}{\varsigma}\Big(\|\Delta h\|_{\mathrm{L}^q(\Sigma)} + \varsigma^{1-\frac{2}{q}} \|\mathrm{Ric}\|^2_{\mathrm{L}^q(\Sigma)} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\Big).$$

Also folgt (II.11) aus der Anwendung von (II.9) auf g und ∇g. ////

II.1.5 Bemerkung ($\mathrm{W}^{2,p}$-Regularität)
Es ist wohlbekannt (vgl. die in der Einleitung des Abschnitts zitieren Quellen), dass für $(\Sigma, g) = (\mathcal{S}^2_r(0), {}^e g)$ neben den Ungleichungen in Proposition II.1.4 auch

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\mathcal{S}^2_r(0))} \leq C \left(\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{S}^2_r(0))} + \varsigma^{-2} \|\Delta f\|_{\mathrm{L}^p(\mathcal{S}^2_r(0))} \right) \qquad \forall\, p > 2$$

gilt. Da dies mit den Calderón-Zygmund Abschätzungen deutlichen zusätzlichen Aufwand bedeutet, wir dies im Folgenden nur für einen technischen Schritt benötigen, zu diesem Zeitpunkt längst die Metrik der von uns betrachteten Flächen Σ mit der der Sphäre vergleichen können und dies für die Anwendung dieser Ungleichung ausreicht, führen wir dies nicht im allgemeinen Fall vor. Wir bemerken, dass wir dabei die Abhängigkeit *dieser* Konstanten C von den Krümmungen $\mathcal{S}$ etc. nicht bestimmen und nicht benötigen – wir müssen nicht einmal ausschließen, dass C von σ abhängt (was dennoch nicht der Fall ist). $\diamond$

II.2. A priori Abschätzung der zweiten Fundamentalform

Wie in [Met07, Prop. 2.2] zeigen wir hier eine a priori Abschätzung der zweiten Fundamentalform mit Hilfe der bekannten Simons-Identität. Wir bemerken, dass in [Met07] äquivalente Resultate unter schwächeren Voraussetzungen an die Fläche gezeigt werden, dort jedoch stärkere Annahmen an die äußere Metrik $\overline{g}$ gemacht werden.

Es sei angemerkt, dass wir uns ab diesem Abschnitt auf zweidimensionale Flächen beschränken. Weiter sollte beachtet werden, dass die hier an die Fläche angenommenen Krümmungs-Abschätzungen (siehe Proposition II.2.2) bspw. von CMC- oder CE-Flächen in asymptotisch flachen Mannigfaltigkeiten erfüllt werden, insofern der Mindestabstand der Fläche zum Koordinatenursprung r mit dem Flächenradius ς vergleichbar ist.

Zunächst wiederholen wir die bekannte Simons-Identität aus [Sim68] bzw. [SSY75] und leiten diese in der hier verwendeten Notation her, d. h. in der von uns gewählten Vorzeichenkonvention und in kovarianter Form.

II.2.1 Lemma (Simons-Identität)
Ist $(\Sigma^n, g) \hookrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ eine glatte Hyperfläche einer glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$, so gilt auf Σ^n die Tensor-Gleichheit

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{k} = {} & \mathrm{Hess}\,\mathcal{H} - \nabla \overline{\mathrm{Ric}}_\nu + \mathrm{div}_1 \overline{\mathcal{R}}_{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{\mathcal{H}^2}{2}\,\mathring{\mathrm{k}} + \mathcal{H}\,\mathring{\mathrm{k}} \odot \mathring{\mathrm{k}} - |\mathring{\mathrm{k}}|_g^2\,\mathrm{k} \\ & + (\mathrm{tr}_{23}\overline{\mathcal{R}}) \odot \mathring{\mathrm{k}} - \overline{\mathcal{R}}_{\cdot rt \cdot}\,\mathring{\mathrm{k}}^{rt},\end{aligned}$$

wobei $(\mathrm{div}_1 \overline{\mathcal{R}}_{\cdot\cdot\cdot\nu})_{pq} := g^{rs} (\nabla_{e_s} \overline{\mathcal{R}})_{rpq}$ die Divergenz bzgl. g in der ersten Komponente und $(\mathrm{tr}_{23}\overline{\mathcal{R}})_{pq} := \overline{\mathcal{R}}_{pqrs}\, g^{qr}$ die Spur bzgl. g über den zweiten und dritten Eintrag bezeichnen. $\diamond$

Beweis
Zunächst gilt in Riemannschen Normalkoordinaten für jeden Tensor $T \in \Gamma(\operatorname{Bil}(T\Sigma))$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Hess}_{pq}T)_{rs} &= \frac{\partial^2 T_{rs}}{\partial x^p \partial x^q} - T(\nabla_{e_p}\nabla_{e_q} e_r, e_s) - T(e_r, \nabla_{e_p}\nabla_{e_q} e_s) \\
&= (\nabla_{e_q}\nabla_{e_p} T)_{rs} - T_{ts}\mathcal{R}_{pqr}{}^t + T_{rt}\mathcal{R}_{pq}{}^t{}_s = \Big(\mathrm{Hess}_{qp}T + (\mathcal{R}_{qp} \wedge T)_{\odot}\Big)_{rs}
\end{aligned}
$$

und damit folgt aus (I.5) wieder in Riemannschen Normalkoordinaten

$$
\begin{aligned}
(\Delta \mathrm{k})_{pq} &= g^{rs}\frac{\partial}{\partial x^r}\Big((\nabla_{e_s}\mathrm{k})_{pq}\Big) = g^{rs}(\mathrm{Hess}_{rp}\mathrm{k})_{sq} + \big(\mathrm{div}_1\overline{\mathcal{R}}_{\cdots\nu}\big)_{pq} \\
&= g^{rs}\frac{\partial}{\partial x^p}\Big((\nabla_{e_r}\mathrm{k})_{qs}\Big) + \big((\mathrm{tr}_{23}\mathcal{R}) \odot \mathrm{k}\big)_{pq} - \mathrm{k}^{rt}\mathcal{R}_{prtq} + \big(\mathrm{div}_1\overline{\mathcal{R}}_{\cdots\nu}\big)_{pq} \\
&= g^{rs}\frac{\partial}{\partial x^p}\Big((\nabla_{e_q}\mathrm{k})_{rs} + \overline{\mathcal{R}}_{rqs\nu}\Big) + \Big(\big(\mathrm{tr}_{23}\overline{\mathcal{R}} + \mathcal{H}\mathrm{k} - \mathrm{k}\odot\mathrm{k}\big)\odot\mathrm{k}\Big)_{pq} \\
&\quad - \mathrm{k}^{rt}\big(\overline{\mathcal{R}}_{prtq} - \mathrm{k}_{pt}\mathrm{k}_{rq} + \mathrm{k}_{rt}\mathrm{k}_{pq}\big) + \big(\mathrm{div}_1\overline{\mathcal{R}}_{\cdots\nu}\big)_{pq} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^q} - \overline{\mathrm{Ric}}_{q\nu}\right) + \Big(\big(\mathrm{tr}_{23}\overline{\mathcal{R}} + \mathcal{H}\mathrm{k} - \mathrm{k}\odot\mathrm{k}\big)\odot\mathrm{k}\Big)_{pq} \\
&\quad - \mathrm{k}^{rt}\overline{\mathcal{R}}_{prtq} + \Big(-|\mathrm{k}|_g^2\,\mathrm{k} + \mathrm{k}\odot\mathrm{k}\odot\mathrm{k} + \mathrm{div}_1\overline{\mathcal{R}}_{\cdots\nu}\Big)_{pq}.
\end{aligned}
$$

Da weiter $\mathcal{H}\,\mathrm{k}\odot\mathrm{k} - |\mathrm{k}|_g^2\,\mathrm{k} = {}^1\!/_2\,\mathcal{H}^2\,\mathring{\mathrm{k}} + \mathcal{H}\,\mathring{\mathrm{k}}\odot\mathring{\mathrm{k}} - |\mathring{\mathrm{k}}|_g^2\,\mathrm{k}$ gilt, ergibt sich Aussage. ////

Nun kommen wir zu dem angekündigten Bootstrap-Argument für die zweite Fundamentalform. Wir wollen dieses später auf geschlossene Hyperflächen $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ anwenden, die in einer asymptotisch charakterisierten Riemannschen Mannigfaltigkeit liegen. Wir erinnern uns daran, dass die Ricci-Krümmung für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$, die $\mathcal{C}^2_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild ist, gerade

$$
\left|\overline{\mathrm{Ric}}_{ij} - \frac{m}{d^3}\left({}^s\overline{g}_{ij} - 3\frac{\overline{x}_i\,\overline{x}_j}{d^2}\right)\right| \le \frac{C}{d^{3+\varepsilon}}
$$

erfüllt. Insbesondere erkennen wir, dass eine Sphäre $\Sigma = \mathcal{S}^2_r(0)$ gerade

$$
\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \le \frac{C}{r^{3+\varepsilon}}, \qquad \left\|\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\cdot)\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \le \frac{C}{r^{3+\varepsilon}}, \qquad \left\|\overline{\mathrm{Ric}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \le \frac{C}{r^3}
$$

erfüllt, also in diesem Fall $\overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\cdot)|_{T\Sigma}$ und $\overline{\mathcal{S}}$ von höherer Ordnung als $\overline{\mathrm{Ric}}|_{T\Sigma\times T\Sigma}$ und $\overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu)$ sind und letztere insbesondere nicht von ε abhängen.

Wir lassen hier der Vollständigkeit wegen allgemeinere asymptotisch flache Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\overline{M}, \overline{g})$ zu, d. h. erlauben $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\varepsilon \in (-1\,, 1]$. Wir bemerken, dass wir die Annahmen an die Fläche weiter abschwächen könnten – siehe Bemerkung II.2.4. Zuletzt sei erwähnt, dass entsprechend der in dieser Arbeit genutzten Notation $\mathcal{H}(\Sigma)$ als Mittelwert $\mathcal{H} := \fint \mathcal{H}\,\mathrm{d}\mu$ der mittleren Krümmung zu verstehen ist, auch wenn es sich a priori auch von diesem unterscheiden könnte.

II.2.2 Proposition (A priori Abschätzung für $\mathring{k}$ (Bootstrap))
Es sei $(\overline{M},\overline{g})$ eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $(\Sigma^2,g) \hookrightarrow (\overline{M},\overline{g})$ eine geschlossene Hyperfläche, die Voraussetzung II.1.1 für die Sobolev-Konstante c_S erfüllt. Gelten für Konstanten $\kappa > 1$, $\overline{K} > 0$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, eine Einheitsnormale ν und $\mathcal{H}(\Sigma) \in \mathbb{R}$

$$\left\|\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\cdot)\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{\varsigma^{\kappa+1}}, \qquad \left\|\overline{\mathrm{Ric}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{c_2}{\varsigma^{2+\overline{K}}},$$
$$\|\mathcal{H} + \mathcal{H}(\varsigma)\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{\varsigma^{\kappa-1}}, \qquad \left|\mathcal{H}(\Sigma) + \frac{2}{\varsigma}\right| \leq \frac{c_2}{\varsigma^{1+\overline{K}}},$$

wobei $\varsigma := \sqrt{|\Sigma|/4\pi} > \varsigma(c_S,c_1,c_2,\kappa,\overline{K})$, so existiert eine Konstante $C = C(c_S,c_2,\kappa,\overline{K})$ für die die folgende Äquivalenz

$$\|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{1}{5c_S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\mathring{k}\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa-1}} \tag{II.13}$$

gilt. Gilt außerdem noch $\|\nabla\mathcal{H}\|_{\mathrm{L}^3(\Sigma)} \leq c_1/\varsigma^{\kappa+\frac{1}{3}}$, so gilt auch

$$\|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{1}{5c_S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\mathring{k}\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} + \varsigma\|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa-1}}. \tag{II.14}$$

◇

Beweis
Für ausreichend großes ς ist „$\Leftarrow$“ in beiden Fällen trivial. Für die zweite Aussage (II.14) bemerken wir, dass aus der ersten Aussage (II.13) mit der Simons-Identität

$$\|\Delta\mathring{k}\|_{\mathrm{W}^{-1,\frac{3}{2}}(\Sigma)} \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa+\frac{4}{3}}} + \frac{C}{\varsigma^{3-\frac{2}{3}}}\left(\|\mathring{k}\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} + \|\mathring{k}\|_{\mathrm{H}(\Sigma)}^2 + \|\mathring{k}\|_{\mathrm{H}(\Sigma)}^3\right) \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa+\frac{4}{3}}}$$

folgt. Daher folgt die L^∞-Abschätzung aus der korrespondierenden Ungleichung (II.9) des Laplace-Operators aus Proposition II.1.4, falls die erste Aussage (II.13) gilt.

Es sei für „$\Rightarrow$“ der ersten Aussage (II.13) $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\varsigma)$. Aufgrund von $\dim\overline{M} = 3$ verschwindet der dreidimensionale Weyl-Tensor und somit gilt für $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\Sigma_0)$ mit $|X|_g, |Y|_g, |Z|_g \leq 1$ nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}|\overline{\mathcal{R}}(X,Y,Z,\nu)| = \Bigg|&\frac{\overline{S}}{2}\left(\overline{g}\,(X,Z)\,\overline{g}\,(Y,\nu) - \overline{g}\,(X,\nu)\,\overline{g}\,(Y,Z)\right)\\ &+ \overline{g}\,(X,Z)\,\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,Y) - \overline{g}\,(X,\nu)\,\overline{\mathrm{Ric}}(Z,\nu) + \overline{g}\,(Y,Z)\,\overline{\mathrm{Ric}}(X,\nu)\Bigg|\\ \leq{}& |\overline{g}\,(X,Z)|\left|\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,Y)\right| + |\overline{g}\,(Y,Z)|\left|\overline{\mathrm{Ric}}(X,\nu)\right| \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa+1}}.\end{aligned}$$

Weiter erkennen wir $\Delta\mathring{k} = \Delta k - 1/2\,\Delta\mathcal{H}\,g$ und erhalten daher durch Betrachtung von

$\operatorname{tr}(\Delta\mathring{k} \odot \mathring{k})$ aus der Simons-Identität und partieller Integration

$$\begin{aligned}
\|\nabla\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq{}& \frac{c_1\,C}{\varsigma^\kappa}\|\nabla\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} - \int \frac{\mathcal{H}^2}{2}\,|\mathring{k}|^2_g + \mathcal{H}\operatorname{tr}(\mathring{k}\odot\mathring{k}\odot\mathring{k}) - |\mathring{k}|^2_g\,|\mathring{k}|^2_g\,\mathrm{d}\mu \\
&+ \frac{C}{\varsigma^{2+\overline{K}}}\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\
\leq{}& \frac{c_1\,C}{\varsigma^\kappa}\|\nabla\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} - \frac{\boldsymbol{\mathcal{H}}^2}{2}\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \left\|\frac{\mathcal{H}^2 - \boldsymbol{\mathcal{H}}^2}{2}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \left\||\mathring{k}|^2_g\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\
&+ |\boldsymbol{\mathcal{H}}|\left\||\mathring{k}|^2_g\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \left\||\mathring{k}|^3_g\right\|_{\mathrm{L}^{4/3}(\Sigma)}\|\mathcal{H} - \boldsymbol{\mathcal{H}}\|_{\mathrm{L}^4(\Sigma)} \\
&+ \left\||\mathring{k}|^2_g\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{c_1\,C}{\varsigma^{2\kappa}}\,\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{C}{\varsigma^{2+\overline{K}}}\,\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

Nun bemerken wir, dass für ausreichend großes ς bereits

$$\frac{3}{2\varsigma^2} \leq \boldsymbol{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\varsigma^{2\kappa}}, \qquad \left\|\frac{\mathcal{H}^2 - \boldsymbol{\mathcal{H}}^2}{2}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^\kappa}, \qquad \|\mathcal{H} - \boldsymbol{\mathcal{H}}\|_{\mathrm{L}^4(\Sigma)} \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa-\frac{1}{2}}}$$

gilt. Damit erhalten wir für ς mit ${}^{C}\!/\!_{\varsigma^{2\kappa}} \ll {}^{1}\!/\!_{\varsigma^2}$ und ${}^{C}\!/\!_{\varsigma^{2+\overline{K}}} \ll {}^{1}\!/\!_{\varsigma^2}$

$$\begin{aligned}
\|\nabla\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq{}& \frac{c_1\,C}{\varsigma^\kappa}\|\nabla\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} - \frac{3}{2\varsigma^2}\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{c_1\,C}{\varsigma^\kappa}\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^4(\Sigma)} \\
&+ \frac{2}{\varsigma}\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^4(\Sigma)}\,\|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa-\frac{1}{2}}}\|\mathring{k}\|^3_{\mathrm{L}^4(\Sigma)} + \|\mathring{k}\|^4_{\mathrm{L}^4(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Young-Ungleichungen $2ab \leq a^2 + b^2$ bzw. $4ab \leq 3a^{4/3} + b^4$ erhalten wir mit $\kappa > 1$

$$\|\nabla\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{1}{10}\|\nabla\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} - \frac{1}{4\varsigma^2}\|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{5}{2}\left\||\mathring{k}|^2_g\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{{c_1}^2\,C}{\varsigma^{2\kappa}},$$

falls ς ausreichend groß ist. Es ergibt sich nun (II.13) mit erneuter Anwendung Young-Ungleichung und

$$\left\||\mathring{k}|^2_g\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \left(2c_S\|\nabla\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{c_S}{\varsigma}\|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\right)\|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.$$

////

II.2.3 Bemerkung (Über die Bedeutung der Exponenten)
Aufgrund der Aussage der Proposition und der letzten Voraussetzung an die Konstante κ ordnen wir sie der Mannigfaltigkeit Σ und nicht $\overline{M}$ zu, schreiben also κ und nicht $\overline{\kappa}$. Weiter ist in den von uns im Folgenden betrachteten Fällen zumindest $\kappa > {}^{3}\!/\!_{2}$ und $\overline{K} > {}^{1}\!/\!_{2}$. ◇

II.2.4 Bemerkung (Abschwächung der Voraussetzungen)
Wir zeigen Proposition II.2.5 als Beispiel dafür wie die Voraussetzungen in Proposition II.2.2 abgeschwächt werden können. Die Voraussetzungen können weiter abgeschwächt werden, falls wir (wie in den späteren Abschnitten) annehmen, dass $\overline{M}$ asymptotisch flach oder asymptotisch zum Schwarzschild Raum ist und dass $\min d \geq {}^1\!/_{c_1}\,\mathcal{H}^{2K/3}$ gilt – vgl. [HY96, Abschnitt 5] und [Met04, Abschnitt 2]: So können die Annahmen an $|\Sigma|$ und die Vergleichbarkeit von $\mathcal{H}$ und dem Geschlecht der Sphäre aus den Annahmen an die Krümmungen $\mathcal{H}$, $\overline{\mathrm{Ric}}$ und $\overline{\mathcal{S}}$ aus Proposition II.2.2 gefolgert werden und wir können ebenso die Annahmen in Voraussetzung II.1.1 folgern – vgl. auch Bemerkung I.3.8. Da diese Argumentation in den zitierten Arbeiten ausführlich durchgeführt wurde und diese für die Existenz und Evolution (anders als für die Eindeutigkeit) der Flächen ohne Bedeutung ist, verzichten wir darauf sie hier zu wiederholen. ◇

II.2.5 Proposition (A priori Abschätzung für $\mathring{\mathrm{k}}$)
Es sei $(\overline{M},\overline{g})$ eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $(\Sigma^2,g) \hookrightarrow (\overline{M},\overline{g})$ eine geschlossene, orientierte Hyperfläche. Gilt für Konstanten $\kappa > 1$, $c_1 \geq 0$ und eine Einheitsnormale ν

$$\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{\varsigma^{\kappa-1}}, \qquad \left\|\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)\right\|_{\mathrm{L}^1(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{\varsigma^{\kappa-1}},$$

wobei $\varsigma := \sqrt{|\Sigma|/4\pi} > \varsigma(c_{\mathcal{S}}, c_1, c_2, \kappa, \overline{K})$ ist, so gilt für die Euler Charakteristik $\chi(\Sigma)$ von Σ und eine Konstante $C = C(c_1,\kappa,\overline{K})$

$$\frac{c_1}{\varsigma^{\kappa-1}} \geq \int \mathcal{H}^2\,\mathrm{d}\mu - 8\pi\chi(\Sigma) \qquad \Longrightarrow \qquad \|\mathring{\mathrm{k}}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{c_1\,C}{\varsigma^{\frac{\kappa-1}{2}}},$$
$$\frac{c_1\,C}{\varsigma^{\kappa-1}} \geq \left|\int \mathcal{H}^2\,\mathrm{d}\mu - 8\pi\chi(\Sigma)\right| \qquad \Longleftarrow \qquad \|\mathring{\mathrm{k}}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{\varsigma^{\frac{\kappa-1}{2}}}.$$ ◇

Beweis
Beide Aussagen folgen aus dem Satz von Gauß-Bonnet und (I.11) mittels

$$\frac{3c_1}{\varsigma^{\kappa-1}} \geq \left|\int \overline{\mathcal{S}} - 2\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)\,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\|\mathring{\mathrm{k}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{1}{2}\left(8\pi\chi(\Sigma) - \int \mathcal{H}^2\,\mathrm{d}\mu\right)\right|.$$ ////

II.3. A priori Abschätzungen der Normalen

Wir zeigen in diesem Abschnitt Abschätzungen an die Normalen, um im Folgenden zwischen der „tatsächlichen“ (*geometrischen*) und der „Euklidisch-approximierten“ Normalen wechseln zu können. Wieder bemerken wir, dass mit ausreichend technischem Aufwand die Voraussetzungen an die Fläche Σ deutlich reduziert werden können – siehe bspw. wieder [DLM05, Theorem 1.1] für den Euklidischen Fall – und wieder verzichten wir zur Vereinfachung der verwendeten Techniken darauf diese Arbeiten zu verwenden. Als Haupt-Technik werden wir für die Abschätzungen in diesem Abschnitt nur Integralkurven zu Vektorfeldern benötigen.

II.3.1 Voraussetzung (für Abschnitt II.3)
Es sei $(\Sigma^2, g) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0), \overline{g})$ eine geschlossene Hyperfläche, wobei $\overline{g}$ eine derartige Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^3$ ist, dass für eine strikt positive Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0))$ und Konstanten $\kappa > 1$, $\overline{K} \in [\kappa - 1\,, \kappa]$ und $\overline{c}_0 \geq 0$

$$\left\| \overline{g} - \varphi^4\, {}^e\overline{g} \right\|_{\mathcal{C}^1_{d,\overline{K}}(\overline{M})} \leq \overline{c}_0, \qquad \| \varphi - \varphi_S \|_{\mathcal{C}^1_{d,\overline{K}-1}(\overline{M})} \leq \overline{c}_0,$$

gilt, wobei $d : \mathbb{R}^3 \setminus B_1(0) \to \mathbb{R} : \overline{p} \mapsto |\overline{x}(\overline{p})|$ den Euklidischen Abstand vom Ursprung bezeichnet und $\varphi_S := 1 + {}^m\!/_{2d}$ der Schwarzschild-Faktor zur Masse m ist. Zuletzt[3] sei angenommen, dass für die zweite Fundamentalform k von Σ Konstanten $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ und $\tau > 0$, existieren so, dass für $r := \min_\Sigma d$

$$\max_\Sigma d \leq r + c_0\, r^{1-\tau}, \qquad \|\mathring{k}\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{r^{\kappa-1}},$$

$$\left\| \mathcal{H} + \frac{2}{r} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{r^\kappa} \qquad \|\mathring{k}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{r^\kappa}. \qquad \diamond$$

Wir unterscheiden dabei zwischen c_0 und c_1, da wir durch die folgenden Ergebnisse die Abschätzung zur Konstante c_0 – nicht jedoch die zu c_1 – in manchen Fällen verbessern können. Weiter bemerken wir, dass wir später nur den Fall $\tau = \kappa - 1$ benötigen werden und dieser Exponent nur zur Verallgemeinerung der Aussagen dieses Abschnitts betrachtet wird. Weiter sei noch einmal auf den Beginn des Kapitels verweisen, wo die Exponenten κ und $\vec{z}$ erklärt werden und noch einmal betohnt die Konstanten c_0 und c_1 nur *vergleichbar* zu den dortigen Konstanten sind, d. h. sie diese Konstanten können unter Zuhilfenahme eines Faktor (abhängig nur von $|m|$, ε und $\overline{c}_0$) verglichen werden, sind aber nicht notwendigerweise gleich.

II.3.2 Bemerkung (Interpretation von φ sowie κ und ε im Folgenden)
Um technische Feinheiten sparen zu können, stellen wir uns in *diesem* Abschnitt nicht auf den Standpunkt einer äußeren Mannigfaltigkeit, die asymptotisch Schwarzschildsch ist, und einer dort nicht-notwendigerweise zentrierten Fläche Σ. Stattdessen verschieben wir die Koordinaten so, dass Σ in diesen Koordinaten zentriert ist – dadurch ist $\overline{M}$ nicht mehr asymptotisch Schwarzschildsch, sondern nur noch asymptotisch konform zur Euklidischen Metrik. Die Exponenten $\overline{K}$ und κ sind dabei so gewählt, dass sie zu den bisherigen entsprechenden Exponenten korrespondieren, wie sie zu Beginn des Kapitels beschrieben sind. $\diamond$

Wir bemerken weiter, dass wir *nicht* den Fall $\kappa > 2$ ausschließen und dass wir mit dem Schwarzschild-Fall vergleichen, um später bessere Ergebnisse im Fall von Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu erhalten, die asymptotisch zu Schwarzschild sind.

II.3.3 Proposition (Schwarzschild Normale einer Hyperfl. nahe einer Sphäre)
Ist $r \geq r(|m|, \overline{K}, \overline{c}_0, c_0, c_1, \kappa, \tau)$, so existiert eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}^2_r(0))$ so, dass Σ der Graph von f ist, d. h. für $F : \mathcal{S}^2_r(0) \to \overline{M} : p \mapsto (1 + f(p))\, p$ gilt $\operatorname{Bild} F = \Sigma$. Es gilt dabei

[3] Diese Voraussetzung und die Aussagen der nachfolgenden Lemmas sind dabei der Grund, dass wir κ zu Σ gehörig interpretieren, also κ und nicht $\overline{\kappa}$ schreiben.

für die Metrik ${}^{s}\eta$ von $\mathcal{S}^2_r(0)$ bzgl. ${}^{s}\overline{g}$ für $\tau' = \min\{\tau, \kappa\}$ oder $\tau \in (0\,,\kappa)$

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \le C r^{\frac{3-\kappa-\tau'}{2}}, \qquad \|f\|_{\mathrm{H}^3(\Sigma)} \le C r^{\frac{5-\kappa-\tau'}{2}},$$

wobei $C = r(|m|, \overline{K}, \overline{c}_0, c_0, c_1, \kappa, \tau)$ eine Konstante ist die polynomial von c_0, c_1 und c_S abhängt. Insbesondere gilt für eine Funktion $h \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^2_r(0))$

$$\|F^*g - h\,{}^{s}g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{S}^2_r(0))} \le C r^{\frac{1-\kappa-\tau'}{2}}, \qquad \|h-1\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathcal{S}^2_r(0))} \le C r^{\frac{1-\kappa-\tau'}{2}},$$
$$\|F^*g - h\,{}^{s}g\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2_r(0))} \le C r^{\frac{3-\kappa-\tau'}{2}}, \qquad \|h-1\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2_r(0))} \le C r^{\frac{3-\kappa-\tau'}{2}}. \qquad \diamond$$

Beweis

Zunächst zeigen wir, dass wir $\overline{g} = {}^{s}\overline{g}$ annehmen können, wenn wir c_0 und c_1 durch Konstanten C ersetzen, die von $\overline{c}_0$ beliebig und polynomial von c_0 und c_1 abhängen. Dafür bezeichne ${}^{\varphi}\mathcal{H}$ die mittlere Krümmung, ${}^{\varphi}\mathrm{k}$ die zweite Fundamentalform bzgl. $\varphi^4\,{}^{e}\overline{g}$ und entsprechend seien die weiteren Quantitäten bzgl. $\varphi^4\,{}^{e}\overline{g}$ bezeichnet. Direkt aus den Voraussetzungen ergibt sich

$$|\nu - {}^{\varphi}\nu| \le \frac{C}{d^{\overline{K}}} \le \frac{C}{r^{\overline{K}}}.$$

Seien nun $x_1, x_2 : U \to \mathbb{R}^2$ Normal-Koordinaten um einen Punkt $p \in U$ bzgl. der von $\varphi^4\,{}^{e}\overline{g}$ auf Σ induzierten Metrik. Wir wählen nun eine Fortsetzung $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ dieser Koordinaten zu solchen auf eine $\overline{M}$-Umgebung $\overline{U}$ von p, wobei wir für die zugehörigen Koordinaten-Vektorfelder $|\overline{e}_p|_{\overline{g}} \le 2$ und $|\overline{e}_p|_{\varphi^4\,{}^{e}\overline{g}} \le 2$ annehmen können. Damit erhalten wir in p

$${}^{\varphi}\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q = {}^{\varphi}\mathrm{k}_{pq}\,{}^{\varphi}\nu$$

und daher auch

$$\left|\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q\right|_{\overline{g}} \le C\,|{}^{\varphi}\mathrm{k}| + \frac{C}{\sigma^{1+\overline{K}}}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} |\mathrm{k}_{pq} - {}^{\varphi}\mathrm{k}_{pq}| &\le \left|\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q, \nu\right) - \varphi^4\,{}^{e}\overline{g}\left({}^{\varphi}\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q, {}^{\varphi}\nu\right)\right| \\ &\le \left|\varphi^4\,{}^{e}\overline{g}\left(\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q - {}^{\varphi}\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q, {}^{\varphi}\nu\right)\right| + \frac{C}{\sigma^{\overline{K}}}\,|{}^{\varphi}\mathrm{k}| + \frac{C}{\sigma^{1+\overline{K}}} \le \frac{C}{\sigma^{\overline{K}}}\,|{}^{\varphi}\mathrm{k}| + \frac{C}{\sigma^{1+\overline{K}}}. \end{aligned}$$

Dies impliziert die Voraussetzungen an ${}^{\varphi}\mathring{\mathrm{k}}$ und ${}^{\varphi}\mathcal{H}$ anstelle von $\mathring{\mathrm{k}}$ und $\mathcal{H}$. Beachten wir nun, dass

$${}^{\varphi}\overline{g}\left({}^{\varphi}\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q, {}^{\varphi}\nu\right) = {}^{s}\overline{g}\left({}^{\varphi}\overline{\nabla}_{\overline{e}_p}\overline{e}_q, {}^{s}\nu\right)$$

gilt, so erhalten wir durch eine analoge Rechnung, dass die Voraussetzungen auch für die Größen bzgl. der Schwarzschild Metrik ${}^{s}\overline{g}$ anstelle von $\overline{g}$ gelten. Zuletzt bemerken wir, dass die Gültigkeit der Aussage im Euklidischen Fall daher die Aussage im allgemeinen Fall impliziert. Das heißt, wir können $\overline{g} = {}^{s}\overline{g}$ annehmen.

Es bezeichne $\mu := {}^{s}\overline{\nabla}d$ die Radialrichtung, $X := \mu - {}^{s}\overline{g}\,(\mu, {}^{s}\nu){}^{s}\nu = \mu^{T\Sigma}$ deren Tangentialprojektion und $f := |X|^2_{{}^{s}g}$ das Quadrat der Länge dieses Tangentialvektorfelds. Es sei

${}^s\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ die Integralkurve zu X durch einen beliebigen Punkt ${}^s\gamma(0) \in \Sigma$, welche für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert, da Σ nach Voraussetzung kompakt ist. Wir folgern, dass für alle Zeiten $s \leq t \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} \int_s^t f({}^s\gamma(r))\,\mathrm{d}r &= \int_s^t {}^s\mathcal{g}(X,X)\,\mathrm{d}r = \int_s^t {}^s\mathcal{g}(\mu,X)\,\mathrm{d}r = \int D_X d\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_s^t (d\circ{}^s\gamma)^{\bullet}(r)\,\mathrm{d}r = d({}^s\gamma(t)) - d({}^s\gamma(s)) \leq c_0\, r^{1-\tau} \end{aligned}\right\} \tag{II.15}$$

gilt. Insbesondere gilt $f({}^s\gamma(t)) \to 0$ für $t \to \infty$. Mit $f = {}^s\mathcal{g}\,(X,X) = {}^s\overline{\mathcal{g}}\,(X,X)$ gilt für jeden Tangentialvektor $\xi \in T_p\Sigma$ in beliebigem Punkt $p \in \Sigma$

$$D_\xi f = D_\xi({}^s\mathcal{g}(X,X)) = D_\xi({}^s\overline{\mathcal{g}}\,(X,X)) = 2{}^s\overline{\mathcal{g}}\left({}^s\overline{\nabla}_\xi X, X\right).$$

Da auch $f = {}^s\overline{\mathcal{g}}\,(X,X) = {}^s\overline{\mathcal{g}}\,(X,\mu)$ gilt, folgt für $\xi \in T_p\Sigma$

$$\begin{aligned} D_\xi f &= {}^s\overline{\mathcal{g}}\left({}^s\overline{\nabla}_\xi X, \mu\right) + {}^s\overline{\mathcal{g}}\left(X, {}^s\overline{\nabla}_\xi \mu\right) \\ &= {}^s\overline{\mathcal{g}}\left({}^s\overline{\nabla}_\xi X, X\right) + {}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,{}^s\nu){}^s\overline{\mathcal{g}}\left({}^s\overline{\nabla}_\xi X, {}^s\nu\right) + {}^s\overline{\mathcal{g}}\left(X, {}^s\overline{\nabla}_\xi \mu\right) \\ &= {}^s\overline{\mathcal{g}}\left({}^s\overline{\nabla}_\xi X, X\right) + {}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,{}^s\nu){}^s\mathrm{k}(\xi,X) + {}^s\overline{\mathrm{Hess}}\; d(X,\xi). \end{aligned}$$

Also gilt durch Kombination dieser Gleichungen für $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} {}^s\overline{\mathcal{g}}\left(\overline{\nabla}_\xi X, X\right) &= {}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,{}^s\nu){}^s\mathrm{k}(\xi,X) - \frac{1}{d}\left(1 + \frac{2m}{d}\varphi_S^{-1}\right){}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,X){}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,\xi) \\ &\quad + \frac{1}{d}\left(1 + \frac{m}{d}\varphi_S^{-1}\right)\varphi_S^{-4s}\overline{\mathcal{g}}\,(X,\xi) \\ &= {}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,{}^s\nu)\,{}^s\mathring{\mathrm{k}}(\xi,X) + \left({}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,{}^s\nu) - \varphi_S^{-2}\right)\frac{{}^s\mathcal{H}}{2}{}^s\mathcal{g}(\xi,X) \\ &\quad + \frac{\varphi_S^{-2}}{2}\left({}^s\mathcal{H} + \frac{\varphi_S^{-2}}{d}\left(2 + \frac{2m}{d}\varphi_S^{-1}\right)\right){}^s\mathcal{g}(\xi,X) \\ &\quad - \frac{1}{d}\left(1 + \frac{2m}{d}\varphi_S^{-1}\right)\|X\|^2_{{}^s\mathcal{g}}{}^s\overline{\mathcal{g}}\,(X,\xi). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt daher

$$\left|\overline{\mathcal{g}}\left(\overline{\nabla}_\xi X, X\right)\right| \leq \left(\frac{3\,c_1}{r^\kappa} + \frac{4\left|{}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,{}^s\nu) - \|\mu\|_{{}^s\overline{\mathcal{g}}}\right|}{r} + \frac{2\varphi_S^2\,\|X\|^2_{{}^s\mathcal{g}}}{r}\right)\|X\|_{\mathcal{g}}\,\|\xi\|_{\mathcal{g}}.$$

Und somit erhalten wir für $g := f \circ {}^s\gamma$

$$|\dot{g}| \leq \left(\frac{3\,c_1}{r^\kappa} + \frac{4\left|{}^s\overline{\mathcal{g}}\,(\mu,{}^s\nu) - \|\mu\|_{{}^s\overline{\mathcal{g}}}\right|}{r} + \frac{2\varphi_S^2\, g}{r}\right) g \leq \left(\frac{6}{r} + \frac{3\,c_1}{r^\kappa}\right) g. \tag{II.16}$$

Kombinieren wir dieses Ergebnis mit (II.15), so erhalten wir für alle Zeitpunkte $s \leq t \in \mathbb{R}$

$$|g(s)| \xleftarrow{t\to\infty} |g(t) - g(s)| \leq \int_s^t |\dot{g}(r)| \,\mathrm{d}r \leq c_0 \left(\frac{6}{r^{-\tau}} + \frac{3\,c_1}{r^{-2\tau}} \right) \leq \frac{3\,(2 + c_1)\,c_0}{r^{-\tau}}.$$

Damit können wir für ausreichend großes r annehmen, dass $|X|^2_{{}^s\!g} = g < \varphi_S^{-4} = \|\mu\|^2_{{}^s\overline{g}}$ und somit ${}^s\overline{g}\,(\mu, {}^s\nu) > 0$ gilt, da ${}^s\nu$ die äußere Normale von Σ ist. Insbesondere gilt $\varphi_S^{-2} - {}^e\overline{g}\,(\mu, {}^e\nu) \leq |X|^2_{{}^s\!g}$. Durch Integration und die ersten Ungleichung von (II.16) erhalten wir mit (II.15) daher die Verbesserung zu

$$g(t) \leq \frac{3\,c_1}{r^{\kappa}} \int g(s)\,\mathrm{d}s + \frac{4 + 2\varphi_S^2}{r} \int g(s)^2 \,\mathrm{d}s \leq \frac{3\,c_1}{r^{\kappa}} c_0\, r^{1-\tau} + \frac{4 + 2\varphi_S^2}{r} \int g(s)^2 \,\mathrm{d}s.$$

Mit der Grönwall-Ungleichung gilt für $r > 4(2 + \varphi_S^2)c_1$ daher wie behauptet

$$g(t) \leq \frac{3\,c_1}{r^{\kappa-1+\tau}} c_0 \,\exp\!\left(\frac{4 + 2\varphi_S^2}{r} \int_{-\infty}^s g(s)\mathrm{d}s \right) \leq \frac{3\,c_0\,c_1}{r^{\kappa-1+\tau}} \,\exp\!\left(\frac{2 + \varphi_S^2}{r^{-\tau}} c_0 \right) \leq \frac{6\,c_0\,c_1}{r^{\kappa-1+\tau}}.$$

Für den letzten Teil sei $D := \max_\Sigma d - r \leq c_0\, r^{1-\tau}$. Durch ${}^s\overline{g}({}^s\overline{\nabla} d, d) > 0$ folgt insbesondere, dass Σ ein Graph über $\mathcal{S}^2_r := \mathcal{S}^2_r(0)$ ist. Es bezeichne $f : \mathcal{S}^2_r \to [0\,, D/r]$ die zugehörige Höhenfunktion, d. h. $F : \mathcal{S}^2_r \to \overline{M} : p \mapsto (1 + f(p))\,p$ erfüllt Bild $F = \Sigma$. Wir bemerken, dass $r(1 + f) = d \circ F$. Damit erhalten wir für die Metrik ${}^s\eta$ von $\mathcal{S}^2_r$ bezüglich ${}^s\overline{g}$ die Darstellung

$$(F_*{}^s\!g)_{pq} = h^4 \left(\left(1 + \frac{f}{r} \right)^2 {}^s\eta_{pq} + \frac{D_p f\, D_q f}{r^2} \right), \qquad \nu = \frac{\mu + {}^{s\eta}\nabla f}{\left| \mu + {}^{s\eta}\nabla f \right|_g},$$

wobei $h \in \mathcal{C}^0(\Sigma)$ eine Funktion ist. Insbesondere ist $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{S}^2)$ und wir erhalten

$$\left| F_*{}^s\!g - h^s\eta \right| \leq \frac{C}{r^{\kappa-1+\tau}}, \qquad \|h - 1\|_{\mathcal{C}(\mathcal{S}^2_r)} \leq \frac{C}{r^{\frac{\kappa+1+\tau}{2}}}, \qquad \|\nabla f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{C}{r^{\frac{\kappa-1+\tau}{2}}},$$

wobei die Konstante polynomial von c_0, c_1 und c_S abhängt.

Damit existiert für zwei beliebige Punkte $p, q \in \Sigma$ eine Kurve $\gamma : [0\,,1] \to \Sigma$ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ und Länge $\mathrm{L}(\gamma) \leq 2\pi r + C$. Weiter bemerken wir, dass für jede Kurve $\gamma : [0\,,1] \to \Sigma$

$$\begin{aligned} d(\gamma(1)) - d(\gamma(0)) &= \int_0^1 (d \circ \gamma)'(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 Dd(\gamma'(s)) \,\mathrm{d}s \\ &\leq \mathrm{L}(\gamma)\, \|X\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \mathrm{L}(\gamma) \sqrt{\left\| {}^s\overline{\nabla} d \right\|^2_{\overline{g}} - {}^s\overline{g} \left({}^s\overline{\nabla} d, {}^s\nu \right)^2} \end{aligned}$$

gilt. Damit erhalten wir

$$D = \max_\Sigma d - \min_\Sigma d \leq C r \sqrt{\left\| {}^s\overline{\nabla} d \right\|^2_{\overline{g}} - {}^s\overline{g} \left({}^s\overline{\nabla} d, {}^s\nu \right)^2} \leq C r^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\tau+\kappa)}$$

Somit kann $c_0\, r^{1-\tau}$ durch $C\, r^{1-(\tau+\kappa)/2}$ ersetzt werden, wobei die Konstante polynomial von c_0, c_1 und c_S abhängt. Weiter ergibt sich durch die Darstellung der zweiten Fundamentalform durch die zweiten Ableitungen von f

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq C\, r^{\frac{3-\kappa-\tau}{2}}, \qquad \|f\|_{\mathrm{H}^3(\Sigma)} \leq C\, r^{\frac{5-\kappa-\tau}{2}}.$$

Endliche Iteration über den Beweis liefert die Aussage auch für alle $\tau' \in (1\,, \kappa - 1)$. ///

II.4. Eigenwerte des Laplace-Operators

In diesem Abschnitt stellen wir uns zunächst auf den Standpunkt der Koordinaten Sphäre $\Sigma := \mathcal{S}^2_r(0)$ und werden die hier gezeigten Ergebnisse durch Approximations-Argumente in den nachfolgenden Abschnitten im allgemeineren Kontext verwenden. In den nachfolgenden Abschnitten und Kapiteln werden wir a priori Abschätzungen für die ersten Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf *geometrischen Sphären* benötigen und zeigen. Beispielsweise zeigen wir, dass die Koordinaten-Anteile der Normale ν_i approximativ Eigenfunktionen zu den ersten drei positiven Eigenwerten des negativen Laplace-Operator auf *geometrischen Sphären* sind. Dafür zerlegen wir in diesen Abschnitt Funktionen $h \in \mathrm{L}^2(\Sigma)$ in ihren *translativen Anteil* $h^T \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ und *deformativen Anteil* $h^\perp \in \mathrm{L}^2(\Sigma)$, d. h.

$$h = h^T + h^\perp, \qquad h^T = \sum_{i=1}^{3} h^i\, f_i, \qquad \int h^\perp\, f_i \,\mathrm{d}\mu = 0 \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\},$$

für gewisse $h^1, h^2, h^3 \in \mathbb{R}$, wobei $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators mit zugehörigen Eigenwerten λ_i sind so, dass $\lambda_0 \leq \lambda_i \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1}$ für $i \in \{1,2,3\}$ und $j > 3$. Das heißt der translative Anteil h^T ist die $\mathrm{L}^2(\Sigma)$-Projektion auf die linearen Hülle der ersten drei nicht-konstanten Eigenfunktionen des Laplace-Operators, wobei wir allerdings verwenden (und zeigen) werden, dass die zugehörigen Eigenwerte λ_i die einzigen Eigenwerte des Laplacee-Operators sind, für die $|\lambda_i - {}^2\!/_{r^2}| < {}^1\!/_{r^2}$ gilt. Dabei nehmen wir an, dass die Eigenwerte (außer die drei ersten drei von Null verschiedenen) des Laplace-Operators sortiert sind. Warum wir die ersten drei nicht sortieren wir im Folgenden klar. Weiter erklären wir in Abschnitt II.6, warum wir den h^T als *translativen* und $h^\perp$ als *deformativen Anteil* bezeichnen.

Diese Zerlegung wird im nachfolgenden Abschnitt II.5 zentral sein, da es sich herausstellen wird, dass der Stabilitätsoperator auf den translativen Funktionen ($g = g^T$) um eine ganze Ordnung schneller abfällt (mit r^{-3} statt r^{-2}) als auf den deformierenden ($g = g^\perp$). Da diese Anteile per Definition durch den Laplace-Operator charakterisiert sind, behandeln wir die grundlegenden Eigenschaften dieser Zerlegung in diesem Abschnitt. Wir leiten in Lemma II.4.4 eine einfache Abschätzung her mit der wir erkennen, dass $\Delta g \approx {}^2\!/_{r^2}\, g$ bereits $g^\perp \approx 0$ impliziert. Dies ist zu erwarten, sobald man sich in Erinnerung ruft, dass auf der Euklidischen Sphäre mit Radius r die ersten drei Eigenwerte des (negativen) Laplace-Operators ${}^2\!/_{r^2}$ sind und der nächste erst ${}^6\!/_{r^2}$ ist. In Lemma II.4.5 erhalten wir daraus weitergehende Abschätzungen an den symmetrischen Anteil

($(g(x)+g(-x))/2$) solcher Funktionen. Auch das ist nicht überraschend, da die ersten drei Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf der Sphäre gerade die Komponenten ν_i der Normalen sind. Schließlich wird in Proposition II.4.6 der Übergang vom Schwarzschild- zum asymptotisch Schwarzschild-Fall gezeigt.

Mit zusätzlichem technischen Aufwand (oder Zitation entsprechender Ergebnisse auf der Euklidischen Sphäre) könnten im Folgenden auch andere Sobolev- oder Hölder-Normen abgeschätzt werden. Dies und die Betrachtung höherer Eigenwerte spielen in den nachfolgenden Kapiteln aber keine Rolle.

II.4.1 Voraussetzung (für Abschnitt II.4)
Es sei $\Sigma^2 := \mathcal{S}_r(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ die um den Ursprung zentrierte Sphäre mit Radius $r > 1$ und $(\Sigma, g) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus B_{r_0}(0), \overline{g})$ erfülle Voraussetzung II.3.1 für $\kappa > 3/2$ und $\tau \in (0\,, \kappa - 1]$ sowie für eine weitere Konstante R_ν

$$\left\| \overline{\mathcal{S}} + 2\,\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) + \frac{R_\nu}{r^3} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{{c_1}^2}{r^{\kappa+1}}.$$ ◇

II.4.2 Bemerkung (Die Bedeutung von $\overline{K}$ und κ im größeren Kontext)
Anschaulich haben wir zur Vereinfachung die Fläche Bemerkung II.3.2 durch Wahl einer Karte von $\overline{M}$ noch weiter deformiert, dass Σ genau einer Koordinaten Sphäre entspricht. In den Fällen, die wir im Folgenden betrachten, ist dies dank Abschnitt II.2 so möglich, dass die Exponenten ε und κ unangetastet bleiben. Die zusätzliche Bedingung in Voraussetzung II.4.1 kommt dabei daher, dass $\overline{\mathcal{S}} + 2\overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu)$ in höchster Ordnung konstant ist, falls die Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung in Räumen betrachtet werden, die asymptotisch Schwarzschild sind – in jedem der anderen Fällen wird $\kappa \leq 2$ gelten und damit ist dies keine zusätzliche Voraussetzung. ◇

II.4.3 Definition (Der translative h^T, der orthogonale Anteil $h^\perp$ und $h^\star$)
Für $h \in \mathrm{H}(\Sigma)$ bezeichnet der *translative Anteil* h^T die L^2-orthogonale Projektion von h auf die lineare Hülle $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ der Eigenfunktionen des negativem Laplace-Operators zu Eigenwerten λ mit $|\lambda + 2/r^2| < 1/r^2$ und der *deformative Anteil* den Rest, d. h.

$$h^T := \sum_{f_i \in \mathrm{L}^2(\Sigma)^T} f_i \int h\, f_i \,\mathrm{d}\mu, \quad h^\perp := h - h^T, \quad \mathrm{L}^2(\Sigma)^T := \mathrm{lin}\left\{ f_i \;\middle|\; \left|\lambda_i + \frac{2}{r^2}\right| \leq \frac{1}{r^2} \right\}$$ ◇

wobei $\{f_i\}_i$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}^2(\Sigma)$ aus Eigenfunktionen des (negativen) Laplace-Operators mit Eigenwert λ_i bezeichnet, d. h. $\Delta f_i = -\lambda_i\, f_i$. Für jede Funktion $h \in \mathrm{L}^1(\Sigma)$ bezeichnen weiter $\hbar := \int h\,\mathrm{d}\mu / |\Sigma|$ den Mittelwert und $h^\star := h - \hbar$ den Mittelwert-freie Anteil von h.

II.4.4 Lemma (Vorbereitung für Aussagen über $\Delta h \approx -2/r^2\, h$)
Ist $r \geq r(\varepsilon, \overline{c}_0, R_\nu, c_0, c_1)$ und λ ein Eigenwert des negativem Laplace-Operators, so ist entweder $\lambda_M \geq 2/r^2 - R_\nu/r^3 - 5c_0/r^{\kappa+} > 1/r^2$ oder jede Eigenfunktion zu diesem Eigenwert ist konstant. Gilt für jeden positiven Eigenwert $\lambda > 0$ des negativen Laplace-Operators

mit $|\lambda + {}^2\!/\!_{r^2}| > {}^1\!/\!_{r^2}$ bereits $\lambda \geq {}^4\!/\!_{r^2}$, so existiert für jedes $\eta > 0$ eine Konstante $C = C(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \kappa, c_0, c_1, \eta) > 0$ so, dass die folgende Implikation für alle $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$, $\lambda \in [{}^{-1}\!/\!_{r^2}, {}^{-3}\!/\!_{r^2}]$, $\tau > 0$, $c > 0$ mit ${}^{r^\tau}\!/\!_c \geq 1 + \eta$ gilt:

$$\|\Delta h + \lambda h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \frac{c}{r^{2+\tau}} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \quad \Longrightarrow \quad \left\|h^\perp\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma,\mu)} \leq \frac{c\,C}{r^\tau} \left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)}. \qquad \diamond$$

Beweis

Für die untere Abschätzung an die Eigenwerte des Laplace-Operators verwenden wir die Bochner-Lichnerowicz Formel [Lic58]

$$\frac{1}{2}\Delta\Big(|\nabla h|^2\Big) = g(\nabla h, \nabla \Delta h) + \frac{1}{2}\Big(|\Delta h|^2 + \mathcal{S}\, g(\nabla h, \nabla h)\Big) + |\mathring{\mathrm{Hess}}\, h|^2,$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass wegen $\dim \Sigma = 2$ auch $\mathrm{Ric} = {}^{\mathcal{S}}\!/\!_2\, g$ gilt. Durch Integration verschwindet die linke Seite und daher erhalten wir mit partieller Integration

$$\|\Delta h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} = \int \mathcal{S}\, g(\nabla h, \nabla h)\,\mathrm{d}\mu + 2\|\mathring{\mathrm{Hess}}\, h\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \geq \int \mathcal{S}\, g(\nabla h, \nabla h)\,\mathrm{d}\mu.$$

Somit erhalten wir die Abschätzungen $\lambda_M \geq {}^2\!/\!_{r^2} - {}^{R_\nu}\!/\!_{r^3} - {}^{2c_1{}^2}\!/\!_{r^{\kappa_+}} > {}^1\!/\!_{r^2}$ an den kleinsten Eigenwert des negativen Laplace-Operators λ_M auf Mittelwert-freien Funktionen, da wir nach (I.11) bereits wissen, dass

$$\min_\Sigma \mathcal{S} \geq \min_M \frac{\mathcal{H}^2}{2} - \frac{R_\nu}{r^3} - \|\mathring{k}\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} - \frac{c_1{}^2}{r^{2+\overline{\delta}}} \geq \frac{{}^s\!\mathcal{H}^2}{2} - \frac{R_\nu}{r^3} - \frac{2c_1{}^2}{r^{\kappa_+}} > \frac{1}{r^2}.$$

Für die zweite Aussage beachten wir, dass jedes $f \in \mathrm{W}^{2,2}(\Sigma)$ wie in den Voraussetzungen

$$\frac{|\Sigma|}{r^4}\,\hbar^2 \leq \lambda^2\;|\Sigma|\;\hbar^2 + \|\Delta h^\star + \lambda h^\star\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{c^2}{r^{4+2\tau}}\Big(|\Sigma|\;\hbar^2 + \|h^\star\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\Big),$$

erfüllt, also $h - \hbar$ diesselben Voraussetzungen erfüllt wie h, wenn wir c durch $c\,C$ ersetzen. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\hbar = 0$ annehmen. Nach Definition von $h^\perp$ und unter Zuhilfenahme obige Abschätzung an die Eigenwertegilt

$$\frac{1}{r^4}\left\|h^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \left\|\Delta h^\perp + \lambda h^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \left(\frac{c}{r^{2+\tau}}\|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)}\right)^2, \qquad \text{(II.17)}$$

d. h.

$$\left\|h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \frac{c}{r^\tau}\|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \frac{c}{r^\tau}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} + \frac{c}{r^\tau}\left\|h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)}$$

und wir erhalten die gewünschte Ungleichung durch Einsetzen dieser Abschätzung in die hintere Ungleichung von (II.17)

$$\left\|\Delta h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \left\|\Delta h^\perp + \lambda h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} + \frac{c\lambda}{r^\tau}\|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \frac{C\,c}{r^{2+\tau}}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)}. \qquad ///$$

Wir führen die Untersuchung des translativen Anteils einer Funktion im Schwarzschild-Fall weiter.

II.4.5 Lemma (Über ${}^s\!\Delta f \approx -{}^2\!/_{r^2} f$ auf der Schwarzschild Sphäre)
Ist $r \geq r(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, R_\nu, c_0, c_1)$, so existiert für jedes $\eta > 0$ eine derartige Konstante $C = C(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \kappa, c_0, c_1, \eta)$, dass für alle $g \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$, $|\lambda + {}^2\!/_{r^2}| \leq {}^1\!/_{r^2}$, $\tau > 0$ sowie ${}^{r^\tau}\!/_c \geq 1 + \eta$ mit

$$\|{}^s\!\Delta h + \lambda h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} \leq \frac{c}{r^{2+\tau}} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})}$$

bereits

$$\left\| h^{{}^s\!\perp} \right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} \leq \frac{c\,C}{r^\tau} \left\| h^{{}^s\!T} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})}, \qquad \left| \lambda - \frac{2}{r^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4} \right| \leq \frac{c\,C}{r^{2+\tau}}, \tag{II.18}$$

$$\|\mathring{\mathrm{Hess}}\, h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{c\,C}{r^{2+\tau}} \left\| h^{{}^s\!T} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})}, \qquad \|h + h \circ \varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma,\mathring{\mu})} \leq \frac{c\,C}{r^{1+\tau}} \left\| h^{{}^s\!T} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} \tag{II.19}$$

gilt, wobei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \overline{p} \mapsto -\overline{p}$ die Spiegelung am Ursprung bezeichnet. Weiter existiert ein Vektor $X_h = X_{h^{{}^s\!T}} = (X_h^1, X_h^2, X_h^3) \in \mathbb{R}^3$ mit $|X_h| = \|h^{{}^s\!T}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma,{}^s\!g)}$, dessen ${}^s\overline{g}$-Tangentialprojektion $X_h^T := X_h^i \bar{e}_i - {}^s\overline{g}\,({}^s\nu, X_h){}^s\nu$

$$\left\| {}^s\nabla h - \frac{X_h^T}{r} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} + \left\| {}^s\overline{g}\,({}^s\nu, X_h) - h^{{}^s\!T} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma,\mathring{\mu})} \leq \frac{c\,C}{r^{1+\tau}} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} \tag{II.20}$$

◇

erfüllt. Es gilt dabei $X_{\nu_i} = \bar{e}_i$.

Beweis
Entsprechend der Definition II.4.3 bezeichnet $h^{{}^s\!T}$, $h^{{}^s\!\perp}$, ${}^s\hbar$ und ${}^s\!h^\star$ die Komponenten von $h \in \mathrm{L}^2(\Sigma)$ bzgl. der Eigenfunktionen des negativen Laplace-Operators und der L^2-Projektion jeweils bzgl. ${}^s\!g$. Die erste Ungleichung aus (II.18) folgt aus Lemma II.4.4, da die dortigen Voraussetzungen im Schwarzschild-Fall erfüllt sind, weil die ersten Eigenwerte λ_i des negativen Laplace-Operators im Schwarzschildfall bekannterweise $0 = \lambda_0 < {}^2\!/_{r^2}\,(1 + {}^m\!/_{2r})^{-4} = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < {}^5\!/_{r^2} < \lambda_4$ erfüllen. Die zweite Ungleichung aus (II.18) folgt, da wir mit den bisherigen Ungleichungen für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$|\lambda - {}^s\lambda| \left\| h^{{}^s\!T} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} \leq \|\lambda h - {}^s\!\Delta h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} + \frac{C}{r^2} \left\| h^{{}^s\!\perp} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})} \leq \frac{c\,C}{r^{2+\tau}} \left\| h^{{}^s\!T} \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mathring{\mu})}$$

folgern können. Es genügt die Ungleichungen aus (II.19) für $h = h^{{}^s\!T}$ zu zeigen, da der $h^{{}^s\!\perp}$-Anteil mit den Sobolev-Ungleichungen durch die erste Ungleichung abgeschätzt ist. Für die zweite Ungleichung von (II.19) bemerken wir, dass für die Normale ${}^s\nu$ von Σ bzgl. ${}^s\overline{g}$ bekannterweise $\int {}^s\nu_i {}^s\nu_j \,\mathrm{d}\mu = {}^4\!/_3 \cdot \pi r^2 (1 + {}^m\!/_{2r})^4 {}^e\overline{g}_{ij}$ gilt und ${}^s\nu_i$ eine Eigenfunktion des (negativen) Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda_i = |\overline{S}|$ ist, wobei

$${}^s\mathcal{S} = {}^s\overline{\mathcal{S}} - 2\,{}^s\overline{\mathrm{Ric}}(\nu, \nu) + |\mathrm{k}|_g^2 - {}^s\mathcal{H}^2 = \frac{4m}{r^3} - \frac{{}^s\mathcal{H}^2}{2} \equiv \text{konst.}$$

Insbesondere bilden diese Funktionen ein Orthogonalsystem von $\{h^{{}^s\!T} : h \in \mathrm{W}^{2,2}(\Sigma, \mathring{\mu})\}$ und daher gilt $h^{{}^s\!T} = -h^{{}^s\!T} \circ \varphi$ und $\nabla h^{{}^s\!T} = X_h^{{}^s\!T}$ für ein $X_h \in \mathbb{R}^3$ wie in der Aussage des

Lemmas, da selbige Gleichungen für ${}^s\nu_i$ gelten. Damit gelten die erste Ungleichung aus (II.19) und (II.20). Durch Integration der Bochner-Lichnerowicz Formel (wie in Lemma II.4.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}{}^s\mathcal{S}^2\left\|h^{{}^sT}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} &= \left\|{}^s\Delta h^{{}^sT}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} = |{}^s\mathcal{S}|\left\|\nabla h^{{}^sT}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + 2\left\|\mathring{\mathrm{Hess}}\, h^{{}^sT}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\ &= {}^s\mathcal{S}^2\left\|h^{{}^sT}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + 2\left\|\mathring{\mathrm{Hess}}\, h^{{}^sT}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)},\end{aligned}$$

d. h. $\|\mathring{\mathrm{Hess}}\, h^{{}^sT}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} = 0$. Somit gilt auch die erste Ungleichung aus (II.19). ////

II.4.6 Proposition (Eigenraum-Dim. der ersten Eigenwerte des Laplace-Op.)
Ist $r \geq r(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, c_0, c_1, c_{\mathcal{S}}, \kappa)$, so sind alle Eigenfunktionen des negativen Laplace-Operators zu Eigenwerten kleiner $\lambda_M := {}^2/_{r^2} - {}^{R_\nu}/_{r^3} - {}^{5c_0}/_{r^{\kappa+}} > {}^1/_{r^2}$ konstant. Weiter gilt $\dim\{h^T : h \in \mathrm{L}^2(\Sigma)\} = 3$ und für die zugehörigen Eigenwerte λ, d. h. für $\lambda \in [{}^1/_{r^2}, {}^3/_{r^2}]$ und $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ mit $\Delta h = -\lambda h$, existiert eine Konstante $C = C(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, c_0, c_1, \kappa)$ mit

$$\left|\lambda - \frac{2}{r^2}\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-4}\right| \leq \frac{C}{r^{\kappa+1}}. \tag{II.21}$$

Zusätzlich gilt für $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$

$$\left\|h^T + h^T \circ \varphi\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{C}{r^\kappa}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}, \qquad \left\|\mathring{\mathrm{Hess}}\, h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{C}{r^{\kappa+1}}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$$

wobei $\varphi : \overline{M} \to \overline{M} : \overline{p} \mapsto -\overline{p}$ wieder die Ursprungsspiegelung bezeichnet, und es existiert für $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ ein Vektor $X_h = X_{h^T} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\left\|\left|\nabla h^T - \frac{1}{r}\Big(X_h - h^T\nu\Big)\right|_{\overline{g}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} + \left||X_h|_{\overline{g}} - \left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)}\right| \leq \frac{C}{r^{\kappa+1}}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}. \tag{II.22}$$

Ist auch $f \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$, so gilt für das Euklidische Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$

$$\left|\int h^T\, f^T\,\mathrm{d}\mu - \frac{|\Sigma|}{3}\,\langle X_h|X_g\rangle\right| \leq \frac{C}{r^{\kappa-1}}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\left\|g^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}. \tag{II.23}$$

Dabei kann $X.$ so gewählt werden, dass für jeden Vektor $X \in \mathbb{R}^3$ genau eine Funktion $h_X \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ mit $h_X = h_X^T$ existiert so, dass in obiger Notation $X = X_{h_X}$ gilt. ◇

Beweis
Die erste Aussage gilt nach Lemma II.4.4. Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt für $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ durch Anwendung der Sobolev-Ungleichungen

$$\begin{aligned}\|\Delta h - {}^s\Delta h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} &\leq \frac{C}{r^{\kappa-1}}\|\mathrm{Hess}\; h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} + \frac{C}{r^\kappa}\|\nabla h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \\ &\leq \frac{C}{r^{\kappa-1}}\|\Delta h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} + \frac{C}{r^{\kappa+1}}\|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)}.\end{aligned}$$

Daher ergibt sich durch die Vergleichbarkeit der Metriken g und ${}^{s}\!g$ nach Definition von h^{sT}

$$\left\|\Delta h^T - {}^{s}\Delta h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)} \leq \frac{C}{r^{\kappa+1}}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma,{}^{s}\!\mu)}.$$

Insbesondere gilt nach Lemma II.4.5 die erste Abschätzung (II.21). Somit ist die Abbildung $\{h^T \mid h \in \mathrm{L}^2(\Sigma,\mu)\} \to \mathrm{L}^2(\Sigma, {}^{s}\!\mu) : h^T \mapsto (h^T)^{sT}$ surjektiv und durch Kombination der gerade gezeigten Ungleichung und der ersten Abschätzung in Lemma II.4.5 auch injektiv. Daher ist dieser Raum wie behauptet dreidimensional. Alle anderen Abschätzungen an die Eigenfunktionen folgen ebenfalls aus Lemma II.4.5, wenn wir für die letzten Abschätzung beachten, dass die Tangential-Projektion von X_h bzgl. $\overline{g}$ mit der Voraussetzung an $\overline{g}$ in passender Ordnung gleich der von ${}^{s}\overline{g}$ ist.

Es verbleibt die Existenz einer Funktion $h = h^T \in \mathrm{W}^{2,2}(\Sigma)$ mit $X_h = X$ für vorgegebene $X \in \mathbb{R}^3$ zu zeigen. Dafür genügt es zu zeigen, dass die Abbildung $h \mapsto X_h$ injektiv auf $\{h^T \mid h \in \mathrm{W}^{2,2}(\Sigma)\}$ ist, da dieser Raum wie $\mathbb{R}^3$ dreidimensional ist. Dies folgt jedoch aus der letzten Ungleichung für $f = h$ für ausreichend großes r. ///

II.5. Über den Stabilitätsoperator

In diesem Abschnitt zeigen wir die a priori Abschätzungen „des Stabilitätsoperators“ – faktisch sind es mehrere (Pseudo-)Stabilitätsoperatoren. Dafür wollen wir kurz eine kurze Erklärung dieser Operatoren geben, vgl. bspw. [Bd12]. Sei dafür $\Phi : (-\eta\,,\eta) \times \Sigma \to M$ eine beliebige orthogonale Deformation einer geschlossenen Fläche $\Phi(0,\Sigma) = \Sigma \hookrightarrow (\overline{M},\overline{g})$. Damit gilt in jedem Punkt $p \in \Sigma$ in allen Koordinaten $x_1, x_2 : U \to \mathbb{R}^2$ mit $g_{pq} = {}^{e}\overline{g}_{pq}$ gilt,

$$(\mathrm{d}\mu)^{\bullet} = \left(\sqrt{\det g}\,\mathrm{d}x_1 \otimes \mathrm{d}x_2\right)^{\bullet} = \frac{\operatorname{tr}\dot{g}}{2\sqrt{\det g}} = -u\mathcal{H},$$

wobei $\bullet$ die Ableitung entlang der Deformation und $u := \overline{g}(\dot{\Phi},\nu)$ die Lapse-Funktion von Φ bzgl. der äußeren Einheitsnormalen ν von $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ bezeichnen. Da $p \in \Sigma$ beliebig war und um jeden Punkt solche Koordinaten existieren, erhalten wir insbesondere

$$\left.\frac{\partial\,|\Phi(t,\Sigma)|}{\partial t}\right|_{t=0} = -\int u\mathcal{H}\,\mathrm{d}\mu,$$

also ist (in diesem Sinne) die mittlere Krümmung die erste Variation des Flächen-Funktionals. Nun betrachten wir die zweite Variation dieses Flächen-Funktionals. Dafür definieren wir die Mittlere-Krümmungs-Abbildung

$$\mathsf{H} : \mathrm{H}^2(\Sigma) \to \mathrm{L}^2(\Sigma) : h \mapsto \mathcal{H}(\operatorname{graph}_\nu h) \quad \text{mit} \quad \operatorname{graph}_\nu h := \left\{\overline{\exp}_p(h\,\nu) \;\middle|\; p \in \Sigma\right\},$$

wobei $\mathcal{H}(\operatorname{graph}_\nu h)$ die mittlere Krümmung des Graphen $\operatorname{graph}_\nu h$ der Funktion h bezeichnet, welche wir mittels $p \mapsto (\mathrm{H}(\operatorname{graph}_\nu h))(\overline{\exp}_p(h\,\nu))$ als Funktion auf Σ interpretieren. Wir bemerken, dass diese *Krümmungs-Abbildung* für Funktionen $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ mit ausreichend kleiner H^2-Norm wohldefiniert ist. Damit erhalten wir, dass ihre partielle Ableitung

$${}^{0}\mathcal{L}_1 h := \left.\frac{\partial(\mathsf{H}(t\,h))}{\partial t}\right|_{t=0}$$

für alle $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ wohldefiniert ist, falls der umliegende Raum $\overline{M}$ und seine Metrik $\overline{g}$ ausreichend regulär sind – bspw. $\overline{g} \in \mathcal{C}^2$. Durch Koordinatisierung dieses Ausdrucks erkennen wir weiter, dass die eingeschränkte Mittlere-Krümmungs-Abbildung $\mathsf{H}|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ mit $p > 2$ differenzierbar ist und daher der eingeschränkte Stabilitätsoperator ${}^0\mathscr{L}_1|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ die totale Ableitung von $\mathsf{H}|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ ist. In (I.20) haben wir die bekannte Identität

$$ {}^0\mathscr{L}_1 h = \Big(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) + |\mathrm{k}|_g^2\Big) h + \Delta h $$

für diesen *Stabilitätsoperator*. Wir wollen hier die Bezeichnung als *Stabilitäts*operator nur kurz dadurch motivieren, dass durch diesen gemessen werden kann wie *stabil* eine Fläche als CMC- (oder Minimal-)Fläche ist: Ist ihr Stabilitätsoperator invertierbar, so existiert in einer (ν-)Umgebung der Fläche keine weitere CMC-Fläche mit gleicher mittlerer Krümmung; ist der kleinste Eigenwert des Stabilitätsoperators strikt positiv (auf Funktionen mit Mittelwert Null) und ist die Fläche eine Minimal-Fläche, so hat jede Störung der Fläche mehr Flächeninhalt, genauer $|\Phi(t,\Sigma)| > |\Phi(0,\Sigma)|$ für kleine t falls die Lapse-Funktion Mittelwert Null hat. Eine ausführlichere Motivation für diese Bezeichnung wird in [Bd12] gegeben.

Wie bereits mehrfach erwähnt werden wir in den nachfolgenden Kapiteln nicht nur Flächen konstanter mittlerer Krümmung (CMC), sondern auch Flächen *konstanter Expansion* (CE) betrachten. Das heißt, wir betrachten Flächen deren mittlere Krümmung in Lichtrichtung konstant ist, d. h. die Variation des Flächeninhalts (im obigen Sinn) in *Licht*richtung[4] ist eine Konstante. Daher auch die Bezeichnung „Flächen konstanter Expansion“ für diese Flächen. Um diese Flächen zu konstruieren, werden wir allerdings Flächen in *Raum*-Richtung deformieren müssen. Insbesondere betrachten wir die Variation der Abbildung

$$ \mathsf{H} \pm \overline{\mathsf{H}} : \mathrm{H}^2(\Sigma) \to \mathrm{L}^2(\Sigma) : h \mapsto (\mathcal{H} \pm \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}})(\mathrm{graph}_\nu h), $$

wobei $(\mathcal{H} \pm \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}})(\,\mathrm{graph}_\nu h)$ die Expansion des Graphen $\mathrm{graph}_\nu h$ der Funktion h (innerhalb seines Lichtkegels) bezeichnet und das Vorzeichen $\pm$ fest gewählt ist und bestimmt, ob in Zukunfts- oder Vergangenheitsrichtung variiert werden soll – vgl. [Met04]. Das heißt, wir betrachten nicht die zweifache Variation des Flächenfunktionals in eine Richtung wie oben (die räumliche Normale), sondern variieren erst in Lichtrichtung (ergibt $\mathcal{H} \pm \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}$) und dann in Raumrichtung. Dadurch erhalten wir den zugehörigen (Pseudo-)Stabilitätsoperator

$$ {}^{\pm}\mathscr{L}_1 h := \left.\frac{\partial\Big(\big(\mathsf{H} \pm \overline{\mathsf{H}}\big)(\eta\, h)\Big)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}, $$

welchen wir in (I.21) charakterisiert haben. Dort haben wir statt $\mathsf{H} \pm \overline{\mathsf{H}}$ für ein Gewicht $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$ den Operator $\mathsf{H} + \mathscr{b}\overline{\mathsf{H}}$ betrachtet. Dies ist durch die Konstruktion der CE-Flächen motiviert und wird in Kapitel IV ausgeführt. Es sei betont, dass die Bezeichnung

[4] Alle obigen Interpretationen und Ergebnisse sind übertragbar. Da Vektoren in Lichtrichtung per Definition Länge Null haben, müssen wir den Begriff der Einheitsnormale dabei in folgender Art modifizieren: Ist ν die äußere Einheitsnormale von $\Sigma \hookrightarrow (\overline{M},\overline{g})$ und $\overline{\vartheta}$ die zukunftsgerichtete Einheitsnormale von $\overline{M} \hookrightarrow (\widehat{M},\widehat{g})$, so betrachten wir $\nu \pm \overline{\vartheta}$ – je nach dem, ob in die Vergangenheit oder Zukunft variiert werden soll.

Stabilitätsoperator nur aufgrund der Analogie zum Stabilitätsoperator ${}^0\mathscr{L}_1$ gewählt wurde. Für eine weitergehende Einführung in diese (Pseudo-)Stabilitätsoperatoren verweisen wir auf [AMS05, AM09, AEM11].

Eine weitere mögliche Deformation der CE-Flächen wäre es, sie in Zeit-Richtung zu verschieben – für weitere Informationen verweisen auf die gleichen Arbeiten wie oben. Wieder können wir einen zugehörigen (Pseudo-)Stabilitätsoperator bestimmen, welcher in (I.22) charakterisiert wurde. Da dieser nur für die Evolution dieser Flächen in Zeit-Richtung eine Rolle spielen wird und leicht zu kontrollieren ist, betrachten wir diesen allerdings erst im Abschnitt IV.4.

II.5.1 Bemerkung (das Gewicht $\mathscr{b}$)
Da wir die beiden oben beschriebene Fälle (CMC- und CE-Flächen) nicht einzeln analysieren wollen, betrachten wir in diesem Kapitel beide Fälle auf einmal. Dabei bezeichnet $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$ das zugehörige Gewicht, d. h. wir wenden die Ergebnisse des Abschnitts später auf Flächen Σ mit $\mathcal{H} + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv {-2}/{\sigma}$ an. Siehe dafür auch Proposition I.2.10.

II.5.2 Voraussetzung (an $\overline{M}$ für Abschnitt II.5, im Fall $\mathscr{b} = 0$)
Es sei $\mathscr{b} := 0$ und $(\overline{M}, \overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Masse m (siehe I.25). ◇

II.5.3 Voraussetzung (an $\overline{M}$ für Abschnitt II.5, im Fall $\mathscr{b} \neq 0$)
Es seien $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache Anfangsdaten mit nicht verschwindender Masse (siehe (I.25)). Weiter sei $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$ mit $\mathscr{b} \neq 0$. ◇

Es ist bekannt, dass die Masse m durch den obigen Ausdruck wohldefiniert ist – wir wiederholen dies jedoch auch noch einmal in Lemma A.1.2.

II.5.4 Voraussetzung (an Σ für Abschnitt II.5)
Es seien $c_S, c_0, c_1 \geq 0$ und $\delta \geq 0$ Konstanten mit $\delta > 0$ oder $c_0 < 1$ und $\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta;\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) habe fast konstante mittlere Krümmung, d. h.

$$\left\| \mathcal{H} + \frac{2}{\sigma} \right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{\sigma^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}.$$ ◇

II.5.5 Notation (Über Abhängigkeit von Konstanten in diesem Abschnitt)
Um die Notation zu verkürzen, werden die Abhängigkeiten der Konstanten dieses Abschnitts von $|m|$, ε, $\overline{c}_0$, δ, c_0, c_1 und c_S nur durch (konst.) angezeigt. Das heißt, im Folgenden schreiben wir D(konst.) für Konstanten D, die nur von diesen Größen abhängig sind. ◇

Wir wenden auf Σ (für eine neue Konstante $c_1 = c_1$(konst.)) Propositionen II.2.5 und II.2.2 an, wobei wir in allen Abschätzungen ς und r durch σ ersetzen können (s. oben). In geeignet angepassten Karten erfüllt Σ insgesamt also die Voraussetzung II.3.1, insbesondere können wir Proposition II.3.3 anwenden. Dadurch erhalten wir eine Karte in der Voraussetzung II.4.1 erfüllt ist, womit wir auch Lemma II.4.5 auf Σ anwenden können. Wir erhalten für die Komponenten der Normalen im Vergleich zu Proposition II.3.3 weitere Abschätzungen.

II.5.6 Lemma (Über die Komponenten der Normalen)
Für $\sigma \geq \sigma(\text{konst.})$ und $C = C(\text{konst.})$ gilt in der Notation von Lemma II.4.5 $X_{\nu_i^T} = \bar{e}_i$ sowie

$$\left|\int \nu_i\nu_j \,\mathrm{d}\mu - \frac{|\Sigma|}{3}\delta_{ij}\right| \leq C\,\sigma^{\frac{3}{2}-\varepsilon}, \qquad \left|\int \Delta\nu_i\,\nu_j\,\mathrm{d}\mu + \frac{2\,|\Sigma|}{3\,\sigma^2}\delta_{ij}\right| \leq \frac{C}{\sigma^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}, \tag{II.24}$$

$$\left\|\nu_i^\perp\right\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} \leq C\,\sigma^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{II.25}$$

◇

Beweis
Alle Aussagen gelten bekannterweise auf $\mathcal{S}^2$ bzgl. der Schwarzschild-Metrik anstelle bzgl. $\bar{g}$. Mit den bisherigen Abschätzungen an die Fläche, die zweite Fundamentalform und den Unterschied zwischen ν und ${}^s\overline{\nabla} d_0$ folgen damit die erste Ungleichung direkt und die zweite durch partielle Integration, d. h. es gilt (II.24). Wir erhalten die L^2-Anteil von (II.25), da mittels der ersten zwei

$$\frac{3}{\sigma^2}\left\|\nu_i^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq -\int \Delta\nu_i\cdot\nu_i\,\mathrm{d}\mu - \left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{C}{\sigma^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}\right)\left\|\nu_i^T\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{2}{\sigma^2}\left\|\nu_i^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{C}{\sigma^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

gilt. Daher erhalten wir (II.25) schließlich mittels $\overline{\mathrm{div}}\bar{e}_i = \mathrm{div}\bar{e}_i - \mathcal{H}\nu_i + \bar{g}\,(\overline{\nabla}_\nu\bar{e}_i, \nu)$,

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\nu_i^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} &= \int g\left(\nabla\nu_i, \nabla\nu_i^\perp\right)\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\sigma}\left|\int g\left(\bar{e}_i, \nabla\nu_i^\perp\right)\mathrm{d}\mu\right| + \frac{C}{\sigma}\left\|\nabla\nu_i^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\ &\leq \frac{1}{\sigma}\left(\left|\int \mathcal{H}\nu_i\cdot\nu_i^\perp\,\mathrm{d}\mu\right| + \frac{C}{\sigma}\left\|\nu_i^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\right) + \frac{C}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\left\|\nabla\nu_i^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)},\end{aligned}$$

und

$$\left\|\nabla\nu_i^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{1}{\sigma}\left(\left|\int \mathcal{H}\nu_i\cdot\nu_i^\perp\,\mathrm{d}\mu\right| + \frac{C}{\sigma}\left\|\nu_i^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\right) + \frac{C}{\sigma^2} \leq \frac{C}{\sigma^2}.$$

////

Im Fall $\mathcal{b} = 0$, d. h. dem Fall von CMC-Flächen, können wir direkt folgern, dass der Stabilitätsoperator invertierbar ist. Dafür benötigen wir zunächst ein technisches Lemma über den Ricci auf der betrachteten Sphäre Σ, welches im (asymptotischen) Schwarzschild-Fall trivial wäre. Um dieses zu zeigen, verwenden wir den Anhang A.1, welcher auf Techniken zurück geht, welche in [CS03, CW08] ausführlicher erklärt werden. Das folgende Lemma geht dabei auf eine Idee von Huang [Hua10] zurück.

II.5.7 Proposition (Über $\overline{\mathrm{Ric}}$ auf Σ)
Für Σ wie in Voraussetzung II.5.4 und eine Konstante $C = C(\text{konst.})$ und $r := \min_\Sigma d$ gilt

$$\sigma^3\left|⨍ \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\mathrm{d}\mu + \frac{2m}{\sigma^3}\right| \leq \|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{\sigma^\varepsilon}. \tag{II.26}$$

Weiter gilt für $E := {}^{\mathcal{H}^2}\!/2 - {}^2\!/r^2$, alle $i \neq j \in \{1,2,3\}$ und jede Orthonormalbasis $\{f_i\}_{i=1}^3$ von $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ aus Eigenfunktionen des (negativen) Laplace-Operators $\Delta f_i = -\lambda_i\, f_i$

$$\left|\int \left(2\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \overline{\mathcal{S}} - E\right) f_i\, f_j \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))}}{\sigma^3} + \frac{C}{\sigma^{3+\varepsilon}},$$

$$\left|\lambda_i - \frac{2}{\sigma^2} - \frac{6m}{\sigma^3} - \int\left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2} - \frac{E}{2}\right) f_i^2 \,\mathrm{d}\mu - \frac{3}{2}\fint E \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))}}{\sigma^3} + \frac{C}{\sigma^{3+\varepsilon}} \diamond$$

Beweis

Wir bemerken, dass der Schwarzschild-Fall leichter zu lösen ist, da dort $\overline{\mathrm{Ric}}$ bereits (in höchster Ordnung) auf Σ bekannt ist.

Die erste Ungleichung gilt nach Lemma A.1.2. Weiter gilt nach der verallgemeinerten Bochner-Lichnerowicz Formel

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta g(\nabla f_i, \nabla f_j) &= \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\ f_i \odot \mathrm{Hess}\ f_j) + \frac{1}{2}\Big(g(\nabla f_i, \nabla\Delta f_j) + g(\nabla\Delta f_i, \nabla f_j)\Big)\\ &\quad + \frac{\mathcal{S}}{2} g(\nabla f_i, \nabla f_j).\end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir mit den Abschätzungen an $\mathring{\mathrm{Hess}}$ in (II.19) in Lemma II.4.5

$$\left|\frac{\lambda_i\,\lambda_j}{2}{}^e\overline{g}_{ij} + \frac{1}{2}\int g(\nabla f_i, \nabla\Delta f_j) + g(\nabla\Delta f_i, \nabla f_j)\,\mathrm{d}\mu + \int \frac{\mathcal{S}}{2} g(\nabla f_i, \nabla f_j)\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{C}{\sigma^{5+\varepsilon}}.$$

Da die f_i nach Voraussetzung orthonormale Eigenfunktionen des Laplace-Operators sind, ergibt sich mit partielle Integration daraus

$$\left|\int \mathcal{S}\, g(\nabla f_i, \nabla f_j)\,\mathrm{d}\mu - \lambda_i\,\lambda_j{}^e\overline{g}_{ij}\right| \leq \frac{C}{\sigma^{5+\varepsilon}}.$$

Indem wir die (asymptotische) Charakterisierung (II.22) und (II.23) von ∇f_i aus Proposition II.4.6 sowie die Gauß-Gleichung (I.11) einsetzen, impliziert dies für $i, j \in \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left|\int\left(\frac{2}{r^2} + E + \overline{\mathcal{S}} - 2\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)\right) g(\nabla f_i, \nabla f_j)\,\mathrm{d}\mu - \lambda_i\,\lambda_j{}^e\overline{g}_{ij}\right| - \frac{C}{\sigma^{5+\varepsilon}}\\ &\geq \left|\frac{1}{\sigma^2}\int\left(E + \overline{\mathcal{S}} - 2\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)\right)\left(\frac{3\,{}^e\overline{g}_{ij}}{|\Sigma|} - f_i\,f_j\right)\mathrm{d}\mu - {}^e\overline{g}_{ij}\left(\lambda_i\,\lambda_j - \frac{2\,\lambda_i}{r^2}\right)\right| - \frac{C}{\sigma^{5+\varepsilon}}\\ &\geq \left|\frac{1}{\sigma^2}\int\left(2\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \overline{\mathcal{S}} - E\right) f_i\,f_j\,\mathrm{d}\mu\right.\\ &\qquad\left. - {}^e\overline{g}_{ij}\left(\lambda_i^2 - \frac{2\,\lambda_i}{r^2} + \frac{3}{\sigma^2}\fint 2\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \overline{\mathcal{S}} - E\,\mathrm{d}\mu\right)\right| - \frac{C}{\sigma^{5+\varepsilon}}\end{aligned}$$

Damit gilt die zweite Ungleichung (für $i \neq j$). Setzen wir die Vergleichbarkeit des verbleibenden Integrals mit der Masse (II.26) ein und lösen diese (approximative) Gleichung für $i = j$ nach λ_i unter Beachtung von $|\lambda_i + {}^2\!/\sigma^2| \leq {}^1\!/\sigma^2$ auf, so ergibt sich die letzte Ungleichung. ///

Die folgende Proposition ist der einzige Grund, warum die punktweise Annahme $|\overline{\mathcal{S}}| \leq {}^{S(d)}/_{d^3}$ benötigt wird.

II.5.8 Proposition (Eigenwerte von ${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1$ für $\mathscr{b} = 0$)
Sei Σ wie in Voraussetzung II.5.4, $\mathscr{b} = 0$, $\sigma \geq \sigma(\text{konst.})$ und gelte im Fall $\delta > 0$ auch $c_0 \leq c_0(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, c_1, c_S)$. Gilt

$$\left\| \mathcal{H} + \frac{2}{\sigma} \right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq \frac{c_1}{\sigma^{2+\varepsilon}},$$

so existiert eine Konstante $C = C(\text{konst.})$ so, dass für alle $f, h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$

$$\frac{1}{\sigma^2} \left\| h^\perp - \hbar \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 \left(h^\perp - \hbar \right) \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$$

$$\left| \int {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 f^T h^T \,\mathrm{d}\mu + \frac{6m}{\sigma^3} \int f^T h^T \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)}{\sigma^3} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \tag{II.27}$$

gilt. Dabei wurde zur Verkürzung der Notation die Einschränkung (I.24) an S verwendet.$\diamond$

Beweis
Dies ergibt sich direkt aus Proposition II.5.7. ////

Es folgen nun direkt die angekündigten Abschätzungen des (Pseudo-)Stabilitätsoperators. Dabei zeigen wir zunächst gewöhnliche H^2- und $\mathrm{W}^{1,\infty}$-Ungleichungen, die aus den äquivalenten Ungleichungen (II.10) und (II.11) für den Laplace-Operator folgen. Anschließend erhalten wir mehrere (stärkere) Ungleichungen für die einzelnen Funktions-Teile aus Definition II.4.3.

II.5.9 Satz (A priori Abschätzungen für ${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1$)
Sei Σ wie in Voraussetzung II.5.4 und gelte die Abschätzung (II.27) für alle $f = h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ zumindest für $5m$ anstelle von $C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)$. Es existiert eine Konstante $C = C(\text{konst.})$ für $\sigma > \sigma(\overline{c}_0, \overline{c}_1, m, c_0, c_S, \eta_0)$ so, dass für alle $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ und $p > 2$ die a priori Abschätzungen

$$\|h\|_{\mathrm{H}^2_\sigma(\Sigma)} \leq C\left(\sigma^2 \left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \right) \leq C\sigma^3 \left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}, \tag{II.28}$$

$$\|h\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}_\sigma(\Sigma)} \leq C \left(\sigma^{-1} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \sigma^{2-\frac{2}{p}} \left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h \right\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} \right), \tag{II.29}$$

gelten. Weiter gelten für die Funktions Komponenten entsprechend Definition II.4.3 und $\varepsilon \in (0\,,1]$ die verbesserten a priori Abschätzungen

$$\left| \hbar - \frac{\sigma^2}{2} \fint {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{C}{\sigma^{\frac{5}{2}+\varepsilon}} \|h\|_{\mathrm{L}^1(\Sigma)}, \qquad \left\| h^\perp \right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}_\sigma(\Sigma)} \leq C\sigma^{2-\frac{2}{p}} \left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h \right\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)},$$

$$\left\| \left({}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h^\perp \right)^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{C}{\sigma^{\frac{5}{2}+\varepsilon}} \left\| h^\perp \right\|_{\mathrm{H}(\Sigma)}, \qquad \left\| h^\perp \right\|_{\mathrm{H}^2_\sigma(\Sigma)} \leq C\sigma^2 \left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)},$$

$$\left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 h^T \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq \frac{C}{\sigma^{\frac{5}{2}+\varepsilon}} \left\| h^T \right\|_{\mathrm{L}^1(\Sigma)}.$$

$\diamond$

Beweis
Es gilt für $f \in \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)$ und $2 \leq p < \infty$ nach (I.21) und den Voraussetzungen

$$\begin{aligned}\|\Delta f\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} &\leq \left\|{}^{\not{b}}\mathscr{L}_1 h\right\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} + \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{C}{\sigma^3}\right)\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} + \frac{C}{\sigma^2}\|\nabla f\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} \\ &\leq \left\|{}^{\not{b}}\mathscr{L}_1 h\right\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} + \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{C}{\sigma^3}\right)\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} + \frac{C}{\sigma}\|\Delta f\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Damit folgen die erste Ungleichung in (II.28) sowie die Ungleichung (II.29) aus Proposition II.1.4. Die zweite Ungleichung in (II.28) ergibt sich damit aus der Voraussetzung der Gültigkeit von (II.27), sobald diejenige für $\not{f}$ gezeigt ist.

Als nächstes zeigen wir die Ungleichungen für die einzelnen Komponenten von f. Die Ungleichung von $\not{f}$ erkennen wir durch die Abschätzungen an ${}^0\mathscr{L}_1$, da der Laplace-Anteil keinen Beitrag zum Mittelwert liefert und auch der ∇f-Term durch partielle Integration und die Voraussetzungen an $\overline{\mathrm{k}_\nu}$ kompensiert wird.

Für die Betrachtung von h^T bemerken wir, dass nach der (asymptotischen) Eigenwertbeschreibung (II.21) aus Proposition II.4.6 bereits $|\Delta h^T + {}^2/_{\sigma^2}\, h^T| \leq {}^C/_{\sigma^{1+\kappa}}\, |h^T|$ gilt, also folgt die Ungleichung an h^T mit

$$\begin{aligned}\left\|{}^0\mathscr{L}_1 h^T\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} &\leq \left\|\Delta h^T + \frac{\mathscr{H}^2}{2} h^T\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} + \frac{C}{\sigma^{1+\kappa}}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} + \frac{C}{\sigma^2}\left\|\nabla h^T\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \\ &\leq \frac{C}{\sigma^{1+\kappa}}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Weiter gilt für $h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$

$$\left|\int {}^0\mathscr{L}_1 h^\perp\, h^T \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{C}{\sigma^{1+\kappa}}\left\|h^\perp\right\|_{\mathrm{H}(\Sigma)}\left\|h^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.$$

Wegen der Unabhängigkeit zwischen h^T und $h^\perp$ folgt damit die Ungleichung an $({}^0\mathscr{L}_1 h^\perp)^T$. Bei der weiteren Untersuchung von $h^\perp$ beachten wir zunächst, dass die Definition von $h^\perp$

$$\left|\int \Delta h^\perp\, h^\perp \,\mathrm{d}\mu\right| \geq \frac{9}{4\sigma^2}\left\|h^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{1}{4}\left\|\nabla h^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$$

impliziert. Weiter erhalten wir für ausreichend großes σ

$$\left|\int {}^{\not{b}}\mathscr{L}_1 h^\perp\, h^\perp \,\mathrm{d}\mu\right| \geq \left|\int \Delta h^\perp\, h^\perp \,\mathrm{d}\mu\right| - \frac{11}{5\sigma^2}\left\|h^\perp\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} - \frac{C}{\sigma^2}\left\|\nabla h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\left\|h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.$$

Zusammen erkennen wir $\|h^\perp\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq C\sigma^2\, \|{}^{\not{b}}\mathscr{L}_1 h^\perp\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$. Da weiter

$$\left\|\Delta h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \left\|{}^{\not{b}}\mathscr{L}_1 h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{C}{\sigma^2}\left\|h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{1}{2}\left\|\Delta h^\perp\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$$

gilt, erhalten wir $\|\Delta h^\perp\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq C\, \|{}^{\not{b}}\mathscr{L}_1 h^\perp\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$ und daher aus Proposition II.1.4 die H^2_σ-Ungleichung an $h^\perp$. Da sich damit durch Proposition II.1.3 identisch zur obiger Argumentation $\|\Delta h^\perp\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)} \leq \|{}^{\not{b}}\mathscr{L}_1 h^\perp\|_{\mathrm{L}^p(\Sigma)}$ für $p > 2$ ergibt, erhalten wir die $\mathrm{W}^{1,\infty}_\sigma$-Abschätzung für $h^\perp$. ////

II.5.10 Bemerkung (Invertierbarkeit des Stabilitätsoperators)
Damit ist ${}^{b}\mathscr{L}_1 : \mathrm{H}^2(\Sigma) \to \mathrm{L}^2(\Sigma)$ unter den Voraussetzungen von Satz II.5.9 injektiv. Da ${}^{0}\mathscr{L}_1$ als elliptischer Operator auch ein Fredholm-Operator ist, existiert der Inverse-Operator ${}^{b}\mathscr{L}_0{}^{-1} : \mathrm{L}^2(\Sigma) \to \mathrm{H}^2(\Sigma)$ und es gilt

$$\left\| {}^{b}\mathscr{L}_1{}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}\left(\mathrm{L}^2(\Sigma);\mathrm{H}^2(\Sigma)\right)} \le C \left(\frac{\sigma^3}{m} + \sigma^2 \right).$$

Damit ist auch der eingeschränkte Stabilitätsoperator ${}^{b}\mathscr{L}_1|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ mit $p > 2$ auf seinem Bild invertierbar. Dabei ist Bild ${}^{b}\mathscr{L}_1|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)} = \mathrm{L}^p(\Sigma)$, da die $\mathrm{W}^{2,p}_{\sigma}$-Regularität des Laplace gilt, siehe Bemerkung II.1.5 unter Beachtung der letzten Ungleichung in Proposition II.3.3. ◇

II.6. Über Translationen

Wir werden in den nachfolgenden Abschnitten die Deformationen von Flächen untersuchen – bspw. die Evolution der CMC-Flächen in der Zeit. Dabei wird es entweder entscheidend sein ob man statt von einer Deformation von einer Verschiebung sprechen kann und in welche Richtung die Flächen sich verschieben (oder zumindest wie die „Geschwindigkeit“ dieser Bewegung abgeschätzt werden kann). Daher untersuchen wir in diesem Abschnitt wie anhand der Lapse Funktion einer Deformation erkannt werden kann, ob diese (in höchster Ordnung) eine Translation ist.

II.6.1 Voraussetzung (an $\overline{M}$ für Abschnitt II.6)
Es sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit.

II.6.2 Voraussetzung (an Σ & Ψ für den Beginn dieses Abschnitts)
Es seien $\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta,\varepsilon}_{\sigma}(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7), $\eta_0 > 0$ und $\Psi : (-\eta_0\,, \eta_0) \times \Sigma \to \overline{M}$ eine orthogonale räumliche Deformation wie in Definition I.2.4 beschrieben, wobei angenommen wird, dass $\Psi(0, \cdot) = \mathrm{id}_\Sigma$ die Identität ist. ◇

Als erstes bestätigen wir die intuitive Erkenntnis, dass die Deformation der Fläche (infinitesimal) durch ihre Lapse-Funktion charakterisiert ist – gemeint ist dabei die tatsächliche Variation der Fläche als solche. Dafür betrachten wi zunächstr das *Euklidische Koordinaten Zentrum der Fläche* Σ. Da dieses auf verschiedene Weisen definiert werden kann, geben wir nun die konkrete Definition, mit der wir arbeiten wollen.

II.6.3 Definition (Euklidisches Koordinaten-Zentrum)
Für eine geschlossene Hyperfläche $M \hookrightarrow \overline{M} \setminus \overline{K}$ heißt der Vektor $\vec{z} := (z_1, z_2, z_3)$ mit

$$z_i := \fint_M \overline{x}_i \,\mathrm{d}{}^{e}\!\mu := \frac{\int_M \overline{x}_i \,\mathrm{d}{}^{e}\!\mu}{{}^{e}\!\mu(\Sigma)}$$

Euklidisches Koordinaten-Zentrum von M, wobei ${}^{e}\!\mu$ das von der Euklidischen Metrik ${}^{e}\overline{g}$ induzierte Oberflächenmaß von M ist. ◇

II.6.4 Proposition (Bewegung des Koordinaten-Zentrums)
Unter den Voraussetzung II.6.2 existiert eine Konstante $C = C(\text{konst.})$ so, dass für das Euklidische Koordinaten-Zentrum ${}_\eta\vec{z}$ von ${}_\eta\Sigma := \Psi(\eta,\Sigma)$

$$\left|\frac{\partial_\eta z_i}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} - 3 \fint_\Sigma \nu_i\, u \,\mathrm{d}\mu\Big| \le \frac{C}{\sigma^{\min\{2,\kappa\}}} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)},$$

gilt, wobei die Notation II.5.5 verwendet wurde. ◇

Beweis
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ersetzen wir κ mit $\min\{2,\kappa\}$ und nehmen desweiteren $\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} = 1$ an. Weiter können wir mit den Annahmen an die Metrik statt $\mathrm{d}\mathring{\mu}$ auch μ betrachten und erhalten (in höchster Ordnung) die gleiche Größen. Zunächst berechnen wir die Ableitung von ${}_\eta\vec{z}\ |{}_\eta\Sigma|$ mittels

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial({}_\eta z_i\ |{}_\eta\Sigma|)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} - 3\int_\Sigma \nu_i\, u\,\mathrm{d}\mu + \mathcal{H}u\, z_i\,\mathrm{d}\mu\Big| &= \left|\int_\Sigma \frac{\partial(\overline{x}_i\circ\Psi)}{\partial\eta} - \mathcal{H}u\,\overline{x}_i - 3\nu_i\, u + \mathcal{H}u\, z_i\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &= \left|\int_\Sigma \mathcal{H}u(\overline{x}_i - z_i) + 2\nu_i\, u\,\mathrm{d}\mu\right| \le C\,\sigma^{2-\kappa}.\end{aligned}$$

Wir erhalten nun die Aussage durch Anwendung der Produktregel in

$$\left|\frac{\partial({}_\eta z_i)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} - 3\fint_\Sigma \nu_i\, u\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\mu\Big| \le |\Sigma|^{-1}\left|\frac{\partial({}_\eta z_i\ |\Sigma|)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} + \int \mathcal{H}u\, z_i\,\mathrm{d}\mu - 3\int_\Sigma \nu_i\, u\,\mathrm{d}\mu\Big| \le \frac{C}{\sigma^\kappa}.$$ ///

II.6.5 Bemerkung (Über die Bedeutung der Lapse-Anteile u^T, $u^\perp$ und $u^\star$)
Es ergibt sich also die Erkenntnis, dass in der Notation von Definition II.4.3 der Anteil u^T der Lapse-Funktion die tatsächliche *Verschiebung* der Fläche charakterisiert. Weiter ist klar, dass mit der Annahme $\mathcal{H} \approx$ konst. die *Skalierung* (d. h. Vergrößerung bzw. Verkleinerung) der Fläche durch den Mittelwert der Lapse-Funktion $\overline{u}_\sigma$ charakterisiert ist. Der Rest $u - u^T - \overline{u}_\sigma$ charakterisiert damit die *Verformung* der Fläche und daher passt auch der dafür getroffene Begriff. Dass all diese Ergebnisse nur in höchster Ordnung gelten, ist lediglich der nicht-Flachheit der Metrik sowie den „Störungen" der Fläche geschuldet. ◇

Damit haben wir erkannt, dass jede Deformation für die $\|u^\perp\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$ (relativ zu $\|u^T\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$) ausreichend klein ist, das Koordinaten-Zentrum in eine klar durch u^T gegebene Richtung verschiebt. Da das Zentrum lediglich ein Integral der Fläche ist, ist dies kein wirklich zufriedenstellendes Ergebnis. Wir zeigen nun, dass dieses Ergebnis auch punktweise gilt.

II.6.6 Proposition (Punktweise Version von Proposition II.6.4)
Ist u (in höchster Ordnung) gleich u^T, d. h.

$$\left\|u^\perp\right\|_{\mathrm{H}(\Sigma)} \le \frac{c_1}{\sigma^{\kappa-1}} \left\|u^T\right\|_{\mathrm{H}(\Sigma)}$$

und gelten die Voraussetzung II.6.2, so existiert eine Deformation $\Phi : (-\eta_0\,,\eta_0)\times\Sigma \to \overline{M}$, die die gleichen Flächen durchläuft und in höchster Ordnung eine Verschiebung ist, d. h.

für eine Konstante $C = C(\text{konst.})$ gilt

$$\Phi(\eta, \Sigma) = \Psi(\eta, \Sigma), \qquad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} - X \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \frac{C}{\sigma^{\min\{2,\kappa\}}} \left\| u^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)},$$

wobei $X :\equiv {}^{\partial({}_\eta \vec{z})}/_{\partial \eta}\big|_{\eta=0} \in \mathbb{R}^3$ ein konstantes Vektorfeld ist und die Notation II.5.5 verwendet wurde. ◇

II.6.7 Bemerkung (Erklärung im Euklidischen Fall)
Als ersten Schritt dafür, betrachten wir den elementaren Fall, dass eine nicht-orthogonale Deformation ψ_e gegeben ist, die gerade die Verschiebung der Euklidischen Koordinaten Sphäre $\mathcal{S}^2_r(0)$ im Euklidischen Raum in Richtung des ersten Koordinatenvektors ist, d. h. $\psi_e : \mathbb{R} \times \mathcal{S}^2_r(0) \to \mathbb{R}^3 : (\eta, p) \mapsto \eta e_1 + p$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial \eta} \equiv e_1 = {}^e_\eta\nu_1 \, {}^e_\eta\nu + (e_1 - {}^e_\eta\nu_1 \, {}^e_\eta\nu) =: {}^e_\eta\nu_1 \, {}^e_\eta\nu + {}_\eta\beta \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{R},$$

wobei ${}^e_\eta\nu$ die Euklidische äußere Einheitsnormale der Sphäre $\mathcal{S}^2_r(\eta\, e_1) = \varphi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0))$ und ${}_\eta\beta \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}^2_r(\eta\, e_1))$ der Shift-Vektor von φ_e zum „Index“ $\eta \in (-\infty\,, \infty)$ ist. Insbesondere ist dies *keine* orthogonale Deformation und daher auch kein Model für die Deformation Φ. Jedoch können wir φ_e zu einer (eindeutigen) orthogonalen Deformation $\psi_e : (-\infty\,, \infty) \times \mathcal{S}^2_r(0) \to \mathbb{R}^3$ „orthogonalisieren“, die durch $\psi_e(0, p) = \varphi_e(0, p)$ und ${}^{\partial \psi_e}/_{\partial \eta} = {}^e_\eta\nu_1 \, {}^e_\eta\nu$ charakterisiert ist. Diese orthogonale Deformation ist in dem Sinn die *gleiche* Deformation, dass die zugehörigen Flächen identisch sind, d. h. $\psi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0)) = \varphi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0))$. Die Orthogonalität von ψ_e ergibt gegenüber den Standard Koordinaten von $\psi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0)) = \mathcal{S}^2_r(\eta\, e_1)$ eine „Deformation“ der Koordinaten von $\psi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0))$, die von ψ_e und den Koordinaten von $\mathcal{S}^2_r(0)$ induziert werden – vgl. Abbildung II.1. Weiter erkennen wir, dass auch umgekehrt φ_e durch drei Eigenschaften von ψ_e charakterisiert werden kann: $\varphi_e(0, p) = \psi_e(0, p)$, $\varphi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0)) = \psi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0))$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$ und ${}^{\partial \varphi_e}/_{\partial \eta} = {}_\eta v$ für einen Vektor ${}_\eta v$ der nur von $\eta \in \mathbb{R}$ abhängt. Außerdem können wir den Vektor ${}_\eta v$ durch

$${}_\eta v = {}^e_\eta\nu_1 \, {}^e_\eta\nu + r \, {}^\eta\nabla \, {}^e\nu_1, \qquad \diamond$$

bestimmen, wobei ${}_\eta\nabla$ der Levi-Civita Zusammenhang von $\psi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0))$ zur Metrik ${}_\eta g$ ist, die von ${}^e\overline{g}$ auf $\psi_e(\eta, \mathcal{S}^2_r(0))$ induziert wird. Insbesondere erhalten wir so eine aus der orthogonalen Deformation ψ_e eine nicht-orthgonale Deformation φ_e, welche in gewissem Sinne die Koordinaten der Sphäre *erhält.*

Beweis (Von Proposition II.6.6)
Ohne Beschränkung nehmen wir $\|u^{0T}\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} = 1$ an, da für $u^{0T} \equiv 0$ nichts zu zeigen ist. Definieren wir auf $(-\eta\,, \eta) \times \Sigma$ das Vektorfeld

$$X := \Psi^*({}_\eta u \, {}_\eta\nu + {}_\eta\nabla_\eta u)$$

[4] Da sich ${}^e_\eta\nu$ in η nicht konstant ist, ändern sich die Teile Σ_1 und Σ_2 nicht linear in Richtung ${}^e_1\nu$ – entgegen der ersten intuitiven Annahme.

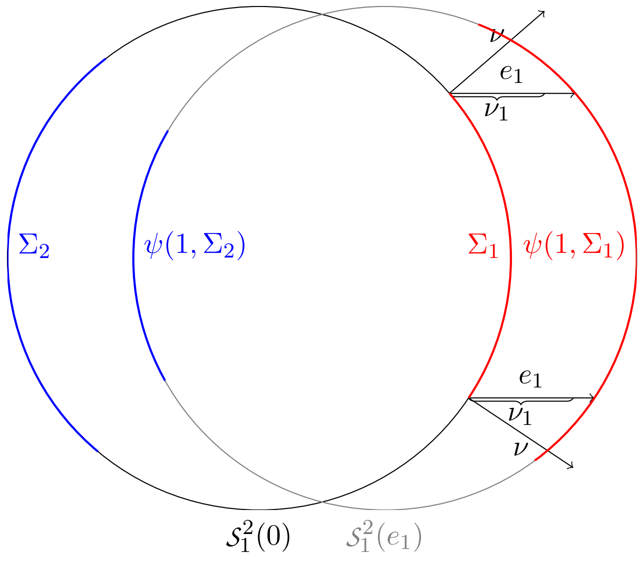

Abbildung II.1.: Verschiebung der Sphäre

und bezeichnen mit $\Phi' : (-\varepsilon\,, \varepsilon) \times \Sigma \to (-\varepsilon\,, \varepsilon) \times \Sigma$, so erkennen wir, dass $\Phi'(\eta, \cdot) \in \{\eta, \} \times \Sigma$ für alle η gilt. Das heißt für $\Phi := \Psi \circ \Phi'$ gilt

$$\Psi(0, \cdot) \equiv \Phi(0, \cdot), \qquad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right|_{\eta} = ({}_\eta u\, {}_\eta \nu + {}_\eta \nabla {}_\eta u) \circ \Phi(\eta, \cdot), \qquad \Phi(\eta, \Sigma) = \Psi(\eta, \Sigma).$$

Setzen wir nun Proposition II.4.6 ein, so erkennen wir mit

$$\left\| \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} - X_{0u} \right\|_{\mathrm{L}^2({}_0\Sigma)} \le \frac{C}{\sigma^{1+\varepsilon}} \left\| u^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \frac{C}{\sigma} \left\| u^\perp \right\|_{\mathrm{H}(\Sigma)}$$

unsere Behauptung, wenn wir beachten, dass das Zentrum sich nur auf diese Weise ändern kann, wenn

$$\left| X_{0u} - \left.\frac{\partial ({}_\eta \vec{z})}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \right| \le \frac{C}{\sigma}.$$

///

II.6.8 Bemerkung (Über Eindeutigkeit)
Wir können nicht folgern, dass die Deformation Φ aus Proposition II.6.6 eindeutig ist. Selbst wenn wir die Anfangswerte $\Phi(0, \cdot) \equiv \Psi(0, \cdot)$ fixieren, machen wir hier über Φ nur Aussagen in höchster Ordnung, d. h. wir können Φ in niederer Ordnung stören und erhalten ein Φ', das die gleichen Bedingungen erfüllt. ◇

III. Flächen konstanter mittlerer Krümmung

In diesem Kapitel untersuchen wir die Blätterung durch Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung (CMC). Wir zeigen in Abschnitt III.1, dass jede (dreidimensionale) $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit eine solche Blätterung aus *geometrischen Sphären* besitzt. Das heißt, es existiert eine Familie von Hyperflächen $\{{}_{\sigma}\Sigma\}_{\sigma\geq\sigma_0}$ die jeweils diffeomorph zur Sphäre $\mathcal{S}^2$ sind und konstante mittlere Krümmung (CMC) haben, paarweise disjunkt sind und die die ganze Mannigfaltigkeit außerhalb eines Kompaktums überdecken. Wie in der Einleitung erklärt ist dieses Ergebnis unter diversen Annahmen an die Asymptotik bereits gezeigt worden, bspw.

- Im Fall der $\mathcal{C}^4_2$-Asymptotik zu Schwarzschild von Huisken-Yau [HY96];
- Im Fall der $\mathcal{C}^2_{1+\varepsilon}$-Asymptotik zu Schwarzschild von Metzger [Met04, Met07] (eingeschränkt auch $\varepsilon = 0$ zulässig);
- Im Fall von $\mathcal{C}^5_{\varepsilon+1/2}$-flacher Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit stark abfallender Skalarkrümmung, die die $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+3/2}$-Teitelboim-Bedingungen erfüllen von Huang [Hua10];
- Im Fall $\mathcal{C}^2_1$-flacher Riemannscher Mannigfaltigkeiten (beliebiger Dimension $n \geq 3$), die $\mathcal{C}^0_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild sind und die Annahme an die Skalarkrümmung aus den Regge-Teitelboim-Bedingungen erfüllt von Eichmair-Metzger [EM12].

Nach Kenntnisstand des Autors ist der hier vorgestellte Fall der $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flachen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein neues Resultat und beinhaltet und verallgemeinert alle der oben angegeben Resultate – zumindest mit der Einschränkung auf Dimension drei und unter Ausklammerung des Ergebnisses von Metzger für $\varepsilon = 0$. Weiter zeigen wir die Eindeutigkeit der CMC-Flächen unter selbigen Voraussetzungen in Abschnitt III.2. Wir bemerken, dass die Voraussetzungen an die Klasse von Flächen innerhalb derer die CMC-Flächen eindeutig sind, abgeschwächt werden können – vgl. Bemerkung II.2.4. Auch dieses Eindeutigkeits-Ergebnis wurde u. a. in den obigen Arbeiten erbracht – allerdings mussten zumindest Eichmair-Metzger hierfür zusätzlich $\mathcal{C}^2_{1+\varepsilon}$-Asymptotik zu Schwarzschild voraussetzen.

Wir wollen dabei betonten, dass dies das erste Mal ist, dass diese Existenz- und Eindeutigkeits-Ergebnisse *ohne* (asymptotische) Symmetrie-Annahmen gezeigt werden konnte: Weder die (asymptotische) Rotationssymmetrie einer Asymptotik zu Schwarzschild, noch die Punkt-Spiegelungssymmetrie der Regge-Teiltelboim-Bedingungen werden vorausgesetzt. Weiter ist wichtig zu bemerken, dass wir im Gegensatz zu den oben zitierten Arbeiten unter diesen Annahmen *nicht* erhalten, dass diese Flächen *konzentrisch* sind: Diese Flächen haben (auch asymptotisch) *kein* gemeinsames Euklidisches Koordinaten-Zentrum. Dass dies unter den hier gemachten Voraussetzungen auch nicht notwendigerweise der Fall ist, wird am Beispiel III.4.3 (aus [CN14]) klar.

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass die Beweis-Methodik für Existenz und Eindeutigkeit stark auf denen von Metzger [Met04, Met07] basieren – vgl. Absatz „Vergleich mit verwandten Arbeiten“ auf Seite 4.

Als konzeptionell neues Resultat erhalten wir in Abschnitt III.3 die zeitliche Evolution dieser Flächen. Dieses Ergebnis wurde 2013 unter dem Titel *Time evolution of ADM and CMC center of mass in general relativity* in arXiv veröffentlicht [Ner13, Th. 4.2, Kor. 4.3, 4.4].[1] Nach Kenntnis des Autors ist dies das erste Mal, dass ein solches Ergebnis für die CMC-Flächen erbracht wurde. Ebenso ist es (nach Kenntnis des Autors) das erste Mal, dass ein solches Ergebnis für das CMC- (und damit auch das ADM-) Massezentrum gezeigt wurde. Vor Abschluss dieser Arbeit wurde erstmalig ein vergleichbares Resultat von Chen-Wang-Yau [CWY13] erbracht – allerdings für das von ihnen in der zitierten Arbeit definierte Massezentrum.

Das von uns gezeigte Evolutions-Ergebnis verwenden wir dann in Abschnitt III.4, um im Fall der $\mathcal{C}^1_{1+\varepsilon}$-Asymptotik zu Schwarzschild eine Formel für das Euklidische Zentrum der CMC-Flächen zu erhalten, welche nach Kenntnis des Autors unter den hier gemacht Voraussetzungen neu ist. Diese Formel impliziert die Gleichheit des *CMC-* und *ADM-Massezentrums*, welche unter verschiedenen anderen Voraussetzungen bereits u. a. in [CW08, Hua10, EM12] gezeigt wurde, und vom Autor unter den hier gemachten Voraussetzungen in [Ner13, Kor. 5.3] veröffentlicht wurde. Nach Kenntnis des Autors ist dies auch das erste Mal, dass die Gleichheit dieser Zentren auch im Sinne ihrer Existenz erbracht wurde. Wir erhalten außerdem die Gleichheit des CMC- und ADM-Massezentrums auch unter den oben erwähnten zusätzlichen $\mathcal{C}^1_{\varepsilon+1}$-Regge-Teitelboim-Bedingungen.

III.1. Existenz der CMC-Flächen

In diesem Abschnitt beweisen wir nun die Existenz der CMC-Flächen.

III.1.1 Theorem (Existenz der CMC-Flächen und CMC-Blätterung)
Sei $(\overline{M},\overline{g})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach mit nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)). Es existiert $\sigma_0 = \sigma_0(|m|,\varepsilon,\overline{c}_0)$ und eine stetig-differenzierbare Abbildung $\Psi : [0\,,1] \times (\sigma_1\,,\infty) \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ so, dass alle Flächen ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma := \Psi(\tau,\sigma,\mathcal{S}^2)$ konstante mittlere Krümmung ${}^{\tau}_{\sigma}\mathcal{H} \equiv -2/\sigma$ bzgl. ${}^{\tau}\overline{g} := {}^{s}\overline{g} + \tau(\overline{g} - {}^{s}\overline{g})$ ${}^{s}\overline{g} + \tau(\overline{g} - {}^{s}\overline{g})$ haben und der betragsmäßig kleinste Eigenwert $\boldsymbol{\lambda}$ des zugehörigen *Stabilitätsoperators* erfüllt dabei

[1] In der hier zitierten Version wurde nur der Fall der $\mathcal{C}^1_{1+\varepsilon}$-Asymptotik zu Schwarzschild bearbeitet.

$|\boldsymbol{\lambda} - {}^{6m}/_{\sigma^3}| \leq {}^{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)}/_{\sigma^3}$. Weiter ist die Masse von $\overline{M}$ genau dann positiv, $m > 0$, wenn die Flächen als CMC-Flächen *strikt stabil* sind, d. h.[2]

$$-\int_{{}^\tau_\sigma\Sigma} {}^0\mathscr{L}_1 h\, h\, \mathrm{d}^\tau_\sigma\mu > 0 \qquad \forall\, 0 \not\equiv h \in \mathrm{H}^2({}^\tau_\sigma\Sigma) \text{ mit } \hbar = 0.$$

Dabei ist (für $m \neq 0$) die Abbildung ${}^\tau\Psi : (\sigma_1\,,\infty) \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M} : (\sigma, p) \mapsto \Psi(\tau, \sigma, p)$ für alle $\tau \in [0\,,1]$ eine Blätterung nahe unendlich, d. h. ${}^\tau\Psi$ ist ein Diffeomorphismus auf $\operatorname{Bild}{}^\tau\Psi$ und $\overline{M} \setminus \operatorname{Bild}{}^\tau\Psi \subseteq \overline{M}$ ist kompakt. ◇

III.1.2 Ergänzung (zu Theorem III.1.1)
Es gilt ${}^\tau_\sigma\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta,\varepsilon}_\sigma(c_0{}'\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma), c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) bzgl. ${}^\tau\overline{g}$ für die Flächen ${}^\tau_\sigma\Sigma$ aus Theorem III.1.1 sowie gemeinsame Konstanten $c_S = C(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$, $c_0{}' = c_0{}'(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$ und $c_1 = c_1(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$. Weiter ist die Abbildung Ψ in der ersten Komponente $\mathcal{C}^1$-nahe an einer Verschiebung der Fläche und in der zweiten Komponente $\mathcal{C}^1$-nahe an der Kombination einer Verschiebung und einer Vergrößerung der Fläche. Das heißt, für $C = C(|m|, \overline{K}, \overline{c}_0)$ und alle $\tau \in [0\,,1]$ und $\sigma \in (\sigma_0\,,\infty)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|F_\tau\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}({}^\tau_\sigma\Sigma)} + \frac{1}{\sigma}\|F_\tau\|_{\mathrm{H}^2({}^\tau_\sigma\Sigma)} &\leq C\sigma^{\frac{1}{2}-\varepsilon} && \text{für } F_\tau := \overline{g}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}, \nu\right) - \zeta^i\,\nu_i, \\
\|F_\sigma\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}({}^\tau_\sigma\Sigma)} + \frac{1}{\sigma}\|F_\sigma\|_{\mathrm{H}^2({}^\tau_\sigma\Sigma)} &\leq \frac{C}{\sigma^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} && \text{für } F_\sigma := \overline{g}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma}, \nu\right) - 1 - \xi^i\,\nu_i,
\end{aligned}$$

wobei ν die äußere Normale von ${}^\tau_\sigma\Sigma \hookrightarrow (\overline{M}, {}^\tau\overline{g})$ bezeichnet und $\vec{\zeta}(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{\xi}(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^3$ Lipschitz-stetig von σ und τ abhängen und für $C = C(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$

$$\left|\vec{\zeta}\right| \leq C\,\sigma\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma), \qquad \left|\vec{\xi}\right| \leq C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma), \qquad |{}^\tau_\sigma\vec{z}| \leq C\,\sigma\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma) \qquad ◇$$

erfüllen, wobei ${}^\tau_\sigma\vec{z}$ das Euklidische Koordinaten-Zentrum von ${}^\tau_\sigma\Sigma$ entsprechend Definition II.6.3 bezeichnet. Dabei wurde zur Verkürzung der Notation die Einschränkung (I.24) an $\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}$ verwendet.

III.1.3 Voraussetzung (an $\overline{M}$ für dieses Kapitel)
Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)). ◇

Für den Beweis bemerken wir zunächst, dass die konzentrischen Sphären $\mathcal{S}^2_r(0)$ für $\overline{g} = {}^s\overline{g}$ konstante mittlere Krümmung haben, die in r (für bspw. $r > 3m$) betragsmäßig streng monoton fallend ist und für $r \to \infty$ gegen 0 geht. Insbesondere gibt es eine streng monotone Umindizierung $r : (\sigma_0\,,\infty) \to (r_0\,,\infty)$ so, dass ${}^0_\sigma\Sigma := \mathcal{S}^2_{r(\sigma)}(0)$ konstante mittlere Krümmung ${}^{-2}/_\sigma$ hat. Damit gilt dieses Theorem für $\{0\} \times (\sigma_0\,,\infty)$ anstelle von $[0\,,1] \times (\sigma_1\,,\infty)$. Durch ein Offen-Abgeschlossen-Argument „erweitern“ wir dies nun auf

[2] Wir beachten, dass das Vorzeichen der mittleren Krümmung einer Sphäre als negativ gewählt wurde.

$[0\,,1]\times(\sigma_1\,,\infty)$ (für ein endliches σ_1). Dafür nehmen wir an, dass der Satz auf einer solchen Menge $U \subseteq [0\,,1]\times(\sigma_1\,,\infty)$ existiert und zeigen dann, dass sie offen und abgeschlossen in (und damit gleich) $[0\,,1]\times(\sigma_1\,,\infty)$ ist – falls σ_1 ausreichend groß gewählt wurde.

III.1.4 Voraussetzung (für Abschnitt III.1)
Sei $\Psi : U \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M} : ((\tau,\sigma),p) \mapsto \Psi(\tau,\sigma,p)$ so, dass

1. $U \subseteq [0\,,1]\times(\sigma_0\,,\infty)$ für ein $\sigma_0 > 1$ und in den Bezeichnungen ${}_{\sigma}U := U\cap([0\,,1]\times\{\sigma\})$ und ${}^{\tau}U := U\cap(\{\tau\}\times(\sigma_0\,,\infty))$ gelte $0 \in {}_{\sigma}U$ bzw. (äquivalent) $\sigma \in {}^{0}U$ für alle $\sigma > \sigma_0$, wobei ${}_{\sigma}U$ und ${}^{\tau}U$ als Teilmengen der reellen Zahlen interpretiert werden,

2. Ψ ist stetig-differenzierbar,

3. ${}^{0}\Psi(\sigma,\mathcal{S}^2) = {}^{0}_{\sigma}\Sigma := \mathcal{S}_{r(\sigma)}(0)$ für alle $\sigma > \sigma_0$,

4. ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma := \Psi(\tau,\sigma,\mathcal{S}^2)$ hat für alle $(\tau,\sigma)\in U$ bzgl. ${}^{\tau}\overline{g}$ konstante mittlere Krümmung ${}^{\tau}_{\sigma}\mathcal{H} \equiv {}^{-2}/_{\sigma}$,

5. ${}_{\sigma}\Psi : {}_{\sigma}U \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M} : (\tau,p) \mapsto \Psi(\tau,\sigma,p)$ ist eine orthogonale Deformation für alle $\sigma > \sigma_0$, d. h. $\partial_\sigma\Psi/\partial\tau|_{(\tau,\sigma,\cdot)}$ steht orthogonal auf ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ für alle $(\tau,\sigma)\in U$.

Weiter sei U in dieser Art maximal, d. h. es erfüllt $\Psi' : U'\times\mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ diese Voraussetzungen für das gleiche σ_0, so gilt $U' \subseteq U$. ◇

Zunächst erkennen wir, dass Ψ stark von der Wahl von σ_0 abhängt. Trotzdem unterdrücken wir diese Abhängigkeit um die Notation etwas einfacher zu halten. Die folgenden Ergebnisse werden dann jeweils nur für ausreichend großes σ_0 gelten – dies wird an der jeweiligen Stelle nochmals hervorgehoben.

Wir bemerken, dass wir nicht fordern, dass Ψ eine orthogonale Deformation von Kodimension 2 entsprechend Definition I.2.5 ist. Entsprechend können wir die Ergebnisse aus Proposition I.2.3 nicht direkt anwenden. Jedoch sind „instantane Ergebnisse“, d. h. die auf einer Fläche, wie bspw. die Charakterisierungen der (Pseudo-)Stabilitätsoperatoren aus Proposition I.2.10 natürlich weiter gültig.

Mit den gleichen Argumenten wie Metzger zeigen wir, dass diese Menge U offen und abgeschlossen ist: Die Abgeschlossenheit wird durch ein einfaches Stetigkeitsargument erbracht. Dagegen werden wir die Offenheit durch den impliziten Funktionensatz erhalten, wenn wir (zunächst) voraussetzen, dass der Stabilitätsoperator invertierbar ist. Um zu erkennen, dass diese Annahme erfüllt ist und um die technischen Schritte einfacher ausführen zu können, zeigen wir zunächst, dass all diese Fläche ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ bereits $\mathcal{C}^0_{\delta,3/2+\varepsilon}$-fast konzentrisch mit Radius $\sigma > 0$ sind. Auch dieses Regularitäts-Ergebnis erhalten wir durch ein Offen-Abgeschlossen-Argument, in dem wir die Menge U_r der $\mathcal{C}^0_{\delta,3/2+\varepsilon}$-fast konzentrischen Flächen von passendem Radius $\sigma := {}^{-2}/_{\mathcal{H}}$ definieren und zeigen, dass diese Menge nicht-leer sowie offen und abgeschlossen in und daher gleich U ist. Letztere Regularitätsargumentation unterscheidet sich in mehreren Punkten von denen der zitierten Arbeiten.

III.1.5 Notation (Der reguläre Bereich U_r)
Es sei $U_r := U \cap (I_r \times (\sigma_0\,,\infty))$, wobei $I_r \subseteq [0\,,1]$ das maximale Intervall der Indices $\tau \in I_r$ bezeichnet für die ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma := \Psi(\tau,\sigma,\mathcal{S}^2)$ auch $\mathcal{C}^0_{0,3/2+\varepsilon}$-fast konzentrisch sind (entspr. Definition I.3.7), d. h.

$$I_r := \Big\{ \tau_0 \;\Big|\; \forall\, \tau \in [0\,,\tau_0] : \;\exists c_1, c_S \geq 0,\, c_0 \in [0\,,1) : \;\forall\, \sigma > \sigma_0 : \;{}^{\tau}_{\sigma}\Sigma \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}_{\sigma}(c_0,c_1,c_S) \Big\}. \qquad \diamond$$

Wir erkennen, dass $U_r \supseteq \{0\} \times (\sigma_0\,,\infty)$, insbesondere ist U_r nicht leer.

Um im Folgenden die Krümmungs-Gleichungen für Flächen von Kodimension zwei in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M},\widehat{g})$ aus Abschnitt I.2 verwenden zu können, konstruieren wir die folgende künstliche Lorentz-Mannigfaltigkeit, in der $(\overline{M},{}^{\tau}\overline{g})$ eine raumartige Hyperfläche ist.

III.1.6 Definition (Künstliche Raum-Zeit)
Die künstliche Raum-Zeit $(\widehat{M},\widehat{g})$ sei definiert durch

$$\widehat{M} := [0\,,1] \times \overline{M}, \qquad \widehat{g}_{00} := -1 \qquad \widehat{g}_{0i} := 0 \qquad \widehat{g}_{ij} := {}^{s}\overline{g}_{ij} - \overline{\tau}\big({}^{s}\overline{g} - \overline{g}\big)_{ij}, \qquad \diamond$$

wobei $\overline{\tau} : \widehat{M} \to \mathbb{R} : (\tau,\overline{p}) \mapsto \tau$ die künstliche Zeit sei. Weiter bezeichne ${}^{\tau}\overline{M} := \{\tau\} \times \overline{M}$ einen Zeit-Schnitt sowie ${}^{\tau}\overline{g} = {}^{s}\overline{g} - \tau\,({}^{s}\overline{g} - \overline{g})$ bzw. ${}^{\tau}\overline{\mathrm{k}} = -1/2\,({}^{s}\overline{g} - \overline{g})$ bzw. $\overline{\alpha} \equiv 1$ die darauf induzierte Metrik bzw. zweite Fundamentalform bzw. zeitliche Lapse-Funktion.

Im Sinne dieser Definition unterscheiden wir nicht zwischen Ψ und der korrespondierenden Abbildung $\Psi' : U \times \mathcal{S}^2 \to \widehat{M} : ((\tau,\sigma),p) \mapsto (\tau,\Psi(\tau,\sigma,p))$ in die künstliche Mannigfaltigkeit und interpretieren ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ als CMC-Hyperfläche von $({}^{\tau}\overline{M},{}^{\tau}\overline{g})$, insbesondere werden die zweite Fundamentalform ${}^{\tau}_{\sigma}\mathrm{k}$ und die Normale ${}^{\tau}_{\sigma}\nu$ von ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ bzgl. ${}^{\tau}\overline{g}$ berechnet.

III.1.7 Lemma (Regularität der Flächen ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$)
Für $\sigma_0 \geq \sigma_0(\overline{c}_0)$ und $(\tau,\sigma) \in U_r$ ist ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ eine $\mathcal{C}^{1,1} \cap \mathrm{H}^3$-Fläche sowie ${}^{\tau}_{\sigma}\mathring{\mathrm{k}} \in \mathrm{L}^{\infty}({}^{\tau}_{\sigma}\Sigma) \cap \mathrm{H}({}^{\tau}_{\sigma}\Sigma)$. $\diamond$

Beweis
Dies folgt durch Anwendung von Proposition II.2.2 auf eine beliebige Approximation von ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ durch glatte Flächen. ////

Wir werden die Abgeschlossenheit von U_r durch ein einfaches Stetigkeitsargument in Lemma III.1.11 erhalten, während dessen Offenheit sich in Lemma III.1.12 durch die Abschätzungen von τ-Ableitungen geeigneter Quantitäten von ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ in Lemma III.1.10 ergibt. Um von solchen Ableitungen sprechen zu können, zeigen wir in Lemma III.1.8, dass U eine Umgebung von U_r in $[0\,,1]$ ist.

III.1.8 Lemma (Schritt 1: U ist Umgebung von U_r)
Für $\sigma_0 \geq \sigma_0(|m|,\overline{c}_0)$ und jedes $(\tau,\sigma) \in U_r$ mit $\tau < 1$ existiert ein $\eta > 0$ mit $U \supseteq [0\,,\tau+\varepsilon) \times (\sigma-\eta\,,\sigma+\eta)$. $\diamond$

Beweis
Nach Proposition II.5.8 bzw. Bemerkung II.5.10 ist ${}^{0}\mathscr{L}_1$ auf $\Sigma := {}^{\tau_1}_{\sigma_1}\Sigma$ für alle $(\tau_1,\sigma_1) \in U_r$ invertierbar. Weiter ist per Definition ${}^{0}\mathscr{L}_1|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ für $p \geq 2$ die Linearisierung der

Mittleren-Krümmungs-Abbildung

$$\mathsf{H} : [0\,,1] \times (\sigma_0\,,\infty) \times \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma) \to \mathrm{L}^p(\Sigma) : (\tau,\sigma,f) \mapsto {}^\tau\mathcal{H}(\mathrm{graph}_\nu f) + \frac{2}{\sigma}$$

in der dritten Komponente im Punkt $(\tau_1,\sigma_1,0) \in [0\,,1] \times (\sigma_0\,,\infty) \times \mathrm{H}^2(\Sigma)$, wobei ${}^\tau\mathcal{H}(\,\mathrm{graph}_\nu f)$ die mittlere Krümmung von $\mathrm{graph}_\nu f$ bzgl. ${}^\tau\overline{g}$ bezeichnet (vgl. Abschnitt II.5). Wir bemerken, dass dies nach Proposition II.3.3 zumindest für kleine $\|f\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ eine wohldefinierte Hyperfläche von $\overline{M}$ ist, also H in einer Umgebung von $(\tau_1,\sigma_1,0)$ wohldefiniert ist. Nach dem impliziten Funktionensatz (angewendet für $p>2$) existiert damit auf einer offenen Umgebung $K \subseteq [0\,,1] \times (\sigma_0\,,\infty)$ von (τ_1,σ_1) eine stetig-differenzierbare Abbildung $F : K \to \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)$ mit $\mathsf{H}(\tau,\sigma,F(\tau,\sigma)) \equiv 0$ für $(\tau,\sigma) \in K$. Also existiert eine Fortsetzung $\Psi' : I' \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ von Ψ auf eine Umgebung I' von K in $[0\,,1] \times (1\,,\infty)$, für welche 1. – 5 erfüllt sind. Mit der Maximalität von U erhalten wir die Behauptung. ///

Auf Grund des letzten Lemmas, macht es Sinn von einer Ableitung in „Richtung τ bzw. σ“ zu sprechen.

III.1.9 Notation (Zusätzliche Notationen für Abschnitt III.1)
Entsprechend der bisherigen Notation bezeichnet ${}^\tau_\sigma\nu$ die äußere Normale von ${}^\tau_\sigma\Sigma$, d. h.

$$\nu : U \times \mathcal{S}^2 \to \mathbb{R}^3 : ((\tau,\sigma),p) \mapsto {}^\tau_\sigma\nu(p),$$

sowie ${}^\tau_\sigma u_\sigma$ und ${}^\tau_\sigma u_\tau$ die Lapse-Funktionen, d. h.

$$u_\sigma : U \times \mathcal{S}^2 \to \mathbb{R} : ((\tau,\sigma),p) \mapsto \overline{g}\left(\left.\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma}\right|_{(\tau,\sigma,p)}, {}^\tau_\sigma\nu_{\Psi(p)}\right) =: {}^\tau_\sigma u_\sigma(p),$$
$$u_\tau : U \times \mathcal{S}^2 \to \mathbb{R} : ((\tau,\sigma),p) \mapsto \overline{g}\left(\left.\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right|_{(\tau,\sigma,p)}, {}^\tau_\sigma\nu_{\Psi(p)}\right) =: {}^\tau_\sigma u_\tau(p). \qquad \diamond$$

III.1.10 Lemma (Die Flächen sind gleichmäßig regulär)
Ist $\sigma_0 \geq \sigma_0(|m|,\varepsilon,\overline{c}_0)$, so existieren Konstanten ${c_0}' = {c_0}'(|m|,\varepsilon,\overline{c}_0) < 1$, $c_1 = c_1(|m|,\varepsilon,\overline{c}_0)$ und $c_S = c_S(|m|,\varepsilon,\overline{c}_0)$ mit

$${}^\tau_\sigma\Sigma \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}_\sigma({c_0}'\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma), c_1, c_S) \text{ bzgl.}{}^\tau\overline{g} \qquad \forall (\tau,\sigma) \in U_r. \qquad \diamond$$

Wir beachten, dass per Definition für $(\tau,\sigma) \in U_r$ insbesondere $\sigma > \sigma_0$ gilt, also mit der Monotonie von $\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)$ insbesondere ${}^\tau_\sigma\Sigma \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}_\sigma({c_0}'\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma_0), c_1, c_S)$ bzgl. ${}^\tau\overline{g}$ gilt. Dies rechtfertigt die Bezeichnung als *gleichmäßig regulär*, da alle Flächen eine (ausreichende) Mindestregularität erfüllen.

Beweis
Es sei $(\tau_1,\sigma_1) \in U_r$ und c_0, c_1 und c_S die korrespondierenden Konstanten mit ${}^\tau_\sigma\Sigma \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}_\sigma(c_0,c_1,c_S)$ bzgl. ${}^\tau\overline{g}$. Wir nehmen zunächst an, dass

$$\sigma\left\|{u_\tau}^\perp\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} + \left\|{u_\tau}^\perp\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)} \leq C\,\sigma^{1-\varepsilon}, \qquad \left\|{u_\tau}^T\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq C\,\sigma\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma) \tag{III.1}$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\left|\frac{\partial\,|{}^{\tau}_{\sigma}\Sigma|}{\partial\tau}\right| = \left|\mathcal{H}\int u_\tau\,\mathrm{d}\mu\right| \le C\,\sigma^{1-\varepsilon}.$$

Da der Weyl-Tensor in $\dim\overline{M} = 3$ verschwindet, wissen wir in diesem Fall nach (I.4) mit den Abschätzungen an die Lapse-Funktionen und $\overline{\mathrm{Ric}}$ auch

$$\left\|\left.\frac{\partial\mathbb{k}}{\partial\tau}\right|_{\tau_1}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \le C, \qquad \left|\left.\frac{\partial d}{\partial\tau}\right|_{\sigma_1}\right| \le C\,\sigma_1\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma_1). \tag{III.2}$$

Da $(\tau_1,\sigma_1)\in U_r$ beliebig war, erkennen wir unter Voraussetzung von (III.1), dass für alle $(\tau,\sigma)\in U_r$, die zugehörigen Konstanten ${}^{\tau}_{\sigma}c_0$, ${}^{\tau}_{\sigma}c_1$ und ${}^{\tau}_{\sigma}c_S$ mit ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma\in\mathcal{K}^{0,\varepsilon}_{\sigma}({}^{\tau}_{\sigma}c_0,{}^{\tau}_{\sigma}c_1,{}^{\tau}_{\sigma}c_S)$ bzgl. ${}^{\tau}\overline{g}$ sowie eine Konstante $C = C(C\,{}^{\tau'}_{\sigma'}c_0,{}^{\tau'}_{\sigma'}c_1,{}^{\tau'}_{\sigma'}c_S)_{(\tau',\sigma')\in[0\,,\,\tau)\times(\sigma_0\,,\,\sigma)}$ direkt

$$\frac{\partial\,{}^{\tau}_{\sigma}c_0}{\partial\tau} \le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma), \qquad \frac{\partial\,{}^{\tau}_{\sigma}c_1}{\partial\tau} \le C, \qquad \frac{\partial\,{}^{\tau}_{\sigma}c_S}{\partial\tau} \le C$$

angenommen werden kann. Wir können daher in diesem Fall

$${}^{\tau}_{\sigma}c_0 \le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)\,\tau + C\,{}^{0}_{\sigma}c_0, \qquad {}^{\tau}_{\sigma}c_1 \le C\,\tau + {}^{0}_{\sigma}c_1, \qquad {}^{\tau}_{\sigma}c_S \le C\,\tau + {}^{0}_{\sigma}c_S$$

annehmen. Da $\tau\in[0\,,1]$ gilt, bleibt damit nur noch (III.1) zu zeigen.

Wir beginnen mit einer einfachen vorbereitenden Abschätzung. Bezeichne dafür ${}^{\tau}\mathcal{H}(M)$ die mittlere Krümmung einer Hyperfläche $M\hookrightarrow\overline{M}$ bzgl. ${}^{\tau}\overline{g}$. Es gilt für eine Konstante $C = C(|m|,\varepsilon,\overline{c}_0,c_0,c_1,c_S)$

$$\left|{}^{0}\mathcal{L}_1\,{}^{\tau_1}u_\tau\right| = \left|\left.\frac{\partial^{\tau_1}\mathcal{H}({}^{\tau}\Sigma)}{\partial\tau}\right|_{\tau_1}\right| = \left|\left.\frac{\partial^{\tau}\mathcal{H}({}^{\tau}\Sigma)}{\partial\tau}\right|_{\tau_1} - \left.\frac{\partial^{\tau}\mathcal{H}({}^{\tau_1}\Sigma)}{\partial\tau}\right|_{\tau_1}\right| = \left|{}^{0}\mathcal{L}_0 1\right| \le \frac{C}{\sigma^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}.$$

Dabei haben wir (I.22) und die Voraussetzungen an $\overline{g}$ verwendet, welche $\overline{\alpha}\equiv 1$ und

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}\overline{\mathrm{k}}_{jk}}{\partial\overline{x}^{\gamma}}\right| \le \frac{C}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon+|\gamma|}} \qquad \forall\,|\gamma|\le 2$$

und damit auch $|\overline{\mathrm{J}}|\le C/d^{\varepsilon+3/2}$ implizieren. Damit erhalten wir nach Satz II.5.9 insgesamt die erste Ungleichung von (III.1) und

$$\|u_\tau\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \le C\,\sigma^{\frac{3}{2}-\varepsilon}.$$

Nach Proposition II.5.8 gilt

$$\left|\int {}^{0}\mathcal{L}_1 f^T\,h^T\,\mathrm{d}\mu + \frac{6m}{\sigma^3}\int f^T\,h^T\,\mathrm{d}\mu\right| \le \frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)}{\sigma^3}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\,\|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \quad \forall\,f,h\in\mathrm{L}^2(\Sigma).$$

Setzen wir die Abschätzung an $\mathring{k}$ aus Proposition II.2.2 und die Voraussetzung an $\overline{k}$ ein, so erhalten wir mit den bisherigen Abschätzungen an u_τ durch partielle Integration für alle $h \in \mathrm{L}^2(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{6m}{\sigma^3} \int u_\tau h^T \,\mathrm{d}\mu - \int \left(\overline{\mathrm{J}}\,(\nu) - \frac{\overline{\mathscr{H}}}{\sigma} \right) h^T + \frac{1}{\sigma}\,\overline{\mathrm{k}}(\nu, X_{h^T})\,\mathrm{d}\mu \right| \\
&\quad \le \left| \frac{6m}{\sigma^3} \int u_\tau h^T \,\mathrm{d}\mu - \int {}^0\!\mathscr{L}_0 1\, h^T \,\mathrm{d}\mu \right| + \frac{C}{\sigma^{1+\varepsilon}} \left\| h^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\
&\quad \le \left| \frac{6m}{\sigma^3} \int u_\tau h^T \,\mathrm{d}\mu + \int {}^0\!\mathscr{L}_1 \left(u_\tau{}^T \right) h^T \,\mathrm{d}\mu \right| + \frac{C}{\sigma^{1+\varepsilon}} \left\| h^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \left\| h^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \left\| u_\tau \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\
&\quad \le \frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)}{\sigma^3} \left\| h^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \left\| u_\tau \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt dies für $h := u_\tau / \|u_\tau\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}$ – wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u_\tau \not\equiv 0$ gilt. Daher erhalten wir

$$\|u_\tau\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)\,\|u_\tau\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \sup_{g \in \mathrm{L}^2(\Sigma)} \frac{C\,\sigma^3}{\|g^T\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}} \left| \int \left(\overline{\mathrm{J}}\,(\nu) - \frac{\overline{\mathscr{H}}}{\sigma} \right) g^T + \frac{1}{\sigma}\,\overline{\mathrm{k}}\left(\nu, X_{g^T} \right) \mathrm{d}\mu \right|$$

und somit ergibt sich

$$\left\| u_\tau{}^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \le \sup_{g \in \mathrm{L}^2(\Sigma)} \frac{C\,\sigma^3}{\|g^T\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}} \left| \int \left(\overline{\mathrm{J}}\,(\nu) - \frac{\overline{\mathscr{H}}}{\sigma} \right) g^T + \frac{1}{\sigma}\,\overline{\mathrm{k}}\left(\nu, X_{g^T} \right) \mathrm{d}\mu \right|,$$

falls σ ausreichend groß ist. Nach Proposition A.2.1 gilt jedoch weiter

$$\left| \int_\Sigma \left(\sigma\,\overline{\mathrm{J}}\,(\nu) - \overline{\mathscr{H}} \right) \nu_i + \overline{\mathrm{k}}_{\nu i}\,\mathrm{d}\mu \right| \le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma) \le \frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)}{\sigma} \|\nu_i\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.$$

Mit der Vergleichbarkeit von $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ und $\mathrm{lin}\{\nu_i\}_i$ nach Lemma II.5.6 (vgl. die Argumentation im Beweis von Proposition II.5.7) erhalten wir damit

$$\left\| u_\tau{}^T \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \le C\,\sigma^2\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma).$$

Mit der Regularität von ${}^0\!\mathscr{L}_1$, Satz II.5.9, ergibt sich die zweite Ungleichung von (III.1) und wie oben erklärt ist damit die Behauptung gezeigt. ////

III.1.11 Lemma (Schritt 2: U_r ist abgeschlossen in U)
Ist $\sigma_0 \ge \sigma_0(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \overline{c}_2)$, so gilt $U_r = \overline{U_r} \cap U$. ◇

Beweis
Per Definition gilt „$\subseteq$“. Für die umgekehrte Inklusion bemerken wir, dass nach Voraussetzung an Ψ der Flächeninhalt $|{}^\tau_\sigma\Sigma|$ und $d \circ \Psi$ stetig von τ mit $(\tau, \sigma) \in U$ abhängt. Weiter hängt k nach III.2 Lipschitz-stetig von τ mit $(\tau, \sigma) \in U_r$ ab – wir erkennen also, dass k damit auch von τ mit $(\tau, \sigma) \in \overline{U_r} \cap U$ stetig abhängt. Da es sich um nicht-strikte Ungleichungen handelt, folgt die Abgeschlossenheit von U_r in U. ////

III.1.12 Lemma (Schritt 3: U_r ist offen in und damit gleich U)
Ist $\sigma_0 \geq \sigma_0(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \overline{c}_2)$, so gilt $U = U_r$ und dabei gleichmäßige Regularität, d. h. es existieren Konstanten $c_0{}' = c_0{}'(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0) < 1$, $c_1 = c_1(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$ und $c_S = c_S(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$ so, dass ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}_{\sigma}(c_0{}' \,\mathrm{E}_{\overline{S}}(\sigma), c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) bzgl. ${}^{\tau}\overline{g}$ für alle $(\tau, \sigma) \in U$ (insbesondere $\sigma > \sigma_0$) gilt. ◇

Beweis
Nach Lemma III.1.10 sind alle Flächen ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ für $(\tau, \sigma) \in U_r$ im obigen Sinn gleichmäßig regulär. Nach Lemma III.1.8 ist U eine Umgebung von U_r, d. h. ist $(\tau_1, \sigma_1) \in U_r$, so existiert ein $0 < \eta = \eta(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \tau_1, \sigma_1, c_0, c_1, c_S)$ mit $[0\,, \tau_1 + \eta) \times (\sigma_1 - \eta\,, \sigma_1 + \eta) \subseteq U$. Mit der Regularität von Ψ und ${}^{\tau_1}_{\sigma_1}\Sigma$ gilt damit ohne Beschränkung der Allgemeinheit für alle Flächen ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}(2c_S, {}^{3c_0}/_{2}, 2c_1)$. Damit gilt $[0\,, \tau_1 + \eta) \times (\sigma_1 - \eta\,, \sigma_1 + \eta) \subseteq U_r$. Nach Lemma III.1.10 sind alle Flächen ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ in U_r im obigen Sinn gleichmäßig regulär und damit sind diese Konstanten unabhängig von τ_1, σ_1 und η wählbar. Damit ist U_r in U offen. Mit Lemma III.1.11 ist damit $U_r = U$ und die Flächen im obigen Sinn gleichmäßig regulär. ////

III.1.13 Lemma (U ist offen)
Ist $\sigma_0 \geq \sigma_0(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$, so ist U in $[0\,, 1] \times (\sigma_0\,, \infty)$ offen. ◇

Beweis
Dies folgt mit Lemma III.1.8 aus Lemma III.1.12, da damit U eine Umgebung von $U_r = U$ in $[0\,, 1] \times (\sigma_0\,, \infty)$ ist. ////

III.1.14 Lemma (U ist abgeschlossen)
Ist $\sigma_0 \geq \sigma_0(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0)$, so ist $U \cap ([0\,, 1] \times (\sigma_0\,, \infty)) = \overline{U} \cap ([0\,, 1] \times (\sigma_0\,, \infty))$. ◇

Beweis
Sei $(\tau_0, \sigma) \in U$ beliebig. Nach Proposition II.3.3 und Lemma III.1.10 existiert eine Zahl $C(\sigma_0)$, die von σ aber nicht von τ abhängig ist so, dass für alle $\tau \in {}_{\sigma}U$

$$\|{}^{\tau}_{\sigma}u_{\tau}\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2)} + \|{}^{\tau}_{\sigma}\nu\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2;\mathbb{R}^3)} + \|u_{\tau}\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathcal{S}^2)} + \|{}^{\tau}_{\sigma}\nu\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathcal{S}^2)} \leq C(\sigma_0),$$

wobei wir durch Betrachtung von ${}^{\tau}_{\sigma}u \circ {}^{\tau}_{\sigma}\Psi$ resp. $\overline{x}_*({}^{\tau}_{\sigma}\nu \circ {}^{\tau}_{\sigma}\Psi)$ dies als Abbildung von $\mathcal{S}^2$ nach $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{R}^3$ auffassen. Beachten wir nun, dass ${}^{\partial\Psi}/_{\partial\tau} = u\,\nu$ gilt, so erhalten wir damit

$$\left\| \frac{\partial_{\sigma}\Psi}{\partial\tau} \right\|_{\mathrm{H}^2({}_{\sigma}U \times \mathcal{S}^2;\mathbb{R}^3)} \leq C(\sigma),$$

wobei wir dies durch Betrachtung von $\overline{x} \circ {}_{\sigma}\Psi$ als Abbildung nach $\mathbb{R}^3$ aufgefasst haben. Beachten wir, dass ${}_{\sigma}\Psi$ nach Lemma III.1.8 in der Interpretation ${}_{\sigma}\Psi : {}_{\sigma}U \to \mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2;\mathbb{R}^3) : \tau \mapsto {}_{\sigma}\Psi(\tau, \cdot)$ stetig-differenzierbar ist, so impliziert dies, dass diese Abbildung auch Lipschitz-stetig ist. Damit ist sie als solche Abbildung stetig auf den Rand von ${}_{\sigma}U$ fortsetzbar.

Sei $\overline{{}_{\sigma}\Psi} : \overline{{}_{\sigma}U} \to \mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2;\mathbb{R}^3)$ diese Fortsetzung auf den Abschluss $\overline{{}_{\sigma}U}$ von ${}_{\sigma}U$. Weiter bezeichne $\Sigma := \overline{{}_{\sigma}\Psi}(\tau, \mathcal{S}^2)$ die Fläche zu Index τ. Durch die Stetigkeit von $\overline{{}_{\sigma}\Psi}$ gilt $\Sigma \in$

$\mathcal{K}^{0,\varepsilon}(c_S, c_0, c_1)$. Mit der gleichen Argumentation wie in Lemma III.1.8 erhalten wir damit für eine Umgebung I' von τ eine Abbildung $\Psi' : I' \to \mathrm{H}^2(\Sigma)$ so, dass deren Flächen ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma' := \Psi'(\tau', \mathcal{S}^2)$ konstante mittlere Krümmung ${}^{2}\!/\!_{\sigma^2}$ haben. Durch die Stetigkeit von Ψ und der Eindeutigkeit, die wir in der Argumentation von Lemma III.1.8 erhalten haben, ergibt dies, dass wir annehmen können, dass $\Psi = \Psi'$ auf $I' \cap {}_{\sigma}U$ gilt. Damit lässt sich ${}_{\sigma}\Psi$ auf $\overline{{}_{\sigma}U}$ fortsetzen. Mit der Maximalität von ${}_{\sigma}U$ ist damit ${}_{\sigma}U$ abgeschlossen.

Da $\sigma > \sigma_0$ (und σ_0 unabhängig von τ) beliebig war, erhalten wir damit für ausreichend großes σ_0 die Aussage. ////

Beweis (von Theorem III.1.1)
Mit Lemma III.1.13 und Lemma III.1.14 verbleiben nur die Abschätzungen an F_σ und $\vec{\xi}$ sowie die Blätterungseigenschaft zu zeigen. Letztere folgt aus den Abschätzungen an F_σ und $\vec{\xi}$, da dann für die Lapse Funktion $u_\sigma \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$ von ${}^{\tau}\Psi$ direkt $u_\sigma > 0$ folgt. Per Konstruktion von Ψ gilt

$$^{0}\mathscr{L}_1 u_\sigma \equiv \frac{2}{\sigma^2}.$$

Insbesondere gilt

$$\left|^{0}\mathscr{L}_1 (u_\sigma - 1)\right| \leq \frac{C}{\sigma^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}$$

und daher gilt mit der Regularität von $^{0}\mathscr{L}_1$, Satz II.5.9, bereits

$$\left\|(u_\sigma - 1)^{\perp}\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq \frac{C}{\sigma^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}, \qquad \left\|(u_\sigma - 1)^{\perp}\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)} \leq C\,\sigma^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

Wenden wir die Regularität von $^{0}\mathscr{L}_1$ auf die Lapse-Funktion an und beachten Lemma II.5.6 sowie Proposition II.6.4, so ergibt sich die Behauptung für F_σ und die für $\vec{\xi}$ für $C\,\sigma^{-\varepsilon+1/2}$ anstelle von $C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)$.

Durch die gleiche Argumentation wie im Beweis von Lemma III.1.10 für ${u_\sigma}' := u_\sigma - 1$ anstelle von u_τ erhalten wir

$$\left\|{u_\sigma}'^{T}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq \sup_{h \in \mathrm{L}^2(\Sigma)} \frac{C\,\sigma^3}{\|h^T\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}} \left|\int {}^{0}\mathscr{L}_1 {u_\sigma}'\, h^T \,\mathrm{d}\mu\right|.$$

Per Konstruktion ist allerdings

$$\left|^{0}\mathscr{L}_1 {u_\sigma}' - \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)\right| \leq \frac{C}{\sigma^{3+\varepsilon}}$$

und nach Lemma A.1.3 damit auch

$$\left|\int_\Sigma {}^{0}\mathscr{L}_1 {u_\sigma}'\,\nu_i \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{8\pi\,|m|\,|\vec{z}\,|}{\sigma^2} + \frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)}{\sigma} \leq \frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)}{\sigma^2}\,\|\nu_i\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)},$$

wobei wir im zweiten Schritt unser Resultat $|\vec{z}\,| \leq C\,\sigma\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)$ verwendet haben. Nutzen wir nun die Vergleichbarkeit von $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ und $\mathrm{lin}\{\nu_i\}_i$ nach Lemma II.5.6 (vgl. die Argumentation im Beweis von Proposition II.5.7), so erhalten wir daher

$$\left\|{u_\sigma}'^{T}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq C\,\sigma\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma).$$

Wenden wir nun wieder die Regularität von $^{0}\mathscr{L}_1$ an, so erhalten wir die Behauptung. ////

III.2. Eindeutigkeit der CMC-Flächen

In diesem kurzen Abschnitt zeigen wir, dass die Flächen konstanter mittlerer Krümmung eindeutig sind – der Beweis entspricht dem von [Met04, Theorem 5.4] bzw. [Met04, Theorem 6.5] und wir wiederholen ihn nur in der hier verwendeten Notation und unter den hier gemachten Voraussetzungen. Wir bemerken, dass die Voraussetzung an die Flächen ${}_\sigma\Sigma_i$ hier stärker als in den zitierten Arbeit sind. Wie bereits erwähnt folgt dies aus den gemachten technischen Vereinfachungen – vgl. Bemerkung II.2.4. Wie ebenfalls (in der Einleitung) ausgeführt gibt es diverse weitere Eindeutigkeitsergebnisse für die CMC-Flächen, bspw. von Eichmair-Metzger [EM12] und Huang [Hua10]. Diese benötigen jedoch alle stärkere Annahmen an die Abfall-Bedingungen der Metrik.

III.2.1 Theorem (Eindeutigkeit)
Seien $c_0 \in [0\,,1)$, $c_1, c_S \geq 0$ Konstanten und $(\overline{M}, \overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)). Weiter seien $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) Hyperflächen mit identischer konstanter mittlerer Krümmung $\mathcal{H}_1 \equiv \mathcal{H}_2 \equiv: -2/\sigma$. Ist $\sigma > \sigma(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, c_0, c_1)$, so gilt $\Sigma_1 = \Sigma_2$. ◇

Beweis
Äquivalent zum vorangehenden Abschnitt III.1 seien $\Psi_i : I_i \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ stetig-differenzierbar so, dass

1. Ψ_i ist eine stetig-differenzierbare, orthogonale Deformation,
2. $I_i \subseteq [0\,,1]$ mit $1 \in I_i$ und $\Psi_i(1, \mathcal{S}^2) = \Sigma_i$,
3. ${}^\tau\Sigma_i := \Psi_i(\tau, \mathcal{S}^2)$ hat für alle $\tau \in I_i$ konstante mittlere Krümmung $-2/\sigma$ bzgl. ${}^\tau\overline{g} := {}^s\overline{g} + \tau\,(\overline{g} - {}^s\overline{g})$.

Weiter sei I_i in dieser Art maximal, d. h. für jede Abbildung $\Psi_i' : I_i' \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$, die diese drei Voraussetzungen erfüllt, gilt $I_i' \subseteq I_i$. Indem wir die gleichen Schritte wie in Abschnitt III.1 durchführen, erhalten wir, dass $I_i = [0\,,1]$.[3] Insbesondere hat $\Psi_i(0, \mathcal{S}^2)$ bzgl. der Schwarzschild Metrik ${}^s\overline{g}$ konstante mittlere Krümmung $-2/\sigma$. Damit sind diese Flächen jedoch identisch, d. h. $\Psi_1(0, \mathcal{S}^2) = \Psi_2(0, \mathcal{S}^2)$. Damit ist das Intervall

$$I := \Big\{\tau \in [0\,,1] \;\Big|\; \Psi_1\big(\tau, \mathcal{S}^2\big) = \Psi_2\big(\tau, \mathcal{S}^2\big)\Big\}$$

nicht-leer. Weiter ist es mit der Stetigkeit von Ψ_i abgeschlossen. Mit der lokalen Eindeutigkeit aus dem impliziten Funktionensatz aus Lemma III.1.8 ist I auch offen in und damit gleich $[0\,,1]$. Insbesondere ist $\Sigma_1 = \Psi_1(1, \mathcal{S}^2) = \Psi_2(1, \mathcal{S}^2) = \Sigma_2$. ///

[3] Dabei bemerken wir, dass wir unter diesen Voraussetzungen in Lemma III.1.10 nur ${}^\tau c_0 \leq c_0 + C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)$ statt ${}^\tau c_0 \leq C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)$ erhalten, was *hier* jedoch für die weitere Argumentation irrelevant ist, da diese zusätzliche Abschätzung nur für die Blätterungseigenschaft benötigt wurde.

III.3. Evolution der CMC-Flächen

In diesem Abschnitt untersuchen wir nun die *zeitliche Evolution* der Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung. Es sei dafür $\overline{\Phi} : I \times {}^t\overline{M} \to (\widehat{M}, \widehat{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, zeitliche Blätterung einer Lorentz-Mannigfaltigkeit $(\widehat{M}, \widehat{g})$. Nach Abschnitt III.1 existiert zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ eine Überdeckung ${}^t\Psi : (\sigma_0, \infty) \times \mathcal{S}^2 \to {}^t\overline{M}$ von ${}^t\overline{M} := \overline{\Phi}(t, \overline{M})$ und in jeder dieser ist die Fläche ${}^t_\sigma\Sigma$ eindeutig durch σ definiert, wobei wir σ wieder über die mittlere Krümmung ${}^t_\sigma\mathcal{H} \equiv: -2/\sigma$ definieren. Identifizieren wir jede dieser Flächen ${}^t_\sigma\Sigma$ mit ihrem Analogon $\overline{\Phi}(t, \cdot)^{-1}({}^t_\sigma\Sigma)$, so macht es Sinn zu überlegen, wie diese Fläche von der Zeit t abhängt. Das heißt, es macht Sinn ${}_\sigma\Psi : I \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M} : (t, p) \mapsto \overline{\Phi}(t, \cdot)^{-1}({}^t\Psi(\sigma, p))$ für fixes σ zu untersuchen. Diese Abbildung (asymptotisch) zu bestimmen ist das Ziel dieses Abschnitts. Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden durch den Autor in [Ner13] veröffentlicht.[4]

In diesem Abschnitt werden wir im obigen Sinn Kurzzeit-Ergebnisse erhalten, diese aber auch infinitesimal ausdrücken (Theorem III.3.12). Das heißt, einmal untersuchen wir eine komplette *zeitliche Blätterung* (wie oben) und einmal nur eine infinitesimale, wobei wir ersteren Fall auf zweiteren überführen.

III.3.1 Voraussetzung (für Abschnitt III.3 (Kurzzeit))
Es seien $(\widehat{M}, \widehat{g})$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\overline{\Phi} : I \times \overline{M} \to (\widehat{M}, \widehat{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, orthogonale zeitliche Blätterung mit nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)). Dabei sei $\overline{N} \in [\varepsilon + 3/2\,, 2]$ derart, dass

$$\left|\overline{\mathrm{J}}\right| \leq \frac{c_0}{d^{1+\overline{N}}}. \qquad \diamond$$

III.3.2 Voraussetzung (für Abschnitt III.3 (infinitesimal))
Es sei $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho}, \overline{\alpha})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, infinitesimale zeitliche Blätterung mit nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)). Dabei sei $\overline{N} \in [\varepsilon + 3/2\,, 2]$ derart, dass

$$\left|\overline{\mathrm{J}}\right| \leq \frac{c_0}{d^{1+\overline{N}}}. \qquad \diamond$$

Ist $(\overline{M}, \overline{g})$ $\mathcal{C}^1_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild, so genügt es, dass die zweite Fundamentalform mit $d^{-1-\varepsilon}$ abfällt, d. h. in diesem Fall kann (I.23) durch

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}\overline{\mathrm{k}}_{ij}}{\partial \overline{x}^\gamma}\right| \leq \frac{\overline{c}_1}{d^{1+\varepsilon+|\gamma|}} \qquad \forall\, |\gamma| \leq 1$$

ersetzt werden. Es ist aber auch in diesem Kontext üblich (I.23) anzunehmen. Weiter ist es (auch im asymptotisch flachen Fall) üblich anzunehmen, dass die Energiestromdichte (punktweise abgeschätzt) integrabel ist, d. h. $N = 2$ und $\overline{\mathrm{J}} \in \mathrm{L}^1(\overline{M})$ gilt. Die weiteren Verallgemeinerungen sind vorrangig dazu da, die Ergebnisse auch unter den Voraussetzungen von Abschnitt III.4 verwenden zu können.

[4] In der zitierten Veröffentlichung wurde zunächst nur den Schwarzschild-Fall betrachtet.

Zur Motivation für die Sätze dieses Abschnitts, erinnern wir uns daran, dass diese Flächen das Massezentrum[5] ${}^{t}\vec{Z}$ der Fläche ${}^{t}\overline{M}$ charakterisieren – falls dieses wohldefiniert ist. Weiter ist klar, wie sich ein Massezentrum in der Zeit bewegen muss, wenn wir den Newtonschen Fall betrachten: Würden wir ein isoliertes Newtonsches System mit Masse m_N betrachten und wäre ${}^{t}\vec{Z}_N$ dessen Massezentrum zu einem Zeitpunkt t, so würde

$$\frac{\partial\, {}^{t}\vec{Z}_N}{\partial t} = \frac{{}^{t}\vec{\mathrm{P}}_N}{m_N}$$

gelten, wobei ${}^{t}\vec{\mathrm{P}}_N$ den Newtonschen Gesamtimpuls des Systems zum Zeitpunkt t bezeichnet. Daher scheint es intuitiv anzunehmen, dass auch die Flächen ${}^{t}_{\sigma}\Sigma$ sich in Richtung des Quotienten von (ADM-)Impuls ${}^{t}\vec{\mathrm{P}}$ und Masse m bewegen, d. h. ${}_{\sigma}\Psi$ in t-Richtung einer „Verschiebung“ der Fläche ${}^{t}_{\sigma}\Sigma$ in diese Richtung entspricht. Genau dies zeigen wir in verschiedenen Versionen in diesem Abschnitt. Die schwächsten und gleichzeitig einprägsamsten Formen des Resultats sind die folgenden zwei.

III.3.3 Theorem (Evolution des CMC-Massezentrums)
Sei $(\widehat{M},\widehat{g})$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\overline{\Phi} : I \times \overline{M} \to (\widehat{M},\widehat{g})$ eine gleichmäßig $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, orthogonale zeitliche Blätterung mit Massen ${}^{t}m := m(\Phi(t,\overline{M}))$ (entspr. (I.25)) mit $|{}^{t}m| \geq M > 0$ für $t \in I$. Weiter sei die Energiestromdichte ${}^{t}\mathrm{J}$ der Flächen ${}^{t}\overline{M} := \overline{\Phi}(t,\overline{M})$ zu jedem Zeitpunkt mit punktweiser Abschätzung integrabel, d. h. für alle $t \in I$ gelte

$$\left\|{}^{t}\mathrm{J}\right\|_{\mathrm{L}^1({}^{t}\overline{M})} < \overline{c}_0, \qquad \left|{}^{t}\mathrm{J}\right| \leq \frac{\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d)}{d^3}, \qquad \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d) \xrightarrow{d\to\infty} 0.$$

Ist das (Koordinaten-)*CMC-Massezentrum* ${}^{t_0}\vec{Z}$ zu einem Zeitpunkt $t_0 \in I$ wohldefiniert, so ist es zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ wohldefiniert und erfüllt

$$\frac{\partial {}^{t}\vec{Z}}{\partial t} = \frac{{}^{t}\vec{\mathrm{P}}}{m},$$

wobei ${}^{t}\vec{\mathrm{P}}$ den (ADM-)Impuls von ${}^{t}\overline{M}$ in $\widehat{M}$ bezeichnet. ◇

Wir erkennen, dass dieses Theorem direkt aus dem folgenden Theorem III.3.4 folgt, da lediglich der Übergang $\sigma \to \infty$ gemacht werden muss (vgl. Definition III.3.5).

III.3.4 Theorem (Evolution der Eukl. Koord.Zentren der CMC-Flächen)
Sei $(\widehat{M},\widehat{g})$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\overline{\Phi} : I \times \overline{M} \to (\widehat{M},\widehat{g})$ eine gleichmäßig $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, orthogonale zeitliche Blätterung mit Massen ${}^{t}m := m(\Phi(t,\overline{M}))$

[5] Um die Lesbarkeit zu verbessern, haben wir hier darauf verzichtet dass Massezentrum mit einem Überstrich zu versehen.

(entspr. (I.25)) mit $|{}^t m| \geq M > 0$ für $t \in I$. Weiter sei die Energiestromdichte ${}^t\mathrm{J}$ der Flächen ${}^t\overline{M} := \overline{\Phi}(t, \overline{M})$ zu jedem Zeitpunkt mit punktweiser Abschätzung integrabel. Bezeichnet ${}^t_\sigma\vec{z}$ das Euklidische Koordinaten-Zentrum der Fläche ${}^t_\sigma\Sigma \hookrightarrow {}^t\overline{M}$ mit konstanter mittlerer Krümmung ${}^t_\sigma\mathcal{H} \equiv -2/\sigma$ aus Theorem III.1.1, so gilt für eine Konstante $C = C(M, \varepsilon, \overline{c}_0)$

$$\left| \frac{\partial\, {}^t_\sigma\vec{z}}{\partial t} - \frac{{}^t\vec{\mathrm{P}}}{m} \right| \leq C \left(\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma) + \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma) \right)$$

wobei ${}^t\vec{\mathrm{P}}$ den (Gesamt-)Impuls von ${}^t\overline{M}$ in $\widehat{M}$ bezeichnet. ◇

In diesen Theoremen haben wir zwei Begriffe verwendet, deren formale Definition wir noch schuldig sind. Der erste dieser Begriffe ist der des CMC-Massezentrums.

III.3.5 Definition (CMC-Massezentrum)
Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit und bezeichne ${}_\sigma\vec{z}$ das Euklidische Koordinaten-Zentrum (nach Definition II.6.3) der eindeutigen CMC-Fläche ${}_\sigma\Sigma$ mit mittlerer Krümmung $-2/\sigma$ aus der Blätterung von Theorem III.1.1. Ist der Limes

$$\vec{Z} := \lim_{\sigma\to\infty} {}_\sigma\vec{z}$$

wohldefiniert, so heißt $\vec{Z}$ *(Koordinaten-)CMC-Massezentrum*. ◇

Der zweite bisher nicht definierte Begriff ist der von Arnowitt-Deser-Misner eingeführte Begriff des (ADM-)Impulses [ADM61], welchen wir kurz wiederholen. Dabei beachten wir die hier getroffene Vorzeichenkonvention der zweiten Fundamentalform.

III.3.6 Definition (Impulstensor und ADM-Impuls)
Sei $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache Anfangswertfläche und $\Sigma \hookrightarrow \overline{M} \setminus \overline{K}$ eine geschlossene Fläche darin. Der *Impulstensor* Π, der *Impuls* $\vec{\mathrm{P}} = (\overline{\mathrm{P}}_1, \overline{\mathrm{P}}_2, \overline{\mathrm{P}}_3) \in \mathbb{R}^3$ und der *approximative Impuls* $\vec{\mathrm{p}}(\Sigma) := (\mathrm{p}_1(\Sigma), \mathrm{p}_2(\Sigma), \mathrm{p}_3(\Sigma)) \in \mathbb{R}^3$ sind durch

$$\Pi := \overline{\mathcal{H}}\overline{g} - \overline{\mathrm{k}}, \qquad \mathrm{p}_i(\Sigma) := \frac{1}{8\pi} \int_\Sigma \Pi\,(\nu, \overline{e}_i)\,\mathrm{d}\mu, \qquad \vec{\mathrm{P}} := \lim_{r\to\infty} \vec{\mathrm{p}}\Big(\mathcal{S}^2_r(0)\Big)$$

definiert, falls dieser Limes existiert, wobei μ bzw. ν das Oberflächenmaß bzw. die äußere Einheitsnormale von $\Sigma \hookrightarrow \overline{M} \setminus \overline{K}$ bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet. ◇

Wir bemerken, dass in der Literatur der Impuls oft bezüglich der Euklidischen Daten ${}^e\nu$ und ${}^e\mu$ anstelle von ν und μ definiert wird. Da die Anfangsdaten $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flach sind, spielt dies jedoch für den Impuls gar keine und für den approximativen Impuls asymptotisch keine Rolle.

Wir wiederholen kurz das bekannte Resultat, dass die Integrabilität der Impulsdichte, d. h. $\overline{\mathrm{J}} \in \mathrm{L}^1(\Sigma)$, die Wohldefiniertheit des Impulses sichert.

III.3.7 Proposition (Existenz des Impulses)
Erfüllen Anfangsdaten $(\overline{M},\overline{g},\overline{\mathrm{k}},\overline{\mathrm{J}},\overline{\varrho})$ Voraussetzung III.3.2, so existiert eine Konstante $C=C(m,\varepsilon,\overline{c}_0,\overline{c}_1)$ mit

$$|\vec{\mathrm{p}}({}_\sigma\Sigma)|\leq C\,\sigma^{2-\overline{N}},\tag{III.3}$$

wobei ${}_\sigma\Sigma$ die Fläche konstanter mittlerer Krümmung ${}^{-2}\!/\!{}_\sigma$ aus Theorem III.1.1 bezeichnet. Weiter ist für $\overline{\mathrm{J}}\in\mathrm{L}^1(\overline{M}\setminus\overline{K})$ der Impuls $\vec{\mathrm{P}}$ wohldefiniert und dieser erfüllt

$$|\vec{\mathrm{p}}-\vec{\mathrm{p}}({}_\sigma\Sigma)|\leq C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma). \qquad \diamond$$

Beweis
Seien Σ_1 und Σ_2 zwei geschlossene Hyperflächen in $\overline{M}\setminus\overline{K}$ so, dass Σ_2 die Fläche Σ_1 umschließt, d. h. das von Σ_2 in $\overline{M}\setminus\overline{K}$ berandete Kompaktum beinhaltet Σ_1, und Σ_1 im vergleichbaren Sinn $\overline{K}$ umschließt. Weiter sei U die Fläche zwischen Σ_1 und Σ_2 sowie $r_- := \min_{\Sigma_1} d$ und $r_+ := \max_{\Sigma_2} d$. Bezeichnet ${}_M\nu$ die äußere Normale und ${}_M\mu$ das Oberflächenmaß einer geschlossenen Hyperfläche M in $\overline{M}$, so erhalten wir mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Sigma_1}\Pi\left({}_{\Sigma_1}\nu,\bar{e}_i\right)\mathrm{d}\,{}_{\Sigma_1}\mu-\int_{\Sigma_2}\Pi\left({}_{\Sigma_2}\nu,\bar{e}_i\right)\mathrm{d}\,{}_{\Sigma_2}\mu\right| &\leq \int_U\left|\overline{\mathrm{div}}(\Pi\left(\bar{e}_i,\cdot\right))\right|\mathrm{d}\overline{\mathrm{Vol}}\\ \leq \int_{r_-}^{r_+}\int_{\mathcal{S}^2_r(0)}\left|\left(\overline{\mathrm{div}}\Pi\right)_i\right|+\frac{C}{d^{3+\varepsilon}}\,\mathrm{d}\,{}_r\mu\;\;\mathrm{d}r &\leq \int_{r_-}^{r_+}\frac{C}{r^{\overline{N}-1}}\,\mathrm{d}r+C\,r_-^{\varepsilon}\end{aligned}$$

wobei die Konstante $C=C(m,\varepsilon,\overline{c}_0,\overline{L},\overline{c}_1,\overline{N})$ unabhängig von Σ_1 und Σ_2 sowie r_- und r_+ gewählt werden kann und ${}_r\mu$ das von $\overline{g}$ induzierte Oberflächenmaß von $\mathcal{S}^2_r(0)$ bezeichnet. Es ergibt sich

$$\left|\int_{\Sigma_1}\Pi\left({}_{\Sigma_1}\nu,\bar{e}_i\right)\mathrm{d}\,{}_{\Sigma_1}\mu-\int_{\Sigma_2}\Pi\left({}_{\Sigma_2}\nu,\bar{e}_i\right)\mathrm{d}\,{}_{\Sigma_2}\mu\right|\leq C(\Sigma_1)+C\,r_+^{\overline{N}-2}$$

und damit die erste Behauptung (III.3) indem wir Σ_1 fixieren. Ersetzen wir im Fall von $\overline{\mathrm{J}}\in\mathrm{L}^1(\Sigma)$ die Abschätzung entsprechend zu

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Sigma_1}\Pi\left({}_{\Sigma_1}\nu,\bar{e}_i\right)\mathrm{d}\,{}_{\Sigma_1}\mu-\int_{\Sigma_2}\Pi\left({}_{\Sigma_2}\nu,\bar{e}_i\right)\mathrm{d}\,{}_{\Sigma_2}\mu\right| &\leq C\,r_-^{\varepsilon}+\int_{r_-}^{\infty}\int_{\mathcal{S}^2_r(0)}\left|\overline{\mathrm{J}}\right|\mathrm{d}_r\mu\;\mathrm{d}r\\ &\leq \frac{C}{r_-^{\varepsilon}}+\left\|\overline{\mathrm{J}}\right\|_{\mathrm{L}^1\left(\mathbb{R}^3\setminus B_{r_-}(0)\right)},\end{aligned}$$

so erhalten wir durch Betrachtung von $\Sigma_2 := \mathcal{S}^2_{r_+}(0)$ für $r_+\to\infty$ und $\Sigma_1 := \mathcal{S}^2_{r_-}(0)$ mit $r_-\to\infty$ bzw. $\Sigma_1={}_\sigma\Sigma$ die weiteren Behauptungen. ////

Wir erkennen damit, dass Theorem III.3.4 (und damit auch Theorem III.3.3) eine direkte Folgerung des folgenden Korollar III.3.8 ist, welches wiederum direkt aus Theorem III.3.9 folgt.

III.3.8 Korollar (Evolution der CMC-Flächen)
Sei $(\widehat{M},\widehat{g})$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\overline{\Phi} : I \times \overline{M} \to (\widehat{M},\widehat{g})$ eine gleichmäßig $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, orthogonale zeitliche Blätterung mit Massen ${}^t m := m(\Phi(t,\overline{M}))$ (entspr. (I.25)) mit $|{}^t m| \geq M > 0$ für $t \in I$. Weiter sei die Energiestromdichte ${}^t\overline{\mathrm{J}}$ der Flächen ${}^t\overline{M} := \overline{\Phi}(t,\overline{M})$ zu jedem Zeitpunkt integrabel, d. h. für alle $t \in I$ gelte ${}^t\overline{\mathrm{J}} \in \mathrm{L}^1({}^t\overline{M})$. Es bezeichne ${}^t_\sigma\Sigma := \Phi(t,\sigma,\mathcal{S}^2)$ die Fläche konstanter mittlerer Krümmung ${}^{-2}\!/\!_\sigma$ in ${}^t\overline{M}$ und

$$ {}^t\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}\left({}^t_\sigma\Sigma\right) := \frac{\sigma}{8\pi}\int_\Sigma \overline{\mathrm{J}}\,(\nu)\,\nu_i\,\mathrm{d}\mu, $$

wobei $\nu = {}^t_\sigma\nu$ die äußere Einheitsnormale von ${}^t_\sigma\Sigma$ bzgl. $\overline{g}$ und $\mu = {}^t_\sigma\mu$ das von ${}^t\overline{g}$ induzierte Oberflächenmaß von ${}^t_\sigma\Sigma$ seien. Es existiert eine Konstante $C \geq C(\varepsilon,\overline{c}_0,\overline{c}_1)$ mit

$$ \left| {}^t\overline{g}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t},\nu\right) - \frac{{}^t\vec{\mathrm{P}}({}^t_\sigma\Sigma)}{m} + \frac{\sigma}{8\pi\, m}\int_\Sigma \overline{\mathrm{J}}\,(\nu)\,\nu_i\,\mathrm{d}\mu \right| \leq \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma) + \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma) \qquad \sigma > \sigma_1 $$

◇

Wir wollen nun das Kurzzeit-Resultat in voller Allgemeinheit wiedergeben. Wir bemerken, dass dieses Resultat identisch für zeitliche, orthogonale Blätterungen $\overline{\Phi}$ mit $|\partial^{|\gamma|}\overline{\mathrm{k}}| \leq {}^{\overline{c}_1}\!/\!_{d^{1+\varepsilon+|\gamma|}}$ ($|\gamma| \leq 1$) gilt, wenn die zugehörigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten $({}^t\overline{M},g)$ $\mathcal{C}^1_{1+\varepsilon}$-asymptotisch zu Schwarzschild sind.

III.3.9 Theorem (Evolution der CMC-Flächen (stark))
Sei $(\widehat{M},\widehat{g})$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\overline{\Phi} : I \times \overline{M} \to (\widehat{M},\widehat{g})$ eine gleichmäßig $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, orthogonale zeitliche Blätterung mit Massen ${}^t m := m(\Phi(t,\overline{M}))$ (entspr. (I.25)) mit $|{}^t m| \geq M > 0$ für $t \in I$. Es existiert $\sigma_1 \geq \sigma_1(M,\varepsilon,\overline{c}_0,\overline{c}_1)$ und eine stetig-differenzierbare Abbildung $\Psi : I \times (\sigma_1\,,\infty) \times \mathcal{S}^2 \to \widehat{M}$ so, dass ${}^t\Psi := \Psi(t,\cdot,\cdot)$ die CMC-Blätterung von ${}^t\overline{M}$ wie in Theorem III.1.1 ist. Bezeichne ${}^t_\sigma\Sigma := \Phi(t,\sigma,\mathcal{S}^2)$ die Fläche konstanter mittlerer Krümmung ${}^{-2}\!/\!_\sigma$ in ${}^t\overline{M}$ und

$$ {}^t\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}\left({}^t_\sigma\Sigma\right) := \frac{\sigma}{8\pi}\int_\Sigma \overline{\mathrm{J}}\,(\nu)\,\nu_i\,\mathrm{d}\mu, $$

wobei $\nu = {}^t_\sigma\nu$ die äußere Einheitsnormale von ${}^t_\sigma\Sigma$ bzgl. $\overline{g}$ und $\mu = {}^t_\sigma\mu$ das von ${}^t\overline{g}$ induzierte Oberflächenmaß von ${}^t_\sigma\Sigma$ seien. Es existiert eine Konstante $C = C(M,\varepsilon,\overline{c}_0,\overline{c}_1)$ so, dass für alle $\sigma > \sigma_1$

$$ \left| {}^t\overline{g}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t},\nu\right) - \frac{{}^t\vec{\mathrm{P}}({}^t_\sigma\Sigma) + {}^t\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}({}^t_\sigma\Sigma)}{m} \right| \leq \frac{C}{\sigma^\varepsilon} + \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)\left({}^t\vec{\mathrm{p}}\left({}^t_\sigma\Sigma\right) + {}^t\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}\left({}^t_\sigma\Sigma\right)\right) $$

◇

gilt.

III.3.10 Ergänzung (zu Theorem III.3.9)
Die Abbildung Ψ aus Theorem III.3.9 ist in der ersten Komponente $\mathcal{C}^1$-nahe an einer Verschiebung der Fläche und in der zweiten Komponente $\mathcal{C}^1$-nahe an der Kombination einer

Verschiebung und einer Vergrößerung der Fläche. Letzteres gilt im Sinne der Ergänzung zu Theorem III.1.1 und ersteres bedeutet, dass für eine Konstante $C = C(M, \varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1)$ und alle $t \in I$ und $\sigma < \sigma_1$

$$\|F_t\|_{\mathrm{L}^\infty({}^t_\sigma\Sigma)} + \frac{1}{\sigma}\|F_t\|_{\mathrm{H}({}^t_\sigma\Sigma)} \le \frac{C}{\sigma^\varepsilon} \qquad \text{für } F_t := \overline{g}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \nu\right) - \frac{{}^t\mathrm{p}_i({}^t_\sigma\Sigma) + {}^t\mathrm{p}_i({}^t_\sigma\Sigma)}{m}\,\nu^i$$

gilt. ◇

Beweis
Mit Theorem III.1.1 existiert Ψ mit den geforderten Eigenschaft, außer dass die Regularität in t-Richtung fehlt. Insbesondere fehlen die zugehörigen Abschätzungen. Durch Betrachtung des Rückzugs über $\overline{\Phi}$, können wir (im glatten Sinne) ${}^t\overline{M} = \overline{M}$ annehmen. Seien nun $t' \in I$ und $\sigma' > \sigma_1$ fest. Äquivalent zu Lemma III.1.8 bemerken wir erneut, dass ${}^0\mathscr{L}_1|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ für $p > 2$ die Linearisierung von

$$\mathsf{H} : I \times \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma) \to \mathrm{L}^p(\Sigma) : (t, f) \mapsto {}^t\mathscr{H}(\mathrm{graph}_\nu f) + \frac{2}{\sigma'}$$

in der zweiten Komponente im Punkt $(t', 0) \in [0\,,1] \times \mathrm{H}^2(\Sigma)$ ist, wobei ${}^t\mathscr{H}(\,\mathrm{graph}_\nu f)$ die mittlere Krümmung bzgl. ${}^t\overline{g}$ von $\mathrm{graph}_\nu f$ bezeichnet. Wir bemerken dabei, dass nach Proposition II.3.3 dies zumindest für kleine $\|f\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)}$ eine wohldefinierte Hyperfläche von $\overline{M}$ ist, also H zumindest in einer Umgebung von $(t_1, \sigma_1, 0)$ wohldefiniert ist. Mit dem impliziten Funktionensatz existiert damit auf einer offenen Umgebung $I' \subseteq I$ von t' eine stetig-differenzierbare Abbildung $F : I' \to \mathrm{H}^2(\Sigma)$ so, dass $\mathsf{H}(t, F(t)) \equiv 0$ für $t \in I'$. Mit der Eindeutigkeit aus Theorem III.2.1 ist damit $\mathrm{graph}_\nu F(t) = {}^t_\sigma\Sigma$ für $t \in I'$. Damit ist Ψ von der gewünschten Regularität und es bleiben nur die Ungleichungen aus obiger Ergänzung zu Theorem III.3.9 zu zeigen. Nach Satz II.5.9 und Proposition II.6.4 müssen wir dafür nur die Lapse-Funktion betrachten. Damit folgt das Ergebnis aus Proposition III.3.11 und der nachfolgenden infinitesimalen Version Theorem III.3.12. ////

III.3.11 Proposition (Charakterisierung der Lapse-Funktion)
Die Lapse-Funktion $u = {}^\sigma u$ von $\Sigma = {}^t_\sigma\Sigma$ erfüllt

$${}^0\mathscr{L}_1 u = \Big(\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu} - \overline{\mathrm{J}}(\nu) - \mathrm{tr}\Big(\mathrm{k} \odot \overline{\mathrm{k}}\Big)\Big)\,\overline{\alpha} - D_\nu\overline{\alpha}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} + 2\overline{\mathrm{k}}_\nu(\nabla\overline{\alpha}), \tag{III.4}$$

wobei die Indices t und σ unterdrückt wurden und $\overline{\alpha} = \widehat{g}\,({}^{\partial\Phi}/{}_{\partial t}, \overline{\vartheta})$ die zeitliche Lapse-Funktion und ν die äußere Normale von Σ bzgl. ${}^t\overline{g}$ sind. ◇

Beweis
Durch Betrachtung des Rückzugs über Φ können wir (im glatten Sinne) ${}^t\overline{M} = \overline{M}$ annehmen. Für eine Hyperfläche M in $\overline{M}$ sei ${}^t\mathscr{H}(M)$ die mittlere Krümmung bzgl. ${}^t\overline{g}$. Durch die Rechenregeln der Lie-Ableitung erkennen wir, dass für fixes $\sigma > \sigma_1$ und $t' \in I$ in der

Notation von Theorem III.3.9

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=t'} \frac{-2}{\sigma} &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=t'} \Big({}^t\mathcal{H}\Big(\Psi\Big(t, \mathcal{S}^2\Big)\Big)\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=t'} \Big({}^t\mathcal{H}\Big(\Psi\Big(t', \mathcal{S}^2\Big)]\Big)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=t'} \Big({}^{t'}\mathcal{H}\Big(\Psi\Big(t, \mathcal{S}^2\Big)\Big)\Big) = {}^0\mathscr{L}_1 u + {}^0\mathscr{L}_0 \overline{\alpha} \end{aligned}$$

gilt. Damit folgt die Aussage mit Proposition I.2.10. ////

Nun sind wir in der Lage das zu Theorem III.3.9 äquivalente, infinitesimale Resultat zu formulieren. Unter Berücksichtigung von Proposition II.6.4 sowie Proposition III.3.11 bzw. Gleichung (III.4) kann dieses wie folgt ausgedrückt werden.

III.3.12 Theorem (Infinitesimale Evolution der CMC-Flächen)
Sei $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho}, \overline{\alpha})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache, infinitesimale zeitliche Blätterung mit nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)). Weiter sei $\Sigma = {}_\sigma\Sigma$ die Fläche konstanter mittlerer Krümmung $-2/\sigma$ aus der Überlagerung von $\overline{M}$ entsprechend Theorem III.1.1. Bezeichnet

$$\vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}(\Sigma) := \frac{\sigma}{8\pi m} \int_\Sigma \overline{\mathrm{J}}\,(\nu)\, \nu_i \,\mathrm{d}\mu,$$

so gilt für eine Konstante $C = C(m, \varepsilon, \overline{c}_0, \overline{L}, \overline{c}_1)$

$$\left| 3 \fint_\Sigma u\, \nu_i \,\mathrm{d}\mu - \big(\vec{\mathrm{p}}(\Sigma) + \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}(\Sigma)\big) \right| \leq \frac{C}{\sigma^\varepsilon} + C\, \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)\big(\vec{\mathrm{p}}(\Sigma) + \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}(\Sigma)\big),$$

falls $\sigma \geq \sigma(\overline{c}_0, \overline{c}_1)$ gilt, wobei $\nu := {}_\sigma\nu$ die äußere Normale und $u := {}_\sigma u$ die eindeutige *Lapse-Funktion* von ${}_\sigma\Sigma$ ist, die (III.4) auf ${}_\sigma\Sigma$ erfüllt. Weiter gilt

$$\left\| u^\perp \right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} + \frac{1}{\sigma} \left\| u^\perp \right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)} \leq \frac{C}{\sigma^\varepsilon}. \tag{III.5}$$

◇

Beweis
Wir betrachten ein fixes σ und unterdrücken den Index σ im Folgenden. Die Ungleichung (III.5) folgt direkt aus Satz II.5.9, da Gleichung (III.4) mit den Annahmen an $\overline{\mathrm{k}}$ direkt $|{}^0\mathscr{L}_1 u| \leq C/\sigma^{\overline{L}+1}$ impliziert.

Seien nun f_i drei L^2-orthonormalen Eigenfunktionen des Stabilitätsoperators zu Eigenwerten λ_i mit $|\lambda_i| \leq 1/\sigma^2$. Für diese gilt nach Satz II.5.9 $\|f_i^\perp\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq C/\sigma^\varepsilon$. Da ${}^0\mathscr{L}_1$ selbst-adjungiert ist, liefert (III.4) per Integration

$$\int_\Sigma u\, \nu_i \,\mathrm{d}\mu = \int \frac{f_i}{\lambda_i} \Big(\overline{\alpha}\Big(\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}}_\nu - \overline{\mathrm{J}}(\nu) - \mathrm{tr}\Big(\mathrm{k} \odot \overline{\mathrm{k}}\Big)\Big) - D_\nu\overline{\alpha}\ \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} + 2\overline{\mathrm{k}}_\nu(\nabla\overline{\alpha})\Big) \,\mathrm{d}\mu.$$

Per Annahme an $\overline{\alpha}$, $\overline{\mathrm{k}}$ und $\overline{\mathrm{J}}$ erhalten wir

$$\left|D_\nu\overline{\alpha}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right| + \left|\overline{\mathrm{k}}_\nu(\nabla\overline{\alpha})\right| + \left|\overline{\alpha}\left(\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}}_\nu - \overline{\mathrm{J}}(\nu)\right) - \left(\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}}_\nu - \overline{J}(\nu)\right)\right| \leq \frac{C}{\sigma^{3+\varepsilon}}.$$

Nach Lemma III.1.10 gilt weiter $|\mathring{\mathrm{k}}| \leq {}^{C}\!/\!{}_{\sigma^{\varepsilon+3/2}}$ und daher auch

$$\left|\alpha\,\mathrm{tr}\!\left(\mathrm{k}\odot\overline{\mathrm{k}}\right) - \frac{\mathcal{H}}{2}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right| \leq \frac{C}{\sigma^{3+\varepsilon}}.$$

Der einzige Term, den wir noch betrachten müssen, ist daher

$$\int f_i\left(\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}}_\nu - \overline{J}(\nu) - \frac{\mathcal{H}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}}{2}\right)\mathrm{d}\mu = -\int \overline{\mathrm{k}}(\nu,\nabla f_i) + f_i\left(\overline{\mathrm{J}}(\nu) + \frac{\mathcal{H}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}}{2}\right)\mathrm{d}\mu.$$

Berücksichtigen wir die (asymptotische) Charakterisierung (II.22) von ∇f_i aus Proposition II.4.6, so erhalten wir in der Notation von Proposition II.4.6

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Sigma f_i\,u\,\mathrm{d}\mu - \frac{1}{\sigma\lambda_i}\int \overline{\mathcal{H}}\,f_i - \overline{\mathrm{k}}(\nu,X_{f_i}) - \sigma\,\overline{\mathrm{J}}(\nu)\,f_i\,\mathrm{d}\mu\right|\\ &\qquad\leq \left|\int_\Sigma f_i\,u\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{\sigma\lambda_i}\int \overline{\mathrm{k}}(\nu,X_{f_i}-f_i\nu) + f_i\left(\sigma\,\overline{\mathrm{J}}(\nu) - \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right)\mathrm{d}\mu\right| + C\,\sigma^{1-\varepsilon} \leq C\,\sigma^{1-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir mit der Vergleichbarkeit von $\mathrm{lin}\{\nu_i\}_{i=1}^3$ und $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ (vgl. die Argumentation im Beweis von Proposition II.5.7), sowie der Vergleichbarkeit von $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ und $\mathrm{lin}\{f_i\}_{i=1}^3$, die aus $\|f_i^\perp\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq {}^{C}\!/\!{}_{\sigma^\varepsilon}$ folgt,

$$\left\|u^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq C\,\max_i\left|\frac{1}{8\pi m}\int \overline{\mathcal{H}}\,\nu_i - \overline{\mathrm{k}}(\nu,\overline{e}_i) - \sigma\,\overline{\mathrm{J}}(\nu)\,\nu_i\,\mathrm{d}\mu\right| + C\,\sigma^{1-\varepsilon}.$$

Damit ergibt sich mit Proposition II.5.8

$$\left|3\fint_\Sigma f_i\,u\,\mathrm{d}\mu - \left(\vec{\mathrm{p}}(\Sigma) + \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}(\Sigma)\right)\right| \leq \frac{C}{\sigma^\varepsilon} + C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)\left(\vec{\mathrm{p}}(\Sigma) + \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}(\Sigma)\right).$$

////

III.4. Euklidisches Koordinaten-Zentrum der Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Wir erhalten aus der Evolution der Flächen konstanter mittlerer Krümmung Theorem III.3.9 im Schwarzschild-Fall auch eine Formel für das Euklidische Koordinaten-Zentrum dieser Flächen. Um das Zentrum bestimmen zu können, müssen wir $\fint u\nu_i\,\mathrm{d}\mu$ in Theorem III.3.12 bis inkl. der Ordnung 1 bestimmen, d. h. benötigen

$$\left|\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma)\left(\vec{\mathrm{p}}(\Sigma) + \vec{\mathrm{p}}_{\mathrm{Err}}(\Sigma)\right)\right| \leq \frac{C}{\sigma^\varepsilon}.$$

Entsprechend müssen wir $\varepsilon \in (0\,,{}^1\!/\!{}_2]$ ausschließen. Wir bemerken, dass diese Einschränkung in [Ner14b] durch Regge-Teitelboim Bedingungen ersetzt wurde.

III.4.1 Korollar (Euklidisches Koordinaten-Zentrum der CMC-Flächen)
Sei $(\overline{M},\overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)), die $\mathcal{C}^1_{\varepsilon+3/2}$-asymptotisch zu Schwarzschild ist. Weiter sei ${}_\sigma\Sigma$ die Fläche konstanter mittlerer Krümmung ${}^{-2}/\sigma$ aus der Blätterung von $\overline{M}$ entsprechend Theorem III.1.1. Es existieren Konstanten $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon,\overline{c}_0)$ und $C = C(\varepsilon,\overline{c}_0)$ so, dass für das Euklidische Koordinaten-Zentrum ${}_\sigma\vec{z}$ von ${}_\sigma\Sigma$ nach Definition II.6.3

$$\left|{}_\sigma z_i - \frac{1}{8\pi m}\left(\int_{\mathcal{S}^2_\sigma(0)} {}^a\Pi\left({}_\sigma\nu,\bar{e}_i\right) - \sigma\,{}_\sigma\nu_i\left(\overline{\operatorname{div}}{}^a\Pi\right)({}_\sigma\nu)\,\mathrm{d}\mu\right)\right| \leq \frac{C}{\sigma^\varepsilon}$$

gilt, falls $\sigma > \sigma_1$, wobei ${}^a\Pi := {}^{-1}/2\left(\overline{\operatorname{tr}}({}^s\overline{g}-\overline{g})\overline{g} - ({}^s\overline{g}-\overline{g})\right)$ eine künstliche Größe ist und ${}_\sigma\nu$ die äußere Normale an $\mathcal{S}^2_\sigma(0)$ bezeichnet. ◇

Beweis
Wir betrachten wieder die künstliche vierdimensionale Mannigfaltigkeit $({}^a\widehat{M},{}^a\widehat{g})$ aus Definition III.1.6. Das Ergebnis folgt nun aus Theorem III.3.9 für die zeitliche Überdeckung $\Phi : [0\,,1] \times \overline{M} \to {}^a\widehat{M} : (t,p) \mapsto (t,p)$, wenn wir die selbe Argumentation wie in Proposition A.2.1 verwenden, um die (asymptotische) Unabhängigkeit des Integrals von ${}^t_\sigma\vec{z}$ zu erhalten. ////

III.4.2 Korollar (ADM- und CMC-Massezentrum sind identisch)
Sei $(\overline{M},\overline{g})$ eine $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)), die $\mathcal{C}^1_{\varepsilon+3/2}$-asymptotisch zu Schwarzschild ist. Das ADM-Massezentrum $\vec{Z}_{\mathrm{ADM}} \in \mathbb{R}^3$ ist genau dann wohldefiniert, wenn das CMC-Massezentrum $\vec{Z}_{\mathrm{CMC}}$ wohldefiniert ist und in diesem Fall stimmen diese Zentren überein. Dabei ist

$$\vec{Z}_{\mathrm{ADM}i} := \frac{1}{16\pi m}\lim_{r\to\infty}\int_{\mathcal{S}^2_r(0)}\sum_{j=1}^3\left(\overline{x}_i\left(\frac{\partial\overline{g}_{jk}}{\partial\overline{x}^j} - \frac{\partial\overline{g}_{jj}}{\partial\overline{x}^k}\right)\overline{x}^k - \left(\overline{g}_{jk}\,\frac{\overline{x}^j}{r} - \overline{g}_{jj}\,\frac{\overline{x}_i}{r}\right)\right)\mathrm{d}\mathscr{H}^2.$$ ◇

Beweis
Wir erhalten dieses Ergebnis durch Koordinatisierung des Integral-Ausdrucks in Korollar III.4.1. ////

Das Ergebnis aus Korollar III.4.2 wurde auch in [CW08, Hua10, EM12] unter jeweils anderen Voraussetzungen gezeigt – in letzterem Fall in beliebiger Dimension $n \geq 3$. Es musste dabei allerdings als zusätzliche Voraussetzung die Symmetrie-Annahme an $\overline{\mathcal{S}}$ aus den Regge-Teitelboim-Bedingungen angenommen werden. Dies garantiert die Wohldefiniertheit dieser Zentren – siehe bspw. [CS03, CW08, Hua10, CP11].

Wir geben nun noch Beispiele dafür, dass die Abschätzungen an das Euklidische Koordinaten-Zentrum aus Definition I.3.7 optimal sind. Das heißt, wir geben Beispiele Riemannscher Mannigfaltigkeiten, die $\mathcal{C}^1_{2-\eta}$-asymptotisch zu Schwarzschild sind und für die das Euklidische Koordinaten-Zentrum ${}_\sigma\vec{z}$ der Flächen ${}_\sigma\Sigma$ aus Theorem III.1.1 zumindest $|{}_\sigma\vec{z}| \geq {}^{\sigma^{1-\eta}}/C$ für eine Konstante $C > 0$ erfüllen. Weiter zeigen wir, dass auch für

$\eta = 0$ ($\varepsilon = 1$) nicht gewährleistet ist, dass diese Zentren konvergieren, also möglich ist, dass keines der Massezentren existiert. Dies widerspricht insbesondere [HY96, Thm 4.2].

Für die folgende Konstruktion verwenden wir das Beispiel einer zweiten Fundamentalform ${}^{Y}\overline{\mathrm{k}}_{ij}$ mit vorgegebenem (ADM-)Impuls $P \in \mathbb{R}^3$, wie es von York vorgeschlagen wurde [Yor79, Kap. 6]. Weitere Beispiele sind in der Arbeit [CN14] veröffentlicht, welche in Zusammenarbeit mit Carla Cederbaum entstand.[6]

III.4.3 Beispiel (Die Abschätzungen sind scharf)
Definiere $\overline{g} := {}^{s}\overline{g} - 2\, f(d)\, \overline{\mathrm{k}}$ für

$$\overline{\mathrm{k}}_{ij} := {}^{Y}\overline{\mathrm{k}}_{ij} := \frac{-3}{2\, d^3} \left(P_i\, \overline{x}_j + \overline{x}_i\, P_j - P^k\, \overline{x}_k \left({}^{s}\overline{g}_{ij} - \frac{\overline{x}_i\, \overline{x}_j}{d^2} \right) \right)$$

auf $\overline{M} := \mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$, wobei $P = (P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^2_{d,-\eta}(\overline{M})$ und $\eta \in [0\,, 1/2)$ beliebig sind. Die künstlichen Größen $(\widehat{M}, \widehat{g})$ seien entsprechend Definition III.1.6 definiert. Insbesondere sind die Metrik ${}^{\tau}\overline{g} = {}^{s}\overline{g} + (\overline{g} - {}^{s}\overline{g})$, die auf $\{\tau\} \times \overline{M}$ induzierte werden, gleichmäßig $\mathcal{C}^1_{2-\eta}$-asymptotisch zu Schwarzschild. Durch Korollar III.3.8 und Lemma III.1.12 erhalten wir damit, dass das Euklidische Koordinaten-Zentrum ${}^{\tau}_{\sigma}\vec{z}$ der Fläche ${}^{\tau}_{\sigma}\Sigma$ (entsprechend der Notation aus Voraussetzung III.1.4)

$$\left| {}^{\tau}_{\sigma}z_i - \frac{1}{m} \int_0^{\tau} \int_{\mathcal{S}^2_\sigma\left({}^{\tau'}_{\sigma}\vec{z}\right)} \Pi\,({}^{e}\nu, \bar{e}_i) + \sigma\, {}^{e}\nu_i\, {}^{\tau'}\overline{\mathrm{J}}\,({}^{e}\nu)\, \mathrm{d}{}^{e}\mu\, \mathrm{d}\tau' \right| \le \frac{C}{\sigma^{1-\eta}}$$

erfüllt. Insbesondere ergeben sich in diesem Fall Abschätzungen an ${}^{\tau}_{\sigma}\vec{z}$ und damit auch

$$\left| {}^{\tau}_{\sigma}z_i - \frac{1}{m} \int_0^{\tau} \int_{\mathcal{S}^2_\sigma(0)} \Pi\,(\mu, \bar{e}_i) + \sigma\, {}^{e}\nu_i\, {}^{\tau'}\overline{\mathrm{J}}\,(\mu)\, \mathrm{d}{}^{e}\mu\, \mathrm{d}\tau' \right| \le \frac{C}{\sigma^{1-\eta}}.$$

Wir bemerken nun, dass nach Wahl von $\overline{\mathrm{k}}$ bereits $|\int_{\mathcal{S}^2_\sigma(0)} \Pi\,({}^{e}\nu, \bar{e}_i)\, \mathrm{d}{}^{e}\mu - P_i| \le C/\sigma^{1-\eta}$ gilt. Weiter ergibt direkte Rechnung

$$\left\| {}^{\tau'}\overline{\mathrm{J}}\,(\mu) + \frac{3f'(d)\, P^k\, \mu_k}{d^2} \right\|_{\mathcal{C}_{d,3-\delta}\left({}^{\tau}\overline{M}, {}^{\tau}\overline{g}\right)} \le C, \qquad \left\| {}^{\tau'}\overline{\mathrm{J}} \right\|_{\mathcal{C}_{d,3-\delta}\left({}^{\tau}\overline{M}, {}^{\tau}\overline{g}\right)} \le C.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\left| \vec{\eta}(\tau, \sigma) - \tau\, \frac{2f(\sigma) - \sigma\, f'(\sigma)}{2}\, \frac{P}{m} \right| \le \frac{C}{\sigma^{1-\delta}}.$$

Durch Wahl von $f(d) = d^{\delta}$ erhalten wir, dass die Abschätzungen für $\delta \in [0\,, 1/2)$ scharf sind. Durch die Wahl $f(d) := \sin(\ln d)$ erhalten wir, dass die Konvergenz der Euklidischen Koordinaten-Zentren selbst im Fall von $\varepsilon = 1$ nicht notwendigerweise wahr ist. $\diamond$

[6] Der hier vorgestellte Teil des zitierten Artikels wurde vom Autor der vorliegenden Arbeit erarbeitet und daher hier wiedergegeben. Die weiteren Beispiele des zitierten Artikels wurden anschließend vorrangig von Carla Cederbaum erarbeitet und werden daher hier nicht genauer beschrieben.

IV. Flächen konstanter Expansion

In diesem Kapitel untersuchen wir die Regularität, Existenz, Eindeutigkeit und Evolution von Flächen ${}_\sigma\Sigma$ mit *konstanter Expansion* ${}_\sigma\mathcal{H} \pm {}_\sigma\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv -{}^2\!/\!{}_\sigma$ (*CE*). Der Aufbau gleicht dem von Kapitel III über die CMC-Flächen. In Abschnitt IV.1 wird die Existenz der einzelnen Flächen gezeigt und in Abschnitt IV.2 deren Eindeutigkeit. Dass die CE-Flächen wie die CMC-Flächen den Raum überdecken, wurde aus technischen Gründen in den seperaten Abschnitt IV.3 ausgelagert. Schließlich zeigen wir in Abschnitt IV.4, wie sich die CE-Flächen in der Zeit bewegen. Dieses Ergebnis unterscheidet sich zentral von dem korrespondierenden über die CMC-Flächen aus Abschnitt III.3: Die Evolution der CE-Flächen ist faktisch nur eine Invarianz in der Zeit, da wir für das Existenz-Ergebnis voraussetzen müssen, dass der Impuls verschwindet. Dennoch ist diese „zeitliche Invarianz“ nach Wissenstand des Autors ein konzeptionell neues Ergebnis.

Die Existenz und Eindeutigkeitssätze sind Verallgemeinerung der Existenzsätze und Eindeutigkeitssätze von Metzger aus [Met04, Theorem 5.3] bzw. [Met07, Theorem 6.2] – die Eindeutigkeit wird wieder nur in Bezug auf die Annahmen an die Anfangsdaten verallgemeinert, während die Annahmen an die Fläche verstärkt werden. Wir bemerken dabei, dass die Hauptbeweisschritte äquivalent zu denen in Metzgers Beweis ablaufen, aber wir wie im Fall der CMC-Flächen an zentralen Stellen zusätzliche Ideen einbauen.

Wir geben zunächst vereinfachte Versionen der Hauptresultate.

IV.1 Theorem (Existenz – vereinfachte Version von Theorem IV.3.1)
Seien $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,2}$-flache Anfangsdaten mit stark abfallender Skalarkrümmung und nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)). Dabei sei die Energiestromdichte stark abfallend, der (ADM-)Impuls verschwinde und es gelte die (asymptotische) Symmetrie-Bedingung der $\mathcal{C}^1_{1+\varepsilon}$-Pseudo-Regge-Teitelboim-Bedingungen für die zweite Fundamentalform, d. h.

$$\left|\overline{\mathrm{J}}\right| \leq \frac{\overline{c}_0}{d^{3+\varepsilon}}, \qquad \vec{\mathrm{P}} = 0, \qquad \left|\overline{\mathrm{k}}_{ij} + \overline{\mathrm{k}}_{ij} \circ \overline{\varphi}_S\right| \leq \frac{\overline{c}_0}{d^{2+\varepsilon}}.$$

Es existieren eine Konstante $\sigma_0 = \sigma_1(\varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1)$ und eine stetig-differenzierbare Abbildung $\Psi : [-1\,, 1] \times (\sigma_0\,, \infty) \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ so, dass die Flächen ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma := \Psi(\mathscr{b}, \sigma, \mathcal{S}^2)$ konstante gemischter Krümmung ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\mathcal{H} + \mathscr{b}\,{}^{\mathscr{b}}_\sigma\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv -{}^2\!/\!{}_\sigma$ haben und ${}^{\mathscr{b}}\Psi := \Psi(\mathscr{b}, \cdot, \cdot)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf Bild ${}^{\mathscr{b}}\Psi$ ist, wobei $\overline{M} \setminus \text{Bild}\,{}^{\mathscr{b}}\Psi \subseteq \overline{M}$ kompakt ist. ◇

Wir erkennen, dass die hier gemachten Voraussetzungen mit Ausnahme von $\vec{\mathrm{P}} = 0$ insbesondere für $\mathcal{C}^2$-flache Anfangsdaten erfüllt sind, wenn die etablierten $\mathcal{C}^2$-Regge-Teitelboim-Bedingungen gelten, siehe bspw. [Hua10, Def. 1.2 & 1.3]. Weiter bemerken wir, dass wir die Voraussetzung „der Impuls verschwindet“ unter der Annahme von $|{}^{\partial \overline{\mathrm{k}}_{ij}}/_{\partial \overline{x}^k}| \leq {}^{C}/_{d^3}$ durch „der Impuls ist klein“ ersetzen können, d. h. es existiert ein $\overline{\mathrm{P}}_0 = \overline{\mathrm{P}}_0(\varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1)$ so, dass die Behauptung auch für $|\vec{\mathrm{P}}| \leq \overline{\mathrm{P}}_0$ anstelle von $\vec{\mathrm{P}} = 0$ gilt. Unter diesen Bedingungen kann weiter die Annahme des „starken Abfalls der Skalarkrümmung“ entfernt werden und es ergibt sich außerdem, dass die Flächen in Richtung des Impulses verschoben sind – genauer gilt für $\vec{\mathrm{P}} \neq 0$

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial \mathscr{b}} - \frac{\vec{\mathrm{P}}}{2m}\,\sigma \right| \leq C\,\sigma^{1-\varepsilon} + \mathrm{Err}(\mathscr{b})\,\sigma \quad \text{mit} \quad \mathrm{Err}(\mathscr{b}) \xrightarrow{\mathscr{b}\to 0} 0.$$

Diese Beobachtung verallgemeinert in infinitesimaler Weise die Erkenntnis aus [Met04, Abschnitt 7.1] bzw. [Met07, Remark 7.2], dass die Koordinaten-Zentren dieser Flächen durch den Impuls charakterisiert werden – vgl. Bemerkung IV.8.

IV.2 Theorem (Eindeutigkeit – vereinfachte Version von Theorem IV.2.1)
Seien $c_0 \in [0\,,1)$ und $c_1, c_S \geq 0$ Konstanten sowie $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ Anfangsdaten, die die Voraussetzungen von Theorem IV.1 erfüllen. Weiter seien $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{K}^{0,\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) mit $\mathcal{H}_i + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}_i \overline{\mathrm{k}}_i \equiv: {}^{-2}/_{\sigma}$ für ein gemeinsames Gewicht $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$. Ist $\sigma > \sigma(\varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1, c_0, c_1, c_S)$, so gilt $\Sigma_1 = \Sigma_2$. ◇

Nun kommen wir zu den tatsächlichen Voraussetzungen für dieses Kapitel.

IV.3 Voraussetzung (für dieses Kapitel)
Seien $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,2}$-flache Anfangsdaten mit nicht verschwindender Masse $m \neq 0$ (entspr. (I.25)), stark abfallender Skalarkrümmung und einer Energiestromdichte, die mit punktweiser Abschätzung integrabel ist, d. h.

$$|\overline{\mathcal{S}}| \leq \frac{C}{d^{3+\varepsilon}}, \qquad \overline{\mathrm{J}} \in \mathrm{L}^1\big(\overline{M}\big), \qquad \big|\overline{\mathrm{J}}\big| \leq \frac{\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d)}{d^3}, \qquad \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d) \xrightarrow{d\to\infty} 0.$$

Dabei gelte

$$\left| \fint_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathcal{H}}\,{}^e\mu_i\,{}^e\mu_j \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{\overline{c}_1}{\sigma^{2+\varepsilon}}, \qquad \left| \fint_{\mathcal{S}^2_r(0)} \Pi\left({}^e\mu, \bar{e}_i\right){}^e\mu_j - \Pi\left({}^e\mu, \bar{e}_j\right){}^e\mu_i \,\mathrm{d}{}^e\mu \right| \leq \frac{\overline{c}_1}{\sigma^{2+\varepsilon}}, \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\left| \fint_{\mathcal{S}^2_r(0)} \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{\overline{c}_1}{r^{2+\varepsilon}}, \qquad \left| \fint_{\mathcal{S}^2_r(0)} \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\,{}^e\mu_i \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{\overline{c}_1}{r^{2+\varepsilon}}. \qquad \text{(IV.2)}$$

◇

Sofort ist erkenntlich, dass für Anfangsdaten mit asymptotisch anti-symmetrischer zweiter Fundamentalform (vgl. $\mathcal{C}^1$-Pseudo-Regge-Teitelboim-Bedingungen), die Ungleichungen in (IV.1) und die erste Ungleichung in (IV.2) a priori erfüllt sind. Weiter zeigen wir in Proposition IV.9, dass für solche Daten die zweite Ungleichung aus (IV.2) gleichwertig zu $\vec{\mathrm{P}} = 0$ ist, falls $|\overline{\mathrm{J}}| \leq {}^{\overline{c}_1}/_{d^{3+\varepsilon}}$. Insbesondere erhalten wir damit, dass unter den Annahmen von Theorem IV.1 die Voraussetzung IV.3 erfüllt ist.

Es genügt eigentlich, dass (IV.1) und (IV.2) für ${}^{\eta}/_{r^2}$ mit $\eta \leq \eta(\varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1)$ statt ${}^{\overline{c}_1}/_{r^{2+\varepsilon}}$ gilt. Ebenso kann die Bedingung der stark abfallenden Skalarkrümmung fallen gelassen werden.

In diesem Fall muss in den folgenden Argumenten $r^{-\varepsilon}$ und $\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(r)$ jeweils durch η' ersetzt werden, wobei dies für eine Konstante steht, die für ausreichend kleines $\eta \leq \eta(\varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1)$ als beliebig klein gewählt werden kann (vgl. [Met04]).

IV.4 Notation (Über Abhängigkeit von Konstanten in diesem Abschnitt)
Um die Notation übersichtlicher zu gestalten, werden die Abhängigkeiten der Konstanten dieses Abschnitts von ε, $\overline{c}_0$, $\overline{c}_1$ nur durch (konst.) angezeigt. Das heißt, im Folgenden schreiben wir $D(\text{konst.})$ für Konstanten D, die nur von diesen Größen abhängig sind.

Nun wollen wir erklären, warum wir die Voraussetzungen in (IV.1) und (IV.2) als (asymptotisches) Verschwinden der Koeffizienten der nullten bis dritten Fourierstufe der zweiten Fundamentalform bezeichnen wollen. Weiter erklären wir, in welchem Sinne diese Ungleichungen als „Momente der Anfangsdaten“ verstanden werden könnten.

IV.5 Bemerkung (Interpretation der Vor. IV.3 durch Fourierentwicklung)
Wir wissen, dass die Komponenten μ_i der Euklidischen Normalen μ der zentrierten Sphäre $\mathcal{S}^2_r := \mathcal{S}^2_r(0)$ im Euklidischen Raum Eigenfunktionen des negativen Laplace-Operators der Sphäre zum Eigenwert $-2/r^2$ sind. Die nächsten fünf Eigenfunktionen (zum Eigenwert $6/r^2$) sind Linearkombinationen von Produkten zweier Komponenten der Normalen. Die weiteren sind äquivalent aufgebaut: Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ Polynome $P^n_{-n}, P^n_{-n+1}, \ldots, P^n_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass $f^n_m := P^n_m(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ für $m \in \{-n, n{-}n{+}1, \ldots, n\}$ Eigenfunktionen des Laplace-Operators zum gleichen Eigenwert λ_n sind und diese so konstruierten Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis des $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}^2_r(0))$ bilden. Dabei ist P^n_m ein gerades bzw. ungerades Polynom, falls n gerade bzw. ungerade ist. Entwicklen wir $\overline{\mathrm{k}}_{ij}$ in dieser $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}^2_r(0))$ Basis, so erhalten wir auf $\mathcal{S}^2_r(0)$

$$\overline{\mathrm{k}}_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \underbrace{\left(\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathrm{k}}_{ij}\; P^n_m(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \,\mathrm{d}\mu^e \right)}_{=: c^m_{ij,n}(r)} P^n_m(\mu_1, \mu_2, \mu_3).$$

◇

Wir erkennen nun, dass die ersten beiden Abschätzung aus (IV.1) Aussagen über Linearkombinationen der $c^m_{ij,2}$ und $c^0_{ij,0}$ sind. Schreiben wir $\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} = \overline{\mathcal{H}} - \overline{\mathrm{k}}_{\nu\nu}$, so erkennen wir auch in der ersten Abschätzung aus (IV.2) Aussagen über Linearkombinationen von $c^m_{ij,0}$ und $c^0_{ij,2}$. Auch die zweite Ungleichung von (IV.2) ist in selbem Sinn eine Aussage über Linearkombinationen von $c^m_{ij,1}$ und $c^m_{ij,3}$. Insbesondere sind diese Voraussetzungen erfüllt, wenn c^m_n für $n \leq 3$ asymptotisch verschwinden. Dies erklärt, warum wir diese Voraussetzung als „(asymptotisches) Verschwinden der Koeffizienten der nullten bis dritten Fourierstufen“ interpretieren. Wir erkennen allerdings in Proposition IV.9, dass nur die nullte bis zweite Fourierstufe verschwinden müssen, wenn starker Abfall von $\overline{\mathrm{J}}$ angenommen wird.

IV.6 Bemerkung (Voraussetzung IV.3 und Momente von $(\overline{M}, \overline{g})$)
Wir zeigen in Proposition IV.9, dass unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen (stark abfallende Energiestromdichte) die zweite Ungleichung in (IV.2) dem Verschwinden des (ADM-)Impulses entspricht. Das heißt, dies ist eine Annahme an das *lineare Moment*.

Betrachten wir die folgende Definition des (ADM-)Drehimpulses [ADM61], so stellen wir fest, dass die zweite Ungleichung aus (IV.2) insbesondere dann erfüllt ist, wenn der Drehimpuls wohldefiniert ist und zwar sogar für $\varepsilon = 1$. Es sei bemerkt, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt, d. h. das (asymptotische) Verschwinden dieses Integrals impliziert nicht die Existenz des Drehimpulses – zumindest nicht für unsere Annahme $\varepsilon \leq 1$. Somit ist auch die zweite Ungleichung aus (IV.2) eine Annahme an ein Moment der Anfangsdaten.

IV.7 Definition ((ADM-)Drehimpuls)
Sind $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$-flache Anfangsdaten, so ist der (ADM-)Drehimpuls $\overline{D} := (\overline{D}^1, \overline{D}^2, \overline{D}^3) \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\overline{D}^i := \lim_{r\to\infty} r \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \Pi\,({}^e_r\nu, \bar{e}_k)\, \epsilon^{ijk}\, {}^e_r\nu_j \,\mathrm{d}{}^e_r\nu,$$

falls dieser Limes existiert. Dabei bezeichnet ${}^e_r\nu$ die äußere Einheitsnormale von $\mathcal{S}^2_r(0)$ bzgl. der Euklidischen Metrik und ϵ^{ijk} das *Levi-Civita-Symbol*. Dieses ist 1 bzw. -1, wenn (i, j, k) eine gerade bzw. ungerade Permutation von $(1, 2, 3)$ ist und sonst 0. ◇

Das erste Integral aus (IV.1) entspricht der Änderung des Flächeninhalts von $\mathcal{S}^2_r(0)$ unter einer (infinitesimalen) *Verschiebung in der Zeit* der Fläche $\overline{M}$. Das heißt, auch dieses Integral kann in gewisser Weise als ein Moment von $\overline{M}$ interpretiert werden. Es ist unklar, ob das erste Integral als Korrekturterm für das gerade erklärte „Moment" zu verstehen ist oder eine eigene Bedeutung hat. Im Fall von Anfangsdaten, die eine (asymptotische) Maximalfläche sind, fällt dieses Integral jedoch a priori wie gefordert ab.

Es scheint also äquivalent statt (IV.1) und (IV.1) zu fordern, dass die „ersten drei Momente der Anfangsfläche wohldefiniert sind" und das erste Moment (der Impuls) verschwindet – ohne dass wir hier allerdings für die „dritten Momente" eine zufriedenstellende Definition oder gar tatsächliche physikalische Interpretation geben könnten. ◇

IV.8 Bemerkung (Zur Interpretation von Metzger)
In [Met04, Abschnitt 7.1] bzw. [Met07, Remark 7.2] wurde erklärt, dass für das von York gegebene Beispiel der zweite Fundamentalform ${}^Y\overline{\mathrm{k}}$ zu vorgegebenen Impuls (vergl. Beispiel III.4.3, [Yor79, Kap. 6]) das Euklidische Zentrum einer $\mathcal{H}\pm\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} = \text{konst.}$ Fläche (in höchster Ordnung) direkt aus dem Impuls abgelesen werden kann bzw. umgekehrt. Weiter wurde in [Met04, Letzte Bemerkung in Abschnitt 7.1] bzw. [Met07, Remark 7.2.(iii)] angemerkt, dass die ADM-Masse und der ADM-Impuls offensichtlich nicht ausreichend sind, um die Struktur zu charakterisieren, die durch diese Flächen gegeben ist.

Betrachten wir unsere Ergebnisse, so erkennen wir, dass diese Flächen tatsächlich nur unter zusätzlichen Symmetrie-Annahmen an die zweite Fundamentalform und Abfall-Bedingungen an die mittlere Krümmung und die Energiestromdichte durch den Impuls und die Masse charakterisiert sind, während sonst zusätzliche Größen einfließen – unter anderem der Drehimpuls. Außerdem erhalten wir eine infinitesimale Version der Korrespondenz von Impuls und Zentrum der CE-Flächen (vgl. mit der Erklärung nach Theorem IV.1).

Bevor wir die Haupttheoreme beweisen, zeigen wir das angekündigte Ergebnis, dass der Impuls durch das zweite Integral in (IV.2) charakterisiert wird. Wir erhalten dadurch eine alternative Darstellung für den Impuls. Diese Darstellung ist jedoch insofern weniger geeignet als die etablierte, da sie stärkere Annahmen an die Anfangsdaten und die Familie der Flächen macht, auf denen diese Integrale bestimmt werden (hier $\{\mathcal{S}^2_r(0)\}_r$).

IV.9 Proposition (Alternative Darstellung des (ADM-)Impuls)
Sind $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,\varepsilon+3/2}$ asymptotisch maximale Anfangsdaten mit stark abfallender Energiestromdichte, d. h.

$$\left|\overline{\mathcal{H}}\right| \le \frac{\overline{c}_1}{d^{2+\varepsilon}}, \qquad \left|\overline{\mathrm{J}}\right| \le \frac{\overline{c}_1}{d^{3+\varepsilon}},$$

so gilt für eine Konstante $C = C(\text{konst.})$

$$\left|\overline{\mathrm{P}}_i - \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\,\nu_i\,\mathrm{d}\mu\right| \le \frac{C}{r^\varepsilon},$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale und μ das Oberflächenmaß von $\mathcal{S}^2_r(0)$ bezeichnen, die von $\overline{g}$ induziert werden. ◇

Beweis
Wir setzen

$$h_i(r) := \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \Pi\left(\nu, \frac{\overline{x}}{r}\right)\frac{\overline{x}_i}{r}\,\mathrm{d}\mu$$

und erkennen mit

$$\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\,\nu_i\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \left(\overline{\mathcal{H}} - \overline{\mathrm{k}}(\nu,\nu)\right)\nu_i\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \Pi\left(\nu,\nu\right)\nu_i\,\mathrm{d}\mu,$$

dass

$$\left|h_i(r) - \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\,\nu_i\,\mathrm{d}\mu\right| \le \frac{C}{r^\varepsilon}$$

gilt. Damit genügt es zu zeigen, dass $|f_i(r) - 4\pi\,\overline{\mathrm{P}}_i| \le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(r)$ gilt, um die Behauptung zu erhalten. Beachten wir die Abschätzungen an die Metrik, so erkennen wir durch Anwendung des Divergenz-Satzes

$$h_i(R) - h_i(r) - \int_{B^R_r} \Pi\left(\overline{e}_j, \overline{\nabla}\frac{\overline{x}^j\,\overline{x}_i}{d^2}\right)\mathrm{d}\overline{\mu} = \int_{B^R_r(0)} \mathrm{Err}\,\mathrm{d}\overline{\mu}, \qquad |\mathrm{Err}| \le \left|\overline{\mathrm{J}}\right| + \frac{C}{d^{3+\varepsilon}},$$

wobei wir die Annahmen an $\overline{\mathrm{J}} = \overline{\mathrm{div}\mathrm{k}}$ verwendet haben, $\overline{\mu}$ das von $\overline{g}$ induzierte Maß, Err einen Fehlerterm und $B^R_r := B_R(0) \setminus B_r(0)$ bezeichnen. Berechnen wir die Ableitung $\overline{\nabla}({}^{\overline{x}^j\,\overline{x}_i}/{}_{d^2})$ explizit, so erhalten wir

$$h_i(R) - h_i(r) - \int_r^R \frac{1}{r}\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathcal{H}}\,\frac{\overline{x}_i}{r} + \Pi\left(\frac{\overline{x}}{r}, e_i\right) - 2\Pi\left(\frac{\overline{x}}{r}, \frac{\overline{x}}{r}\right)\frac{\overline{x}_i}{r}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}r = \int_r^R \frac{\mathrm{Err}_r}{r}\,\mathrm{d}r,$$

wobei wiederrum Err_r einen Fehlerterm mit $|\mathrm{Err}_s| \leq \|\overline{\mathrm{J}}\|_{\mathcal{S}^2_r(0)}/r + C/r^{1+\varepsilon}$ bezeichnet. Damit erhalten wir für die Ableitung von h_i

$$\left| h_i'(r) - \frac{1}{r}\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathcal{H}}\,\nu_i + \Pi\,(\nu, e_i) - 2\Pi\,(\nu,\nu)\,\nu_i \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{\left\|\overline{\mathrm{J}}\right\|_{\mathcal{S}^2_r(0)}}{r} + \frac{C}{r^{1+\varepsilon}},$$

wobei wir bemerken, dass h_i nach Voraussetzung differenzierbar ist. Wir erkennen in diesen Termen f und die Definition des Impulses wieder und erhalten

$$\left| h_i'(r) - \frac{8\pi\,\overline{\mathrm{P}}_i}{r} + \frac{2}{r}\,h_i(r) \right| \leq \frac{\left\|\overline{\mathrm{J}}\right\|_{\mathcal{S}^2_r(0)}}{r} + \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}.$$

Wenden wir nun die Grönwall-Ungleichung Lemma A.3.1 an, so erhalten wir die Behauptung. ////

IV.1. Existenz der CE-Flächen

Wir führen in diesem Abschnitt den Beweis durch, dass für jedes Vorzeichen $\pm$ und jede $\mathcal{C}^0_{3/2+\varepsilon}$-fast konzentrische Sphäre ${}^0\Sigma$ mit mittlerer Krümmung ${}^0\mathcal{H} \equiv -2/\sigma$ (für ausreichend großes σ) zu einer Fläche ${}^{\pm1}\Sigma$ deformiert werden kann, welche konstante Expansion ${}^{\pm}\mathcal{H} \pm {}^{\pm}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv -2/\sigma$ hat. Wir möchten zunächst das hier erhaltene Ergebnis mit den bereits von Metzger in [Met04] bzw. [Met07] erbrachten Resultaten vergleichen – unabhängig von den abgeschwächten Voraussetzungen. Die dortigen Theoreme [Met04, Theorem 5.3] und [Met07, Theorem 6.2] besagen, dass für beide Vorzeichen $\pm$ und jede (stückweise) glatte Kurve

$$\gamma : [0\,,1] : (H_0\,,\infty) \times [0\,,1] : t \mapsto \gamma(t) =: (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

eine stetige Abbildung $F : [0\,,1] \to \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathcal{S}^2)$ existiert so, dass der zugehörige Graph $M_t := \mathrm{graph}_\nu F(t)$ über der Sphäre konstante gemischte Krümmung ${}^t\mathcal{H} \pm t\,{}^t\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv -\gamma_1(t)$ bzgl. der Metrik ${}^t\overline{g}$ hat. Dabei ist ${}^t\overline{g} := t\,\overline{g} + (1-t)\,{}^s\overline{g}$. Für diese Theoreme wird vorausgesetzt, dass die Konstanten, mit der die zweite Fundamentalform $d^2\,\overline{\mathrm{k}}$ und die Metrik $d\,(\overline{g} - {}^s\overline{g})$ abgeschätzt sind, ausreichend klein sind – in unserer Notation $\overline{c}_0 \leq \overline{c}_0$, $\overline{c}_1 \leq \overline{c}_1$. Wir können aus den dort gezeigten Abschätzungen der Flächen Σ_t insbesondere folgern, dass eine Verschiebung $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : p \mapsto p + \vec{\eta}$ existiert so, dass $V({}^0\Sigma)$ (asymptotisch für $\sigma \to \infty$) gleich ${}_1\Sigma$ ist.

Wir dagegen werden eine Deformation $\Psi : [-1\,,1] \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ konstruieren, deren zugehörige Flächen ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma := \Psi(\mathfrak{b}, \mathcal{S}^2)$ konstante gemischte Krümmung ${}^{\mathfrak{b}}\mathcal{H} + \mathfrak{b}\,{}^{\mathfrak{b}}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv {}^0\mathcal{H}$ haben, wobei die Konstante und die Metrik $\overline{g}$ entlang der Deformation fest ist. Die zusätzliche Möglichkeit der Variation der Konstanten γ_0 bearbeiten wir im Abschnitt IV.3, indem wir zeigen, dass diese Flächen eine Blätterung des Raumes (nahe unendlich) bilden. Statt dass die Flächen dabei $\mathcal{C}_0$-nahe an einer Verschiebung der Startfläche sind, wie es wie oben erklärt wurde, erhalten wir im Sinn von Abschnitt II.6 eine $\mathcal{C}^1$-Nähe zu einer Verschiebung.

IV.1.1 Theorem (Existenzsatzes)
Erfülle $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ die Voraussetzung IV.3 und seien Konstanten $c_0{}', c_1{}', c_S{}', \delta \geq 0$ mit $\delta > 0$ oder $c_0{}' < 1$ gegeben. Weiter habe $\Sigma \in \mathcal{K}^{\delta;\varepsilon}_{\sigma}(c_0{}', c_1{}', c_S{}')$ (entspr. Definition I.3.7) konstante mittlere Krümmung $\mathcal{H} \equiv: -2/\sigma$. Ist $\sigma > \sigma(\text{konst.}, \delta, c_0{}', c_1{}', c_S{}')$, so gibt es eine Deformation $\Psi : [-1\,,1] \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ von dieser Fläche $\Sigma = \Psi(0, \mathcal{S}^2)$, deren Niveauflächen ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma := \Psi(\mathfrak{b}, \mathcal{S}^2)$ konstante $\mathfrak{b}$-gemischte Krümmung ${}^{\mathfrak{b}}\mathcal{H} + \mathfrak{b}\,{}^{\mathfrak{b}}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv -2/\sigma$ haben. ◇

IV.1.2 Ergänzung (zu Theorem IV.1.1)
Es gibt Konstanten $c_0 = c_0(\text{konst.})$, $c_1 = c_1(\text{konst.})$, $c_S = c_S(\text{konst.})$ so, dass ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma \in \mathcal{K}^{\varepsilon;\varepsilon}_{\sigma}(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7). Weiter erfüllt deren Euklidisches Koordinaten-Zentrum ${}^{\mathfrak{b}}\vec{z}$ für eine Konstante $C = C(\text{konst.})$

$$\left|\frac{\partial\,{}^{\mathfrak{b}}\vec{z}}{\partial \mathfrak{b}}\right| \leq C\,\sigma^{1-\varepsilon}, \qquad \left|\overline{g}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathfrak{b}}, {}^{\mathfrak{b}}\nu\right) - \frac{\partial\,{}^{\mathfrak{b}}z_i}{\partial \mathfrak{b}}\,{}^{\mathfrak{b}}\nu^i\right| \leq \frac{C}{\sigma^{\varepsilon}},$$

wobei ${}^{\mathfrak{b}}\nu$ die äußere Normale von ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma$ bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet. Dabei gilt letztere Abschätzung äquivalent auch in H^2 und $\mathrm{W}^{1,\infty}$ anstelle von L^∞. ◇

Für den Beweis dieses Existenztheorems IV.1.1 gehen wir äquivalent zu Abschnitt III.1 vor, nur dass wir dieses Mal σ fixieren. Wir markieren dabei die äquivalenten Voraussetzungen und Lemmata, um diesen Vergleich weiter zu erleichtern.

IV.1.3 Voraussetzung (für Abschnitt IV.1 (Voraussetzung III.1.4))
Es sei $\Psi : I \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M} : (\mathfrak{b}, p) \mapsto {}^{\mathfrak{b}}\Psi(p) := \Psi(\mathfrak{b}, p)$ eine orthogonale Deformation auf einem Intervall I, für die ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma := \operatorname{Bild}{}^{\mathfrak{b}}\Psi$ und $\Lambda := \overline{x} \circ \Psi : I \to \mathcal{C}(\mathcal{S}^2; \mathbb{R}^3)$

1. $I \subseteq [-1\,,1]$ mit $0 \in I$,
2. ${}^{0}\Sigma = \Sigma$,
3. $\Lambda \in \mathcal{C}^1(I \times \mathcal{S}^2; \mathbb{R}^3)$,
4. ${}^{\mathfrak{b}}\mathcal{H} + \mathfrak{b}\,{}^{\mathfrak{b}}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv -2/\sigma$ auf ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma$ für alle $\mathfrak{b} \in I$

erfüllen. Weiter sei I in der Art maximal, dass für jede andere orthogonale Deformation $\Psi' : I' \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$, welche diese Voraussetzungen erfüllt, bereits $I' \subseteq I$ gilt. ◇

Es genügt $I = [0\,,1]$ zu zeigen, um das Theorem zu beweisen.

IV.1.4 Notation (Das reguläre Intervall I_r (Notation III.1.5))
Es sei $I_r \subseteq I$ das maximale Intervall der Indices in I so, dass ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma := \Psi(\mathfrak{b}, \mathcal{S}^2)$ auch $\mathcal{C}^0_{\varepsilon,3/2+\varepsilon}$-fast konzentrisch sind (entspr. Definition I.3.7), d. h.

$$I_r := \left\{ \pm\mathfrak{b}_0 \in I \;\middle|\; \begin{array}{r} \forall\,\mathfrak{b} \in [-\mathfrak{b}_0\,, \mathfrak{b}_0] : \exists\, c_0 = c_0(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \mathfrak{b}),\ c_1 = c_1(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \mathfrak{b}) \\ \exists\, c_S = c_S(|m|, \varepsilon, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \mathfrak{b}) :\ {}^{\mathfrak{b}}_{\sigma}\Sigma \in \mathcal{K}^{\varepsilon;\varepsilon}_{\sigma}(c_0, c_1, c_S) \end{array} \right\}.$$

Weiter sei ${}^{\mathfrak{b}}\vec{z}$ das Euklidische Koordinaten-Zentrum von ${}^{\mathfrak{b}}\Sigma$ entsprechend Definition II.6.3. ◇

Wir bemerken, dass wir vorausgesetzt haben, dass die Konstanten c_0, c_1, c_S nicht von σ abhängen, sie aber a priori von $\mathscr{b}$ abhängig sein können. Weiter erkennen wir, dass I_r nicht-leer ist, da nach Theorem III.2.1 und der Ergänzung zu Theorem III.1.1 bereits ${}^0\Sigma = \Sigma \in \mathcal{K}_\sigma^{\varepsilon,\varepsilon}(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) und daher $0 \in I_r$ gilt, wobei hier $c_0 = c_0(\text{konst.})$, $c_1 = c_1(\text{konst.})$, $c_S = c_S(\text{konst.})$ gilt.

IV.1.5 Lemma (Regularität der Fläche ${}^{\mathscr{b}}\Sigma$ (Lemma III.1.7))
Für $\mathscr{b} \in J$ ist ${}^{\mathscr{b}}\Sigma$ eine $\mathcal{C}^{1,1} \cap \mathrm{H}^3$-Fläche sowie ${}^{\mathscr{b}}\mathrm{k} \in \mathrm{L}^\infty(\Sigma) \cap \mathrm{H}({}^{\mathscr{b}}\Sigma)$ und ${}^{\mathscr{b}}\mathcal{H} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Sigma)$ für alle $p < \infty$. ◇

Beweis
Durch Approximation mit glatten Flächen können wir für $\mathscr{b} \in J$ Proposition II.2.2 (genauer (II.13)). Damit ist $\mathrm{k} \in \mathrm{H}({}^{\mathscr{b}}\Sigma)$ und damit die Fläche H^3-regulär. Somit ist ${}^{\mathscr{b}}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Sigma)$ für $p < \infty$ und daher können wir wieder Proposition II.2.2 (genauer (II.14)) anwenden. Insgesamt ist die Fläche daher zumindest $\mathrm{H}^3 \cap \mathcal{C}^{1,1}$-regulär. ///

Alle bisherigen Ergebnisse außer Satz II.5.9 und Bemerkung II.5.10 können auf alle ${}^{\mathscr{b}}\Sigma$ mit $\mathscr{b} \in J$ angewendet werden – für zunächst unterschiedliche Konstanten c_0 und c_S –, wie nach Voraussetzung II.5.4 erklärt ist. Daher können wir nun zum Schritt kommen, dass der Stabilitätsoperator invertierbar ist.

IV.1.6 Proposition (Schritt 0: ${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1$ ist invertierbar (Proposition II.5.8))
Für jedes $\mathscr{b} \in I_r$ gilt die Aussage von Proposition II.5.8, d. h. für ausreichend großes $\sigma \geq \sigma(\text{konst.}, c_0, c_1, c_S)$ existiert $C = C(\text{konst.}, c_0, c_1, c_S)$ so, dass für alle $f, h \in \mathrm{H}^2(\Sigma)$

$$\left| \int {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 f^T\, g^T \,\mathrm{d}\mu + \frac{6m}{\sigma^3} \int f^T\, h^T \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{C\, \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)}{\sigma^3} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}, \tag{IV.3}$$

$$\left\| {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 f^\perp \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \geq \frac{2}{\sigma^2} \left\| f^\perp \right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \tag{IV.4}$$

gilt, wobei c_0, c_1, c_S so gewählt sind, dass ${}^{\mathscr{b}}_{\sigma}\Sigma \in \mathcal{K}_\sigma^{\varepsilon,\varepsilon}(c_0, c_1, c_S)$. Insbesondere ist unter diesen Voraussetzungen ${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1$ invertierbar. ◇

Beweis
Wir fixieren $\mathscr{b} \in I_r$ und unterdrücken den zugehörigen Index. Da der kleinste von Null verschiedene Eigenwert des Laplace-Operators auf $\{f^\perp : f \in \mathrm{H}^2(\Sigma)\}$ per Definition von $f^\perp$ zumindest $5/\sigma^2$ ist, erhalten wir aus (IV.4).

Für die erste Ungleichung (IV.3) sei nun $f \in \mathrm{H}^2(\Sigma)^T$ eine Eigenfunktion des Laplace-Operators, $\Delta f = -\lambda f$, mit $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\overline{M})} = 1$. Nach (I.21) gilt für

$$R := \frac{\mathcal{H}^2}{2} - \frac{2}{r^2} = \frac{2\mathscr{b}}{r}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} + \frac{\left(\mathscr{b}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right)^2}{2}$$

zumindest

$$\left| \int \left({}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 f + \lambda f \right) f - \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu, \nu) + \frac{2}{r^2} - \frac{R}{2} + \mathscr{b}\,\overline{\mathrm{J}}\,(\nu) + \frac{2\mathscr{b}}{\sigma}\overline{\mathcal{H}} \right) f^2 \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \frac{C}{\sigma^{3+\varepsilon}}.$$

Damit ergibt Proposition II.5.7

$$\left|\int {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 f\, f \,\mathrm{d}\mu + \frac{6m}{\sigma^3} - \frac{1}{2}\int \overline{S}\, f^2 \,\mathrm{d}\mu + \frac{3}{2}\fint R \,\mathrm{d}\mu - \mathscr{b}\int\Big(\overline{\mathrm{J}}\,(\nu) + \frac{2}{\sigma}\overline{\mathscr{H}}\Big) f^2 \,\mathrm{d}\mu\right| \le \frac{C}{\sigma^{3+\sigma}}.$$

Kombinieren wir nun die Vergleichbarkeit von Σ und $\mathcal{S}^2_\sigma(\vec{z})$ mit der von $\{\nu_i\}_{i=1}^3$ mit $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ sowie $|\vec{z}| \le C\,\sigma^{1-\varepsilon}$, so erhalten wir die Behauptung im Fall $f = h$ aus den Annahmen an (IV.1), (IV.2) und $|\overline{\mathrm{J}}| \le {}^{\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d)}/_{d^3}$.

Wenn wir statt dessen zwei solche Eigenfunktionen f, h betrachten, so erhalten wir gegenüber der obigen Rechnung die zwei zusätzlichen Terme $\operatorname{div}\overline{\mathrm{k}}\, fh$, $\overline{\mathrm{k}}(\nabla f)h$. Nach partieller Integration erkennen wir, dass diese gerade dem zweiten Integral von (IV.1) entsprechen. Daher erhalten wir (IV.3) für zwei solche Eigenfunktionen mit einer Rechnung wie oben. Da per Definition diese Eigenfunktionen $\mathrm{L}^2(\Sigma)^T$ aufspannen, ist damit (IV.3) gezeigt. ////

Insbesondere können wir nun auch Satz II.5.9 und Bemerkung II.5.10 auf ${}^{\mathscr{b}}\Sigma$ anwenden. Damit können wir nun zum ersten der oben erklärten Schritte kommen, dass I eine Umgebung von I_r ist und Ψ eine ausreichende Regularität erfüllt so, dass sich in den folgenden Lemmata gewisse Größen ableiten lassen.

IV.1.7 Lemma (Schritt 1: *I* ist Umgebung von *J* (Lemma III.1.8))
Für jedes $\mathscr{b}_0 \in [0\,,1)$ mit $J \supseteq [-\mathscr{b}_0\,,\mathscr{b}_0]$ existiert ein $\eta > 0$ mit $I \supseteq (-(\mathscr{b}_0+\eta)\,,\mathscr{b}_0+\eta)$ und $\Lambda|_{(-(\mathscr{b}_0+\eta)\,,\,\mathscr{b}_0+\eta)} \in \mathcal{C}^1(\mathrm{H}^2(\Sigma))$. ◇

Beweis
Wir zeigen dieses Lemma zugleich für $+\mathscr{b}_0$ und $-\mathscr{b}_0$ und entsprechend wählen wir $\pm$. Wir erkennen, dass ${}^{\pm\mathscr{b}_0}\mathscr{L}_1 : \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma) \to \mathrm{L}^p(\Sigma) : f \mapsto {}^{\pm\mathscr{b}_0}\mathscr{L}_1$ für $p > 2$ die Linearisierung von

$$\mathsf{H} + \cdot\,\overline{\mathsf{H}} : [-1\,,1] \times \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma) \to \mathrm{L}^p(\Sigma) : (\mathscr{b}, f) \mapsto \mathscr{H}(\operatorname{graph}_\nu f) + \mathscr{b}\operatorname{tr}\overline{\mathrm{k}}(\operatorname{graph}_\nu f)$$

in der zweiten Komponente im Punkt $(\pm\mathscr{b}_0, 0)$ ist. Nach Bemerkung II.5.10 ist ${}^{\pm\mathscr{b}_0}\mathscr{L}_1$ invertierbar und wir wissen, dass $\mathsf{H} + \cdot\,\overline{\mathsf{H}}(\pm\mathscr{b}_0, 0) \equiv {}^{-2}/_{\sigma}$. Daher ergibt die Anwendung des impliziten Funktionensatzes, dass eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : (-\varepsilon\,,\varepsilon) \to \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)$ existiert für die $\mathsf{H} + \cdot\,\overline{\mathsf{H}}(\pm\mathscr{b}_0 + t, \gamma(t)) \equiv {}^{2}/_{\sigma}$ für $|t| < \varepsilon$ und $\gamma(0) = 0$ gilt und $\gamma(t) \in B_\delta(0) \subseteq \mathrm{W}^{2,p}(\Sigma)$ ist für ausreichend kleines $\delta > 0$ durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt $\Psi(\pm\mathscr{b}_0 - t, \mathcal{S}^2) = \operatorname{graph}_\nu \gamma(t)$. Mit der Regularität von γ ist also Λ als Abbildung nach $\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2; \overline{M})$ für ein $\eta > 0$ stetig-differenzierbar fortsetzbar auf $(-(\mathscr{b}_0+\eta)\,,\mathscr{b}_0+\eta)$, insbesondere ist Ψ für ein $\eta' \in (0\,,\eta)$ auf $(-(\mathscr{b}_0+\eta')\,,\mathscr{b}_0+\eta') \times \mathcal{S}^2$ stetig-differenzierbar fortsetzbar. Mit der Maximalität von I gilt also die Aussage. Dabei gilt die Regularität von Λ überall in I_r, da $\mathscr{b}_0 \in I_r$ beliebig war. ////

Auf Grund des letzten Lemmas macht es Sinn von einer Ableitung in „Richtung $\mathscr{b}$“ zu sprechen. Daher führen wir ein:

IV.1.8 Notation (Zus. Notationen für Abschnitt IV.1 (Notation III.1.9))
Entsprechend der bisherigen Notation bezeichnet ${}^{\mathscr{b}}\nu$ die äußere Normale von ${}^{\mathscr{b}}\Sigma$, d. h.

$$\nu : I \times \mathcal{S}^2 \to \mathbb{R}^3 : (\mathscr{b}, p) \mapsto {}^{\mathscr{b}}\nu(p),$$

sowie $\dot{u}_\tau$ die Lapse-Funktion, d. h.

$$u_\tau : I \times \mathcal{S}^2 \to \mathbb{R} : (\mathscr{b}, p) \mapsto {}^{\mathscr{b}}u_\tau(p) := \overline{g}\left(\left.\frac{\partial \Psi}{\partial \mathscr{b}}\right|_{(\mathscr{b},p)}, {}^{\mathscr{b}}\nu_{\Psi(p)}\right).$$ ◇

Nun zeigen wir, dass die Regularität der einzelnen ${}^{\mathscr{b}}\Sigma$-Flächen mit $\mathscr{b} \in J$ gleichmäßig ist.

IV.1.9 Lemma (Die Flächen sind gleichmäßig regulär (Lemma III.1.10))
Ist $\sigma_0 \geq \sigma_0$(konst.), so sind die Flächen ${}^{\mathscr{b}}\Sigma$ für $\mathscr{b} \in I_r$ gleichmäßig regulär, d. h. es existieren Konstanten $c_0 \leq c_0$(konst.), $c_1 \leq c_1$(konst.) und $c_S \leq c_S$(konst.) so, dass ${}^{\mathscr{b}}\Sigma \in \mathcal{K}^{\varepsilon,\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) für alle $\mathscr{b} \in I_r$. ◇

Beweis
Wir erkennen zunächst, dass ${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 u_{\mathscr{b}} = -\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}$ gilt, insbesondere ist nach Satz II.5.9

$$\left\|u_{\mathscr{b}}^{\perp}\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)} \leq C\sigma^2 \left\|\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \leq C\sigma, \qquad \left\|u_{\mathscr{b}}^{\perp}\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq C\sigma^2 \left\|\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)} \leq C.$$

Damit erhalten wir mit (IV.3)

$$\begin{aligned}\left\|u_{\mathscr{b}}^{T}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} &\leq C\,\sigma^3\left(\int {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 u_{\mathscr{b}}\, u_{\mathscr{b}}^{T}\,\mathrm{d}\mu - \int {}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 u_{\mathscr{b}}^{\perp}\, u_{\mathscr{b}}^{T}\,\mathrm{d}\mu\right) + C\big(\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma) + \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)\big)\left\|u_{\mathscr{b}}^{T}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\ &\leq C\,\sigma^3 \int \mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}\, u_{\mathscr{b}}^{T}\,\mathrm{d}\mu + C\,\sigma^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\left\|u_{\mathscr{b}}^{T}\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + C\big(\mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(\sigma) + \mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)\big)\left\|u_{\mathscr{b}}^{T}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Proposition IV.1.6 können wir wieder (IV.1) und (IV.2) verwenden und erhalten mit den Sobolev-Ungleichungen

$$\left\|u_{\mathscr{b}}^{T}\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)} \leq C\,\sigma^{2-\varepsilon}, \qquad \left\|u_{\mathscr{b}}^{T}\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \leq C\,\sigma^{1-\varepsilon}.$$

Eine zu Lemma III.1.10 identische Argumentation liefert die Behauptung. ////

IV.1.10 Lemma (Schritt 2: I_r ist abgeschlossen in I (Lemma III.1.11))
Ist $\mathscr{b}_0 \in [0\,,1]$ mit $(-\mathscr{b}_0\,, \mathscr{b}_0) \subseteq I_r$, so ist $I_r \supseteq [-\mathscr{b}_0\,, \mathscr{b}_0] \cap I$. ◇

Beweis
Wir erhalten die Aussage mit der gleichen Argumentation aus Lemma IV.1.9, mit der wir im letzten Kapitel auch Lemma III.1.11 aus Lemma III.1.10 gefolgert haben. ////

IV.1.11 Lemma (Schritt 3: $I_r = I$ (Lemma III.1.12))
Ist $\sigma_0 \geq \sigma_0$(konst.), so gilt $I = I_r$ und dabei gleichmäßige Regularität, d. h. es existieren Konstanten $c_0 \leq c_0$(konst.), $c_1 \leq c_1$(konst.) und $c_S \leq c_S$(konst.) so, dass ${}^{\mathscr{b}}\Sigma \in \mathcal{K}^{\varepsilon,\varepsilon}_\sigma(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) für alle $\mathscr{b} \in I$. ◇

Beweis
Wir erhalten die Aussage mit der gleichen Argumentation aus Lemma IV.1.9 und Lemma IV.1.10, mit der wir im letzten Kapitel auch Lemma III.1.12 aus Lemma III.1.10 und Lemma III.1.11 gefolgert haben. ///

Beweis (Von Theorem IV.1.1)
Mit Lemma IV.1.7 ergibt sich, dass $I \subseteq [-1\,,1]$ offen in $[-1\,,1]$ ist. Weiter folgt die Abgeschlossenheit von I genau wie in Lemma III.1.14. Insgesamt ist daher $I = I_r = [0\,,1]$. Die $\mathcal{C}^1$-Nähe zu einer Verschiebung folgt nun aus den Abschätzungen an $u_{\mathscr{b}}$ bzw. $u_{\mathscr{b}}^{\perp}$. ///

Wir erhalten die Gültigkeit der Anmerkungen zum Impuls nach Theorem IV.1 wie folgt. Wir wenden Proposition IV.9 an und bekommen daher mit der Charakterisierung ${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 u_{\mathscr{b}} = -\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}$ sowie einer Rechnung wie in Theorem III.3.12, dass ${}^{2m}/_{\sigma}\, {}^0u$ (asymptotisch) gleich $\vec{\mathrm{P}} \cdot \nu$ ist. Nun beachten wir, dass für größere $\mathscr{b}$ die Charakterisierung des Impuls aus Proposition IV.9 nicht mehr angewendet werden kann, da die Fläche nun von Ordnung σ verschoben wurde. Entsprechend ergibt die gleichen Rechnung wie gerade eben, dass ${}^{2m}/_{\sigma}\, {}^{\mathscr{b}}u$ (asymptotisch) gleich $\vec{\mathrm{P}} \cdot \nu$ plus einen Fehler ist, dessen Ordnung gleich der Ordnung der Verschiebung ist. Da letztere (für $\mathscr{b} = 0$) dem Impuls entspricht, erhalten wir die Gültigkeit der zitierten Anmerkung.

IV.2. Eindeutigkeit der CE-Flächen

In diesem kurzen Abschnitt zeigen wir, dass die Flächen konstanter Expansion eindeutig sind – der Beweis entspricht [Met04, Theorem 5.4] bzw. [Met04, Theorem 6.5] und wir wiederholen ihn nur kurz unter den hier gemachten Voraussetzungen. Wir bemerken, dass die Annahmen an die Klasse der Flächen, in welcher die Eindeutigkeit gilt, auch hier abgeschwächt werden können – vgl. Abschnitt III.2.

IV.2.1 Theorem (Eindeutigkeit)
Sei $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ eine Anfangsfläche die Voraussetzung IV.3 erfüllt und seien Konstanten $c_0, c_1, c_S \geq 0$ und $\delta > 0$ gegeben. Weiter seien $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{K}_\sigma^{\delta,\varepsilon}(c_0, c_1, c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) gleich gewichtete CE-Flächen mit identischer Expansion, d. h. $\mathcal{H}_i + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}_i\overline{\mathrm{k}}_i \equiv {}^{-2}/_{\sigma}$ für ein gemeinsames Gewicht $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$. Ist $\sigma > \sigma(\mathrm{konst}, \delta, c_0, c_1, c_S)$, so gilt $\Sigma_1 = \Sigma_2$. ◇

Beweis
Äquivalent zum vorangehenden Abschnitt IV.1 sei $\Phi_i : I_i \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ stetig-differenzierbar so, dass

1. $I \subseteq [-1\,,1]$;
2. Φ_i eine stetig-differenzierbare, orthogonale Deformation ist;
3. $\Phi_i(\mathscr{b}, \mathcal{S}^2) = \Sigma_i$;

4. ${}^{b'}\Sigma_i := \Phi_i(b', \mathcal{S}^2)$ für alle $b' \in I_i$ konstante gemischte Krümmung ${}^{b'}\mathcal{H} + b'\,{}^{b'}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv {}^{-2}\!/\!_{\sigma}$ hat.

Weiter sei I_i in dieser Art maximal, d. h. erfüllen $\Psi_i : I_i' \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ diese Voraussetzungen, so gilt $I_i' \subseteq I_i$. Indem wir die gleichen Schritte wie in Abschnitt IV.1 durchführen, erhalten wir, dass $I_i = [-1\,,1]$. Insbesondere hat $\Psi_i(0, \mathcal{S}^2)$ konstante mittlere Krümmung ${}^{-2}\!/\!_{\sigma}$ und damit sind diese Flächen nach Theorem III.2.1 identisch. Damit ist das Intervall $I := \{b \in [0\,,1] : \Psi_1(b, \mathcal{S}^2) = \Psi_2(b, \mathcal{S}^2)\}$ nicht-leer. Weiter ist es mit der Stetigkeit von Ψ_i abgeschlossen. Mit der lokalen Eindeutigkeit des impliziten Funktionensatzes aus Lemma IV.1.7 ist I auch offen in und damit gleich $[-1\,,1]$. Insbesondere ist $\Sigma_1 = \Psi_1(b, \mathcal{S}^2) = \Psi_2(b, \mathcal{S}^2) = \Sigma_2$. ////

IV.3. Existenz der CE-Blätterung

Wir können nun die Existenz und Regularität der gesamten Blätterung von $\overline{M}$ durch Flächen mit konstanter gemischter Krümmung zeigen – genauer der Blätterung von $\overline{M}$ bis auf ein Kompaktum $L \subseteq \overline{M}$.

IV.3.1 Theorem (Existenz der Teilüberdeckung)
Sei $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$ eine Anfangsfläche die Voraussetzung IV.3 erfüllt. Es existiert $\sigma_0 = \sigma_0(\text{konst.})$ und eine stetig-differenzierbare Abbildung $\Psi : [-1\,,1] \times (\sigma_0\,,\infty) \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ so, dass die Flächen ${}^{b}_{\sigma}\Sigma := \Psi(b, \sigma, \mathcal{S}^2)$ konstante gemischte Krümmung ${}^{b}_{\sigma}\mathcal{H} + b\,{}^{b}_{\sigma}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv {}^{-2}\!/\!_{\sigma}$ haben. Dabei ist ${}^{b}\Psi := \Psi(b, \cdot, \cdot)$ eine Blätterung, d. h. ${}^{b}\Psi$ ist ein Diffeomorphismus auf Bild ${}^{b}\Psi$ und $\overline{M} \setminus \text{Bild}\,{}^{b}\Psi \subseteq \overline{M}$ ist kompakt. ◇

IV.3.2 Ergänzung (zu Theorem IV.3.1)
Ist Ψ die Abbildung aus Theorem IV.3.1, so ist ${}_{\sigma}\Psi := \Psi(\cdot, \sigma, \cdot)$ wie Ψ in Theorem IV.1.1, wobei alle Konstanten unabhängig von $\sigma > \sigma_0$ gewählt werden können. Weiter existiert eine Konstante $C = C(\text{konst.})$ so, dass für alle $b \in [-1\,,1]$ und $\sigma \in (\sigma_0\,,\infty)$

$$\|F_b\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}({}^{b}_{\sigma}\Sigma)} + \frac{1}{\sigma}\|F_b\|_{\mathrm{H}^2({}^{b}_{\sigma}\Sigma)} \le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma) \qquad \text{für } F_b := \overline{g}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial b}, {}^{b}\nu\right) - \frac{\partial\,{}^{b}_{\sigma}z^i}{\partial b}\,{}^{b}_{\sigma}\nu_i,$$

$$\|F_\sigma\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}({}^{b}_{\sigma}\Sigma)} + \frac{1}{\sigma}\|F_\sigma\|_{\mathrm{H}^2({}^{b}_{\sigma}\Sigma)} \le \frac{C}{\sigma^{\varepsilon}} \qquad \text{für } F_\sigma := \overline{g}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, {}^{b}\nu\right) - 1 - \frac{\partial\,{}^{b}_{\sigma}z^i}{\partial \sigma}\,{}^{b}_{\sigma}\nu_i$$

wobei ${}^{b}_{\sigma}\nu$ die äußere Normale von ${}^{b}_{\sigma}\Sigma \hookrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ bezeichnet und $\vec{\xi}(b, \sigma) \in \mathbb{R}^3$ Lipschitz-stetig von σ und b abhängt. ◇

Beweis
Nach Theorem III.1.1 existiert für $\sigma_0 = \sigma_0(\overline{c}_0, \varepsilon)$ eine stetig-differenzierbare Teilüberdeckung $\Phi^0 : (\sigma_0\,,\infty) \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ deren Flächen ${}_{0,\sigma}\Sigma := \Phi^0(\sigma, \mathcal{S}^2)$ konstante mittlere Krümmung ${}^{\sigma}\mathcal{H} = {}^{-2}\!/\!_{\sigma}$ haben. Weiter erfüllen diese Voraussetzung II.5.4 für passendes σ, $b = 0$ und in σ gleichmäßig beschränkte Konstanten c_0, c_1 und c_S. Nach Theorem IV.1.1

existiert außerdem für ausreichend großes σ_1 für alle $\sigma > \sigma_1$ eine orthogonale, stetig-differenzierbare Deformation ${}_\sigma\Psi : [-1\,,1] \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M}$ von $\Psi^0(\sigma,\mathcal{S}^2) = {}_\sigma\Psi(0,\mathcal{S}^2)$ dessen Flächen ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma := {}_\sigma\Psi(\mathscr{b})$ konstante gemischte Krümmung ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\mathcal{H} + \mathscr{b}\,{}^{\mathscr{b}}_\sigma\overline{\mathrm{trk}} \equiv {}^{-2}\!/\!{}_\sigma$ haben. Außerdem gilt ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma \in \mathcal{K}^{\varepsilon;\varepsilon}_\sigma(c_0,c_1,c_S)$ (entspr. Definition I.3.7) sowie gleichmäßig beschränkte Konstanten $c_0 = c_0(\text{konst.})$, $c_1 = c_1(\text{konst.})$ und $c_S = c_S(\text{konst.})$.

Nun definieren wir

$$\Phi : [-1\,,1] \times (\sigma_1\,,\infty) \times \mathcal{S}^2 \to \overline{M} : (\mathscr{b},\sigma,p) \mapsto {}_\sigma\Psi(\mathscr{b},p) := \Phi(\mathscr{b},\sigma,p) := {}^{\mathscr{b}}\Psi(\sigma,p)$$

und erkennen, dass Φ für fixes $\sigma \in (\sigma_1\,,\infty)$ stetig-differenzierbar ist. Weiter ist in passenden Normen ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma \approx \mathcal{S}^2_\sigma(\vec{z})$ mit ${}^{\vec{z}}\!/\!{}_\sigma \le c_\zeta < 1$. Damit ist

$$2\,\sigma \ge \max_{{}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma} d \ge \min_{{}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma} d \ge \frac{(1-c_\zeta)}{\sigma} \qquad \forall\,\sigma \gg \sigma_1,\ \mathscr{b} \in [-1\,,1].$$

Da ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma$ topologisch eine Sphäre ist, ist damit $\overline{M} \setminus \bigcup_\sigma {}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma$ in einem Kompaktum enthalten, falls Φ zumindest stetig ist. Also überdecken diese Flächen den ganzen Raum außerhalb eines Kompaktums und es verbleibt nur die Regularität in σ-Richtung und die Blätterungseigenschaft zu zeigen.

Sei $\mathscr{b}_0 \in [-1\,,1]$ und $\sigma_2 > \sigma_1$ beliebig und $\Sigma := {}^{\mathscr{b}_0}_{\sigma_2}\Sigma$. Per Konstruktion ist ${}^{\mathscr{b}_0}\mathscr{L}_1$ auf Σ invertierbar und ${}^{\mathscr{b}_0}\mathscr{L}_1$ ist die Linearisierung von

$$\mathsf{H} + \cdot\,\overline{\mathsf{H}} : [-1\,,1] \times (\sigma_1\,,\infty) \times \mathrm{H}^2(\Sigma) \to \mathrm{L}^2(\Sigma) : (\mathscr{b},\sigma,f) \mapsto \mathcal{H}(\mathrm{graph}_\nu f) + \mathscr{b}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}(\mathrm{graph}_\nu f)$$

in der dritten Komponente im Punkt $(\mathscr{b}_0,\sigma_2,0)$ mit $(\mathsf{H}+\cdot\,\overline{\mathsf{H}})(\mathscr{b}_0,\sigma_2,0) \equiv {}^{-2}\!/\!{}_{\sigma_2}$. Wiederum ergibt damit die Anwendung des impliziten Funktionensatzes, dass eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $F : ((\mathscr{b}_0-\eta\,,\mathscr{b}_0+\eta)\cap[-1\,,1]) \times (\sigma_2-\eta\,,\sigma_2+\eta) \to \mathrm{H}^2(\Sigma)$ mit $(\mathsf{H}+\cdot\,\overline{\mathsf{H}})(\mathscr{b},\sigma,F(\mathscr{b},\sigma)) \equiv 0$ für $|\mathscr{b}-\mathscr{b}_0|$, $|\sigma-\sigma_2| < \eta$ und $F(0,0) = 0$ existiert und dass $F(s,{}^{-2}\!/\!{}_\sigma) \in B_{C(\eta)}(0) \subseteq \mathrm{H}^2(\Sigma)$ durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Mit Theorem IV.2.1 erhalten wir für ausreichend kleine $|\sigma-\sigma_2|$ und $|\mathscr{b}_0-\mathscr{b}|$, dass ${}^{\mathscr{b}}_\sigma\Sigma = \mathrm{graph}_\nu F(\sigma,\mathscr{b})$. Daher können wir Φ als stetig-differenzierbar annehmen. Damit ist nur noch die zweite Abschätzung aus Ergänzung IV.3.2 und die Blätterungseigenschaft zu zeigen.

Seien $\sigma < \infty$ und $\mathscr{b} \in [-1\,,1]$ beliebig und es bezeichne $u := {}^{\mathscr{b}}_\sigma u = \overline{g}\,({}^{\partial\Phi}\!/\!{}_{\partial\mathscr{b}}, {}^{\mathscr{b}}_\sigma\nu)$ die Lapse-Funktion von Φ in der zweiten Komponente. Per Definition gilt zunächst

$${}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1 u = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{-2}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sigma^2}.$$

Insbesondere gilt für $u' = u - 1$

$$\left|{}^{\mathscr{b}}\mathscr{L}_1(u') - \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{4\mathscr{b}}{\sigma}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} - \mathscr{b}\,\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}}_\nu\right| \le \frac{C}{\sigma^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}.$$

Damit liefert Satz II.5.9

$$\left\|u'^{\perp}\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)} \le C\,\sigma^{1-\varepsilon}, \qquad \left\|u'^{\perp}\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \le \frac{C}{\sigma^\varepsilon} < \frac{1}{2}.$$

Damit ist nach (IV.3)

$$\begin{aligned}\left\|u'^T\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} &\le C\sigma^3\Big(\int {}^{\mathfrak{b}}\mathscr{L}_1 u\, u^T \,\mathrm{d}\mu - \int {}^{\mathfrak{b}}\mathscr{L}_1 u^\perp\, u^T \,\mathrm{d}\mu\Big) + C\,\mathrm{E}(\sigma)\left\|u^T\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \\ &\le C\sigma^3\left|\int\Big(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) + \frac{4\mathfrak{b}}{\sigma}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} + \mathfrak{b}\,\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu}\Big)\, u^T_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{d}\mu\right| + C\,\mathrm{E}(\sigma)\left\|u^T\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Zunächst integrieren wir partiell und bemerken dann, dass wir mit der selben Argumentation wie im Beweis von Proposition IV.1.6 wieder (IV.1), (IV.2) und Proposition IV.9 verwenden können. Somit implizieren die Ungleichungen (II.28) und (II.29) des Pseudo-Stabilitätsoperators

$$\left\|u'^T\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)} \le C\sigma^{1-\varepsilon}, \qquad \left\|u'^T\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)} \le \frac{C}{\sigma^\varepsilon} < \frac{1}{2}.$$

Damit ist $u' > 0$ und daher gilt die Überdeckungseigenschaft. Weiter ist damit auch die zweite Ungleichung der Ergänzung zu Theorem IV.3.1 gezeigt. ///

IV.4. Zeitliche Invarianz der CE-Flächen

Es wäre wünschenswert, dass zu Theorem III.3.9 äquivalente Theorem für die Evolution auch für die CE-Flächen zu erhalten. Leider erhalten wir in Theorem IV.4.1 nur das „Fehlen der Bewegung“, da wir nach Proposition IV.9 implizit angenommen haben, dass fast kein Impuls vorhanden ist. Das heißt, wir wissen nur im Fall, dass der Impuls klein ist, dass diese Flächen existieren. Daher erhalten wir hier nur das Ergebnis, dass diese Flächen (in höchster Ordnung) „still stehen“.

IV.4.1 Theorem (Nicht-Evolution der Flächen)
Sei $\Phi : I \times \overline{M} \to (\widehat{M}, \widehat{g})$ eine gleichmäßig $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2,2}$-flache zeitliche Evolution so, dass ${}^t\overline{M} := \Phi(t, \overline{M})$ die Voraussetzung IV.3 zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ erfüllt, die Massen ${}^t m$ gleichmäßig beschränkt sind, d. h. $|{}^t m| \ge M > 0$ und asymptotisches Vakuum herrscht, d. h. zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ gilt

$$\left|\widehat{\mathrm{Ein}}\right|_{{}^t\overline{g}} \le \frac{\overline{c}_1\,\mathrm{E}_{\overline{\jmath}}(d)}{d^3}.$$

Weiter sei die Lapse-Funktion $\mathcal{C}^2$-asymptotisch zur eins-Funktion $f \equiv 1$ und $\mathcal{C}^1$-asymptotisch spiegelsymmetrisch, d. h. zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ gilt

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}({}^t\overline{\alpha} - {}^t\overline{\alpha}\circ\varphi_{\mathrm{Sp}})}{\partial^t\overline{x}^\gamma}\right| \le \frac{\overline{c}_2}{d^{1+\varepsilon+|\gamma|}} \quad \forall\,|\gamma| \le 1, \qquad \left|\frac{\partial^{|\gamma|}({}^t\overline{\alpha} - 1)}{\partial^t\overline{x}^\gamma}\right| \le \frac{\overline{c}_2}{d^{\frac{1}{2}+\varepsilon+|\gamma|}} \quad \forall\,|\gamma| \le 2,$$

wobei φ_{Sp} die Spiegelung am Koordinaten-Ursprung wie in Definition I.3.4 ist. Es existiert eine $\mathcal{C}^1$-Abbbildung $\Psi : I \times [-1\,,1] \times (\sigma_0\,,\infty) \times \mathcal{S}^2 \to \widehat{M}$ so, dass ${}^t\Psi :=$

$\Psi(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ die Überdeckung entsprechend Theorem IV.3.1 ist und

$$\left\|{}^t\overline{g}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t},{}^{t,\flat}_{\sigma}\nu\right)\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}\left({}^{t,\flat}_{\sigma}\Sigma\right)}+\frac{1}{\sigma}\left\|{}^t\overline{g}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t},{}^{t,\flat}_{\sigma}\nu\right)\right\|_{\mathrm{H}^2\left({}^{t,\flat}_{\sigma}\Sigma\right)}\le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)\quad\forall\,t\in I,\,\sigma>\sigma_0$$

gilt, wobei ${}^{t,\flat}_{\sigma}\nu$ die Normale von ${}^{t,\flat}_{\sigma}\Sigma:=\Psi(t,\flat,\sigma,\mathcal{S}^2)$ in ${}^t\overline{M}$ bezeichnet. ◇

Beweis
Wir erhalten die stetige Differenzierbarkeit von Ψ genau wie im Beweis von Theorem III.3.9 bzw. Theorem IV.3.1. Seien nun $t\in I$, $\flat\in[-1\,,1]$ und $\sigma>\sigma_0$, $\Sigma=\Psi(t,\flat,\sigma,\mathcal{S}^2)$ fest und wir unterdrücken die entsprechenden Indices. Es bezeichne u die Lapse-Funktion in Zeit-Richtung. Wir erkennen zunächst, dass ${}^\flat\mathscr{L}_1u=-{}^\flat\mathscr{L}_0\alpha$ gilt. Mit (I.22) und den angenommenen Abschätzungen bedeutet dies

$$\left|{}^\flat\mathscr{L}_1u-\flat\left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)+\Delta\overline{\alpha}+\frac{2\,D_\nu\overline{\alpha}}{\sigma}\right)+\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu}+\frac{2\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}}{\sigma}\right|\le\frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)}{\sigma^3}.$$

Insbesondere ist nach Satz II.5.9

$$\left\|u^\perp\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)}\le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)\,\sigma^{\frac12-\varepsilon},\qquad\left\|u^\perp\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)}\le\frac{C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)}{\sigma^{\frac12+\varepsilon}}.$$

Dies impliziert mit (IV.3)

$$\begin{aligned}\left\|u^T\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}&\le C\,\sigma^3\left(\int{}^\flat\mathscr{L}_1u\,u^T\,\mathrm{d}\mu-\int{}^\flat\mathscr{L}_1u^\perp\,u^T\,\mathrm{d}\mu\right)+C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)\left\|u^T\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\\&\le C\,\sigma^3\left|\int\left(\flat\left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu)+\Delta\overline{\alpha}+\frac{2\,D_\nu\overline{\alpha}}{\sigma}\right)-\mathrm{div}\overline{\mathrm{k}_\nu}-\frac{2\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}}{\sigma}\right)u^T\,\mathrm{d}\mu\right|\\&\quad+C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)\,\sigma^{\frac12-\varepsilon}\left\|u^T\right\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\end{aligned}$$

Zunächst integrieren wir partiell und bemerken dann, dass wir mit der selben Argumentation wie im Beweis von Proposition IV.1.6 auch hier wieder (IV.1), (IV.2) und Proposition IV.9 verwenden können. Damit implizieren die Sobolev-Ungleichungen

$$\left\|u^T\right\|_{\mathrm{H}^2(\Sigma)}\le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma)\,\sigma,\qquad\left\|u^T\right\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma)}\le C\,\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(\sigma).$$

///

A. Einfache Ungleichungen

A.1. $\overline{\mathrm{Ric}}$-Integrale

In diesem recht technischen Abschnitt verwenden wir unter anderem die Technik mit der Schoen die Darstelllung (I.25) für die Masse bewiesen hat – für weitere Informationen zu dieser verweisen wir auf [CS03, CW08]. Wir wiederholen hier, dass die Masse durch (I.25) wohldefiniert ist und wie schnell diese durch die approximierenden Integrale angenähert wird, wobei wir uns auf unsere Annahmen beschränken. Weiter verwenden wir ähnliche Techniken, um auch weitere ähnliche $\overline{\mathrm{Ric}}$-Integrale unter Kontrolle zu bringen. Wir beginnen mit dem einfachsten dieser Lemmata.

A.1.1 Lemma ($\overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu, \overline{e}_i)$-Integrale)
Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach. Sei $\Sigma \hookrightarrow \overline{M} \setminus \overline{K}$ eine geschlossene Fläche so, dass das Kompaktum $\overline{K}$ der asymptotisch flachen Karte im Inneren von Σ liegt, d. h. die kompakte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{x}(\Sigma)$ beinhaltet den Koordinaten-Ursprung. Für $r := \min_\Sigma d$ existiert eine Konstante $C = C(m, \varepsilon, \overline{c}_0)$ mit

$$\left| \int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}(\nu, \overline{e}_i) - \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{S}}\,\nu_i \,\mathrm{d}\mu \right| \le \frac{C}{r^{1+\varepsilon}},$$

wobei $d = |\overline{x}|$ den Euklidischen Abstand vom Koordinaten Ursprung, ν die äußere Einheitsnormale und μ das Oberflächenmaß von $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet. $\diamond$

Beweis
Nach der zweiten Bianchi-Identität ist $\overline{\mathrm{Ric}} - \overline{\mathcal{S}}/2\,\overline{g}$ divergenzfrei, d. h. $\overline{\mathrm{div}}(\overline{\mathrm{Ric}} - \overline{\mathcal{S}}/2\,\overline{g}) \equiv 0$. Es sei $R > \max_\Sigma d$ und das Gebiet $U := B_R(0) \setminus B_\Sigma$, wobei $B_\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ das Innere von $\overline{x}(\Sigma)$ bezeichnet. Wir erhalten durch den Satz von Gauß

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathcal{S}^2_R(0)} \overline{\mathrm{Ric}}(\nu, \overline{e}_i) - \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{S}}\,\nu_i \,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}(\nu, \overline{e}_i) - \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{S}}\,\nu_i \,\mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_U \left(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g} \right) \left(\overline{\nabla} \overline{e}_i \right) \mathrm{d}\overline{\mu} \right| \\ \le \int_{\min_\Sigma d}^R \int_{\mathcal{S}^2_s(0)} \left| \left(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g} \right) \left(\overline{\nabla} \overline{e}_i \right) \right| \mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}s &\le \frac{C}{r^{1+\varepsilon}},\end{aligned}$$

wobei ν bzw. μ jeweils die Normale bzw. das Oberflächenmaß von Σ und $\mathcal{S}^2_R(0)$ sind und $\overline{\mu}$ das Volumenmaß bezeichnen – jeweils induziert von $\overline{g}$. Da nach Voraussetzung

$$\left| \int_{\mathcal{S}^2_R(0)} \overline{\mathrm{Ric}}(\nu, \overline{e}_i) - \frac{1}{2}\,\overline{\mathcal{S}}\,\nu_i \,\mathrm{d}\mu \right| \le \frac{C}{R^{\frac{5}{2}+\varepsilon-2}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

gilt, erhalten wir die Behauptung. ////

A.1.2 Lemma ($\overline{\mathrm{Ric}}\,(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})$-Integrale)
Sei $(\overline{M},\overline{g})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach. Der Limes

$$m := \lim_{r\to\infty} \frac{-r}{8\pi} \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\mathrm{d}\mu$$

existiert, wobei ν und μ die von $\overline{g}$ induzierte äußere Einheitsnormale und das induzierte Flächenmaß bezeichnen.

Sei weiter $\Sigma \hookrightarrow \overline{M} \setminus \overline{K}$ eine beliebige geschlossene Fläche wie in Lemma A.1.1, die für $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $c_0 \in [0\,,1)$, $c_1 \geq 0$ und $r := \min_\Sigma d$

$$|\vec{z}\,| \leq c_0\, r, \qquad \max_\Sigma \left|\nu - \frac{\overline{x}-\vec{z}}{r}\right| \leq \frac{c_1}{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}, \qquad |\Sigma| \leq c_0 r^2$$

erfülle, wobei ν wiederum die von $\overline{g}$ induzierte äußere Einheitsnormale bezeichnet. Es existieren eine Konstante $C = C(m,\varepsilon,\overline{c}_0,c_0,c_1)$ mit

$$\left| m + \frac{r}{8\pi}\int_\Sigma \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\right)\mathrm{d}\mu\right| \leq \|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{r^\varepsilon},$$

wobei μ wieder das von $\overline{g}$ induzierte Flächenmaß bezeichnet. ◇

Beweis
Nach Voraussetzung gilt

$$\left|\int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}(\nu, r\nu - \overline{x}) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\,(\nu, r\nu-\overline{x})\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \left|z^i\right| \left|\int_\Sigma \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\overline{e}_i) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\nu_i\right)\mathrm{d}\mu\right| + \frac{C}{r^\varepsilon}.$$

Somit impliziert Lemma A.1.1

$$\left| r\int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\overline{x}) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\,(\nu,\overline{x})\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{C}{r^\varepsilon}.$$

Der Rest des Beweises verläuft genau analog zu dem von Lemma A.1.1. Es gilt nach der zweiten Bianchi-Identität $\overline{\mathrm{div}}(\overline{\mathrm{Ric}} - \overline{\mathcal{S}}/2\,\overline{g}) \equiv 0$. Wir erhalten durch den Satz von Gauß für $R > 2\,r$ und das Gebiet $U := B_R(0) \setminus B_\Sigma$, wobei $B_\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ das Innere von $\overline{x}(\Sigma)$ bezeichnet,

$$\begin{aligned}
&\left| R\int_{\mathcal{S}^2_R(0)} \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\mathrm{d}\mu - r\int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\qquad \leq \left|\int_{\mathcal{S}^2_R(0)} \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\overline{x}) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\,(\nu,\overline{x})\,\mathrm{d}\mu - \int_\Sigma \overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\overline{x}) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\,(\nu,\overline{x})\,\mathrm{d}\mu\right| + \frac{C}{r^\varepsilon} \\
&\qquad \leq \left|\int_U \left(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\right)\left(\overline{\nabla}\overline{x}\right)\mathrm{d}\overline{\mu}\right| + \frac{C}{r^\varepsilon} \\
&\qquad \leq \int_U \frac{|\overline{\mathcal{S}}|}{2} + \frac{C}{d^{3+\varepsilon}}\,\mathrm{d}\overline{\mu} + \frac{C}{r^\varepsilon} \leq \|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{r^\varepsilon},
\end{aligned}$$

wobei ν bzw. μ die jeweilige Normale bzw. das jeweilige Oberflächenmaß von $\mathcal{S}^2_r(0)$ und $\mathcal{S}^2_R(0)$ sowie $\overline{\mu}$ das Volumenmaß bezeichnen – jeweils induziert von $\overline{g}$. Da $\overline{\mathcal{S}} \in \mathrm{L}^1(\overline{M})$ vorausgesetzt ist, verschwindet für $\Sigma = \mathcal{S}^2_r(0)$ der rechte Ausdruck für $R > r \to \infty$ und daher konvergiert das Integral. ////

Im nachfolgenden Lemma verwenden wir einen zusätzlichen Trick, der auch in Proposition IV.9 zentral ist: Zunächst benutzen wir den Satz von Gauß, um wie bisher ein Integral $\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu)\,\overline{x}_i\,\mathrm{d}\mu =: f(r)$ durch das gleiche Integral auf einer anderen Fläche $\mathcal{S}^2_R(0)$ zuzüglich einem Volumenintegral zu berechnen. In diesem Fall ergibt sich jedoch, dass wir in diesem Volumen-Integral wieder den selben Term $\overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu)\,\overline{x}_i$ integrieren müssen. Der Satz von Fubini und anschließendes Ableiten von f liefern damit eine gewöhnliche (approximative) Differentialgleichung für f, dessen Lösung das gesuchte Integral bestimmt.

A.1.3 Lemma ($\overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu,\nu)\nu_i$-Integrale)
Sei $(\overline{M},\overline{g})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach und $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}\setminus\overline{K}$ eine beliebige geschlossene Fläche wie in Lemma A.1.2 für die außerdem

$$\max_\Sigma |\overline{x}-\vec{z}| \le r + c_0\, r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

gilt. Es existiert eine Konstante $C = C(m,\varepsilon,\overline{c}_0,c_0)$ mit

$$\left|\int_\Sigma \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\right)\overline{x}_i\,\mathrm{d}\mu\right| \le \|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{r^\varepsilon},$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale und μ das Oberflächenmaß von $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\left|\frac{m\,z_i}{r} - \frac{r}{8\pi}\int_\Sigma \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\right)\nu_i\,\mathrm{d}\mu\right| \le \|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{r^\varepsilon}$$

◇

Beweis
Mit Lemma A.1.2 gilt für $\Omega_r := \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$

$$\left|\frac{m\,z_i}{r} - \frac{r}{8\pi}\int_\Sigma \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\right)\nu_i\,\mathrm{d}\mu\right| \le \left|\int_\Sigma \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\right)\overline{x}_i\,\mathrm{d}\mu\right| + \|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\Omega_r)} + \frac{C}{r^\varepsilon},$$

und daher folgt die zweite Aussage tatsächlich aus der ersten. Setzen wir $d_0 := |\overline{x}-\vec{z}|$ und $R := \max_\Sigma d_0$, so erkennen wir mit dem Satz von Gauß für das Gebiet $U := B_R(\vec{z}) \setminus B_\Sigma$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Sigma \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\right)\overline{x}_i\,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} \left(\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\right)\overline{x}_i\,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\quad= \left|\int_U \left(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\overline{g}\right)\left(\overline{\nabla}\left(\frac{\overline{x}-\vec{z}}{d_0}\,\overline{x}\right)\right)\mathrm{d}\overline{\mu}\right| + \frac{C}{r^\varepsilon} \\
&\quad\le \int_r^R \int_{\mathcal{S}^2_s(0)} \frac{C}{s^{\frac{5}{2}+\varepsilon}}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}s + \frac{C}{r^\varepsilon} < \frac{C}{r^\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Somit genügt es die Aussage für $\Sigma = \mathcal{S}^2_r(\vec{z})$ zu zeigen.

Es sei dafür

$$f(r) := \int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} \Big(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\Big)\Big(\nu, \frac{x-\vec{z}}{r}\Big)\,\frac{\overline{x}_i}{r}\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall\, r > R_0 + c_0.$$

Wieder verwenden wir den Satz von Gauß und erhalten

$$f(R') - f(R) - \int_R^{R'}\int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} \Big(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\Big)\Big(\overline{\nabla}\Big(\frac{(x-\vec{z})\,\overline{x}_i}{d_0^2}\Big)\Big)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}r = \int_R^{R'} \mathrm{Err}\,\mathrm{d}r,$$

wobei Err ein Fehlerterm mit $|\mathrm{Err}| \leq {}^{C}\!/_{r^{2+\varepsilon}}$ ist. Leiten wir f ab und beachten dabei $|\overline{\nabla}(\overline{x}-\vec{z}) - \mathrm{id}\,| \leq {}^{C}\!/_{\sigma^{\varepsilon+1/2}}$, so erkennen wir

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{2}{r}f(r)\Big| &\leq \Big|\int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} \Big(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\Big)\Big(\overline{x}-\vec{z}, \overline{\nabla}\Big(\frac{\overline{x}_i}{d_0^2}\Big) + \frac{2}{r^2}\frac{\overline{x}_i(\overline{x}-\vec{z})}{r^2}\Big)\,\mathrm{d}\mu\Big| \\
&\qquad + \frac{1}{r}\int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} |\overline{\mathcal{S}}|\,\mathrm{d}\mu + \frac{C}{r^{2+\varepsilon}} \\
&\leq \Big|\int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} \Big(\overline{\mathrm{Ric}} - \frac{\overline{\mathcal{S}}}{2}\,\overline{g}\Big)\Big(\nu, \frac{\overline{e}_i}{r}\Big)\,\mathrm{d}\mu\Big| + \frac{1}{r}\int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} |\overline{\mathcal{S}}|\,\mathrm{d}\mu + \frac{C}{r^{2+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt Lemma A.1.1 für $f(r) \neq 0$

$$\Big|\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{2\,f(r)}{r}\Big| \leq \frac{1}{r}\int_{\mathcal{S}^2_r(\vec{z})} |\overline{\mathcal{S}}|\,\mathrm{d}\mu + \frac{C}{r^{2+\varepsilon}}.$$

Verwenden wir die Grönwall-Ungleichung aus Lemma A.3.1, so erhalten wir für ein $\eta \in \mathbb{R}$

$$|f(r) - \eta| \leq \frac{1}{r}\int_r^\infty \int_{\mathcal{S}^2_s(\vec{z})} |\overline{\mathcal{S}}|\,\mathrm{d}s + \frac{C}{r^{1+\varepsilon}} \leq \frac{1}{r}\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}.$$

Dies liefert die Behauptung, da aus der Voraussetzung $|f(R)| \to 0$ für $R \to \infty$ und damit $\eta = 0$ folgt. ////

A.2. ${}^a\Pi$-Integrale

Es ist bekannt, dass eine $\mathcal{C}^2$-asymptotisch flache Riemannsche Mannigfaltigkeit ein wohldefiniertes (ADM-)Massezentrum hat, falls sie die $\mathcal{C}^2$-Regge-Teitelboim-Bedingungen erfüllt – für mehr dazu siehe bspw. [CS03, CW08, Hua10, CP11]. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir den Hauptbeweis-Schritt dafür in Proposition A.2.2. Zunächst betrachten wir aber den Fall ohne Symmetrie-Annahme, in welchem wir den gleichen Trick verwenden, wie er auch für die zitierte Wohldefiniertheit des (ADM-)Massenzentrums verwendet wird.

A.2.1 Proposition (Zentrums-Abschätzung (implizit))
Sei $(\overline{M},\overline{g})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach. Sei $\Sigma \hookrightarrow \overline{M} \setminus \overline{K}$ eine geschlossene Fläche so, dass das Kompaktum $\overline{K}$ der asymptotisch flachen Karte im Inneren von Σ liegt, d. h. die kompakte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{x}(\Sigma)$ beinhaltet den Koordinaten-Ursprung. Gilt für $R := \max_\Sigma d$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante c_0

$$\left|\nu - \frac{\overline{x} - \vec{z}}{R}\right| \leq \frac{c_0}{R^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}, \qquad |\vec{z}\,| \leq c_0\, R,$$

so gilt für eine Konstante $C = C(m, \varepsilon, \overline{c}_0, c_0, R_0)$

$$\left|\int_\Sigma R\left(\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\right)(\nu)\,\nu_i - {}^a\overline{\Pi}_{\nu i}\,\mathrm{d}\mu\right| \leq R\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + CR^{1-\varepsilon} \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\},$$

wobei $d = |\overline{x}|$ den Euklidischen Abstand vom Koordinaten Ursprung, ν die äußere Einheitsnormale und μ das Oberflächenmaß von $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet und die künstliche Größe durch ${}^a\Pi := -{}^e\overline{\mathrm{tr}}(\overline{g} - {}^e\overline{g})\overline{g} - \overline{g} - {}^e\overline{g}$ definiert ist. ◇

Beweis
Zunächst formen wir die Annahme des asymptotischen Abfalls der Skalarkrümmung um. In Koordinaten ausgedrückt gilt

$$\overline{\mathrm{Ric}}_{ij} = \frac{\partial\overline{\Gamma}_{ij}{}^k}{\partial\overline{x}^k} - \frac{\partial\overline{\Gamma}_{ki}{}^k}{\partial\overline{x}^j} + \overline{\Gamma}_{kl}{}^k\,\overline{\Gamma}_{ji}{}^l - \overline{\Gamma}_{jl}{}^k\,\overline{\Gamma}_{ki}{}^l.$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left|2\overline{\mathrm{Ric}}_{ij} - \frac{\partial\left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g}\right)_i}{\partial\overline{x}^j} - \frac{\partial\left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g}\right)_j}{\partial\overline{x}^i} + {}^e\overline{\mathrm{Hess}}_{ij}\left({}^e\overline{\mathrm{tr}}\overline{g}\right) + {}^e\overline{\Delta}\overline{g}_{ij}\right| \\
&\qquad\leq \left|2\frac{\partial\overline{\Gamma}_{ij}{}^k}{\partial\overline{x}^k} - 2\frac{\partial\overline{\Gamma}_{ki}{}^k}{\partial\overline{x}^j} - \frac{\partial\left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g}\right)_i}{\partial\overline{x}^j} - \frac{\partial\left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g}\right)_j}{\partial\overline{x}^i} + {}^e\overline{\mathrm{Hess}}_{ij}\left({}^e\overline{\mathrm{tr}}\overline{g}\right) + {}^e\overline{\Delta}\overline{g}_{ij}\right| + \frac{C}{d^{3+\varepsilon}} \\
&\qquad\leq i\left|{}^e\overline{g}^{kl}\left(\frac{\partial^2\overline{g}_{jl}}{\partial\overline{x}^i\partial\overline{x}^k} + \frac{\partial^2\overline{g}_{il}}{\partial\overline{x}^j\partial\overline{x}^k} - \frac{\partial^2\overline{g}_{ij}}{\partial\overline{x}^l\partial\overline{x}^k}\right) - \frac{\partial^2\,{}^e\overline{\mathrm{tr}}\overline{g}}{\partial\overline{x}^i\partial\overline{x}^j}\right. \\
&\qquad\qquad\left. - \frac{\partial\left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g}\right)_i}{\partial\overline{x}^j} - \frac{\partial\left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g}\right)_j}{\partial\overline{x}^i} + {}^e\overline{\mathrm{Hess}}_{ij}\left({}^e\overline{\mathrm{tr}}\overline{g}\right) + {}^e\overline{\Delta}\overline{g}_{ij}\right| + \frac{C}{d^{3+\varepsilon}} \\
&\qquad\leq \frac{C}{d^{3+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Insbesondere impliziert dies durch Spurnehmen mit ${}^e\overline{\mathrm{div}}{}^e\overline{g} = 0$

$$\left|{}^e\overline{\mathrm{div}}\left({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\right)\right| = \left|{}^e\overline{\mathrm{div}}\left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g}\right) - {}^e\overline{\Delta}{}^e\overline{\mathrm{tr}}\overline{g}\right| \leq |\overline{\mathcal{S}}| + \frac{C}{d^{3+\varepsilon}}.$$

Da nach dem Satz von Gauß für die Euklidische Normale ${}^e\nu$ und das Euklidische Oberflächenmaß ${}^e\mu$

$$\left|\int_{\mathcal{S}^2_R(0)} \Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)({}^e\nu)\,\overline{x}_i - {}^a\Pi\,({}^e\nu,\overline{e}_i)\,\mathrm{d}{}^e\mu - \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)({}^e\nu)\,\overline{x}_i - {}^a\Pi\,({}^e\nu,\overline{e}_i)\,\mathrm{d}{}^e\mu\right|$$
$$\leq \int_r^R \left|\int_{\mathcal{S}^2_s(0)} {}^e\overline{\mathrm{div}}\Big(\overline{x}_i\,{}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi - {}^a\overline{\Pi}_i\Big)\,\mathrm{d}{}^e\mu\right| \mathrm{d}s \leq \int_r^R \left|\int_{\mathcal{S}^2_s(0)} \overline{x}_i\,{}^e\overline{\mathrm{div}}\Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)\,\mathrm{d}\mu\right| \mathrm{d}s.$$

gilt, erhalten wir damit

$$\left|\int_{\mathcal{S}^2_R(0)} \Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)({}^e\nu)\,\overline{x}_i - {}^a\Pi\,({}^e\nu,\overline{e}_i)\,\mathrm{d}{}^e\mu - \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)({}^e\nu)\,\overline{x}_i - {}^a\Pi\,({}^e\nu,\overline{e}_i)\,\mathrm{d}{}^e\mu\right|$$
$$\leq R\bigg(\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{R^\varepsilon}\bigg)$$

Wählen wir nun $r > R_0$ beliebig aber fest, so ergibt sich

$$\left|\int_{\mathcal{S}^2_R(0)} \Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)({}^e\nu)\,\overline{x}_i - {}^a\Pi\,({}^e\nu,\overline{e}_i)\,\mathrm{d}{}^e\mu\right| \leq R\bigg(\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{R^\varepsilon}\bigg) + C.$$

Die Aussage folgt nun aus der Annahme an ν und $\vec{z}$, da mit der selben Argumentation wie oben

$$\left|\int_\Sigma \Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)({}^e\nu)\,\vec{z}\,\mathrm{d}{}^e\mu - \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)({}^e\nu)\,\vec{z}\,\mathrm{d}{}^e\mu\right| \leq |\vec{z}| \int_r^R \int_{\mathcal{S}^2_s(0)} \left|{}^e\overline{\mathrm{div}}\Big({}^e\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)\right| \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}s$$
$$\leq |\vec{z}|\,\bigg(\|\overline{\mathcal{S}}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^3\setminus B_r(0))} + \frac{C}{R^\varepsilon}\bigg)$$

gilt. ////

Nun wiederholen wir kurz das erklärte Resultat, dass unter Annahme der $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+3/2}$-Regge-Teitelboim-Bedingungen das (ADM-)Zentrum (Korollar III.4.2) wohldefiniert ist.

A.2.2 Proposition (Zentrums-Abschätzung (implizit) – starke Version)
Sei $(\overline{M},\overline{g})$ $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+1/2}$-flach und erfülle die $\mathcal{C}^2_{\varepsilon+3/2}$-Regge-Teitelboim-Bedingungen. Es existiert der Limes

$$Z_i := \lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} r\,\Big(\overline{\mathrm{div}}{}^a\Pi\Big)(\nu)\,\nu_i - {}^a\overline{\Pi}_{\nu i}\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\},$$

wobei $d = |\overline{x}|$ den Euklidischen Abstand vom Koordinaten Ursprung, ν die äußere Einheitsnormale und μ das Oberflächenmaß von $\mathcal{S}^2_r(0) \hookrightarrow \overline{M}$ bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet und die künstliche Größe durch ${}^a\Pi := \overline{g} - {}^e\overline{g}$ definiert ist. Sei weiter $\Sigma = \mathrm{graph}_\nu f$ ein Graph einer Funktion $f \in \mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2_r(0))$ über einer Sphäre so, dass für eine Konstante c_0

$$\|f\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2_r(0))} \leq c_0\, r^{1-\varepsilon}, \qquad \|f - f\circ\varphi\|_{\mathrm{H}^2(\mathcal{S}^2_r(0))} \leq \frac{c_0}{r^{-\varepsilon}}$$

gilt, wobei $\varphi = \varphi_{\mathrm{sp}}$ wie in Definition I.3.4 sei. Es gilt für $C = C(m, \varepsilon, \overline{c}_0, c_0, R_0)$

$$\left| Z_i - \int_\Sigma R \left(\overline{\mathrm{div}}^a \Pi \right)(\nu)\, \nu_i - {}^a\overline{\Pi}_{\nu i} \,\mathrm{d}\mu \right| \leq C\, \mathrm{E}_{\overline{\mathcal{S}}}(r) \qquad \forall\, i \in \{1,2,3\},$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale und μ das Oberflächenmaß von $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ bzgl. $\overline{g}$ bezeichnet und ohne Beschränkung der Allgemeinheit (I.24) für $\overline{\mathcal{S}}$ angenommen ist. ◇

Beweis
Für

$$R_{ij} := \frac{\partial \left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g} \right)_i}{\partial \overline{x}^j} + \frac{\partial \left({}^e\overline{\mathrm{div}}\overline{g} \right)_j}{\partial \overline{x}^i} - {}^e\overline{\mathrm{Hess}}_{ij}({}^e\overline{\mathrm{tr}}\overline{g}) - {}^e\overline{\Delta}\overline{g}_{ij}$$

wurde im Beweis von Proposition A.2.1

$$\left| 2\overline{\mathrm{Ric}}_{ij} - R_{ij} \right| \leq \frac{C}{d^{3+\varepsilon}}$$

gezeigt. Nun zeigen wir, dass weiter auch

$$\left| \left(2\overline{\mathrm{Ric}}_{ij} - R_{ij} \right) - \left(2\overline{\mathrm{Ric}}_{ij} - R_{ij} \right) \circ \varphi \right| \leq \frac{C}{d^{4+\varepsilon}} \tag{A.1}$$

gilt. Wieder betrachten wir dafür die Koordinatisierung

$$\overline{\mathrm{Ric}}_{ij} = \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ij}{}^k}{\partial \overline{x}^k} - \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ki}{}^k}{\partial \overline{x}^j} + \overline{\Gamma}_{kl}{}^k\, \overline{\Gamma}_{ji}{}^l - \overline{\Gamma}_{jl}{}^k\, \overline{\Gamma}_{ki}{}^l$$

und erkennen zunächst, dass

$$\left| \left(\overline{\Gamma}_{kl}{}^k\, \overline{\Gamma}_{ji}{}^l - \overline{\Gamma}_{jl}{}^k\, \overline{\Gamma}_{ki}{}^l \right) - \left(\overline{\Gamma}_{kl}{}^k\, \overline{\Gamma}_{ji}{}^l - \overline{\Gamma}_{jl}{}^k\, \overline{\Gamma}_{ki}{}^l \right) \circ \varphi \right| \leq \frac{C}{\sigma^{4+\varepsilon}}$$

gilt und daher wiederum nur die ersten zwei Terme der Koordinatisierung betrachtet werden müssen. Für den ersten erkennen wir

$$\begin{aligned} E_1 &:= \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ij}{}^k}{\partial \overline{x}^k} - \overline{g}^{kl} \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial \overline{g}^{kl}}{\partial \overline{x}^k}\, \overline{\Gamma}_{ijl} \\ &= \frac{\partial \overline{g}^{kl}}{\partial \overline{x}^k} \left(\overline{\Gamma}_{ijl} + \overline{\Gamma}_{ijl} \circ \varphi \right) - \left(\frac{\partial \overline{g}^{kl}}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial \overline{g}^{kl}}{\partial \overline{x}^k} \circ \varphi \right) \overline{\Gamma}_{ijl} \circ \varphi + \left(\frac{\partial \overline{g}^{kl}}{\partial \overline{x}^k}\, \overline{\Gamma}_{ijl} \right) \circ \varphi \end{aligned}$$

und daher $|E_1 - E_1 \circ \varphi| \leq {}^C/_{d^{4+\varepsilon}}$. Somit genügt es $\overline{g}^{kl}\, {}^{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}/_{\partial \overline{x}^k}$ anstelle des ersten Terms zu betrachten. Durch die äquivalente Rechnung

$$\begin{aligned} E_2 &:= \overline{g}^{kl} \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial \overline{x}^k} - {}^e\overline{g}^{kl} \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial \overline{x}^k} \\ &= \left(\overline{g}^{kl} - {}^e\overline{g}^{kl} \right) \left(\frac{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial \overline{x}^k} - \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial \overline{x}^k} \circ \varphi \right) + \left(\left(\overline{g}^{kl} - {}^e\overline{g}^{kl} \right) - \left(\overline{g}^{kl} - {}^e\overline{g}^{kl} \right) \circ \varphi \right) \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial \overline{x}^k} \circ \varphi \\ &\quad + \left(\left(\overline{g}^{kl} - {}^e\overline{g}^{kl} \right) \frac{\partial \overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial \overline{x}^k} \right) \circ \varphi \end{aligned}$$

erhalten wir $|E_2 - E_2 \circ \varphi| \leq {}^{C}\!/_{d^{4+\varepsilon}}$ und daher, dass wir den ersten Term wie gewünscht durch

$$ {}^{e}\overline{g}^{kl}\,\frac{\partial\overline{\Gamma}_{ijl}}{\partial\overline{x}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Big({}^{e}\overline{\operatorname{div}}\overline{g}\Big)_i}{\partial\overline{x}^j} + \frac{\partial\Big({}^{e}\overline{\operatorname{div}}\overline{g}\Big)_j}{\partial\overline{x}^i} - {}^{e}\overline{\Delta}\overline{g}_{ij}\right) $$

ersetzen können. Identisch ergibt sich mit

$$ \begin{aligned} E_3 :={}& \frac{\partial}{\partial\overline{x}^j}\left(\overline{\Gamma}_{ki}{}^{k} - \frac{\partial({}^{e}\overline{\operatorname{tr}}\overline{g})}{\partial\overline{x}^i}\right) = \frac{\partial}{\partial\overline{x}^j}\left(\left(\overline{g}^{kl} - {}^{e}\overline{g}^{kl}\right)\frac{\partial\overline{g}_{kl}}{\partial\overline{x}^i}\right) \\ ={}& \frac{\partial}{\partial\overline{x}^j}\left(\left(\left(\overline{g}^{kl} - {}^{e}\overline{g}^{kl}\right) - \left(\overline{g}^{kl} - {}^{e}\overline{g}^{kl}\right)\circ\varphi\right)\frac{\partial\overline{g}_{kl}}{\partial\overline{x}^i}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial\overline{x}^j}\left(\left(\left(\overline{g}^{kl} - {}^{e}\overline{g}^{kl}\right)\circ\varphi\right)\left(\frac{\partial\overline{g}_{kl}}{\partial\overline{x}^i} + \frac{\partial\overline{g}_{kl}}{\partial\overline{x}^i}\circ\varphi\right)\right) \\ &- \frac{\partial}{\partial\overline{x}^j}\left(\left(\left(\overline{g}^{kl} - {}^{e}\overline{g}^{kl}\right)\circ\varphi\right)\left(\frac{\partial\overline{g}_{kl}}{\partial\overline{x}^i}\circ\varphi\right)\right) \end{aligned} $$

und ${}^{\partial\varphi}\!/_{\partial\overline{x}^j} = -1$, dass wir den zweiten Term wie gewünscht durch ${}^{e}\overline{\operatorname{Hess}}_{ij}({}^{e}\overline{\operatorname{tr}}\overline{g})$ ersetzen können. Somit haben wir (A.1) gezeigt. Wie in Proposition A.2.1 erhalten wir durch Spurnehmen mit ${}^{e}\overline{\operatorname{div}}{}^{e}\overline{g} = 0$

$$ \left|{}^{e}\overline{\operatorname{div}}\Big({}^{e}\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\Big) - {}^{e}\overline{\operatorname{div}}\Big({}^{e}\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\Big)\circ\varphi\right| \leq |\overline{\mathcal{S}} - \overline{\mathcal{S}}\circ\varphi| + \frac{C}{d^{4+\varepsilon}}. $$

Nun bemerken wir, dass nach Voraussetzung für die Normale ν resp. ${}^{e}\nu$ der Koordinatensphäre $\mathcal{S}^2_r r(0)$ bzgl. $\overline{g}$ resp. ${}^{e}\overline{g}$

$$ |\nu + \nu\circ\varphi| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}, \quad |({}^{e}\nu - \nu) + ({}^{e}\nu - \nu)\circ\varphi| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} $$

und äquivalent für das Oberflächenmaß μ resp. ${}^{e}\mu$ bzgl. $\overline{g}$ resp. ${}^{e}\overline{g}$

$$ |\mu - \mu\circ\varphi| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}, \quad |({}^{e}\mu - \mu) - ({}^{e}\mu - \mu)\circ\varphi| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} $$

gilt. Mit

$$ \left|\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi - \overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\circ\varphi\right| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}, \quad \left|\Big({}^{e}\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi - \overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\Big) + \Big({}^{e}\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi - \overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\Big)\circ\varphi\right| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}+\varepsilon}} $$

ergibt sich daher zunächst

$$ \left|\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} r\left(\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\right)(\nu)\,\nu_i - {}^{a}\overline{\Pi}_{\nu i}\,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathcal{S}^2_r(0)} r\left({}^{e}\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\right)({}^{e}\nu)\,{}^{e}\nu_i - {}^{a}\overline{\Pi}_{{}^{e}\nu i}\,\mathrm{d}{}^{e}\mu\right| \leq \frac{C}{r^{\varepsilon}}. $$

Durch die äquivalente Rechnung wie in Proposition A.2.1 erhalten wir damit für $R' > R > R_0$

$$ \begin{aligned} &\left|\int_{\mathcal{S}^2_{R'}(0)} R'\left(\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\right)(\nu)\,\nu_i - {}^{a}\overline{\Pi}_{\nu i}\,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathcal{S}^2_R(0)} R\left(\overline{\operatorname{div}}{}^{a}\Pi\right)(\nu)\,\nu_i - {}^{a}\overline{\Pi}_{\nu i}\,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\qquad \leq \int_R^{R'}\left|\int_{\mathcal{S}^2_r(0)} \overline{\mathcal{S}}\,\overline{x}_i + \frac{C}{r^{4+\varepsilon}}\,\mathrm{d}\mu\right|\mathrm{d}r. \end{aligned} $$

Dies impliziert sowohl die Wohldefiniertheit von Z_i, als auch die Behauptung für $\Sigma = \mathcal{S}_R^2(0)$. Für Σ wie in der Voraussetzung folgt die Behauptung auf die gleiche Art und Weise. ////

A.3. Eine Grönwall-Ungleichung

In diesem Abschnitt zeigen wir der Vollständigkeit halber eine einfache Ungleichung vom Typ der Grönwall-Ungleichung für gewöhnliche (approximative) Differentialgleichungen. Diese ist bei weitem nicht optimal, aber für unsere Zwecke ausreichend.

A.3.1 Lemma (Grönwall-Ungleichung)
Seien $P \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0\,,\infty)$ und $\varepsilon \in [0\,,\infty)$ beliebige Konstanten und $0 \leq h \in \mathrm{L}^1([t_0\,,\infty))$. Für jede stetig-differenzierbare Funktion $f \in [t_0\,,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\left|f'(t) + \frac{\delta}{t}\, f(t) - \frac{P}{t}\right| \leq \frac{h(t)}{t^\varepsilon}, \qquad f(t_0) = f_0$$

gilt

$$\begin{cases} \left|f(t) - \dfrac{P}{\delta} - \dfrac{\eta}{t^\delta}\right| \leq \dfrac{1}{t^\varepsilon} \displaystyle\int_t^\infty h(s)\,\mathrm{d}s & : \varepsilon \geq \delta \\ \left|f(t) - \dfrac{P}{\delta}\right| \leq \dfrac{1}{t^\varepsilon} \displaystyle\int_t^\infty h(s)\,\mathrm{d}s & : \varepsilon < \delta \end{cases},$$

wobei $\eta \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl ist, die von f abhängt. ◇

Beweis
Für $F(t) := f(t) - {}^P\!/\!_\delta$ gilt nach Voraussetzung

$$\left|F'(t) + \frac{\delta}{t}\, F(t)\right| \leq \frac{h(t)}{t^\varepsilon}.$$

Gilt die Behauptung für F anstelle von f, so folgt die Behauptung durch Auflösen der Definition von $F(t)$ nach $f(t)$ auch für f. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P = 0$ annehmen.

Für $g(t) := t^\delta f(t)$ gilt nach Voraussetzung $|g'(t)| \leq h(t)/t^{\varepsilon-\delta}$. Insbesondere gilt per Integration für $t_0 \leq t < T$ im Fall von $\varepsilon \geq \delta$

$$|g(t) - g(T)| \leq \int_t^T \frac{h(s)}{s^{\varepsilon-\delta}}\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{t^{\varepsilon-\delta}} \int_t^T h(s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{1}{t^{\varepsilon-\delta}} \int_t^\infty h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Damit existiert in diesem Fall der Limes g_∞ von $g(t)$ für $t \to \infty$ und es gilt

$$|g_\infty - g(t)| \leq \frac{1}{t^{\varepsilon-\delta}} \int_t^\infty h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Durch Auflösen der Definition von $g(t)$ nach $f(t)$ ergibt in diesem Fall die Behauptung.

Ist $\varepsilon \leq \delta$, so gilt für $t \geq t_0$ mit $f(t) \neq 0$

$$\left|\frac{\partial|f(t)|}{\partial t} + \frac{\delta}{t}\,|f(t)|\right| \leq \frac{h(t)}{t^{\varepsilon}}$$

und daher auch für $t_0 \leq t < T$

$$||f(t)| - |f(T)|| \leq \int_t^T -\frac{\delta}{s}\,|f(s)| + \frac{h(s)}{s^{\varepsilon}}\mathrm{d}s \leq t^{-\varepsilon} \int_t^{\infty} h(s)\mathrm{d}s.$$

Damit existiert in diesem Fall der Limes $|f|_\infty$ von $|f(t)|$ für $t \to \infty$ und es gilt

$$||f|_\infty - |f(t)|| \leq t^{-\varepsilon} \int_t^{\infty} h(s)\mathrm{d}s.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $|f|_\infty = 0$. Auf Grund der Stetigkeit von f können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lim_{t\to\infty} f(t) > 0$ annehmen. Insbesondere gilt $f(t) > 0$ für $t > T$ ab einem gewissem $T < \infty$. Damit gilt für $f_\infty := |f|_\infty$

$$|f_\infty - f(t)| \leq t^{-\varepsilon} \int_t^{\infty} h(s)\mathrm{d}s.$$

Betrachten wir nun wiederum die Ableitung

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f(t)}{\partial x}t + \frac{\delta}{t}\,f_\infty\right| &\leq \left|\frac{\partial f(t)}{\partial x}t + \frac{\delta}{t}\,f(t)\right| + \delta t^{-1-\varepsilon} \int_t^{\infty} h(s)\mathrm{d}s \\ &\leq t^{-\varepsilon}\Big(h(t) + t^{-1} \int_t^{\infty} h(s)\mathrm{d}s\Big).\end{aligned}$$

Per Integration erhalten wir für eine endliche Zahl c

$$\begin{aligned}\infty > |f_\infty - f(t)| &\geq \int_t^{\infty} \frac{\delta}{s} f_\infty - t^{-\varepsilon}\Big(h(t) + s^{-1} \int_t^{\infty} h(u)\,\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}s \\ &\geq \delta\, f_\infty \int_t^{\infty} s^{-1}\,\mathrm{d}s - c = \infty.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch und daher gilt $|f|_\infty = 0$. ////

Literaturverzeichnis

[ADM61] Arnowitt, Richard ; Deser, Stanley ; Misner, Charles: Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity. In: *Phys. Rev.* 122 (1961), Nr. 3, S. 997–1006

[AEM11] Andersson, Lars ; Eichmair, Michael ; Metzger, Jan: Jang's equation and its applications to marginally trapped surfaces. In: *Complex analysis and dynamical systems IV* (2011), Nr. Part 2, S. 13–45

[AM09] Andersson, Lars ; Metzger, Jan: The area of horizons and the trapped region. In: *Communications in Mathematical Physics* 290 (2009), Nr. 3, S. 941–972

[AMS05] Andersson, Lars ; Mars, Marc ; Simon, Walter: Local existence of dynamical and trapping horizons. In: *Physical review letters* 95 (2005), Nr. 11, S. 111102

[Bar86] Bartnik, Robert: The mass of an asymptotically flat manifold. In: *Communications on pure and applied mathematics* 39 (1986), Nr. 5, S. 661–693

[Bd12] Barbosa, Joã. L. ; do Carmo, Manfredo: Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. In: *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*. Springer, 2012, S. 221–235

[BÓ87] Beig, Robert ; ÓMurchadha, Niall: The Poincaré group as the symmetry group of canonical general relativity. In: *Annals of Physics* 174 (1987), Nr. 2, S. 463–498

[CBG69] Choquet-Bruhat, Yvonne ; Geroch, Robert: Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. In: *Communications in Mathematical Physics* 14 (1969), Nr. 4, S. 329–335

[Ced12] Cederbaum, Carla: *The Newtonian Limit of Geometrostatics*, Freien Universität Berlin, Diss., 2012. – arXiv:1201.5433v1

[Chr88] Chruściel, Piotr T.: On the invariant mass conjecture in general relativity. In: *Communications in mathematical physics* 120 (1988), Nr. 2, S. 233–248

[CN14] Cederbaum, Carla ; Nerz, Christopher: Explicit Riemannian Manifolds with Unexpectedly Behaving Center of Mass. In: *Annales Henri Poincaré* (2014). – ISSN 1424–0637

[CP11] Corvino, Justin ; Pollack, Daniel: Scalar curvature and the Einstein constraint equations. (2011). – arXiv:0301071.v1

[CS03] Corvino, Justin ; Schoen, Richard: On the Asymptotics for the Vacuum Einstein Constraint Equations. (2003). – arXiv:gr-qc/0301071v1

[CW08] Corvino, Justin ; Wu, Haotian: On the center of mass of isolated systems. In: *Classical and Quantum Gravity* 25 (2008), Nr. 8, S. 085008

[CWY13] Chen, Po-Ning ; Wang, Mu-Tao ; Yau, Shing-Tung: Conserved quantities in general relativity: from the quasi-local level to spatial infinity. (2013). – arXiv: 1312.0985v1

[DLM05] De Lellis, Camillo ; Müller, Stefan: Optimal rigidity estimates for nearly umbilical surfaces. In: *Journal of Differential Geometry* 69 (2005), Nr. 1, S. 75–110

[DLM06] De Lellis, Camillo ; Müller, Stefan: A C^0 estimate for nearly umbilical surfaces. In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 26 (2006), Nr. 3, S. 283–296

[EM12] Eichmair, Michael ; Metzger, Jan: Unique isoperimetric foliations of asymptotically flat manifolds in all dimensions. In: *Inventiones mathematicae* (2012), S. 1–40

[FB52] Foures-Bruhat, Yvonne: Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. In: *Acta mathematica* 88 (1952), Nr. 1, S. 141–225

[GT01] Gilbarg, David ; Trudinger, Neil S.: *Elliptic partial differential equations of second order*. Bd. 224. springer, 2001

[Hua10] Huang, Lan-Hsuan: Foliations by Stable Spheres with Constant Mean Curvature for isolated systems with general asymptotics. In: *Communications in Mathematical Physics* 300 (2010), Nr. 2, S. 331–373

[HY96] Huisken, Gerhard ; Yau, Shing-Tung: Definition of Center of Mass for Isolated Physical Systems and Unique Foliations by Stable Spheres with Constant Mean Curvature. In: *Invent. Math.* 124 (1996), S. 281–311

[Lic58] Lichnerowicz, André: Geometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958. In: *Zentralblatt MATH* 96 (1958)

[LMS11] Lamm, Tobias ; Metzger, Jan ; Schulze, Felix: Foliations of asymptotically flat manifolds by surfaces of Willmore type. In: *Mathematische Annalen* 350 (2011), Nr. 1, S. 1–78

[Met04] Metzger, Jan: *Blätterungen asymptotisch flacher Mannigfaltigkeiten durch Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung*, Eberhard Karls Universität Tübingen, Diss., Mai 2004

[Met07] Metzger, Jan: Foliations of asymptotically flat 3-manifolds by 2-surfaces of prescribed mean curvature. In: *Journal of Differential Geometry* 77 (2007), Nr. 2, S. 201–236

[Mur86] Murchadha, Niall Ó.: Total energy momentum in general relativity. In: *Journal of mathematical physics* 27 (1986), Nr. 8, S. 2111–2128

[Ner13] Nerz, Christopher: Time evolution of ADM and CMC center of mass in general relativity. (2013). – arXiv:1312.6274v1

[Ner14a] Nerz, Christopher: Foliation by stable spheres with constant expansion for isolated systems without asymptotic symmetry. (2014). – noch zu veröffentlichen, mathematisch abgeschlossen

[Ner14b] Nerz, Christopher: Foliations by stable spheres with constant mean curvature for isolated systems without symmetry. (2014). – arXiv:1408.0752v1

[RT74] Regge, Tullio ; Teitelboim, Claudio: Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity. In: *Annals of Physics* 88 (1974), Nr. 1, S. 286–318

[Sim68] Simons, James: Minimal varieties in Riemannian manifolds. In: *Annals of Mathematics* (1968), S. 62–105

[SSY75] Schoen, Richard ; Simon, Leon ; Yau, Shing-Tung: Curvature estimates for minimal hypersurfaces. In: *Acta Mathematica* 134 (1975), Nr. 1, S. 275–288

[Sta60] Stampacchia, Guido: Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues. In: *Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces*. Hebrew University of Jerusalem : Jerusalem Acad. Pr., July 1960, S. 399–408

[Yor79] York, James W. Jr.: Kinematics and dynamics of general relativity. In: Smarr, L. L. (Hrsg.): *Sources of Gravitational Radiation*, 1979, S. 83–126

Symbolverzeichnis

S°	Der spurfreie Anteil eines symmetrischen Tensors: $S^\circ := S - {}^{\mathrm{tr}S}/_{\mathrm{tr}g}\, g$	12
Δh	Laplace einer Funktion $h \in \mathrm{W}^{2,1}(M^n)$: $\Delta h := \mathrm{tr}\mathrm{Hess}\ h$	16
$[\Delta h]$	schwache Form des Laplace-Operators einer Funktion $h \in \mathrm{W}^{1,1}(\Sigma^n)$ für alle $f \in \mathcal{C}^1(\Sigma^n)$ definiert durch $[\Delta h](f) := -\int g\,(\nabla f, \nabla h)\,\mathrm{d}\mu$	33
$(\,\bullet \wedge \bullet\,)_b$	Das Wedge-Produkt über einer Paarung b	12
$\odot$	Das Spurprodukt: $(S \odot T)_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_l} := S_{i_1 \cdots k}{}^{l} T_{l j_1 \dots j_k}$	12
$\widehat{\nabla}$, $\overline{\nabla}$, ∇	Levi-Civita Zusammenhang bzgl. $\widehat{g}$, $\overline{g}$, g auf $\widehat{M}$, $\overline{M}$, Σ	12
$\widehat{\nabla} f$, $\overline{\nabla} f$, ∇f	Gradient einer Funktion f bzgl. $\widehat{g}$, $\overline{g}$, g	12
$\overline{\alpha}$	zeitliche Lapse-Funktion	26
c_S	Sobolev-Konstante	32
$\overline{c}_0$	Konstante zur Abfallrate ε	23
$\overline{c}_1$	Konstante zur Abfallrate δ	23
δ	(zumeist) Abfallrate der betrachteten Anfangsdaten (nicht Riemannschen Anteil)	23
$\widehat{\mathrm{div}}$, $\overline{\mathrm{div}}$, div	Divergenz bzgl. $\widehat{g}$, $\overline{g}$, g auf $\widehat{M}$, $\overline{M}$, Σ	12
$\mathrm{E}_{\overline{\mathrm{J}}}(d)$	Abfallfunktion der Energiestromdichte der betrachteten Anfangsdaten, falls diese mit punktweise Abschätzung integrabel ist	23
$\mathrm{E}_{\overline{S}}(d)$	Abfallfunktion der Skalarkrümmung der betrachteten Riemannschen Mannigfaltigkeit bzw. Anfangsdaten	23
$\widehat{\mathrm{Ein}}$	Einsteintensor $\widehat{\mathrm{Ein}} := \widehat{\mathrm{Ric}} - {}^{\widehat{S}}/_2\, \widehat{g}$ bzgl. $\widehat{g}$ auf $\widehat{M}$	12
ε	(zumeist) Abfallrate der betrachteten Riemannschen Mannigfaltigkeit bzw. des Riemannschen Anteils der Anfangsdaten	23
$\widehat{\exp}_p, \overline{\exp}_p, \exp_p$	Exponentialabbildung im Punkt p bzgl. $(\widehat{M},\widehat{g})$, $(\overline{M},\overline{g})$, (Σ, g)	12
${}^{e}\overline{g}$	Euklidische Metrik	23

m_{ADM}	$:= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi r} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathcal{S}_r^2(0)} \left(\frac{\partial \overline{g}_{jj}}{\partial \overline{x}_i}\, \overline{x}^i - \frac{\partial \overline{g}_{ji}}{\partial \overline{x}_j}\, \overline{x}^i \right) \mathrm{d}\,{}^e\!\mu$ die ADM-Masse	24
${}^\tau\overline{M}$	künstlicher Zeitschnitt ${}^\tau\overline{M} := \{\tau\} \times \overline{M}$	67
$\vec{\mathrm{p}}(\Sigma)$	approximativer Impuls auf einer geschlossenen Fläche $\Sigma \hookrightarrow \overline{M}$ zu Anfangsdaten $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$, $\mathrm{p}_i(\Sigma) := \int_\Sigma \Pi\ (\nu, \bar{e}_i)\, \mathrm{d}\mu$	76
$\vec{\mathrm{P}}$	Impuls zu Anfangsdaten $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$, $\vec{\mathrm{P}} := \lim_{r\to\infty} \vec{\mathrm{p}}(\mathcal{S}_r^2(0))$	76
Π	Impulstensor zu Anfangsdaten $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{\mathrm{k}}, \overline{\mathrm{J}}, \overline{\varrho})$, $\Pi := \overline{\mathcal{H}}\overline{g} - \overline{\mathrm{k}}$	76
$\overline{\varrho}$	Energiedichte $\overline{\varrho} = \widehat{\mathrm{Ein}}\ (\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta})$	14
r	kleinster Euklidischer Koordinaten Abstand vom Koordinaten Ursprung $r := \min\{\lvert p\rvert\ :\ p \in \Sigma\}$	30
$\widehat{\mathcal{R}}$, $\overline{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$	Riemannscher Krümmungstensor bzgl. $\widehat{g}$, $\overline{g}$, g auf $\widehat{M}$, $\overline{M}$, Σ	12
$\widehat{\mathrm{Ric}}$, $\overline{\mathrm{Ric}}$, Ric	Ricci Krümmungstensor bzgl. $\widehat{g}$, $\overline{g}$, g auf $\widehat{M}$, $\overline{M}$, Σ	12
$\widehat{\mathcal{S}}$, $\overline{\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}$	Skalare Krümmung bzgl. $\widehat{g}$, $\overline{g}$, g auf $\widehat{M}$, $\overline{M}$, Σ	12
${}_\sigma\Sigma$	Fläche konstanter mittlerer Krümmung oder konstanter Expansion ${}^{-2}\!/\!_\sigma$	64
σ	Krümmungsradius, für Flächen mit konstanter gemischter Krümmung $\mathcal{H} + \mathcal{b}\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}}$ ($\mathcal{b} \in [-1\,,1]$) durch $\mathcal{H} + \mathcal{b}\,\mathrm{tr}\overline{\mathrm{k}} \equiv: {}^{-2}\!/\!_\sigma$ definiert	30
ς	Flächenradius, $\varsigma := \sqrt{\lvert\Sigma\rvert/4\pi}$	30
τ	künstlicher Zeitpunkt in der künstlichen Lorentz-Mannigfaltigkeit $\widehat{M} := [0\,,1] \times \overline{M}$	64
$\widehat{\mathrm{tr}}$, $\overline{\mathrm{tr}}$, tr	Spur bzgl. $\widehat{g}$, $\overline{g}$, g auf $\widehat{M}$, $\overline{M}$, Σ	12
$\mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n)$	Sobolev-Raum auf Σ^n	31
$\mathrm{W}^{-k,p}(\Sigma^n)$	Dualraum des Sobolev-Raums $\mathrm{W}^{k,p}(\Sigma^n)$ auf Σ^n	31
$\mathfrak{X}(M)$	die Menge aller glatten Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M	12

Stichwortverzeichnis