

Spezielle Kähler-Metriken auf sphärischen Varietäten

Dissertation

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Stephan Feuerer
aus Regensburg

Tübingen
2012

Tag der mündlichen Qualifikation:

Dekan:

1.Berichterstatter:

2.Berichterstatter:

11.01.2013

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

Prof. Dr. Victor Batyrev

Prof. Dr. Frank Loose

Spezielle Kähler-Metriken auf sphärischen Varietäten

S t e p h a n F e u e r e r

Dem Andenken meiner Großeltern
Johann und Berta Feuerer, Bruno und Herta Mamma

Zusammenfassung

Diese Dissertation beschreibt invariante Kählermetriken auf sphärischen Varietäten X durch Potentialfunktionen auf einem reellen Parameterbereich. Die Kählermetriken sollen dabei eine spezielle geometrische Eigenschaft besitzen, wie kähler-einsteinsch, kähler-ricci-solitonisch (bezüglich eines zugeordneten holomorphen Vektorfeldes), skalarflach oder extremal. Sie beginnt mit einer knappen Einführung in die Theorie der sphärischen Varietäten und einer sich daran anschließenden Darstellung wichtiger Klassen sphärischer Varietäten, die im weiteren Verlauf eine Rolle spielen werden. Darauf folgen die zentralen Kapitel der Arbeit, in denen zuerst horosphärische homogene Räume herangezogen werden, um eine reelle partielle Differentialgleichung für invariante Kählermetriken herzuleiten, die der Kähler-Einstein-Bedingung

$$Ric(\omega) = \lambda\omega$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ genügen. In Kapitel 3 wird der Versuch unternommen, für Kähler-Einstein-Metriken auf $G^{\mathbb{C}}$ -fasthomogenen Varietäten, die i. A. nicht sphärisch sind, eine reelle Monge-Ampère-Gleichung auf dem riemannschen symmetrischen Raum $M = G^{\mathbb{C}}/G$ herzuleiten, was sich mit der verwendeten und empfohlenen Methode als nicht möglich herausstellt. Wir beschreiben aber auch, wie man mit Hilfe der direkten Berechnung des Operators auf eine reelle partielle Differentialgleichung stößt. Diese direkte Berechnung des Operators werden wir auch in den folgenden Kapiteln 4 und 5 verwenden, in denen die reelle Einsteingleichung explizit berechnet wird, für die Beispiele $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H$ bzw. $SL_n(\mathbb{C})/SL_{n-1}(\mathbb{C})$, und in Kapitel 5 für zwei wundervolle Einbettungen sphärischer Varietäten vom Rang eins. Lösungen dieser Gleichungen werden angegeben und Verallgemeinerungen werden erörtert. Stets gehen wir auch auf andere Ergebnisse in der Literatur zu diesen Fragestellungen ein.

Inhaltsverzeichnis

Notation	4
Einleitung	5
Danksagungen	9
1 Theorie der sphärischen Varietäten	10
1.1 Definition und Klassifikation von sphärischen Varietäten nach Luna-Vust . . .	10
1.1.1 Definition einer sphärischen Varietät	10
1.1.2 Das Gitter N und der Bewertungskegel ν	11
1.1.3 Einfache Einbettungen	13
1.1.4 Einbettungen und gefärbte Fächer	14
1.2 Wichtige Klassen sphärischer Varietäten	15
1.2.1 Wundervolle Varietäten	15
1.2.2 Symmetrische Varietäten	16
1.2.3 Horosphärische oder S-Varietäten	17
1.3 Topologische Charakterisierung des Ranges einer sphärischen Einbettung . .	20
2 Spezielle Kähler-Metriken auf horosphärischen Varietäten	22
2.1 Das Beispiel $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$	22
2.2 Das Beispiel $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$	26
2.3 Kähler-Ricci-Solitonen auf horosphärischen Fano-Mannigfaltigkeiten	27
3 Kähler-Einstein-Metriken auf $G^{\mathbb{C}}$-fasthomogenen Fano-Mannigfaltigkeiten	30
3.1 Einführung	30
3.2 $G^{\mathbb{C}}$ -fasthomogene Mannigfaltigkeiten	31
3.2.1 Identifikation der Form $\partial\bar{\partial}\phi$ auf $G^{\mathbb{C}}$ mit der Riemann'schen Hesseschen $\nabla^2 u$ auf M	34
3.2.2 Aufstellung der reellen Monge-Ampère-Gleichung	46
3.2.3 Aufstellung der Einsteingleichung für homogene Räume unter Verwendung von Ω	51
3.3 Wichtige Eigenschaften von $G^{\mathbb{C}}$ in Bezug auf den homogenen Raum M	53
3.4 Die Beispiele der torischen Varietäten und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -fasthomogenen Varietäten	57
3.4.1 Der torische Fall $G = (S^1)^n$ und torische Varietäten	58
3.4.2 Der hyperbolische Raum und die halbeinfache Gruppe $G = \mathrm{SU}(2)$. .	59
3.4.3 Verschiedene $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ - und $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ -Einbettungen \mathbf{x} und ihre Kähler-Einstein-Metriken	62

3.4.4	Die einfache Gruppe $\text{PSU}(2)$	64
3.4.5	Interpretation der Beispiele	66
4	Kähler-Metriken auf $\text{SL}_n(\mathbb{C})$-Varietäten ($n \geq 3$) und $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$-Varietäten	67
4.1	Einführung in diese Problemstellung	67
4.2	Die Bestimmung der invarianten Volumenform und der Ersetzungsregeln . . .	71
4.2.1	Ersetzungsregeln für Y in den Fällen $n \geq 3$	71
4.2.2	Die invariante Volumenform für Y , $n \geq 3$	72
4.2.3	Volumenform und Ersetzungsregeln für den homogenen Raum $\text{SL}_2(\mathbb{C})$	74
4.3	Berechnung des Operators A' im allgemeinen Fall $n \geq 3$	76
4.4	Die Berechnung von A' für den Fall $n = 2$	90
4.5	Beispiele von Kompaktifizierungen für $n \geq 2$	93
4.5.1	Beispiele im Fall $n = 2$	94
4.5.2	Die Beispiele im Fall $n > 2$	95
4.6	Bezug zu Operatoren aus dem Kapitel 3	97
5	Wundervolle Einbettungen sphärischer homogener Räume	98
5.1	Spezielle Kähler-Metriken wundervoller Varietäten vom Rang eins	98
5.1.1	\mathbb{P}^3 als $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ -, und die Quadrik in \mathbb{P}^4 als $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -Einbettung	98
5.1.2	$\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ als $\text{PSL}(n+1)$ -Varietät	107
5.1.3	Andere wundervolle Varietäten vom Rang eins	116
5.2	Spezielle Kähler-Metriken auf wundervollen Einbettungen höheren Ranges . .	116
	Literaturverzeichnis	118

Notation

Alle auftretenden Varietäten sind über \mathbb{C} gesetzt. Die Einstein'sche Summenkonvention wird stets angewandt.

Wichtigste Grundlagen stammen aus den Bereichen: Theorie affiner, algebraischer Gruppen, komplexe algebraische Geometrie und Differentialgeometrie, wofür wir die Werke [Hu], [GH], [W], [H] und [KN] als Quellen (i.d.R. ohne Anmerkung im Text) angeben.

G	eine reductive und zusammenhängende affine algebraische Gruppe
B	eine Boreluntergruppe (zusammenhängend)
$Stab_G(x)$	Stabilisator in einem Punkt x bezüglich einer Gruppenwirkung von G (oftmals in der Algebra auch als G_x bezeichnet)
$N_G(H)$	Normalisator von einer Untergruppe H in G
$\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$	die eindimensionale, multiplikative algebraische Gruppe (\mathbb{C}^*, \cdot) , auch als \mathbb{G}_m bezeichnet.
$D_n(\mathbb{C})$	die Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen
KE,KRS	Kähler-Einstein, Kähler-Ricci-Soliton
psh	plurisubharmonisch
Einsteingleichung	eine reelle partielle Differentialgleichung, die die Kähler-Einstein-Bedingung $Ric(\omega) = \lambda\omega$ ausdrückt

Einleitung

Eine Kählermannigfaltigkeit X kann auf drei verschiedene Arten definiert werden, je nach Ausgangspunkt der jeweiligen Betrachtung. Vom Standpunkt der Riemann'schen Geometrie als:

Definition 0.1. *Eine Kählermannigfaltigkeit X ist eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, zusammen mit einer kompatiblen fast-komplexen Struktur J (d.h. die Riemann'sche Metrik g ist invariant unter der fast-komplexen Struktur J), so dass $\nabla J = 0$ gilt, wobei ∇ die kovariante Ableitung bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs ist.*

Von der Theorie einer fast-komplexen Struktur J auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit her betrachtet:

Definition 0.2. *Es gibt eine Hermite'sche Metrik g , dessen assoziierte metrische Form $\omega := g(J, \cdot)$ geschlossen ist: $d\omega = 0$, und J ist integrabel, d.h. eine komplexe Struktur.*

Von der symplektischen Geometrie herkommend:

Definition 0.3. *Eine Kählermannigfaltigkeit ist eine symplektische Mannigfaltigkeit, d.h. eine differenzierbare Mannigfaltigkeit geradzahligter Dimension, mit einer symplektischen 2-Form ω , so dass es eine ω -kompatible komplexe Struktur gibt, d.h. $\omega(\cdot, J\cdot)$ ist Riemann'sche Metrik.*

Diese reichhaltigen Strukturen, die eine Kählermannigfaltigkeit ausmachen, stehen miteinander in Beziehung, und man spricht von einem kompatiblen Tripel (ω, g, J) , da man aus je zwei davon die dritte Struktur bestimmen kann.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Kählermetriken g auf nichtsingulären, sphärischen G -Varietäten, die invariant unter einer maximalen kompakten Untergruppe K von G sind. Jede projektive, algebraische Varietät ist kählersch, daher gibt es dort stets Kählermetriken. Allerdings existiert nicht auf jeder kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit eine solche Art von Metrik, wie die Hopfmannigfaltigkeiten zeigen. Unter allen Kählermetriken gibt es nun solche, die darüber hinaus spezielle geometrische Eigenschaften besitzen, wie Kählermetriken mit konstanter bisektionaler Krümmung, Kähler-Einstein-Metriken (KE-Metriken), Kähler-Ricci-Solitonen (KRS) (zusammen mit einem holomorphen Vektorfeld), Kählermetriken mit konstanter Skalarkrümmung, extremale Metriken. Die Existenz einer derartigen speziellen Metrik kann man zur Klassifizierung von Kählermannigfaltigkeiten nutzen, je nachdem ob sie mit einer speziellen Kählermetrik versehen werden kann oder nicht, und wenn eine bestimmte Art nicht existiert, so gibt es vielleicht eine Allgemeinere. Zum Beispiel hat $\mathbb{P}^2_{[1:0:0]}$ keine Kähler-Einstein-Metrik mit positiver Skalarkrümmung, aber es existiert ein KRS, wobei ω von positiver Skalarkrümmung ist, und dazu ein eindeutig bestimmtes, holomorphes Vektorfeld X vorhanden ist.

Es ist eine grundlegende Eigenschaft von Kählermetriken, dass man sie lokal durch ein Potential ϕ_{lokal} als $\partial\bar{\partial}\phi_{\text{lokal}}$ beschreiben kann, also einfach über eine lokal definierte, strikt plurisubharmonische (psh), glatte Funktion. Dadurch kann die geometrische Bedingung an die Metrik (oft) durch eine Gleichung für Potentialfunktionen ausgedrückt werden.

Für torische Varietäten wurde mit [WZ] 2004 ein Meilenstein auf der Suche nach Kähler-Ricci-Solitonen auf Fano-Mannigfaltigkeiten gesetzt, da von X.-J. Wang und X. Zhu gezeigt wurde:

Theorem 0.1 ([WZ] Theorem 1.1). *Eine torische Fano Mannigfaltigkeit besitzt einen KRS. Die Metrik ω ist eindeutig bis auf holomorphe Automorphismen und das holomorphe Vektorfeld ist eindeutig bestimmt. Der KRS ist eine KE Metrik, falls die Futaki-Invariante verschwindet.*

Theorem 0.1 wurde von X. Zhu in [Z] mit der Methode des Kähler-Ricci-Flusses anstelle der Kontinuitätsmethode erneut gezeigt. Außerdem wurden nach direkten Folgerungen aus Theorem 0.1 von C. Li in [L1], [L2], und Verallgemeinerungen davon in Y. Shi und X. Zhu [SZ], E. Legendre [Le], von F. Podestà und A. Spiro schon ein größerer Schritt im KRS-Problem in die Menge der toroidalen horosphärischen Varietäten mit der Arbeit [PS] getan. Die torischen Fano-Varietäten sind insbesondere auch homogene torische Faserbündel mit einem einzigen Punkt als Basis, wodurch Theorem 0.1 in [PS] erkennbar verallgemeinert wird. Dies umfasst auch Arbeiten von Koiso und Sakane über KE-Metriken bzw. KRS für die Faser $F = \mathbb{P}^1$. Der Schluss zur Lösbarkeit benutzt entscheidend die Lösung der reellen, partiellen, nichtlinearen Differentialgleichung durch A-Priori-Abschätzungen aus [WZ], die höheren Abschätzungen ihrerseits stammen aus [Y2], [TZ2]. Die horosphärischen Einbettungen oder auch S-Varietäten (so in [T1] genannt) $G/H \subset X$, für G reduktiv und U eine maximale unipotente Untergruppe von G , die in H enthalten ist, stellen eine Teilmenge der sphärischen Varietäten dar, die wegen der Beschaffenheit der Faser F im toroidalen Fall noch gewisse torische Methoden zur Bearbeitung zulassen. Für alle anderen horosphärischen oder sphärischen Varietäten trifft das nicht mehr zu, und man benötigt eine echte Verallgemeinerung der Arbeitsweise. In dieser Arbeit zeigen wir, dass die direkte Methode der rechnerischen Reduktion einer komplexen Gleichung, die die geometrische Bedingung inkorporiert, auf eine reelle, partielle Differentialgleichung führt. Dies wird an vielen Beispielen unterschiedlicher Klassen sphärischer Varietäten illustriert. Dabei ist die Wahl der reellen, K -invarianten Koordinatenfunktionen auf G/H entscheidend, wenn $K \leq G$ eine maximale, kompakte Untergruppe ist.

Nicht berücksichtigt werden in dieser Arbeit die interessanten Entwicklungen dieses Themas, die für torische symplektische Varietäten mit Arbeiten von V. Guillemin in [G], M. Abreu in [A1], [A2] initiiert wurden. [R], [BB], [D1] und [Wo] beschreiten diesen Weg auch für sphärische Varietäten. Ferner klammern wir die analytischen Methoden aus der Theorie des Kähler-Ricci-Flusses komplett aus, hierzu gibt es sehr viele Arbeiten, u.a. von X. Chen, D. H. Phong, J. Song, G. Tian, B. Weinkove, oder [Z]. Ebenso verzichten wir auf den Ansatz für Existenztheoreme spezieller Kählermetriken, der mit dem Begriff der Stabilität verknüpft ist, mit allen Abwandlungen davon. Hierzu vgl. Werke von S.K. Donaldson, G. Tian, S.-T. Yau, und weitere Referenzen im Skript [PhSt].

Diese Dissertation enthält in ihren Kapiteln folgende Sachverhalte:

In Kapitel 1 geben wir eine Darstellung der wichtigsten Begriffe und Fakten aus der Theorie der sphärischen Varietäten über \mathbb{C} . Die Luna-Vust-Theorie ist für solche Einbettungen der Komplexität 0 besonders gut zu handhaben, und die Klassifikation geschieht durch sogenannte gefärbte Fächer. Das hier vorgestellte Material ist nicht neu und folgt den einschlägigen Referenzen wie [T1], [Br2], [K]. Desweiteren wird ein Ergebnis von D. Akhiezer aus [Ak1] präsentiert, das den Rang einer sphärischen G -Varietät durch die topologische Dimension des Raumes der Doppelnebenklassen $K \backslash G/H$ bestimmt, wobei $K \leq G$ maximale kompakte Untergruppe, und $H \leq G$ Stabilisator eines Punktes in der offenen Bahn ist. In [Ak1] wird auch eine Funktion angegeben, die nach einer Idee von V. Batyrev einen standardisierten Weg bahnt, die reellen, K -invarianten Koordinatenfunktionen q^i , $i = 1 \dots r := rk(G/H)$ zu erhalten. Die von den q^i induzierte Abbildung gibt in vielen Fällen Anlass zu einer Bijektion von $K \backslash G/H$ auf das Bild des Bewertungskegel ν in $N_{\mathbb{R}}$ der sphärischen Varietät G/H , so dass Potentiale zu Funktionen darauf werden. Beweisen werden wir die Bijektivität nur in einem Spezialfall im Kapitel 4.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns mit horosphärischen Varietäten und ihrer speziellen Kählermetriken. Wie schon erwähnt, liefert Theorem 0.1 eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage (bis auf holomorphe Automorphismen) von Kähler-Ricci-Solitonen auf torischen Fanovarietäten. Wir leiten eine reelle Differentialgleichung für die zwei horosphärischen und toroidalen Beispiele $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, und die Hyperfläche $\sum_i X_i Y_i = 0$ in $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ her, beide jeweils unter $SL_n(\mathbb{C})$ -Wirkung, und vergleichen diese mit der Gleichung auf Torusfasern von Podestà und Spiro in [PS]. Wir besprechen im letzten Abschnitt dieses Kapitels, wie die Verallgemeinerung auf beliebige horosphärische Varietäten vor sich gehen kann.

Im Kapitel 3 erörtern wir die Herleitung von reellen Gleichungen für Kähler-Einstein-Metriken auf $G^{\mathbb{C}}$ -fasthomogenen, kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten \mathbf{X} , und ordnen unterschiedliche Methoden ein. $G^{\mathbb{C}}$ ist dabei eine komplexifizierte, kompakte, zusammenhängende Liegruppe, die einen dichten Orbit in \mathbf{X} besitzt, der isomorph zu $G^{\mathbb{C}}$ (bzw. $G^{\mathbb{C}}$ modulo einer endlichen Untergruppe) ist, d.h. der Stabilisator ist (fast) trivial. Diese Fragestellung ist eng verknüpft mit der für sphärische Varietäten, und ist inspiriert von [D1]. Bei Kählermetriken ω , die unter der maximalen kompakten Untergruppe $G \subset G^{\mathbb{C}}$ invariant sind, kann man durch Einschränkung auf die offene $G^{\mathbb{C}}$ -Bahn und Rückzug nach $G^{\mathbb{C}}$, das Potential in eine Funktion auf dem Quotienten $M := G^{\mathbb{C}}/G$ verwandeln, und daran die gewünschte geometrische Bedingung knüpfen. Es wird im Anschluss vorrangig um das Kähler-Einstein-Problem auf Fanovarietäten gehen. Dafür wird gezeigt, dass es nicht möglich ist, eine reelle Gleichung vom Monge-Ampère-Typ zu erhalten, wenn G nichtabelsch ist.

Kapitel 4 untersucht drei Beispiele von Kompaktifizierungen von

$$SL_n(\mathbb{C})/SL_{n-1}(\mathbb{C})$$

für $n \geq 3$, bzw.

$$SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H$$

mit einem eindimensionalen Torus H für $n = 2$, als sphärische Varietäten vom Rang 2, und leitet eine reelle partielle Differentialgleichung her, die von zwei reellen Koordinaten abhängig

ist, für die Frage nach der Existenz von Kähler-Einstein-Metriken, die generell auch kurz Einsteingleichung genannt werden soll.

Kapitel 5 führt die Situation für wundervolle Varietäten vom Rang eins und höher vor Augen. Eine Beschreibung der Klassifizierung dieser Art sphärischer Varietäten im Rang eins, findet sich in [Ak4] und [Br1], für sie als algebraische Varietäten, und in [HS] als Kählermannigfaltigkeiten betrachtet. Wir stellen an konkreten Beispielen eine reelle Gleichung für invariante Kählermetriken auf. So wird die Einsteingleichung für das Kähler-Einstein-Problem auf wundervollen Kompaktifizierungen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und $\mathrm{PSL}_{n+1}(\mathbb{C}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ hergeleitet. Schließlich gehen wir noch auf wundervolle Varietäten höheren Ranges ein.

Danksagungen

Ich möchte mich vor allem bei meinem Betreuer Prof. Dr. V. Batyrev herzlich bedanken für Anleitung, Ideen und Unterstützung, die er mir zuteil werden ließ. Seine Bereitschaft, mich mit diesem interessanten Thema zu betrauen und zu betreuen, weiß ich sehr zu schätzen.

Ich bedanke mich beim Arbeitsbereich Algebra des Mathematischen Instituts Tübingen für die Diskussionen, interessanten Vorträge im Seminar und die angenehme Atmosphäre, die ich erfahren durfte. Ferner bei Prof. Dr. F. Loose für seine Bereitschaft, als Gutachter der Dissertation zur Verfügung zu stehen, und für seine Begleitung als Dozent in Studiumstagen.

Auch gilt mein Dank Prof. Dr. S. K. Donaldson für die Beantwortung einiger Fragen von mir per E-Mail.

Ich bedanke mich bei den Organisatoren der Winterschule “Homogeneous Spaces and Geometric Representation Theory” in Bochum am Mathematischen Institut, 2012, und der Konferenz “Complex and Riemannian Geometry”, in Marseille (Luminy) am CIRM, 2011, für die Ausrichtung und finanzielle Unterstützung der Treffen. Ferner der DFG und Prof. Dr. V. Batyrev für die Gewährung der Drittmittelstelle vom 1.10.2011 - 31.5.2012.

Kapitel 1

Theorie der sphärischen Varietäten

Einführung

In diesem Kapitel werden die Varietäten eingeführt, die für alles Weitere grundlegend sind, und auf denen die analytischen Fragestellungen gestellt werden: Die sphärischen Varietäten. Es sind dies algebraische Varietäten, auf denen eine affine algebraische Gruppe durch Morphismen operiert, und eine Boreluntergruppe eine dichte Bahn besitzt. Diese umfassen Beispielsklassen wie die torischen Varietäten, symmetrische Varietäten, Fahnenvarietäten, ... Da sphärische Varietäten die Komplexität Null besitzen, also die Kodimension eines generischen B -Orbits Null ist, ist die Klassifikationstheorie nach Luna und Vust kombinatorisch gut behandelbar. Die Luna-Vust-Theorie beschreibt allgemein Einbettungen von homogenen Räumen G/H in G -Varietäten. Wir benötigen überdies nur den Fall über dem Körper \mathbb{C} und setzen dies für alle Varietäten im Folgenden auch stets voraus. Außerdem sollen die Gruppenwirkungen stets algebraisch sein, was für eine algebraische Gruppe G , die auf einer Varietät X wirkt, bedeutet, dass $G \times X \rightarrow X$ ein Morphismus ist.

1.1 Definition und Klassifikation von sphärischen Varietäten nach Luna-Vust

1.1.1 Definition einer sphärischen Varietät

Definition 1.1. *Eine normale G -Varietät X heißt sphärisch, falls sie eine offene und dichte B -Bahn besitzt. Ein homogener Raum G/H , für eine abgeschlossene Untergruppe H von G , heißt sphärischer homogener Raum, falls G/H als algebraische Varietät sphärisch ist.*

Dabei ist G/H eine homogene algebraische Varietät, denn $H \subset G$ ist abgeschlossene Untergruppe. Dadurch wird G/H als geometrischer Quotient realisiert, der in der Quotiententopologie eine glatte und quasiprojektive Varietät ist, mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_{G/H} = \pi_* \mathcal{O}_G^H$, die direkte Bildgarbe der H -invarianten regulären Funktionen auf G , wobei H auf G von rechts wirkt, unter dem offenen Morphismus $\pi : G \rightarrow G/H$, nach [T1].

In diesem Zusammenhang hat man stets den Punkt $eH \in G/H$ als sogenannten Basispunkt der Wirkung ausgewählt, um von G/H als homogenem Raum reden zu können, denn wir wollen eine Menge O , die nach der strengen Definition ein homogener Raum ist, worauf also eine Gruppe G transitiv operiert, sofort mit dem Raum der Nebenklassen G/H , wobei $H := \text{Stab}_G(o)$ für $o = eH \in O$ ist, dank des äquivarianten Isomorphismus zwischen beiden

identifizieren. Das Paar (O, o) wird auch punktierter homogener Raum genannt. Um eine G -Varietät X als Einbettung eines sphärischen homogenen Raumes zu erhalten, wähle einen Punkt $x \in X$ aus der offenen B -Bahn in X , das Bild von o unter ι , falls schon eine Einbettungsabbildung $\iota : (G/H, eH) \hookrightarrow X$ mitgegeben wurde. Es muss $Gx \subset X$ offen und äquivariant isomorph zu G/H sein, wobei $H = \text{Stab}_G(x)$ die Isotropiegruppe auch von x ist. Man fasst beides zusammen zu einem Paar (X, x) und spricht davon als äquivariante Einbettung. G/H wird in die G -Varietät X , mit diesem als offenen G -Orbit, äquivariant eingebettet. Falls (X, x) vollständig (kompakt) ist, spricht man von einer äquivarianten Vervollständigung (Kompaktifizierung) von G/H , oder einfach von einer Vervollständigung (Kompaktifizierung). Wir möchten nun klären, wann man zwei Einbettungen als äquivalent betrachtet.

Definition 1.2. *Zwei Einbettungen von G/H , (X, x) und (X', x') heißen birational isomorph, falls es in X und X' jeweils eine G -stabile offene Teilmenge gibt, die, als G -Varietäten betrachtet, G -äquivariant isomorph sind, und die Basispunkte ineinander überführt werden.*

In einer gegebenen birationalen Äquivalenzklasse will man die Einbettungen bis auf Isomorphie klassifizieren, was wiederum Äquivarianz und $x \mapsto x'$ für einen solchen Isomorphismus bedeutet.

Bemerkung 1.1. Es gibt mehrere verschiedene, aber äquivalente Charakterisierungen der Eigenschaft eines homogenen Raumes sphärisch zu sein, vergleiche [T1] 25. Darunter ist besonders die Äquivalenz der nachfolgenden Aussagen erwähnenswert.

- G/H ist sphärisch, d.h. eine Boreluntergruppe $B \leq G$ hat einen offenen Orbit in G/H .
- H hat einen offenen Orbit in G/B .
- H wirkt auf G/B mit endlich vielen Bahnen.
- $\mathbb{C}(G/H)^B = \mathbb{C}$

1.1.2 Das Gitter N und der Bewertungskegel ν

Wir konstruieren zunächst das zugrundeliegende Gitter N , in dem sich alles Weitere abspielen wird, und den Bewertungskegel ν , der unter einer noch zu definierenden Abbildung ρ im Gitter als eine Teilmenge liegt, und der die Menge der G -invarianten Bewertungen in N darstellt. In diese Zeichnung legt man im Folgenden die gefärbten Kegel hinein, die sich zu einem gefärbten Fächer zusammenfügen. Dies beschreibt, unter Einhaltung gewisser Vorschriften, eine Einbettung (X, x) von G/H .

Definition 1.3. *Für einen sphärischen homogenen Raum G/H setze:*

$$\mathbb{C}(G/H)^{(B)} := \{f \in \mathbb{C}(G/H)^* : b.f = \chi(b)f, \forall b \in B, \chi = \chi_f : B \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ Charakter}\}$$

$$\Lambda := \Lambda_{G/H} := \{\chi_f : f \in \mathbb{C}(G/H)^{(B)}\}$$

wobei χ einen Charakter von B bezeichnet, also einen Morphismus von algebraischen Varietäten B nach \mathbb{G}_m , der ein Gruppenhomomorphismus ist. Er heißt Gewicht zu einer Semiinvarianten f , falls f solch ein Eigenvektor ungleich Null ist, und den betreffenden Charakter hervorbringt.

Siehe auch [Hu]. Λ ist eine freie, endlich erzeugte, abelsche Gruppe.

Definition 1.4. Den endlichen Rang $rk(\Lambda)$ bezeichnet man als Rang von G/H , bzw. von \mathbf{X} , wenn eine Einbettung von G/H vorliegt.

$\mathbb{C}(G/H)^{(B)} \subseteq \mathbb{C}(G/H)^*$ ist eine abelsche Untergruppe.

Bemerkung 1.2. Umgekehrt legt ein gegebener Charakter χ eine B -Semiinvariante bis auf einen konstanten Faktor eindeutig fest.

Beweis. Seien f, f' beide B -semiinvariante Funktionen zum Gewicht χ , so ist $\frac{f}{f'}$ eine B -invariante Funktion auf G/H , und insbesondere auf dem offenen B -Orbit $Bx_0 \subset G/H$. Daher ist $\frac{f}{f'}$ konstant, da solche B -invariante Funktionen auf sphärischen homogenen Räumen stets konstant sein müssen, nach Bemerkung 1.1. \square

Dies kann man in einer kurzen exakten Sequenz kurz so ausdrücken:

$$(1.1) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}(G/H)^{(B)} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0$$

Bemerkung 1.3. All diese Gruppen hängen nur von der G -äquivalenten birationalen Äquivalenzklasse ab, deshalb hat man: $\mathbb{C}(\mathbf{X})^{(B)} = \mathbb{C}(G/H)^{(B)}$, $\Lambda(G/H) = \Lambda(\mathbf{X})$, für eine Einbettung \mathbf{X} (d.h. genauer (\mathbf{X}, x)) von G/H .

Als Nächstes bringen wir die Definition des \mathbb{Q} -Vektorraums $N(\mathbf{X})$ über dem dualen Gitter N zu Λ .

Definition 1.5. $N(\mathbf{X}) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda(\mathbf{X}), \mathbb{Q})$ ist ein \mathbb{Q} -Vektorraum

Definition 1.6. Eine diskrete Bewertung auf \mathbf{X} ist eine Zuordnung $v : \mathbb{C}(\mathbf{X})^* \rightarrow \mathbb{Q}$ so dass gilt:

1. $v(f_1 + f_2) \geq \min\{v(f_1), v(f_2)\}, \forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{X})^*$ mit $f_1 + f_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{X})^*$
2. $v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2), \forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}^*$
3. $v(\mathbb{C}^*) = 0$

Es folgt daraus, dass das Bild von v eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist, also von der Gestalt $a\mathbb{Z}$, für ein $a \in \mathbb{Q}$ sein muss. Man nennt v normiert, falls dieses Bild genau \mathbb{Z} ist.

Vgl. [Br2] Abschnitt 3, für dieses und das Folgende. Es gilt: Jeder Primdivisor D auf \mathbf{X} definiert eine normierte Bewertung v_D , die Nullstellen und Pole entlang D misst, mit der Eigenschaft $\mathcal{O}_{v_D} = \mathcal{O}_{\mathbf{X}, D}, m_{v_D} = m_{\mathbf{X}, D}$. Umgekehrt ist jede abgeschlossene Untervarietät das Zentrum einer Bewertung, für Divisoren D ist D das Zentrum einer Bewertung v_D . Für G -invariante Bewertungen gilt dasselbe für G -stabile Divisoren (bzw. abgeschlossene Untervarietäten).

Definition 1.7. Eine Bewertung v auf einer G -Varietät \mathbf{X} heißt G -invariante Bewertung, falls für alle $f \in \mathbb{C}(\mathbf{X})^*$ gilt: $v(g.f) = v(f), \forall g \in G$. Bezeichne mit $\nu(\mathbf{X})$ die Menge aller G -invarianten Bewertungen auf \mathbf{X} .

Definiere eine Abbildung

$$(1.2) \quad \rho : \{\text{diskrete Bewertung auf } \mathbf{X}\} \rightarrow N$$

$$v \mapsto l : l(\chi) = v(f)$$

wenn $\chi = \chi_f$ ist. Dies ist wohldefiniert, da f bis auf konstanten Vorfaktor eindeutig durch χ_f bestimmt ist, und v auf konstanten multiplikativen Vorfaktoren Null ist. Man erhält ein Element in N für jede Bewertung. Es gilt die folgende Proposition:

Proposition 1.1 ([K] Corollary 1.8.). Die Abbildung $\rho : \nu \rightarrow N$ ist auf den invarianten Bewertungen von \mathbf{X} injektiv.

Dadurch kann man ν mit seinem Bild in N , mit einer Teilmenge also, identifizieren. Desweiteren kann man zeigen: Die Menge der G -invarianten Bewertungen ist ein konvexer polyhedraler Kegel. Vgl. [Br2] Abschnitt 4.

1.1.3 Einfache Einbettungen

Definition 1.8. $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ sei die Menge der B -stabilen Primdivisoren auf \mathbf{X} , und für eine G -Bahn $Y \subset \mathbf{X}$ setze $\mathcal{D}_Y(\mathbf{X}) := \{D \in \mathcal{D}(\mathbf{X}) : Y \subseteq D\}$.

Definition 1.9. Eine G/H -Einbettung (\mathbf{X}, x) heißt *einfach*, falls es genau eine abgeschlossene G -Bahn gibt.

Beachte hierbei, dass natürlich nicht jede G -Bahn entweder der offene, dichte Orbit oder eine abgeschlossene Bahn in \mathbf{X} ist. Es gibt daneben den allgemeinen Fall von lokal abgeschlossenen Bahnen in \mathbf{X} . Diese können jedoch als abgeschlossene Bahnen in einer affinen, offenen und G -stabilen Teilmenge $\mathbf{X}_{Y,G}$ von \mathbf{X} dargestellt werden, die ganz \mathbf{X} überdecken. Es gilt:

$$(1.3) \quad \mathbf{X}_{Y,B} := \mathbf{X} \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D}(\mathbf{X}) \setminus \mathcal{D}_Y(\mathbf{X})} D$$

ist B -stabil, affin und offen in \mathbf{X} , nach [K] 2.1., und $\mathbf{X}_{Y,G} := G\mathbf{X}_{Y,B}$ hat Y als einzigen abgeschlossenen G -Orbit. Damit kann man sich auf diese einfachen Einbettungen beschränken, da es nur endlich viele G -Bahnen gibt.

Teile die Menge $\mathcal{D}_Y(\mathbf{X})$ auf, und verwende für G -stabile Divisoren sofort die Zuordnung zur G -invarianten Bewertung:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_Y(\mathbf{X}) &:= \{v_D \in \nu(G/H) : D \in \mathcal{D}_Y(\mathbf{X}) \text{ } G\text{-stabil}\} \\ \mathcal{F}_Y(\mathbf{X}) &:= \{D \cap G/H \in \mathcal{D}(G/H) : D \in \mathcal{D}_Y(\mathbf{X}) \text{ nicht } G\text{-stabil}\} \text{ Farben} \end{aligned}$$

Beachte bei der hier gegebenen Definition der Farben, dass erst die Abschlüsse in \mathbf{X} davon die G -Bahn Y enthalten.

Theorem 1.1. Jede einfache G/H -Einbettung (\mathbf{X}, x) ist eindeutig durch das Paar

$$(\mathcal{B}_Y(\mathbf{X}), \mathcal{F}_Y(\mathbf{X}))$$

bestimmt.

Beweis. Nach Luna und Vusts originalem Beweis zeigen. □

Definiere einen Kegel $\mathcal{C}_Y(\mathbf{X}) \subseteq N(\mathbf{X})$, der von $\tilde{\rho}(\mathcal{F}_Y(\mathbf{X}))$ und $\rho(\mathcal{B}_Y(\mathbf{X}))$ erzeugt wird. Dabei ist $\tilde{\rho}$ gegeben als die Hintereinanderschaltung von der Identifikation eines Divisors mit seiner assoziierten Bewertung und ρ . Beachte jedoch, dass diese Abbildung, nur auf B -stabile Primdivisoren angewandt, die nicht G -stabil sind, nicht injektiv zu sein braucht.

Beispiel 1.1. Für $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $H = T$, $G/H = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \Delta$ hat man zwei verschiedene Farben $X^1 = 0$ und $Y^1 = 0$ für homogene Koordinaten $[X^0 : X^1][Y^0 : Y^1]$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, die in $N \cong \mathbb{Q}$ beide unter $\tilde{\rho}$ auf $+1$ abgebildet werden.

Als Konsequenz müssen bei der Bezeichnung einer einfachen Einbettung durch kombinatorische Objekte die Farben stets alle mitaufgeführt werden.

Definition 1.10. Ein gefärbter Kegel ist ein Paar $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$, mit $\mathcal{C}_Y \subseteq N$ und $\mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{D}_Y$, so dass gilt:

(GK1) \mathcal{C}_Y ist ein Kegel, der von $\tilde{\rho}(\mathcal{F}_Y)$ und endlich vielen Elementen aus $\rho(\nu)$ erzeugt ist.

(GK2) $\mathcal{C}_Y^0 \cap \rho\nu \neq \emptyset$

Und $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$ heißt strikt konvex, falls gilt:

(SKK) \mathcal{C}_Y ist strikt konvexer Kegel und $0 \notin \tilde{\rho}(\mathcal{F}_Y)$.

Theorem 1.2. $(\mathbf{X}, x) \mapsto (\mathcal{C}_Y(\mathbf{X}), \mathcal{F}_Y(\mathbf{X}))$ ist eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen einfacher Einbettungen und strikt konvexer gefärbter Kegel.

1.1.4 Einbettungen und gefärbte Fächer

Definition 1.11. Ein Paar $(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0)$ heißt Seite eines gefärbten Kegels $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, falls \mathcal{C}_0 Seite von \mathcal{C} ist, das relative Innere \mathcal{C}_0^0 sich mit dem Bewertungskegel $\rho\nu$ nichtleer schneidet, $\mathcal{C}_0^0 \cap \rho\nu \neq \emptyset$ und $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap \tilde{\rho}^{-1}(\mathcal{C}_0)$ ist.

Insbesondere muss eine Seite selbst wieder ein gefärbter Kegel sein, mit nur solchen Farben, die auch schon im ursprünglichen gefärbten Kegel vorhanden waren. Sei (\mathbf{X}, x) eine beliebige Einbettung, und Y eine G -Bahn in \mathbf{X} . Sei $(\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$ der gefärbte Kegel zur einfachen, offenen Untereinbettung $\mathbf{X}_{Y,G} = G \cdot \mathbf{X}_{Y,B}$ von Y , als einzige abgeschlossene G -Bahn darin. Man hat folgende Korrespondenz:

Proposition 1.2. Die Zuordnung $Z \mapsto (\mathcal{C}_Z(\mathbf{X}_{Z,G}), \mathcal{F}_Z(\mathbf{X}_{Z,G}))$ beschreibt eine Bijektion der Menge der G -Bahnen in \mathbf{X} , dessen Abschluss Y enthält, und der Menge der Seiten von $(\mathcal{C}_Y(\mathbf{X}_{Y,G}), \mathcal{F}_Y(\mathbf{X}_{Y,G}))$.

Beweis. Siehe [Br2] 3.4 Proposition. Beachte, dass ein gefärbter Kegel bijektiv einer einfachen Einbettung entspricht, was bedeutet, dass man eine offene Teilmenge von \mathbf{X} als offene Untereinbettung so zu wählen hat, dass sich die G -Bahn dort als abgeschlossen enthalten befindet. In [Br2] ist diese strenge Sichtweise besser verfolgt als in [K]. \square

Dadurch erhält man folgendes kombinatorisches Objekt:

Definition 1.12. Ein gefärbter Fächer \mathfrak{f} ist eine nichtleere, endliche Menge von gefärbten Kegeln, mit folgenden Eigenschaften:

(GF1) Jede Seite eines gefärbten Kegels $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathfrak{f}$ liegt auch in \mathfrak{f} .

(GF2) $\forall v \in \nu$ gibt es höchstens ein $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathfrak{f}$ mit $v \in \mathcal{C}^0$, d.h. einen Überlapp von relativen Inneren von gefärbten Kegeln kann es nur außerhalb des Bewertungskegels geben.

\mathfrak{f} heißt strikt konvex, falls

(SKF) $(0, \emptyset) \in \mathfrak{f}$ ist, oder äquivalent dazu, falls alle Elemente von \mathfrak{f} selber strikt konvex sind.

Für eine sphärische Einbettung (X, x) von G/H , setze:

$$(1.4) \quad f(X) := \{(\mathcal{C}_Y(\mathbf{X}_{Y,G}), \mathcal{F}_Y(\mathbf{X}_{Y,G})) : Y \subseteq X \text{ is a } G\text{-Orbit}\}$$

Klar ist, dass $Y \mapsto (\mathcal{C}_Y, \mathcal{F}_Y)$ eine ordnungsumkehrende Bijektion zwischen der Menge der G -Orbits in X und $f(X)$ ist, wobei die Inklusion von Abschlüssen von Orbits auf der einen Seite gemeint ist, auf der anderen natürlich Seite eines gefärbten Kegels zu sein.

Theorem 1.3. *Die Zuordnung $(X, x) \mapsto f(X)$ beschreibt eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von Einbettungen und strikt konvexen gefärbten Fächern.*

1.2 Wichtige Klassen sphärischer Varietäten

Wir werden es im Weiteren mit speziellen Klassen sphärischer Varietäten zu tun haben, daher werden diese bereits jetzt eingeführt und einige Eigenschaften besprochen. Außerdem werden einige Beispiele aufgeführt werden.

1.2.1 Wundervolle Varietäten

Wir definieren zuerst den Begriff der sogenannten wundervollen Varietät.

Definition 1.13. *Sei X eine G -Varietät. X heißt wundervolle Varietät, falls gilt:*

- X ist nichtsingulär und vollständige Varietät.
- X enthält einen offenen G -Orbit X_G^0 , dessen Komplement die Vereinigung von nichtsingulären G -stabilen Primdivisoren $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}$, mit normalen Kreuzungen und nichtleerem Schnitt ist.
- $\forall x, y \in X$ gilt: $Gx = Gy \iff \{i : X^{(i)} \ni x\} = \{j : X^{(j)} \ni y\}$

r heißt Rang von X , und ∂X Rand von X , bestehend aus der Vereinigung der G -stabilen Divisoren.

Es gilt im Zusammenhang mit sphärischen Varietäten, dass wundervolle G -Varietäten stets sphärisch sind, nach einem Ergebnis von Luna, vgl. [Pe] Thm. 3.3.1, ganz Kapitel 3, [T1] 30.2 oder [Br2], auch für das hier Folgende.

Definition 1.14. *Falls $N_G(H)/H$ endliche Gruppe ist, so heißt eine einfache Einbettung von G/H kanonische Einbettung, falls sie durch den gefärbten Kegel $(\nu(G/H), \emptyset)$ beschrieben wird.*

Es kann gezeigt werden, dass $N_G(H)/H$ stets diagonalisierbare Gruppe ist, die aber nicht immer eine endliche Gruppe sein muss. In diesem Fall existiert keine kanonische Einbettung. Wenn aber $N_G(H)/H$ endliche Gruppe ist, so ist dies äquivalent dazu, dass der Bewertungskegel $\nu(G/H)$ strikt konvex ist.

Proposition 1.3. *Sei X sphärische Varietät. Dann gilt:*

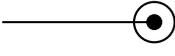
X ist wundervolle Einbettung $\iff X$ ist die glatte, kanonische Einbettung eines offenen G -Orbits. Der Rang als wundervolle Varietät und als sphärische Varietät stimmt überein.

Es ist insbesondere eine toroidale Einbettung, weil es keine Farben im gefärbten Kegel gibt, er also "ungefärbt" ist. Die Vollständigkeit der Einbettung \mathbf{X} ist gewährleistet, da der vorhandene, strikt konvexe Kegel den Bewertungskegel $\nu(G/H)$ überdecken kann, weil der Bewertungskegel selber strikt konvex ist.

Beispiel 1.2. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $H = T$ der maximale Torus in G bestehend aus Matrizen $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Man bekommt als homogene Varietät $G/H \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \Delta$, die sphärisch und vom Rang eins ist. Dabei ist

$$\Delta := \{[X_0 : X_1][Y_0 : Y_1] \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 : \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} = 0\}$$

die Diagonale im Produkt der projektiven Geraden. Dies sieht man durch die Wahl des Basispunktes $x_0 := [1 : 0][0 : 1] \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \Delta$, und der natürlichen linearen Wirkung auf den homogenen Koordinaten von G . Der Stabilisator ist H , und man erhält zwei G -Bahnen: G/H , und Δ als eine abgeschlossene G -Bahn. Als offene B -Bahn findet man $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus (\Delta \cup \mathbb{V}(X_1) \cup \mathbb{V}(Y_1))$, wobei eine Boreluntergruppe durch Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \zeta & \alpha \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, mit $\zeta \in \mathbb{C}^*$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, in G gegeben ist. Als Abschlüsse der Farben in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ hat man die Divisoren $\mathbb{V}(X_1), \mathbb{V}(Y_1)$ vorliegen, wobei allerdings die abgeschlossene G -Bahn Δ nicht in diesen enthalten ist, somit tragen sie nicht zur sphärischen Einbettung bei, nach dem oben Gesagten über die Konstruktion eines gefärbten Kegels, und es kann nur toroidale Einbettungen geben. Der Bewertungskegel hat $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(v_\Delta) = \mathbb{Q}_{\leq 0}$ unter ρ als Bild im Gitter N , da $\rho(v_\Delta)(\chi) = -1$ ist. Also gibt es insgesamt nur folgende zwei Einbettungen von G/H :

$(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0) = (\{0\}, \emptyset)$ 	$\mathbf{X}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \Delta$ triviale Einbettung
$(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1) = (\nu(G/H) = \mathbb{Q}_{\leq 0}, \emptyset)$ 	$\mathbf{X}_1 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ kanonische Einbettung

Beobachte, dass die kanonische Einbettung die Eigenschaften aus Definition 1.13 erfüllt, mit $\mathbf{X} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ glatt und vollständig, und das Komplement von G/H besteht nur aus dem nichtsingulären Divisor Δ . Der Rang dieser wundervollen Einbettung sowie als sphärische Varietät ist demnach eins. Andere Einbettungen kann es wegen Bedingung (GK2) der Definition 1.10 an gefärbte Kegel nicht geben, man kann also auch keine anderen gefärbten Fächer konstruieren.

Bemerkung 1.4. Glatte wundervolle Einbettungen \mathbf{X} sind schwache Fanovarietäten ($K_{\mathbf{X}}^{-1}$ ist nef und big, vgl. [BB]). Nach [T1] 30.2 sind auch einige Fanovarietäten darunter, wie z. B. die Fahnenvarietäten.

1.2.2 Symmetrische Varietäten

Wir führen die algebraischen symmetrischen Räume ein, nach [T1] 26.

Definition 1.15. Ein (algebraischer) symmetrischer Raum ist eine homogene Varietät G/H , mit $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so dass es eine Involution $\sigma : G \rightarrow G$ (mit $\sigma \neq \text{id}$ wie üblich) gibt, mit $(G^\sigma)^0 \subseteq H \subseteq G^\sigma$. Eine Einbettung dieses symmetrischen homogenen Raumes (X, x) heißt symmetrische Varietät.

Beispiel 1.3. Für jede zusammenhängende, halbeinfache, algebraische Gruppe G ist $(G \times G)/G$, G diagonal in $G \times G$ eingebettet, ein symmetrischer homogener Raum. Als σ hat man

$$\begin{aligned} \sigma : G \times G &\rightarrow G \times G \\ (g, h) &\mapsto (h, g) \end{aligned}$$

Wir werden später das konkrete Beispiel $G := \text{SL}_2(\mathbb{C})$ erleben.

Es gelten folgende Eigenschaften, vgl. [P2] :

- Symmetrische Varietäten sind sphärisch.
- symmetrische homogene Räume gestatten nach C. De Concini und C. Procesi eine wundervolle G/H -Einbettung.

Alle Beispiele erhält man auch als lokal isomorph zu Komplexifizierungen der riemannschen symmetrischen Räume von kompaktem Typ, wie in [AK] und [S] für niedrige Ränge explizit, und in [Bi1] abstrakt behandelt.

Beispiel 1.4. Im Rang eins gibt es die Komplexifizierungen $G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ kompakter, riemannsch symmetrischer Räume G/K , für eine zusammenhängende, kompakte, halbeinfache Liegruppe G , wie sie in [S] und [AK] aufgelistet sind.

1.2.3 Horosphärische oder S-Varietäten

Definition 1.16. Eine homogene Varietät G/H heißt horosphärisch, falls das unipotente Radikal $R_u(B)$ einer Boreluntergruppe B von G in H enthalten ist, das heißt, es liegt eine maximale, unipotente Untergruppe von G in H . Eine Einbettung (X, x) einer horosphärischen, homogenen Varietät nennt man horosphärische Varietät (oder S-Varietät, wie in [T1]).

Aus [Hu] 30.4 ergibt sich die Begründung für diese Äquivalenz von einer maximalen, unipotenten Untergruppe in G , und das unipotente Radikal einer Boreluntergruppe zu sein.

Lemma 1.1. Horosphärische Varietäten sind sphärisch.

Beweis. H enthält eine maximale, unipotente Untergruppe von G , und aus der topologischen Konsequenz der Bruhat-Zerlegung, [Hu] 28.5, ergibt sich eine offene Menge in G als isomorph zu $U^- \times B$ unter dem Produktmorphismus. Unter Beachtung der beiden Äquivalenzen in Bemerkung 1.1 über dichte Bahnen von B in G/H , bzw. von H in G/B , für eine Boreluntergruppe $B \leq G$, ergibt sich die Behauptung. \square

Für uns wichtig ist die Äquivalenzaussage aus der

Proposition 1.4. Für eine homogene Varietät G/H sind folgende Bedingungen äquivalent:

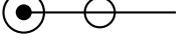
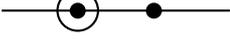
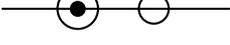
1. $G/H \xrightarrow{P/H} G/P$ ist ein Torusbündel, d.h. ein homogenes Faserbündel mit einem Torus als Faser.

2. $R_u(B) \subseteq H$, d.h. G/H ist horosphärischer homogener Raum.
3. $H = \bigcap \ker(\chi : P \rightarrow \mathbb{C}^*)$, für Charaktere χ einer bestimmten parabolischen Untergruppe $P \leq G$, mit einer Boreluntergruppe B in P . Es ist dann $N_G(H) = P$.
4. Für das Bild des Bewertungskegels unter ρ gilt: $\rho\nu(G/H) = N(G/H)$, d.h. er bedeckt das ganze Gitter N .

Beweis. (2) \iff (4): [Br2] 4.3 oder [Pe] 3.2. Für (2) \iff (3) vgl. [P1] 1.2 - 1.3, (1) \iff (2) folgt aus Standardfakten aus [Hu], [KN]. Vgl. insgesamt auch [P2]. \square

Beachte im Hinblick auf Punkt 1 der Proposition 1.4, dass eine horosphärische Varietät als eine Einbettung eines solchen Torusbündels verstanden werden kann, wobei allerdings die Projektion des homogenen Raumes G/H auf die Fahnenvarietät G/P sich auf die Einbettung fortsetzen lässt, also verträglich ist mit dieser, oder eben auch nicht. Dies sieht man sehr anschaulich an dem folgenden Beispiel, das wir aus [P2] übernehmen.

Beispiel 1.5. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $H := U$ die maximale unipotente Untergruppe in G , bestehend aus Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{C}$. Man hat einen horosphärischen homogenen Raum vom Rang eins vorliegen, der isomorph zu $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist. Wie man leicht für $x_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die natürliche, lineare Wirkung auf $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ sehen kann, ist die Isotropiegruppe $\mathrm{Stab}_G(x_0) = U$, und G wirkt transitiv auf der komplexen Ebene, aus der der Ursprung $\{(0, 0)\}$ entfernt wurde. Wenn die Koordinaten von $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ mit (x, y) bezeichnet sind, so findet man $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \setminus (\{(0, 0)\} \cup \mathbb{V}(y))$ als offene Bahn von einer Boreluntergruppe $B \leq G$, mit Elementen $\begin{pmatrix} \zeta & \alpha \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$, wobei $\zeta \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ist. Die Farbe $c := \mathbb{V}_{\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2}(y) \setminus \{(0, 0)\}$ liegt in G/H . Als Einbettungen gibt es folgende 6 Möglichkeiten. Aufgeführt sind die gefärbten Fächer bzw. gefärbte Kegel, falls eine einfache Einbettung vorliegt, und die Einbettung in einen Raum \mathbf{X} , die Projektion $\pi_0 : G/H \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ des homogenen Raumes auf G/P und Projektion $\pi_i : \mathbf{X} \rightarrow G/P = G/B \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, $i = 0 \dots 5$ (falls existiert).

$(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0) = (\{0\}, \emptyset)$ 	$G/H \hookrightarrow X_0 := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ $\pi_0 \searrow \quad \downarrow \pi_0$ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$
$(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1) = (\mathbb{Q}_{\leq 0} \tilde{\rho}(D_0 := \{X_0 = 0\}), \emptyset)$ 	$G/H \hookrightarrow X_1 := \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0]\}$ $\pi_0 \searrow \quad \downarrow \pi_1$ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$
$(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{Q}_{\geq 0} \tilde{\rho}(\bar{c}), c)$ 	$G/H \hookrightarrow X_2 := \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ $\pi_0 \searrow \quad \downarrow \nexists \pi_2$ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$
$(\mathcal{C}_3, \mathcal{F}_3) = (\mathbb{Q}_{\geq 0} \tilde{\rho}(E), \emptyset)$ 	$G/H \hookrightarrow X_3 := \tilde{\mathbb{A}}^2_{\mathbb{C}, (0,0)}$ $\pi_0 \searrow \quad \downarrow \pi_3$ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$
$\mathfrak{f}_1 = \{(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0), (\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1), (\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2)\}$ 	$G/H \hookrightarrow X_4 := \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ $\pi_0 \searrow \quad \downarrow \nexists \pi_4$ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$
$\mathfrak{f}_2 = \{(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0), (\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1), (\mathcal{C}_3, \mathcal{F}_3)\}$ 	$G/H \hookrightarrow X_5 := \tilde{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}, [1:0:0]}$ $\pi_0 \searrow \quad \downarrow \pi_5$ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$

Dabei ist E der exzeptionelle Divisor der jeweiligen Aufblasung. Die Kreise auf dem rechten Strahl symbolisieren die fehlende, ein Punkt die anwesende Farbe c . Man sieht, dass sich die Projektion π_0 in den Fällen 2 und 4 nicht zu Abbildungen π_i , $i = 2, 4$ fortsetzt, weil es an den zusätzlichen Punkten $(0, 0)$, $i = 2$, und $[1 : 0 : 0]$, $i = 4$ scheitert, die sozusagen überzählig sind, und nicht mit der Projektion π_0 verträglich abgebildet werden können. In X_i , $i = 2, 4$ enthält der Abschluss der Farbe c diese Punkte als abgeschlossene G -Bahn, tauchen somit auch im gefärbten Fächer auf. Man kann

$$X_3 = \tilde{\mathbb{A}}^2_{\mathbb{C}, (0,0)} \rightarrow X_2 = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$$

und

$$X_5 = \tilde{\mathbb{P}}^2_{\mathbb{C}, [1:0:0]} \rightarrow X_4 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

als toroidale, dominierende Varietät über der äquivarianten Vervollständigungsverietät auf der rechten Seite ansehen. Es handelt sich offenkundig um Niederblasungen exzeptioneller Divisoren.

Allgemein kann man feststellen: Wenn es keine Farben in den gefärbten Kegeln des gefärbten Fächers gibt, so hat man eine toroidale horosphärische Einbettung vorliegen, und dies ist nach [P1] Exemples 1.13 (2) ein homogenes torisches Bündel mit einer torischen Varietät als Faser vorliegen. Falls es jedoch Farben gibt, so existiert immer noch ein dominanter Morphismus

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \downarrow & & \\ X & \leftrightarrow & G/H \\ & & \downarrow \\ & & G/P \end{array}$$

einer toroidalen Einbettung \tilde{X} , bei der alle Farben fehlen, auf die ursprüngliche Einbettung X .

1.3 Topologische Charakterisierung des Ranges einer sphärischen Einbettung

Wir werden hier das Ergebnis zum Rang vorstellen, und eine Vermutung von V. Batyrev wiedergeben. Zuerst erwähnen wir das Resultat von D. Akhiezer aus [Ak1] über die topologische Berechnung des Rangs einer sphärischen homogenen Varietät G/H durch die Dimension des Raumes der Doppelnebenklassen $K \backslash G/H$, wobei $K \leq G$ eine maximale kompakte Untergruppe ist. Danach wird die Idee von V. Batyrev kurz beschrieben, eine konkrete Bijektion durch die K -invarianten Koordinatenfunktionen auf G/H nach \mathbb{R}^r , für ein $r \in \mathbb{N}_0$, anzugeben, die den Bewertungskegel im mit \mathbb{R} tensorierten Gitter $N \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ als Bild liefert.

Theorem 1.4 ([Ak1]). *Der Rang $r \in \mathbb{N}_0$ von G/H ist gleich der topologischen Dimension von $K \backslash G/H$ (als reelle Mannigfaltigkeit mit Rand).*

Proposition 1.5 ([Ak1]). Falls der Rang r von G/H gleich eins ist, so ist entweder

- $K \backslash G/H \cong \mathbb{R}$ homöomorph, genau dann wenn G/H ein homogener Raum mit zwei Enden ist (horosphärisch)

oder

- $K \backslash G/H \cong \mathbb{R}_{\geq 0}$ homöomorph, genau dann, wenn G/H eine glatte, äquivariante Vervollständigung zusammen mit einer homogenen Hyperfläche als abgeschlossener Bahn zu einer Zwei-Orbit-Vervollständigung (wundervolle Einbettung) besitzt.

Erinnere, dass Enden in diesem Kontext als Zusammenhangskomponenten des Komplements des offenen Orbits in einer äquivarianten Vervollständigung definiert sind.

Man sieht daher, dass der Raum $K \backslash G/H$ in dem Fall Rang eins eine Mannigfaltigkeit mit Rand sein kann, wie eben $\mathbb{R}_{\geq 0}$, oder aber eine differenzierbare Mannigfaltigkeit wie \mathbb{R} . Für die Klassifikation sphärischer Varietäten vom Rang eins, siehe [Ak4], [Br1] und auch [HS], wo kompakte Kählermannigfaltigkeiten mit denselben Eigenschaften untersucht werden.

Der Vermutung zufolge sollte man in einigen sphärischen Fällen und im horosphärischen Fall aus der Funktion

$$(1.5) \quad \log F^\mu := \log \sum_i f_i^\mu \overline{f_i^\mu}$$

wobei f_i^μ Basis der Gewichte vom Gewichtsraum $V(\mu)$ ist, reelle K -invariante Funktionen q^1, \dots, q^r auf G/H extrahieren können, r der Rang von G/H , die eine Bijektion von $K \backslash G/H$ auf das Bild des Bewertungskegel in $N_{\mathbb{R}}$ liefern.

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{(q^1, \dots, q^r)} & \rho(\nu) \subset N_{\mathbb{R}} \\ \downarrow \pi_K & \nearrow & \\ K \backslash G/H & & \end{array}$$

Die kanonische Projektion π_K lässt die Abbildung q in den Raum der Doppelnebenklassen $K \backslash G/H$ absteigen. Einen Beweis der Bijektivität geben wir in Kapitel 4 für $G/H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$, mit $n \geq 3$. Wir merken noch an, dass die Funktionen F^μ durch Summation über alle dominanten Gewichte folgenden Raum der K -invarianten Funktionen erzeugen (vgl. [Ak1]):

$$(\mathbb{C}[G/H] \otimes \overline{\mathbb{C}[G/H]})^K = \bigoplus_{\mu} \mathbb{C}F^\mu$$

In Kapiteln 2, 4 und 5 werden einige solcher Koordinatenfunktionen q^1, \dots, q^r angegeben werden, mit kleinem r allerdings. Die Bijektivität der dadurch gegebenen Abbildung auf den Bewertungskegel wird explizit in Proposition 4.1 für das dortige Beispiel $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$ als homogener sphärischer Raum von Rang zwei gezeigt werden. Auf den darstellungstheoretischen Gesichtspunkt der Funktionen F^μ werden wir jedoch nicht weiter eingehen.

Kapitel 2

Spezielle Kähler-Metriken auf horosphärischen Varietäten

Wir besprechen zuvorderst zwei anschauliche Beispiele, und leiten einen reellen Ausdruck des Operators $\partial\bar{\partial}\varphi$ für eine K -invariante Funktion $\varphi : G/H \rightarrow \mathbb{R}$ her, $K \leq G$ maximale kompakte Untergruppe. Durch Koordinatenwahl steigt φ zu einer Funktion u auf einem \mathbb{R}^r ab, wenn $r \in \mathbb{N}$ der Rang von G/H ist. Der Ausdruck für $\partial\bar{\partial}\varphi$ wird in Bemerkung 2.3 mit dem in [PS] aufgestellten Operator verglichen. Desweiteren wird eine Verallgemeinerung des dort gezeigten Existenztheorems eines KRS auf beliebigen horosphärischen Varietäten angedeutet.

2.1 Das Beispiel $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

Wir lassen $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ linear operieren. Dies geschieht in transitiver Weise, und

wenn man den Punkt $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ fixiert, so erhält man als Isotropiegruppe

$$H = \left\{ T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid T = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & & & \\ 0 & & T' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right\}$$

Dabei muss $T' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ liegen, und die $t_{1i}, i \geq 2$ sind beliebig. Damit ist G/H horosphärischer homogener Raum, da eine maximale unipotente Untergruppe von G in H enthalten ist. Wir interessieren uns für unter $K := \mathrm{U}(n)$ -invariante Kählermetriken auf G/H , bzw. äquivarianten Einbettungen davon, darum definieren wir die reelle, K -invariante Koordinatenfunktion

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto q := \ln(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) \end{aligned}$$

Zur Abkürzung führen wir die Notation $\|x\|^2 := \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ ein. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\partial q &= \frac{\partial \|x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i dx^i}{\|x\|^2} \\ \bar{\partial} q &= \frac{\bar{\partial} \|x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i d\bar{x}^i}{\|x\|^2} \\ \partial \bar{\partial} q &= \frac{\|x\|^2 \partial \bar{\partial} \|x\|^2 - \partial \|x\|^2 \wedge \bar{\partial} \|x\|^2}{\|x\|^4} = \frac{\|x\|^2 \delta_{ij} - \bar{x}^i x^j}{\|x\|^4} dx^i \wedge d\bar{x}^j\end{aligned}$$

Für eine K -invariante differenzierbare Funktion φ auf $G/H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H$, die als Funktion auf $K \setminus G/H \cong \mathbb{R}$ aufgefasst, als $u = u(q)$ geschrieben werde, folgt aus der Kettenregel $\partial \bar{\partial} \varphi = u_{11} \partial q \wedge \bar{\partial} q + u_1 \partial \bar{\partial} q$ (wie in (3.18), wobei u_1 , etc. die Ableitung von u nach der Variable q bedeutet) die Rechnung

$$\begin{aligned}(\partial \bar{\partial} \varphi)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (u_{11} \partial q \wedge \bar{\partial} q)^i (u_1 \partial \bar{\partial} q)^{n-i} = \\ &= \binom{n}{0} u_1^n \underbrace{(\partial \bar{\partial} q)^n}_A + \binom{n}{1} u_{11} u_1^{n-1} \underbrace{\partial q \wedge \bar{\partial} q \wedge (\partial \bar{\partial} q)^{n-1}}_B\end{aligned}$$

Die Berechnung von Term A liefert:

$$\begin{aligned}(\partial \bar{\partial} q)^n &= \left(\frac{\|x\|^2 \delta_{ij} - \bar{x}_i x_j}{\|x\|^4} dx^i \wedge d\bar{x}^j \right)^n = \\ &= n! \det \left(\frac{\|x\|^2 \delta_{ij} - \bar{x}_i x_j}{\|x\|^4} \right) dx^1 \wedge d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\bar{x}^n = \\ &= n! \det \left(\frac{1}{\|x\|^2} (\delta_{ij} - \underbrace{\frac{\bar{x}^i x^j}{\|x\|^2}}_{:=M}) \right) dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n = 0\end{aligned}$$

denn die Determinante der Matrix $1 - M$ ist wegen des Rangs eins von M

$$\det(1 - M) = 1 - \mathrm{tr}(M) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{|x^k|^2}{\|x\|^2} = 1 - 1 = 0$$

Dies bedeutet, dass die Ableitung $u_1^n := (u')^n$ gar nicht auftritt.

Die Berechnung von Term B: $\partial q \wedge \bar{\partial} q \wedge (\partial \bar{\partial} q)^{n-1}$ gestaltet sich etwas aufwändiger. Zerlege ihn in zwei Anteile, der Erste ist offenbar

$$\partial q \wedge \bar{\partial} q = \frac{\sum_{k,l=1}^n \bar{x}_k x_l dx^k \wedge d\bar{x}^l}{\|x\|^4}$$

Der zweite Faktor ist: $(\partial \bar{\partial} q)^{n-1}$, und mit Hilfe der Tatsache $(\partial \bar{\partial} q)^{n-1} \wedge \partial \bar{\partial} q = (\partial \bar{\partial} q)^n$ folgt, wobei $(\partial \bar{\partial} q)^n$ der bereits bekannte Term A ist, dass die Koeffizienten im Wesentlichen Einträge der komplementären Matrix g^{ad} zur Koeffizientenmatrix $g = (g_{i\bar{j}}) := (\|x\|^2 \delta_{ij} - \bar{x}_i x_j)_{i\bar{j}}$ mit einem Faktor von $\|x\|^{4-4n}$ sind.

Lemma 2.1. *Für die adjungierte Matrix zu g , auch komplementäre Matrix oder Adjunkte genannt, gilt:*

$$g^{\text{ad}} = \|x\|^{2n-4} \left(x_1 \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \mid \cdots \mid x_n \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \right) = \|x\|^{2n-4} ((\bar{x}_i x_j)_{i\bar{j}})$$

für eine Matrix $g = (g_{i\bar{j}})$ der Größe $n \times n$, und $i, j = 1 \dots n$.

Beweis. Wegen $g^{\text{ad}} g = g g^{\text{ad}} = \det(g) \cdot \mathbb{E}_n = 0$ hat man eine Matrixgleichung $g g^{\text{ad}} = 0$ nach g^{ad} als Spaltenvektoren betrachtet zu lösen. Dies gelingt mit dem eindimensionalen Vektorraum

$\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$. Weil $\det(g) = 0$ ist, aber nichttriviale $(n-1) \times (n-1)$ -Minoren existieren, liegt mit

g eine Matrix vom Rang $(n-1)$ vor, so dass die komplementäre Matrix Rang eins besitzt. Wir berechnen nun explizit den Eintrag $g_{n\bar{n}}^{\text{ad}}$ um den gemeinsamen Vorfaktor zu finden.

$$\begin{aligned} \det(g'_{n\bar{n}}) &= \det((\|x\|^2 \delta_{ij} - \bar{x}_i x_j)_{i,\bar{j}=1 \dots (n-1)}) = \\ &= \|x\|^{2n-2} \det(\delta_{ij} - \underbrace{\frac{\bar{x}_i x_j}{\|x\|^2}}_{=: M}) = \|x\|^{2n-2} (1 - \text{tr} M) = \\ &= \|x\|^{2n-2} \left(1 - \frac{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}{\|x\|^2} \right) = \|x\|^{2n-2} \frac{|x_n|^2}{\|x\|^2} = \\ &= \|x\|^{2n-4} |x_n|^2 \end{aligned}$$

Durch Berechnen weiterer Einträge in anderen Spalten, um die Faktoren x_1, \dots, x_n zu den einzelnen n Spalten zu bestimmen, sieht man die Behauptung ein. \square

Mit $(g \cdot g^{\text{ad}})_{i\bar{i}} = \sum_{k=1}^n g_{i\bar{k}} g_{k\bar{i}}^{\text{ad}} = 0$, und Berücksichtigung des Basiskovectoranteils mit ± 1 , $+1$ für $i \leq j$, -1 für $i > j$, folgt:

$$\begin{aligned} (\partial \bar{\partial} q)^{n-1} &= g_{i_1 \bar{j}_1} \cdots g_{i_{n-1} \bar{j}_{n-1}} dx^{i_1} \wedge d\bar{x}^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{n-1}} \wedge d\bar{x}^{i_{n-1}} = \\ &= (n-1)! g_{j\bar{i}}^{\text{ad}} (\pm 1) dx^1 \wedge \cdots \overset{\checkmark}{i} \cdots \overset{\checkmark}{j} \cdots \wedge d\bar{x}^n = \\ &= (n-1)! \frac{\|x\|^{2n-4} (\bar{x}_j x_i)}{\|x\|^{4n-4}} (\pm 1) dx^1 \wedge \cdots \overset{\checkmark}{i} \cdots \overset{\checkmark}{j} \cdots \wedge d\bar{x}^n \end{aligned}$$

Mit dem ersten Anteil des Terms B, $\partial q \wedge \bar{\partial} q$, zusammengesetzt und den Basisanteil angeordnet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\bar{x}_k x_l dx^k \wedge d\bar{x}^l}{\|x\|^4} \right) \wedge \sum_{i,j=1}^n \left((n-1)! \frac{\|x\|^{2n-4} (\bar{x}_j x_i)}{\|x\|^{4n-4}} dx^1 \wedge \cdots \overset{\checkmark}{i} \cdots \overset{\checkmark}{j} \cdots \wedge d\bar{x}^n \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (n-1)! \frac{|x_i x_j|^2 \|x\|^{2n-4}}{\|x\|^{4n}} dx^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n = \\ &= (n-1)! \frac{(\|x\|^2)^2 \|x\|^{2n-4}}{\|x\|^{4n}} dx^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}^n = \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)!}{\|x\|^{2n}} dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n = (n-1)! e^{-nq} dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$$

Die Ausformulierung von $(\partial\bar{\partial}\varphi)^n$ liefert:

$$(2.1) \quad (\partial\bar{\partial}\varphi)^n = \binom{n}{1} u_{11} u_1^{n-1} (n-1)! e^{-nq} dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$$

Wir erhalten das Ergebnis

Theorem 2.1. *Als Einsteingleichung für eine Kähler-Einstein-Metrik $\partial\bar{\partial}\varphi$ auf $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ findet man*

$$(2.2) \quad n! u_{11} u_1^{n-1} e^{-nq} = e^{-u}$$

bei Wahl von $dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$ als Volumenform. Wenn man statt $GL_n(\mathbb{C})/H$, den homogenen Raum $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ als $SL_n(\mathbb{C})/H$, mit H als entsprechende Isotropiegruppe von x_0 in $SL_n(\mathbb{C})$, realisiert, so ist diese $SL_n(\mathbb{C})$ -invariant.

Korollar 2.1. Man findet bei Wahl der modifizierten, nur $SU(n)$ -invarianten Volumenform:

$$dVol_{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}} := \frac{n! dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n}{(\|x\|^2)^n} = n! e^{-nq} dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$$

die wegen $\partial\bar{\partial}\ln(e^{-nq}) \neq 0$ nicht mehr Krümmungsform Null besitzt, aber den Faktor $n! e^{-nq}$ auf der linken Seite in (2.2) in dieser Volumenform verschwinden lässt, den Ausdruck

$$(2.3) \quad (\partial\bar{\partial}\varphi)^n = u_{11} u_1^{n-1} dVol_{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}}$$

Auf der rechten Seite kann man e^{-u} nicht zusammen mit dieser Volumenform ansetzen, weil es unter $-\partial\bar{\partial}\ln(\cdot)$ das Resultat $\partial\bar{\partial}u + n\partial\bar{\partial}q$ liefert, und weiter das Standardverfahren die Gleichung $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\partial\bar{\partial}u)^i (\partial\bar{\partial}q)^{n-i} = e^{-u-nq} dx^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n$.

Als Lösungspotential zur Gleichung (2.2) findet sich

$$u = \ln(1 + e^q)^{n+1} + \ln[n!(n+1)^n]$$

wie man leicht nachrechnet.

Wir können die Ricci- und Skalarkrümmung wie in [R] berechnen, aber mit der, wie es dort genannt wird, "geschickten" Koordinatenwahl, die von E. Calabi schon benutzt wurde ([R] Remark 2.2.2.). Beachte jedoch, dass $\partial\bar{\partial}\ln(e^{-nq}) = -n\partial\bar{\partial}q \neq 0$ ist, man muss diesen Term deshalb mitbeachten.

$$\begin{aligned} Ric(\partial\bar{\partial}\varphi) &= -\partial\bar{\partial}\ln(u_{11}u_1^{n-1} \cdot e^{-nq}) = \\ &= -[u_{1111}u_{11}u_1^{2n-2} + (n-1)u_{111}u_{11}^2u_1^{2n-3} - \\ &\quad - (n-1)u_{11}^4u_1^{2n-4} - u_{111}^2u_1^{2n-2}] \frac{\partial q \wedge \partial \bar{q}}{(u_{11}u_1^{n-1})^2} - \\ &\quad - (u_{111}u_1^{n-1} + (n-1)u_{11}^2u_1^{n-2}) \frac{\partial\bar{\partial}q}{u_{11}u_1^{n-1}} + n\partial\bar{\partial}q \end{aligned}$$

Korollar 2.2. Für $n = 2$ ist die Skalar­krümmung S von der zu $\partial\bar{\partial}\varphi$ gehörigen Metrik auf $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ durch

$$S(\partial\bar{\partial}\varphi) = -(2!) \frac{[u_{1111}u_{11}u_1^2 + 2u_{111}u_{11}^2u_1 - u_{111}^2u_1^2]}{e^{2q}u_{11}^2u_1}$$

gegeben.

Beweis. Aus den Formeln für $Ric(\partial\bar{\partial}\varphi)$ und $\partial\bar{\partial}\varphi$ setzt man den Ausdruck der Skalar­krümmung $S(\partial\bar{\partial}\varphi) = n! Ric(\partial\bar{\partial}\varphi) \wedge (\partial\bar{\partial}\varphi)^{n-1}$ zusammen, was wegen $n = 2$ besonders einfach ist.

$$\begin{aligned} (2!) Ric(\partial\bar{\partial}\varphi) \wedge (\partial\bar{\partial}\varphi) &= \\ &= -(2!) [u_{1111}u_{11}u_1^2 + 2u_{111}u_{11}^2u_1 - u_{111}^2u_1^2] \frac{\partial q \wedge \bar{\partial} q \wedge \partial\bar{\partial} q}{u_{11}^2u_1} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Dies liefert eine gewöhnliche Differentialgleichung für u zur vierten Ordnung, um eine Bedingung an die Skalar­krümmung der Kählermetrik $\partial\bar{\partial}\varphi$ auszudrücken, z.B. $S(\partial\bar{\partial}\varphi) = \text{konstant}$.

Bemerkung 2.1. Beobachte dass $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein horosphärischer homogener Raum vom Rang eins ist, d.h. als homogenes torisches Bündel hat es die Faser \mathbb{C}^* . Zuerst einmal liegt eine maximale unipotente Untergruppe von G offenkundig in H , indem man einfach die unipotenten Matrizen in G betrachtet. Eine Boreluntergruppe von $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ sind die oberen Dreiecksmatrizen, die man als Gruppe mit $T(n)$ bezeichnet. Für $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$ kann man ähnlich einsichtig argumentieren. Damit findet man als Farbe $\mathbb{V}_{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}}(x_n)$, die B -invariant aber nicht G -invariant ist. Es gibt eine natürliche Projektion des homogenen torischen Bündels $\text{SL}_n(\mathbb{C}) \times_{P,\tau} \mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{P}^{n-1} = \text{SL}_n(\mathbb{C})/P$ mit Faser \mathbb{C}^* darüber, für eine parabolische Untergruppe

P von $\text{SL}_n(\mathbb{C})$, z.B. Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & & & \\ 0 & & T' & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ in $\text{SL}_n(\mathbb{C})$. Der Homomor-

phismus $\tau : P \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist im Fall $n = 2$ mit $\tau(T) = t_{11}^{n'}$ für ein $n' \in \mathbb{N}_0$ gegeben, was je nach der Kompaktifizierung gewählt wird (vgl. [PS1] 6. Examples). Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ für den homogenen Raum alleine ist $\tau(T) = t_{11}$ zu setzen.

2.2 Das Beispiel $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$

Wir lassen $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ auf $V := \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ wirken, und wählen, anders als im noch folgenden Kapitel 4, den Punkt $v_0 := (e_1, (e_n)^*) \in V$ als Basispunkt des zu konstruierenden homogenen Raums aus. Die Wirkung wollen wir definieren durch

$$\begin{aligned} \text{SL}_n(\mathbb{C}) \times V &\rightarrow V \\ (T, v) &\mapsto (Tv^{(1)}, {}^t(T^{-1})v^{(2)}) \end{aligned}$$

Dies ergibt als Isotropiegruppe in v_0 für $n = 3$ gerade die Standard maximale, unipotente

Untergruppe aus Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_3(\mathbb{C})$. Für $n \geq 4$ erhält man eine

horosphärische Untergruppe $H \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ mit Matrizen $T = (t_{ij})$ von der Gestalt: $t_{11} = t_{nn} = 1$, $t_{i1} = t_{ni} = 0$, für $2 < i < n - 1$, $t_{n1} = 0$. Als Bahn, worauf die Wirkung transitiv ist, erhält man

$$Y := \left\{ ((x, y) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n} \mid \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0) \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\}) \right\}$$

bei Wahl von affinen Koordinaten $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, oder kurz (x, y) , in V . Y ist eine horosphärische homogene Varietät vom Rang zwei, da für $n = 3$ die Standardboreluntergruppe

mit $B = \left\{ T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \right\}$ gegeben ist, d.h. es gilt $\prod_{i=1}^3 t_{ii} = 1$, so dass

$B/U \cong \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^2$ der 2-Torus ist. Für $n \geq 4$ kann man es sich analog überlegen.

Bemerkung 2.2. Als homogenes torisches Bündel vom Rang zwei zeigt sich Y als $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_{P, \tau} \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^2$ über der Basis $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/P$ liegend.

Als zwei reelle, $\mathrm{SU}(n)$ -invariante Koordinaten wählen wir:

$$\begin{aligned} x &:= \ln(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) = \ln(\|x\|^2) \\ y &:= \ln(|y_1|^2 + \dots + |y_n|^2) = \ln(\|y\|^2) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun, ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt, im Fall $n = 3$ die Größe $(\partial\bar{\partial}\varphi)^5$ für eine $\mathrm{SU}(3)$ -invariante Funktion φ auf $Y \subset V$, die zu $u = u(x, y)$ auf \mathbb{R}^2 korrespondiert, bezüglich einer geeigneten, $\mathrm{SU}(3)$ -invarianten, oder sogar $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ -invarianten Volumenform auf Y wie in Abschnitt 4.2.2.

Theorem 2.2. Die Einsteingleichung einer KE-Metrik auf Vervollständigungen des Raumes Y , formuliert auf $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$, lautet

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &5![(u_1^2 u_2 + u_1 u_2^2)(u_{11} u_{22} - u_{12}^2)(e^{3(x+y)} - e^{2(x+y)}) + \\ &+ u_1^2 u_2^2 (u_{11} + u_{22} - 2u_{12})e^{3(x+y)}] = e^{-u} \end{aligned}$$

Beweis. Für die Berechnung verweisen wir auf Kapitel 4, wo im Prinzip genau diesselbe explizite Rechnung stattfindet, die hier nötig wäre. Das Ergebnis dieses Ableitungsoperators kann man von (4.16) übernehmen, mit Rücksicht auf die herausgenommenen algebraischen Mengen, $\{x = 0\} \cup \{y = 0\}$ in der Hyperfläche $\{\sum_{i=1}^3 x_i y_i = 0\}$. Partielle Ableitungen nach x haben wir mit Index 1, nach y mit 2 bezeichnet. \square

2.3 Kähler-Ricci-Solitonen auf horosphärischen Fano-Mannigfaltigkeiten

Die Veröffentlichung [PS] klärt die Fragestellung zu Theorem 0.1 allgemeiner auf homogenen torischen Bündel $\mathbf{x} := G^{\mathbb{C}} \times_{P, \tau} F$, wobei F kompakte torische Kählermannigfaltigkeit der Dimension m ist, P eine parabolische Untergruppe von $G^{\mathbb{C}}$ und $\tau : P \rightarrow (\mathbb{C}^*)^m$. $(\mathbb{C}^*)^m$ ist der Torus, der effektiv, holomorph auf F operiert. Das Theorem lautet für ein Potential $u = u(q_1, \dots, q_n)$ wie folgt:

Theorem 2.3 ([PS] Theorem B, Corollary 5.2). *Das homogene torische Faserbündel $\pi : \mathbf{X} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/P$, mit einer kompakten torischen Kählermannigfaltigkeit F als Faser, besitzt einen KRS $(\omega, X^{(\lambda)})$ auf \mathbf{X} genau dann, wenn es Fano ist, und der KRS ist eine Kähler-Einstein-Metrik, genau dann, wenn die Futaki-Invariante verschwindet. Die torusinvariante Funktion u als Potential erfüllt auf allen regulären Punkten F_{reg} der Standardfaser F des Torusbündels \mathbf{X} die Gleichung*

$$(2.5) \quad \det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^i \partial q^j} \right) = \frac{1}{\prod_{\alpha \in R_{\mathfrak{m}}^+} \left(-\frac{a_{\alpha}^i}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial q^i} + b_{\alpha} \right)} e^{-C^{(\lambda)} - X^{(\lambda)}(u) - u}$$

für ein $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^m$, so dass die Tian-Zhu-Invariante bezüglich des Vektorfeldes $X^{(\lambda)}$ (dies ist die verallgemeinerte Futaki-Invariante) verschwindet, für $X^{(\lambda)}$, das assoziierte Vektorfeld der Kählermetrik des KRS,

und $C^{(\lambda)} := \log \frac{\int_{\mathbf{X}} \omega^{n+m}}{\int_{\mathbf{X}} e^{-4\pi \lambda^i f_i} \omega^{n+m}}$ eine Konstante.

Wir gehen im Folgenden auf diese Arbeit näher ein, im Hinblick auf die Methode, die wir auf beliebige sphärische Varietäten anwenden wollen.

Beobachtungen: 1. Die Einsteingleichung, die hier eine reelle Monge-Ampère-Gleichung ist, wird nur noch auf der Faser F formuliert. Damit ist sie direkte Verallgemeinerung des Theorems in [WZ] im torischen Fall, in dem die Basis des homogenen Torusbündels nur aus einem Punkt besteht, und stützt sich im Beweis der Lösbarkeit ausschließlich darauf. Sie enthält einen im Vergleich zu der aus [WZ] bekannten Gleichung, für Kähler-Ricci-Solitonen auf torischen Fanovarietäten, zusätzlichen Faktor $\frac{1}{\prod_{\alpha \in R_{\mathfrak{m}}^+} \left(-\frac{a_{\alpha}^i}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial q^i} + b_{\alpha} \right)}$. Dieser kommt alleine

von der Gruppe $G^{\mathbb{C}}$, genauer von Wurzeln aus dem komplexifizierten Komplement $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ zu $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, das aus der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ bzgl. der Killingform stammt, die unter der fast-komplexen Struktur J_V der Basis $V := G^{\mathbb{C}}/P$ im $(1, 0)$ -Eigenraum von $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ liegen.

2. Die bijektive Korrespondenz zwischen T^m -invarianten $(1, 1)$ -Formen auf F und $G \times T^m$ -invarianten $(1, 1)$ -Formen auf M beinhaltet in der Richtung von F nach M die \mathfrak{k} -Komponente der Lieklammer in \mathfrak{g} , ähnlich wie auch in der Identifikation 3 in Abschnitt 3.2.1 nichtabelsche Ausdrücke dazukommen. Dies ist der entscheidende Schritt in der Reduktion des Problems auf die Faser F in Lemma 5.1 von [PS].

3. Die Funktion $h := \omega^n(\hat{F}_1, J\hat{F}_1, \dots)$ ist gegeben als

$$h = C \det(f_{i,j}) \prod_{\alpha \in R_{\mathfrak{m}}^+} \left(\sum_{i=1}^m a_{\alpha}^i f_i + b_{\alpha} \right)$$

mit Konstante $C \neq 0$, und gewissen $a_{\alpha}^j := \alpha(iZ_j)$ und $b_{\alpha} := \alpha(iI_{\omega})$, beides reelle Funktionswerte unter α von Bestandteilen der auf F eingeschränkten sog. algebraischen Darstellenden $Z_{\omega} = \sum_i f_i Z_i + I_{\omega}$ von ω . h trägt als Volumenformvorfaktor auf F letztlich mit dem hinteren Produkt über Wurzeln α zur Gleichung (2.5) bei.

Bemerkung 2.3. Ein Vergleich der reellen Einsteingleichungen (2.2) und (2.4) mit (2.5) zeigt, dass im Rang eins Beispiel $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die Struktur der Gleichung (2.2) mit (2.5) übereinstimmt, wenn man nur eine Koordinate q^1 für die eindimensionale Torusfaser hat. Für

(2.4) sieht man jedoch Inkompatibilität zu (2.5), da man in (2.4) zwar einen Determinanten-
ausdruck $\det\left(\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\right)$ vorfindet, jedoch nicht einen Monge-Ampère-Operator und einen
Operator erster Ordnung, wie in (2.5) gefordert, antrifft. Damit gibt es also zwei verschiedene
Gleichungstypen, die eine geometrische Bedingung ausdrücken können, und es wird entschei-
dend von den Randbedingungen abhängen, welche Funktionen Lösungen sind.

Im Hinblick auf eine Verallgemeinerung des Theorems von Podestà und Spiro kann man
zuerst klären, was die Fano-Eigenschaft für horosphärische Varietäten (Einbettungen X horo-
sphärischer homogener Varietäten G/H ist damit gemeint, d.h. S-Varietäten) kombinatorisch
bedeutet. Dies wurde in der Dissertation [P1] basierend auf Arbeiten von M. Brion in der
Sprache der sphärischen Varietäten getan, wo man einen antikanonischen Divisor $-K_X$ ex-
plizit angibt. In [PS] wird die Fano-Eigenschaft mit Hilfe des symplektischen Zugangs und
der Impulsabbildung für homogene torische Bündel angegeben. Nichtsingularität einer G/H -
Einbettung X kann kombinatorisch durch den gefärbten Fächer beschrieben werden, sh. [P1].

Daraufhin ist weiter herauszuarbeiten, wie der Operator einer Gleichung für eine spezielle
Kählermetrik aussieht, wenn man die geschickte Wahl von reellen, K -invarianten Koordinaten
auf G/H , die eine bijektive Abbildung von $K \backslash G/H$ auf eine Teilmenge von $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^r$ liefern,
für ein $r \in \mathbb{N}$, als Methode benutzt. K ist dabei eine maximale kompakte Untergruppe von
 G . Die geeigneten, reellen Koordinatenfunktionen auf G/H findet man nach der Idee von V.
Batyrev aus Abschnitt 1.3 im horosphärischen Fall aus der Formel (1.5), wobei man hier wegen
Proposition 1.4 stets den ganzen Vektorraum $N_{\mathbb{R}}$ als Bild der Abbildung (q^1, \dots, q^r) auf das
Bild des Bewertungskegels erhält, man hat also keine Einschränkungen zu treffen. Vergleiche
dies mit Proposition 1.5 für den Fall Rang eins, der einfach $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ im horosphärischen Fall
liefert. Wenn man eine holomorphe, G -invariante Volumenform vom Typ $|\Omega|^2$ auf G/H zur
Verfügung hat, z.B. nach Lemma 5.7, kann man den Operator in jedem Einzelfall nach Formel
(3.52) bestimmen.

Offenbar ist die Reduktion aus [PS] auf eine Gleichung in der torischen Faser eine voll-
kommen verschiedene Herangehensweise in der speziellen Situation eines homogenen torischen
Bündels, die in diesem Fall naheliegend ist, aber nicht auf beliebige horosphärische Varietäten
anwendbar ist. Eine reelle Monge-Ampère-Gleichung herzuleiten, wird im Kapitel 3 noch für
i.A. nichtsphärische, fasthomogene $G^{\mathbb{C}}$ -Einbettungen versucht werden.

Kapitel 3

Kähler-Einstein-Metriken auf $G^{\mathbb{C}}$ -fasthomogenen Fano-Mannigfaltigkeiten

3.1 Einführung

Es ist bekannt, dass auf komplexen Liegruppen G eine G -invariante, holomorphe Differentialform von maximalem Grad existiert. Diese wird auf Liegruppen G durch Rückzug mit Links- bzw. Rechtstranslation einer alternierenden Multilinearform höchsten Grades im Tangentialraum des neutralen Elements erzeugt. Wenn man eine solche Form Ω hat, ist die Aufstellung einer Einsteingleichung für die Existenz von Kähler-Einstein-Metriken auf Einbettungen X von G durch

$$(3.1) \quad (\partial\bar{\partial}\phi)^n = e^f |\Omega|^2$$

mit $f = \mp\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$, einer reellwertigen, glatten und plurisubharmonischen (psh) Funktion (für $c_1 > 0, < 0$ entsprechend gewählt), oder $f = \text{konst.}$ (für $c_1 = 0$, mit ricciflacher Kählermetrik $\partial\bar{\partial}\phi$), gelungen. Anders liegt der Fall jedoch, wenn man eine Einsteingleichung von reellem Monge-Ampère-Typ bekommen will, wie in [D1] 4.2 vorgeschlagen, weil für diese Art Gleichung ein großer Apparat zur Behandlung zur Verfügung steht. Dazu schränken wir das Problem auf sogenannte linear komplex-reduktive Liegruppen ein, die nach Definition Komplexifizierungen kompakter, reeller Liegruppen sind. Wir schreiben $G^{\mathbb{C}}$ dafür, und lassen G die dann maximale kompakte Untergruppe von $G^{\mathbb{C}}$ sein. Als Ziel setzt man sich, für ein G -invariantes Kählerpotential ϕ auf $G^{\mathbb{C}}$ eine reelle Gleichung auf dem Quotienten $M := G^{\mathbb{C}}/G$ aufzuschreiben, auf den sich ϕ als eine Funktion u herunterholen lässt, und das Lösung einer geometrischen Fragestellung an X ist. Bei der Rückrichtung wird die Annahme der Fortsetzbarkeit von $\partial\bar{\partial}\phi$, wobei ϕ zu der auf M gefundenen Lösung u gehört, auf ganz X entscheidend sein, unter gewissen Rand- und Nebenbedingungen. Das wichtigste Hilfsmittel ist dabei ein Identifikationsverfahren, das den Operator $\partial\bar{\partial}$ auf psh, G -invarianten Funktionen ϕ mit der Riemann'schen Hesseschen ∇^2 auf geodätisch konvexen Funktionen u auf M in Beziehung bringt, und das wir ausführlich erklären. Allerdings treten einige Probleme auf, wie wir sehen werden, so dass die Gleichung, die wir durch Heranziehung einer nur G -rechtsinvarianten Volumenform auf $G^{\mathbb{C}}$ erhalten, statt obigem $|\Omega|^2$, nicht mehr die richtige Formulierung des Problems sein kann, da bekannte Lösungen, die Kähler-Einstein-Metriken auf Einbettungen X

von $G^{\mathbb{C}}$ liefern, nicht mehr Lösungen dieser Gleichung sind, was die explizit durchgerechneten, nichttorischen Beispiele weiter unten in Abschnitt 3.4 zeigen. Wir können durch die genaue Herleitung dieser Gleichung zeigen, dass es wegen des dort verwendeten Identifikationsverfahrens scheitert. Das Herleitungsverfahren orientiert sich weitgehend am Standardverfahren, das sich für $|\Omega|^2$ abspult, musste aber für die Anwendung der Identifikationen abgewandelt werden. Wir benutzen meist Überlegungen in lokalen Koordinaten, da man dadurch einen genaueren Eindruck bekommt. Zwei durchweg begleitende Beispiele veranschaulichen diese, und am Schluss folgen die Beispielrechnungen für Potentiale von Kähler-Einstein-Metriken prominenter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -Varietäten \mathbf{X} .

Diese Aufgabenstellung wurde im Überblicksartikel [D1] von S. K. Donaldson vorgeschlagen, zusammen mit vielen weiteren Forschungsansätzen, dem wir hauptsächlich folgen, aber mit einigen Modifikationen. Im Rahmen des Themas, Gleichungen für sphärische Varietäten zu finden, nimmt es im Beispiel $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine Zwischenstellung ein, da der Quotient nach S^1 bei $M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ noch zu bilden wäre, wenn man $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H$ als sphärische Varietät auffassen will, und eine maximale kompakte Untergruppe mit $\mathrm{SU}(2) \times S^1$ gegeben ist. Es ist also noch eine S^1 -Symmetrie in der Gleichung auf \mathbb{H}^3 vorhanden.

3.2 $G^{\mathbb{C}}$ -fasthomogene Mannigfaltigkeiten

Sei im Folgenden G eine kompakte und zusammenhängende Liegruppe. Dafür weiß man (vgl. [HN] 15.1-15.2 für das Kommende), dass die universelle Komplexifizierung $(\eta_G, G^{\mathbb{C}})$ von G ($\eta_G : G \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ ein Homomorphismus reeller Liegruppen) für jede Liegruppe G eindeutig existiert, eindeutig bis auf Isomorphie aus der definierenden, universellen Eigenschaft. Weil G kompakt ist, erfüllt sie überdies weitere Sachverhalte, unter diesen befindet sich Folgende: Die Abbildung η_G ist injektiv, $G^{\mathbb{C}}$ enthält $\eta_G(G)$ als eine maximale kompakte Untergruppe und die Polarzerlegung

$$(3.2) \quad \begin{aligned} p : G^{\mathbb{C}} &\leftarrow \mathfrak{g} \times G \\ \exp_{G^{\mathbb{C}}}(iA)U &\leftarrow (A, U) \end{aligned}$$

ist ein Diffeomorphismus. $G^{\mathbb{C}}$ heißt dann linear komplex-reduktiv, und ihre Liealgebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist auch tatsächlich reduktiv. Definiere eine Abbildung, die von der Polarzerlegung p und der natürlichen Projektion $\pi : G^{\mathbb{C}} \rightarrow M := G^{\mathbb{C}}/G$ induziert wird, als

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Psi : G^{\mathbb{C}} &\longrightarrow M \times G \\ T &\mapsto (\pi(T), U_T), \forall T = e^{iA}U_T = p(A, U_T) \in G^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Dies ist ein G -äquivarianter Diffeomorphismus, der $G^{\mathbb{C}}(M, G)$ als triviales Hauptfaserbündel $M \times G$ zerlegt, wenn wir G auf $M \times G$ von rechts mit $((p, U), U') \mapsto (p, UU')$ wirken lassen. Wähle auf $G^{\mathbb{C}}$ den kanonischen invarianten Zusammenhang, der durch die reduktive Zerlegung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$, mit $\mathrm{Ad}(G)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ von \mathfrak{m} bestimmt ist. Dies ist hier sogar als kanonische Zerlegung einer symmetrischen Liealgebra $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ erhältlich, wobei σ die \mathfrak{g} fixierende Involution in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezeichnet.

Sei \mathbf{X} eine n -dimensionale, kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit vom Kählertyp, mit einer holomorphen Rechtswirkung von $G^{\mathbb{C}}$, die eine dichte Bahn besitzt (\mathbf{X} wird auch fasthomogen genannt), und ω die Kählerform zu einer gegebenen Kählermetrik g , die wir stets als Element

in der ersten Chernklasse $c_1(\mathbf{X})$ von \mathbf{X} wählen. Nach Definition ist g Kähler-Einstein-Metrik, genau dann, wenn ω die Bedingung:

$$(3.4) \quad Ric(\omega) = \lambda\omega$$

für λ ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich ± 1 oder 0 erfüllt. Wir werden diese Forderung in eine Gleichung für Funktionen auf dem Quotientenraum $M := G^{\mathbb{C}}/G$ übersetzen, indem wir uns auf G -invariante Metriken auf \mathbf{X} beschränken, G als Isometriegruppe dieser Kählermetrik auffassen, und ein n -Tupel von globalen reellen Koordinaten (x^1, \dots, x^n) auf M auswählen, die wir auch kurz mit x manchmal bezeichnen.

M ist globaler, riemannsch symmetrischer Raum, da $(G^{\mathbb{C}}, G, \sigma)$ ein kompatibles Tripel von Liegruppensystemen bereitstellt, wobei σ (sic!) hier als komplexe Konjugation und involutiver Automorphismus in $G^{\mathbb{C}}$ auftritt, der G fixiert, um einen riemannsch symmetrischen Raum daraus zu konstruieren. Statte M mit seinem kanonischen, invarianten Zusammenhang als symmetrischer homogener Raum aus. Auf M kann man immer eine $G^{\mathbb{C}}$ -invariante Riemann'sche Metrik g_{ij}^M finden, da G kompakt ist. Er hat für $(G^{\mathbb{C}}, G, \sigma)$ vom nichtkompakten Typ (insbesondere nichteuklidisch hier angenommen) nichtpositive Schnittkrümmung, genauso wie negativdefinite Ricci-Krümmung. M ist diffeomorph zu \mathbb{R}^n und gestattet ein globales Koordinatensystem.

In dem folgenden Text werden wir zwei partielle Differentialgleichungen herleiten, auf andere Wege eingehen und auf verschiedene Probleme hinweisen. Für die Erste arbeiten wir mit einer nicht- $G^{\mathbb{C}}$ -invarianten, aber G -invarianten Volumenform $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$ auf $G^{\mathbb{C}}$. Dabei ist $dVol_M := \sqrt{\det(g_{ij}^M)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ das kanonische, Riemann'sche Volumenelement auf M , das zur Riemann'schen Metrik g^M assoziiert wird, und mit metrischen Koeffizienten g_{ij}^M auf M in globalen Koordinaten x ausgedrückt wird. $dVol_G$ soll ein G -rechtsinvariantes Volumenelement auf G sein, als Übereinkunft sei es die zu einer biinvarianten Riemannmetrik g^G assoziierte Volumenform, die es auf kompakten Liegruppen G stets gibt. Lokal kann sie als $dVol_G = \sqrt{\det(g_{ij}^G)} d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ für gewisse Koordinaten $(\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$ auf G geschrieben werden. In komplexen Koordinaten (w^1, \dots, w^n) lokal in einer Umgebung $V \subset G^{\mathbb{C}}$, erhält man aus $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$ eine Funktion $h^{(w)}$ als Vorfaktor von $dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n$.

$$(3.5) \quad \Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G) = h^{(w)} dw^1 \wedge d\bar{w}^1 \wedge \dots \wedge dw^n \wedge d\bar{w}^n$$

Dazu definiert man eine glatte, nichtverschwindende Funktion $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf M , die als Entsprechung zur (lokal in einer Umgebung $V \subset G^{\mathbb{C}}$) gegebenen Funktion $h^{(w)}$ dient, durch die Gleichheit auf $G^{\mathbb{C}}$

$$(3.6) \quad \partial\bar{\partial} \ln(h \circ \Psi) = \partial\bar{\partial} \ln(h^{(w)})$$

Existenz, Eindeutigkeit und Nichttrivialität von h werden später in Abschnitt 3.2.2 und in Lemma 3.5 diskutiert. Lokale Koordinaten auf G werden nicht oft benutzt werden, da sie nicht so gewählt werden können, dass $d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ alleine koordinatenwechselinvariant (strikt lokale Koordinaten ausschließlich möglich, da G kompakt) oder G -invariant ist. (Falls G nichtabelsch ist, so gibt es lokal nicht die Möglichkeit, die flache Metrik zu haben. Der Tensor $\sqrt{\det(g_{ij}^G)} d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ hat also nicht konstanten Vorfaktor, da $d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ alleine nicht global auf G als Tensorfeld fortsetzbar ist.) An Koordinaten auf Liegruppen sind die logarithmischen Koordinaten als kanonische Koordinatenwahl bekannt, besser wird es aber vermieden, überhaupt welche zu wählen. Vgl. jedoch [Mar].

Theorem 3.1. *Die reelle Monge-Ampère-Gleichung, die man auf M erhält, aber nicht mehr in Entsprechung zur komplexen Monge-Ampère-Gleichung des Kähler-Einstein-Problems (3.4) auf X steht, ergibt sich in der oben beschriebenen Situation und Notation als*

$$(3.7) \quad \det((\nabla^2 u')_{ij}) = e^{-u' - \ln h'}$$

für eine geodätisch konvexe, glatte Funktion u' , und $h' := \frac{h}{\det(g_{ij}^M)}$ als eine nirgends verschwindende, glatte, reelle Funktion, die für halbeinfaches $G^{\mathbb{C}}$ eindeutig ist, im Allgemeinen aber nur bis auf Homomorphismen $G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^*$ bestimmt.

Wir schreiben $u' := u - \ln h$, für eine Funktion u auf M , die durch eine G -invariante Funktion ϕ auf $G^{\mathbb{C}}$ festgelegt ist, die im Rahmen der Volumenform ω^n der Kähler-Einstein-Metrik ω auf $G^{\mathbb{C}}$ auftritt, wenn man

$$e^{-\phi} \Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$$

als Beschreibung für die Volumenform ω^n hernimmt, diese also auf die ausgezeichnete Volumenform $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$ bezieht. Erinnerung, dass u' geodätisch konvex auf M bedeutet: $\nabla^2(u - \ln h) > 0$, wobei ∇^2 die Riemann'sche Hessesche bezeichnet (und nicht den Laplace-operator), und positiv definit sein muss. Im Fall, dass man Koordinaten $(\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$ wählen kann, so dass $d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ eine (global) wohldefinierte und rechtsinvariante Volumenform auf G hergibt, so lautet die Gleichung

$$(3.8) \quad \det((\nabla^2 u)_{ij}) = e^{-u}$$

(dies ist z.B. der torische Fall, cf. [M], [WZ]).

Als Zweites, weil die Gleichung (3.7) nicht die richtige Gleichung sein kann, wegen des noch zu besprechenden Identifikationsprozesses, der in der Herleitung der Gleichung besprochen wird, formulieren wir ein weiteres

Theorem 3.2. *Die Einsteingleichung auf M in dieser oben beschriebenen Situation ist*

$$(3.9) \quad A'(x, u, Du, D^2u) = e^{-u}$$

wobei A' ein nichtlinearer, partieller Differentialoperator zweiter Ordnung ist, und durch

$$(3.10) \quad (\partial\bar{\partial}\phi)^n = A'(x, u, Du, D^2u)|\Omega|^2$$

definiert wird, mit Ω als holomorphe, $G^{\mathbb{C}}$ -rechtsinvariante n -Form auf $G^{\mathbb{C}}$, und ϕ eine differenzierbare, G -rechtsinvariante Funktion auf $G^{\mathbb{C}}$, die zu u auf M korrespondiert.

Diese wird im nichtabelschen Fall keine Gleichung vom Monge-Ampère-Typ sein, wie wir für die in Abschnitt 3.4 noch folgenden Beispiele vermuten, und wie es Beispiele in den Kapiteln 4 und 5 für sphärische homogene Räume alle zeigen. Nur im torischen Fall haben wir Übereinstimmung beider Verfahren in der wohlbekannten Gleichung

$$(3.11) \quad \det\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u\right)_{ij}\right) = e^{-u}$$

weil $h' = 1$ und die Riemann'sche Hessesche im flachen \mathbb{R}^n gerade die Matrix der zweiten Ableitungen ist.

3.2.1 Identifikation der Form $\partial\bar{\partial}\phi$ auf $G^{\mathbb{C}}$ mit der Riemann'schen Hesseschen $\nabla^2 u$ auf M

Wir beschreiben die stattfindenden Identifikationen, die in [D1], [D2] skizziert sind, und ähnlich auch in [AL] und [Bi1] benutzt werden. Entscheidende Teile davon sind ursprünglich in [L] bewiesen, nach meinem Dafürhalten, und teilweise in [Ak3] umrissen. Wir verwenden diese Grundlage aus [L] für die Methode, aber in der Gestalt wie in [D1] aufgezeigt, und stets mit zwei illustrativen Beispiele bei der Hand, und mit erläuternden Erklärungen dazu.

Sei $T \in G^{\mathbb{C}}$ mit $\pi(T) = x \in M$, und $0 \in M$ der Ursprung, d.h. der Punkt, der der Nebenklasse eG entspricht. Zusätzlich seien $U, V \in \mathfrak{g}$, und $v \in T_T(G^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R},J}^{(1,0)}$ ein Vektor vom Typ $(1, 0)$.

Lemma - Identifikation 0. *Sei $\phi : G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige, glatte, G -rechtsinvariante Funktion, sei $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, $\pi : G^{\mathbb{C}} \rightarrow M$ die kanonische Projektion und $W \subseteq M$ eine offene Umgebung in M . Dann assoziiert man*

$$(3.12) \quad \begin{aligned} u &\longmapsto \phi : \phi(T) := u \circ \pi(T), \quad T \in G^{\mathbb{C}} \\ u : u(x) := \phi \circ \sigma(x) &\longleftarrow \phi, \quad \sigma : W \rightarrow G^{\mathbb{C}} \in G^{\mathbb{C}}, \text{ mit } \pi \circ \sigma = id_W \end{aligned}$$

mit einem glatten, lokalen Schnitt σ über $W \subseteq M$ im Hauptfaserbündel $G^{\mathbb{C}}(M, G)$.

Beweis. Für jedes $x \in W \subseteq M$ gibt es ein $T = \sigma(x) \in G^{\mathbb{C}}$ mit $u(x) := \phi(T)$, für einen Schnitt σ über $W \subseteq M$. Lokal gibt es stets solche Schnitte, da $\pi : G^{\mathbb{C}} \rightarrow M$ ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe G ist, und für jedes andere $T' \in G^{\mathbb{C}}$, das $\pi(T') = x$ erfüllt und man durch einen anderen lokalen Schnitt bekäme, folgt $u(x) = \phi(T') = \phi(TU) = \phi(T)$ für ein $U \in G$. Überdies gilt: $u \in C^\infty(M) \iff u \circ \pi \in C^\infty(G^{\mathbb{C}})$, weil π glatt ist. \square

Lemma - Identifikation 1. *Es gibt einen linearen Isomorphismus zwischen dem komplexifizierten Tangentialraum $T_x M^{\mathbb{C}}$ in $x \in M$, und dem komplexen, d.h. dem holomorphen, Tangentialraum $(T_{T x_0} \mathbf{X})_{hol}$, für ein $T \in G^{\mathbb{C}}$ mit $x = \pi(T)$ und festem $x_0 \in \mathbf{X}$, in dem die Wirkung Φ von $G^{\mathbb{C}}$ auf \mathbf{X} eine dichte Bahn hat, und die Wirkung auf x_0 mit $\Phi_{x_0} : G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbf{X}$ bezeichnet sei. Die Behauptung postuliert einen Isomorphismus*

$$(3.13) \quad \begin{aligned} T_x M^{\mathbb{C}} &\longleftrightarrow (T_{T x_0} \mathbf{X})_{hol} \\ Y + iY' = Y \otimes_{\mathbb{R}} 1 + Y' \otimes_{\mathbb{R}} i &\mapsto \frac{1}{2}(-Jd\pi_T^{-1}(Y) + d\pi_T^{-1}(Y')) - \\ &\quad - \frac{i}{2}J(-Jd\pi_T^{-1}(Y) + d\pi_T^{-1}(Y')) \\ d\pi_T J(2\Re(v)) + id\pi_T(2\Re(v)) &\longleftarrow v := \frac{1}{2}(v_{\mathbb{R}} - iJv_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

wobei $Y \in T_x M^{\mathbb{C}}$, $v \in T_x M^{\mathbb{C}}$ liegen, $\pi : G^{\mathbb{C}} \rightarrow M$ die kanonische Projektion bezeichnet, J die komplexe Struktur auf $G^{\mathbb{C}}$.

Beweis. Das Lemma ist selbsterklärend, wenn wir uns nur klar vor Augen führen, was eigentlich passiert. Die erläuternden Isomorphismen des holomorphen Tangentialraum $(T_{T x_0} \mathbf{X})_{hol} \cong (T_T G^{\mathbb{C}})_{hol} \cong (T_T(G^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})_{i}^{(1,0)}$ sind aus elementarer komplexer Geometrie wohlbekannt, und Φ_{x_0} wurde benutzt. Vektoren daraus sind vom Typ $(1, 0)$, mithin darstellbar als Kombination $\frac{1}{2}(v_{\mathbb{R}} - iJv_{\mathbb{R}})$ eines gewissen reellen Tangentialvektors $v_{\mathbb{R}} \in T_T(G^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$. Wir benutzen ferner auf

M die Abbildung $T_0M \cong \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}$ in $0 \in M$, und, da M reductiver homogener Raum ist, gibt es einen Vektorraum \mathfrak{m} , so dass: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ mit $Ad(u)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, $u \in G$. Somit ist $Y \in T_0M$ nichts anderes als ein Element $JU \in \mathfrak{m} = J\mathfrak{g}$ unter $d\pi_e$ in $e \in G^{\mathbb{C}}$, wobei J für die induzierte komplexe Struktur auf dem zugrundeliegenden reellen Vektorraum $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ steht, und $U \in \mathfrak{g}$ ist. M ist homogen unter $G^{\mathbb{C}}$, $G^{\mathbb{C}}$ ist eine komplexe Liegruppe und wir können transitiv auf M durch Diffeomorphismen operieren, und es gilt die nützliche Formel

$$(3.14) \quad \pi \circ \mu(T, \cdot) = \chi(T, \cdot) \circ \pi, \quad \forall T \in G^{\mathbb{C}}$$

mit der transitiven Wirkung

$$\begin{aligned} \chi : G^{\mathbb{C}} \times M &\rightarrow M \\ (A, p) &\mapsto \chi(A, p) \end{aligned}$$

und μ die Multiplikation in der Liegruppe $G^{\mathbb{C}}$. Die Konsequenz dieser Formel und der Ableitung davon ist, dass es genügt, Tangentialvektoren in $T_eG^{\mathbb{C}}$ und T_0M zu betrachten. Dies gilt, weil jeder Tangentenvektor auf $G^{\mathbb{C}}$ eine Kombination von linksinvarianten Vektorfeldern an dem Fußpunkt des Tangentenvektors ausgewertet ist, und der Zusammenhang in $G^{\mathbb{C}}(M, G)$ den Vektorraum $J\mathfrak{g}$ zu jedem Punkt als horizontalen Untervektorraum des Tangentialraumes dorthin verschiebt. Zusammengefasst:

Y bzw. $(i)Y'$ in $x \in M$ entsprechen also $\frac{1}{2}(U - iJU)_T$ bzw. $(J)\frac{1}{2}(V - iJV)_T$ im Punkt $T \in G^{\mathbb{C}}$ ausgewertet, für $U, V \in \mathfrak{g}$.

Wodurch Y, Y' beschrieben werden, kann auf vier verschiedene Arten mit U, V geschehen, wir haben uns für die hier entschieden, wie auch in [L]. \square

Beispiel 3.1. Sei als Erstes $\mathfrak{g} = (\mathfrak{s}^1)^n = i\delta_n(\mathbb{R})$ gegeben, die Liealgebra von $G = (S^1)^n$, mit $G^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^n$, so dass:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \delta_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{g} \oplus J\mathfrak{g} = i\delta_n(\mathbb{R}) \oplus \delta_n(\mathbb{R})$$

gilt, wobei $\delta_n(\mathbb{C})$ die abelsche Liealgebra der $n \times n$ -Diagonalmatrizen mit Einträgen aus \mathbb{C} ist. $M \cong \mathbb{R}^n$ sei der flache symmetrische Raum $((\mathbb{C}^*)^n, (S^1)^n, \sigma)$, $\sigma : T \mapsto \bar{T}^{-1}$, mit $T \in G^{\mathbb{C}}$, fixiert dabei $(S^1)^n$, und die Projektion ist

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ T = (z^1, \dots, z^n) &\mapsto (\ln|z^1|, \dots, \ln|z^n|) \end{aligned}$$

Das Differential in $T \in (\mathbb{C}^*)^n$ und auf Tangentenvektor $\begin{pmatrix} z_1 c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n c_{nn} \end{pmatrix} = d_e \mu_T C = \mu_T(C)$ in T angewandt, wobei μ_T die natürliche Linksmultiplikation in der Gruppe mit T bezeichnen soll, und $c_{ii} \in \mathbb{C}$ für alle i gewählt seien, berechnet man als

$$\begin{aligned} d\pi_T(d\mu_T C) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi \circ \mu_T e^{tC} = \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi \left(\begin{pmatrix} z_1 e^{tc_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n e^{tc_{nn}} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (\ln(|z_1 e^{tc_{11}}|), \dots) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\ln(|z_1|) + t\Re(c_{11}), \dots) = \\ &= (\Re(c_{11}), \dots, \Re(c_{nn})) \end{aligned}$$

Die Identifikation $T_x(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}} \leftrightarrow T_T((\mathbb{C}^*)^n)^{(1,0)}$ vollzieht sich nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned} Y + iY' &= \sum_j (Y^j + iY'^j) \frac{\partial}{\partial x^j} \mapsto \sum_j (Y^j + iY'^j) z^j \frac{\partial}{\partial z^j} \Big|_T \\ &\quad \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x^j} \leftarrow \sum_j c_j z^j \frac{\partial}{\partial z^j} \Big|_T, \quad c_j \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

bezüglich der Koordinaten, die man aus den trivialen Atlanten auf \mathbb{R}^n und $(\mathbb{C}^*)^n$ erhält, da $d\pi_e(\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})) = \text{diag}(\Re a_{11}, \dots, \Re a_{nn})$ ist, und die Identifikation von $(\mathbb{C}^*)^n$ -invarianten Vektorfeldern

$$\text{diag}(0, \dots, 1, \dots, 0) \equiv z^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad z^i \in \mathbb{C}^*, \forall i = 1, \dots, n$$

liefert, wobei die 1 an der i -ten Stelle der Diagonalmatrix sitzt. Beobachte, dass aus $R_{T'}(T) := TT'$ die Ableitung $d_T R_{T'} A_T = d_T R_{T'} R_T(A) = R_{TT'}(A)$ folgt. Jedoch hat man

$$d\pi_T(\text{diag}(z^1 a_{11}, \dots, z^n a_{nn})) = \text{diag}(\Re a_{11}, \dots, \Re a_{nn})$$

Für mehr Details zum torischen Fall, siehe [F] oder andere Literatur dazu.

Beispiel 3.2. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$, dann ist

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{herm}_2^{>0,1}(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{su}_2$$

und $G^{\mathbb{C}} = \text{SL}_2(\mathbb{C})$. Der homogene Raum $M = \text{SL}_2(\mathbb{C})/\text{SU}(2)$ ist nichts anderes als der reelle, hyperbolische, dreidimensionale Raum \mathbb{H}^3 , wobei wir Koordinaten $x, y, r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ im oberen Halbraummodell wählen, wie in [EGM] beschrieben, als Teilraum der Quaternionen. Dies ist auch praktisch für konkrete Rechnungen. Bezeichne Punkte mit $x + iy + jr$, worin die vierte Komponente Null ist, und mit $z := x + iy \in \mathbb{C}$. Setze

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \pi : \text{SL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{H}^3 \\ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \frac{b\bar{d} + a\bar{c} + j}{|d|^2 + |c|^2} \end{aligned}$$

Dies gibt reelle, $\text{SU}(2)$ -invariante Koordinatenfunktionen auf $\text{SL}_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} x &:= \Re \frac{b\bar{d} + a\bar{c}}{|d|^2 + |c|^2} \\ y &:= \Im \frac{b\bar{d} + a\bar{c}}{|d|^2 + |c|^2} \\ r &:= \frac{1}{|c|^2 + |d|^2} \end{aligned}$$

vor. Wir werden auch das Differential dieser Abbildung in $e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ benötigen, d.h.

$$d\pi_e : T_e \text{SL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow T_j \mathbb{H}^3$$

wobei auf der rechten Seite Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial r}$ in $j \in \mathbb{H}^3$ mit den Punkten $1, i, j$ identifiziert werden sollen, aufgefasst als Vektoren im Tangentialraum $T_j(\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R}_{>0})$

aus der Quaternionenbeschreibung. Auf der anderen Seite wählen wir die folgende Basis von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$(3.16) \quad X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $(iH, X - Y, i(X + Y))$ von $\mathfrak{su}(2)$. Das Differential berechnet sich darauf wie folgt:

$$\begin{aligned} d\pi_e H &= \frac{d}{dt}|_0 \pi \circ e^{tH} = \frac{d}{dt}|_0 \pi \left(\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \right) = \frac{d}{dt}|_0 \frac{j}{|e^{-t}|^2} = \\ &= \begin{cases} 2j & \text{für } t \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{für } t = it', t' \in \mathbb{R}, \text{ also } d\pi_e(iH) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\pi_e(X - Y) &= \frac{d}{dt}|_0 \pi \circ e^{t(X-Y)} = \frac{d}{dt}|_0 \pi \left(\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{d}{dt}|_0 \frac{j}{|\cos(t)|^2 + |\sin(t)|^2} = \frac{d}{dt}|_0 \frac{j}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\pi_e(i(X - Y)) &= \frac{d}{dt}|_0 \pi \circ e^{ti(X-Y)} = \frac{d}{dt}|_0 \pi \left(\begin{pmatrix} \cosh(t) & i \sinh(t) \\ -i \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{d}{dt}|_0 \frac{2i \cosh(t) \sinh(t) + j}{|\sinh(t)|^2 + |\cosh(t)|^2} = \\ &= \frac{d}{dt}|_0 \left(i \tanh(2t) + \frac{j}{\cosh(2t)} \right) = 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\pi_e(i(X + Y)) &= \frac{d}{dt}|_0 \pi \circ e^{ti(X+Y)} = \frac{d}{dt}|_0 \pi \left(\begin{pmatrix} \cos(t) & i \sin(t) \\ i \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{d}{dt}|_0 \frac{j}{|\cos(t)|^2 + |\sin(t)|^2} = \frac{d}{dt}|_0 \frac{j}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\pi_e(X + Y) &= \frac{d}{dt}|_0 \pi \circ e^{t(X+Y)} = \frac{d}{dt}|_0 \pi \left(\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{d}{dt}|_0 \frac{2 \cosh(t) \sinh(t) + j}{|\sinh(t)|^2 + |\cosh(t)|^2} = \\ &= \frac{d}{dt}|_0 \left(\tanh(2t) + \frac{j}{\cosh(2t)} \right) = 2 \end{aligned}$$

wobei wir folgende Formeln im Verlauf der Rechnungen benutzen:

$$\begin{aligned} \sinh(x) \cosh(y) &= \frac{1}{2} \sinh(x + y) + \frac{1}{2} \sinh(x - y) \\ \sin(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} \sin(x + y) - \frac{1}{2} \sin(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Man bekommt damit auch bestätigt, dass $\mathfrak{su}(2)$ der vertikale Untervektorraum ist. Zusammengefasst schreibt sich die Abbildung als

$$\begin{aligned} Y + iY' &= (Y_1 + iY'_1) \frac{\partial}{\partial x} + (Y_2 + iY'_2) \frac{\partial}{\partial y} + (Y_3 + iY'_3) \frac{\partial}{\partial r} \mapsto \\ &= -J \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_3 & Y_1 + iY_2 \\ Y_1 - iY_2 & -Y_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y'_3 & Y'_1 + iY'_2 \\ Y'_1 - iY'_2 & -Y'_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -iY_3 + Y'_3 & (-iY_1 + Y_2) + (Y'_1 + iY'_2) \\ (-iY_1 - Y_2) + (Y'_1 - iY'_2) & iY_3 - Y'_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit reellen Koeffizienten $Y_i, Y'_j \in \mathbb{R} \forall i, j = 1, 2, 3$.

Lemma - Identifikation 2. *Es gibt einen weiteren linearen Isomorphismus, zwischen dem Raum der symmetrischen Tensoren $s^2(T_x^*M)$ und einem Untervektorraum von $\bigwedge^{(1,1)}(T_T(G^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R},J})_{,i}^{(1,0)}$ (für jeden, fest gehaltenen Punkt $T \in G^{\mathbb{C}}$ mit $\pi(T) = x \in M$ konstruierbar)*

$$(3.17) \quad \begin{aligned} s &= s_{ij} dx^i \otimes dx^j \mapsto \omega : Q^\omega(Z_T) := q^s(Y) + q^s(Y') \\ s : q^s(Y) &:= Q^\omega(Y) \leftarrow \omega = \frac{i}{2} h_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \end{aligned}$$

mit assoziierten quadratischen Formen $q^s(Y) := s(Y, Y)$, und $Q^\omega(Z_T) := \omega(Z_T, \bar{Z}_T)$, zu einer symmetrischen Bilinearform s bzw. alternierenden Sesquilinearform ω . z^i sind dabei beliebige, komplexe Koordinaten auf $G^{\mathbb{C}}$, um $T \in G^{\mathbb{C}}$ herum, x^i die globalen Koordinaten auf M .

Beweis. Es handelt sich um ein linear algebraisches Problem. Ich verweise daher getrost auf das torische Beispiel weiter unten. Beachte, dass wir nicht auf den darunterliegenden reellen Vektorraum $T_T(G^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ zurückgreifen, auf dem die alternierende Form nach eventuellem Basiswechsel trivial operierte. Der Ausdruck $Q^\omega(Y)$ setzt natürlich Identifikationslemma 1 voraus. \square

Die Rolle der komplexen Koordinaten auf $G^{\mathbb{C}}$ generell und ihre Beziehung zu den Koordinaten auf M , zeigt die folgende

Bemerkung 3.1. Sei $\phi := u \circ \pi$ eine G -invariante Funktion auf $G^{\mathbb{C}}$, mit den Koordinaten x^i auf M und komplexen Koordinaten z^i auf $G^{\mathbb{C}}$ um T . Dann folgt mit der Kettenregel

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \partial \bar{\partial} \phi &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}^l} + \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \right) dz^k \wedge d\bar{z}^l \\ &= u_{ij} \partial x^i \wedge \partial x^j + u_k \partial \bar{\partial} x^k \end{aligned}$$

Die reellen Koordinatenfunktionen $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)$ sind glatt. Aus der Formel (3.18) ergibt sich für die n -te äußere Potenz weiter

$$(3.19) \quad (\partial \bar{\partial} \phi)^n = A(x, u, Du, D^2u) dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G\text{-r-invar}}$$

wobei A ein a priori nicht näher bekannter reeller Differentialoperator zweiter Ordnung ist, der auf die (beliebig oft) differenzierbare Funktion $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ angewandt wird, und $dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G\text{-r-invar}}$ eine vorerst beliebige G -rechtsinvariante Volumenform auf $G^{\mathbb{C}}$ bezeichnet. Es wird für die Ausformung des Differentialoperators A entscheidend darauf ankommen, welche Volumenform hier benutzt wird.

Beispiel 3.3. Betrachte den abelschen, torischen Fall mit $G = (S^1)^n$. Explizit ist

$$Q^\omega(Z_T) = q^s(Y) + q^s(Y') = \sum_{i,j=1}^n s_{ij}(Y^i Y^j + Y'^i Y'^j)$$

Setze $H := h - i\omega$ als die korrespondierende hermitesche Form mit assoziierter quadratischer Form $Q^H(Z_T) := H(Z_T, Z_T)$ an, und bemerke dass Q^ω auch reellwertig ist, weil die schiefsymmetrische Form ω reell ist (außerdem ist unter Verwendung von zugrundeliegenden reellen Koordinaten ω nach Diagonalisierung gerade $dx^i \wedge dy^i = \frac{i}{2} dz^i \wedge d\bar{z}^i$). Die Zerlegung einer hermiteschen Form schreibt sich (in offensichtlicher Notation wie in [B]) als $h_{ij} dw^i \otimes d\bar{w}^j = \frac{1}{2} h_{ij} dw^i \odot d\bar{w}^j - i \frac{i}{2} h_{ij} dw^i \wedge d\bar{w}^j$ bezüglich der komplexen Koordinaten w^i .

Wenn s bekannt ist, so erhält man H durch Polarisation von Q^H

$$\begin{aligned} H(Z_1, Z_2) &= \frac{1}{4}(Q^H(Z_1 + Z_2) - Q^H(Z_1 - Z_2) + \\ &\quad + iQ^H(Z_1 + iZ_2) - iQ^H(Z_1 - iZ_2)) = \\ &= \frac{2}{4i}[q^s(Y_1 + Y_2) + q^s(Y'_1 + Y'_2) - q^s(Y_1 - Y_2) - q^s(Y'_1 - Y'_2) + \\ &\quad + i(q^s(Y_1 - Y'_2) + q^s(Y'_1 + Y_2)) - i(q^s(Y_1 + Y'_2) + q^s(Y'_1 - Y_2))] = \\ &= \frac{2}{i}(s(Y_1, Y_2) + s(Y'_1, Y'_2) - is(Y_1, Y'_2) + is(Y'_1, Y_2)) \end{aligned}$$

wegen

$$Q^H\left(\frac{\partial}{\partial w^j}\right) = \frac{2}{i}Q^\omega\left(\frac{\partial}{\partial w^j}\right), \quad \forall j = 1 \dots n$$

Die Einführung von affinen logarithmischen Koordinaten $w^i = x^i + i\vartheta^i$ in $(\mathbb{C}^*)^n \cong \mathbb{R}^n \times (S^1)^n$, wobei $x^i = \ln |z^i|^2$ ist, liefert die Schreibweise als

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}H &= s_{ij} dx^i \otimes dx^j + s_{kl} d\vartheta^k \otimes d\vartheta^l - is_{il} dx^i \otimes d\vartheta^l + is_{kj} d\vartheta^k \otimes dx^j = \\ &= s_{ij}(dx^i \otimes dx^j + d\vartheta^i \otimes d\vartheta^j - idx^i \otimes d\vartheta^j + id\vartheta^i \otimes dx^j) = \\ &= s_{ij} dw^i \otimes d\bar{w}^j \end{aligned}$$

so dass die korrespondierende Matrix bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial \vartheta^i} \simeq i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$ (bis auf $\frac{i}{2}$) so aussieht:

$$\begin{pmatrix} (s_{ij}) & -i(s_{il}) \\ i(s_{kj}) & (s_{kl}) \end{pmatrix}$$

Der reelle Anteil davon ist

$$s_{ij} dx^i \otimes dx^j + s_{kl} d\vartheta^k \otimes d\vartheta^l$$

mit zugehöriger Matrix

$$\begin{pmatrix} s_{ij} & 0 \\ 0 & s_{kl} \end{pmatrix}$$

und der imaginäre Teil davon ist:

$$-s_{il} dx^i \otimes d\vartheta^l + s_{kj} d\vartheta^k \otimes dx^j$$

somit (bis auf Faktor $\frac{i}{2}$)

$$\omega = -\frac{1}{2}\Im(H) = \frac{1}{2}s_{ij}dx^i \wedge d\vartheta^j = \frac{i}{2}s_{ij}dw^i \wedge d\bar{w}^j$$

Dies beschreibt in der Korrespondenz (3.17) die ω definierende, quadratische Form Q^ω , vom reellen Gesichtspunkt $q_{|T_x M}^s + q_{|T_x M}^s$ aus. Dies muss jedoch noch in die komplexen Koordinaten umgerechnet werden.

Umgekehrt sei nun ω bekannt, aus der Teilmenge der Formen, die eine Zerlegung von Q^ω gestatten, unter Benutzung der Identifikation 1, wie in (3.17) für Q^ω gefordert. Dann schränkt man Q^ω auf $T_x M \leq T_x M^{\mathbb{C}}$ ein, und setzt nur komplexe Vektoren vom Typ $(1, 0)$ in Q^ω ein, die unter der Identifikation 1 von Tangentialvektoren vorher einem Y entsprachen, also aus einem n -dimensionalen reellen Vektorraum stammen. Für verschiedene Y kann man durch Polarisierung die symmetrische Bilinearform s aus $Q^\omega(Y) = q^s(Y)$ bestimmen.

Bemerkung 3.2. Dies liefert genau das, was wir von der expliziten Berechnung von $\partial\bar{\partial}\phi$ und der Verarbeitung in der Gleichungsfindung im torischen Fall erwarten. Es kann auch durch Benutzung von affinen logarithmischen Koordinaten beschrieben werden.

$$s_{ij}dx^i \otimes dx^j \longleftrightarrow s_{ij}dw^i \wedge d\bar{w}^j$$

gilt sogar für Tensorfelder $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \otimes dx^j$ mit $\partial\bar{\partial}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial w^i \partial \bar{w}^j} dw^i \wedge d\bar{w}^j$, wobei ϕ $(S^1)^n$ -invariant ist, und wir den Faktor $\frac{i}{2}$ bei Formen ω weglassen. Denn die Kettenregel für $\partial\bar{\partial}\phi$ aus (3.18) führt auf:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} &= u_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}^l} = u_{ij} \frac{1}{z^i \bar{z}^j} \\ \implies \det \left(\frac{\partial^2}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \right) &= \frac{1}{|z^1|^2 \dots |z^n|^2} \det(u_{ij}) \end{aligned}$$

und der Vorfaktor der Determinante wird bei Aufstellung der Einsteingleichung verschwinden, da $-\partial\bar{\partial}\ln(\cdot)$ angewendet wird. Vgl. [F],[WZ],[M]. Solch ein Vorfaktor entsteht ganz allgemein, sobald man Koordinaten x gefunden hat, für die $\partial\bar{\partial}x^k = 0, \forall k = 1 \dots n$ gilt:

$$\begin{aligned} \det \left(u_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}^l} \right) &= \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^k} u_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}^l} \right) = \\ &= \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^k} \right) \det(u_{ij}) \det \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}^l} \right) = \det(u_{ij}) \left| \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^k} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

Ob er unter $\partial\bar{\partial}\ln(\cdot)$ verschwindet, ist eine Frage der Holomorphie an $\frac{\partial x^i}{\partial z^k}$. Ferner kann H auch durch natürliche komplex-lineare Fortsetzung von s auf TM nach $TM^{\mathbb{C}}$ punktweise erzeugt werden.

Beispiel 3.4. Sei wieder $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ mit $M = \mathbb{H}^3$. Dann findet die Identifikation wie im torischen Fall statt, da es sich rein um linear algebraische Abbildungen handelt.

Wir werden sehen, dass im allgemeinen Fall, wenn G nichtabelsch ist, ein weiterer Term auf der rechten Seite auftritt, der den Kommutator der Liealgebra involviert. Dies kommt aber nur unter der dritten, noch folgenden Identifikation zum Tragen, wo nicht nur Tensoren

in einem festen Punkt, als gäbe es nichts außen herum, betrachtet werden, sondern Tensorfelder auf einer Mannigfaltigkeit. Darauf nimmt auch das nächste Lemma Bezug, das besagt, dass das Identifikationsverfahren, nicht wie im torischen Fall, nur aufgrund geschickter Koordinatenwahl auf $G^{\mathbb{C}}$ vonstattengehen kann.

Lemma 3.1. *Sei $\Psi : G^{\mathbb{C}} \rightarrow M \times G$ der Diffeomorphismus aus (3.3). Im nichtkommutativen Fall gibt es keinen komplexen Atlas auf $G^{\mathbb{C}}$, mit lokalen Koordinaten $w^j = x^j \circ pr_M \circ \Psi + i\vartheta^j \circ pr_G \circ \Psi$ in einer Umgebung $V \subseteq G^{\mathbb{C}}$, mit der Eigenschaft, dass:*

1. (x^1, \dots, x^n) globale Koordinaten auf M sind,
2. $(\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$ lokale Koordinaten in $V_G \subseteq G$ eines differenzierbaren Atlas auf G sind, und V_G vom gewählten V von oben abhängt.

Solch ein Atlas existiert

\iff

für jeden nichtleeren Kartenschnitt $V \cap V' \subseteq G^{\mathbb{C}}$, wo man w^i bzw. w'^i als komplexe Koordinaten vor sich hat, besteht der Kartenwechsel aus der Vorschrift $\vartheta'^j = \vartheta^j + \text{Konstante}$, für $w'^j = x^j \circ pr_M \circ \Psi + i\vartheta'^j \circ pr_G \circ \Psi$.

Beweis. Wähle einen Punkt $T \in V \cap V'$ im Kartenüberlapp, mit $\Psi(T) = (p, u)$. Dann betrachte dort einen Koordinatenwechsel.

$$\begin{aligned} w^i((w^1, \dots, w^n)(T)) &= (x^i \circ pr_M + i\vartheta^i \circ pr_G)((w^1, \dots, w^n)(T)) = \\ &= x^i((x^1, \dots, x^n)(T)) + i\vartheta^i((\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)(T)) \end{aligned}$$

Die komplexen Funktionen $w'^i(w^1, \dots, w^n)$ sind holomorph, wenn

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}^j} w'^i = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

gilt, also die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \vartheta^i}{\partial \vartheta^j} \quad \frac{\partial x^i}{\partial \vartheta^j} = -\frac{\partial \vartheta^i}{\partial x^j}$$

Weil x^i global definiert sind, gilt $x'^i = x^i$, so dass $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$ und $\frac{\partial x'^i}{\partial \vartheta^j} = 0, \forall j$. Daraus folgt $\frac{\partial \vartheta'^i}{\partial \vartheta^j} = \delta_{ij}$ somit $\vartheta'^i = \vartheta^i + \text{Konstante}$. Die andere Richtung ergibt sich trivial. Wähle auf nichtabelschem G die kanonischen logarithmischen Koordinaten, so wird klar, dass Koordinatenwechsel nicht die Addition von Konstanten sein können. \square

Korollar 3.1. Falls die Bedingung aus Lemma 3.1 erfüllt ist, und w^i derartige komplexe Koordinaten auf $G^{\mathbb{C}}$ sind, gilt:

1. $dw^1 \wedge dw^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge dw^{\bar{n}}$ ist Volumenform auf $G^{\mathbb{C}}$, und $d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ ist Volumenform auf G .
2. $dw^1 \wedge dw^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge dw^{\bar{n}}$ ist G -rechtsinvariante Volumenform $\iff d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ eine rechtsinvariante Volumenform von G ist.

Beweis. 1. Klar, da unter Koordinatenwechsel invariant. 2. Beobachte, dass die n -Form $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ natürlicherweise invariant unter G ist (unter der Rechtswirkung auf $G^{\mathbb{C}}$). Zerlege dann auf $G^{\mathbb{C}}$ die $2n$ -Form

$$dw^1 \wedge \dots \wedge dw^{\bar{n}} = (-2i)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$$

□

Diese Identifikationen 0. – 2. führen zusammen auf eine Korrespondenz von auf (3.17) aufbauenden speziellen Tensorfeldern. Es handelt sich dabei um das symmetrische 2-Tensorfeld $s := \nabla^2 u$ und die $(1, 1)$ -Form $\omega := \partial\bar{\partial}\phi$, für einander via (3.12) korrespondierende glatte Funktionen $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $\phi : G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma - Identifikation 3. *Es besteht eine bijektive Korrespondenz von Tensorfeldern*

$$(3.20) \quad s \longleftrightarrow \omega$$

auf M bzw. $G^{\mathbb{C}}$, die durch

$$(3.21) \quad \begin{aligned} s \mapsto \omega &: Q^\omega(v) := q^s(Y) + q^s(Y') + 2d\pi_T(J[U, V]_{\mathfrak{g}, T})u \\ s : q^s &:= Q_{TM}^\omega \leftarrow \omega \end{aligned}$$

gegeben wird, mit quadratischen Formen Q^ω, q^s , assoziiert zur schiefssymmetrischen Sesquilinearform $\omega : Q^\omega(v) := \omega(v, \bar{v})$ für $v \in T_T(G^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}, J}^{(1,0)}$, und zur symmetrischen Bilinearform $s : s(Y, Y) := q^s(Y)$ mit $Y, Y' \in T_x M$, wobei $x \in M$ mit $\pi(T) = x$ für ein $T \in G^{\mathbb{C}}$ gilt. Die linksinvarianten Vektorfelder $U, V \in \mathfrak{g}$ sind durch das komplexe linksinvariante Vektorfeld $Z = d\mu_T^{-1}v \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bestimmt:

$$\begin{aligned} U &: = v\Re(Z), & \text{vertikaler Teil} \\ V &: = -J(h\Re(Z)), & -J \text{ vom horizontalen Teil} \end{aligned}$$

Die Polarisationsformeln liefern punktweise die alternierende Form $\partial\bar{\partial}\phi$ auf $G^{\mathbb{C}}$ und das symmetrische Bilinearformenfeld $\nabla^2 u$ auf M .

Bemerkung 3.3. Die zweite Zeile in (3.21) bedeutet: Um $q^s(Y)$ in $x \in M$ für einen Vektor Y zu berechnen, wähle den entsprechenden Tangentialvektor $v \in T_T(G^{\mathbb{C}})_{hol}$ (nach (3.13)) in einem $T \in G^{\mathbb{C}}$, das $\pi(T) = x$ erfüllt, was eine freie Wahl von $U \in TGT^{-1}$ für festes T zur Folge hat, so dass $q^s(Y) = Q^\omega(v)$ gilt. Es gilt hierbei die exakte Gleichheit von reellen Werten. In der ersten Zeile werden dagegen Werte für ω bzw. Q^ω auf dem ganzen $TM^{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{(3.13)} TG_{hol}^{\mathbb{C}}$ konstruiert, wobei der dritte Term einen auf u angewandten Tangentialvektor (Derivation) in $x \in M$ darstellt.

Beweis. Man benutzt dafür verschiedene Tatsachen aus der Differentialgeometrie, wie es in [L] ausgeführt ist, wir geben den Beweis im Folgenden für den Leser wieder. Zuerst einmal gilt für jede Funktion Φ auf $G^{\mathbb{C}}$, und komplexe Vektorfelder Z, W auf $G^{\mathbb{C}}$:

$$(3.22) \quad \partial\bar{\partial}\phi(W, Z) = W \cdot \bar{\partial}\phi(Z) - Z \cdot \bar{\partial}\phi(W) - \bar{\partial}([W, Z])$$

Unter den zusätzlichen Vorgaben, dass ϕ G -invariant ist, und $X := U + JV, Z := X - iJX$ mit $U, V \in \mathfrak{g}$ linksinvariante Vektorfelder auf G sind, erzielt man die Formel

$$(3.23) \quad \partial\bar{\partial}\phi(Z, \bar{Z}) = (JU)^2\phi + (JV)^2\phi + 2(J[U, V])\phi$$

Dazu betrachte den Term

$$[Z, \bar{Z}] = [X - iJX, X + iJX] = 2i[X, JX]$$

wie man direkt ausrechnet, und weiter wird

$$[X, JX] = \mathcal{L}_X(JX) = J[X, X] + \mathcal{L}_X J \cdot X = 0$$

da das komplexe linksinvariante Vektorfeld Z den Typ $(1, 0)$ auf $G^{\mathbb{C}}$ besitzt, weshalb es ein holomorphes Vektorfeld ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn das reelle Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ automorph ist, d.h. $\mathcal{L}_X = 0$. Als nächstes bedingt die Vorgabe der G -Invarianz an ϕ , dass gilt:

$$(U\phi)(T) = D\phi_T(U_T) = \frac{d}{dt}\phi(T \cdot \exp(tU))|_{t=0} = 0 \quad \forall U \in \mathfrak{g}, T \in G^{\mathbb{C}}$$

Zusammengenommen folgern wir nun mit der Rechnung

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\phi(Z, \bar{Z}) &= Z\bar{Z}\phi - \bar{\partial}\phi([Z, \bar{Z}]) = Z\bar{Z}\phi = \\ &= (X - iJX)(X + iJX)\phi = X^2\phi + (JX)^2\phi + i[X, JX]\phi = \\ &= X^2\phi + (JX)^2\phi = (U + JV)^2\phi + (-V + JU)^2\phi = \\ &= (U^2 + 2U \cdot JV + (JV)^2)\phi + (V^2 - 2V \cdot JU + (JU)^2)\phi = \\ &= (JU)^2\phi + (JV)^2\phi + U(JV)\phi - V(JU)\phi = \\ &= (JU)^2\phi + (JV)^2\phi + [U, JV]\phi - [V, JU]\phi \end{aligned}$$

als wichtiges Zwischenergebnis die Gleichung (3.23). Für den nächsten Zwischenschritt erinnern wir uns an folgenden Fakt: Mit einer Geodäte γ in M , die von $x \in M$ ausgeht, mit Geschwindigkeitsvektor Y in x , kann man die Riemann'sche Hessesche wie folgt berechnen

$$(3.24) \quad \nabla^2 u(x)(Y, Y) = \left(\frac{d^2}{dt^2} u \circ \gamma(t) \right)_{|t=0}$$

Der Beweis dazu wird in Lemma 3.4 gegeben. Zur Erklärung der Notation hierbei sei erwähnt, dass ∇^2 die zweite kovariante Ableitung auf einer glatten Funktion u ausdrückt, in den koordinateninduzierten Basistangentenvektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1 \dots n$ auf M lautet diese

$$(3.25) \quad (\nabla^2 u)_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} u$$

Als dritten Zwischenschritt, weil das Tangentialbündel von $G^{\mathbb{C}}$ trivial ist, haben wir einen Bündelisomorphismus $TG^{\mathbb{C}} \cong G^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ vorliegen, so dass wir für jeden Vektor v in $T \in G^{\mathbb{C}}$ ein eindeutig bestimmtes linksinvariantes Vektorfeld $Z \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ finden, so dass $Z_T = v$ wahr ist, die Umkehrung dazu ist trivial.

Weiter geht es in folgender Weise: Führe die Gleichung (3.23) auf den Punkt $T \in G^{\mathbb{C}}$ zurück

$$\begin{aligned} (3.26) \quad \partial\bar{\partial}\phi(T)(Z_T, \bar{Z}_T) &= \\ &= (JU)_T^2\phi + (JV)_T^2\phi + 2(J[U, V])_T\phi = \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(T \exp(tJU)) \right)_{|t=0} + \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(T \exp(tJV)) \right)_{|t=0} + \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \phi(T \exp(tJ[U, V])) \right)_{|t=0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{d^2}{dt^2} u \circ \pi(T \exp(tJU)) \right) \Big|_{t=0} + \left(\frac{d^2}{dt^2} u \circ \pi(T \exp(tJV)) \right) \Big|_{t=0} + \\
 &+ 2 \cdot \left(\frac{d}{dt} u \circ \pi(T \exp(tJ[U, V])) \right) \Big|_{t=0}
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $t \mapsto \pi(T \exp(tJW))$ mit $JW \in \{JU, JV, J[U, V]\} \subset \mathfrak{Jg}, t \in \mathbb{R}$ sind Geodäten in M , die in $x = \pi(T)$ mit Tangentenvektor $d\pi_T JW_T$ starten. Beobachte, dass man für jedes $W \in \mathfrak{g}$ Folgendes weiß:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} \phi(T \exp(tJW)) \Big|_0 &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{d}{dt} \phi(T \exp(tJW)) = \\
 &= \frac{d}{dt} \Big|_0 D\phi_{T \exp(tJW)}(JW_T) = (JW)_T^2 \phi
 \end{aligned}$$

Wir können jetzt Gleichung (3.24) auf die ersten beiden Ausdrücke des Ergebnisses in (3.26) anwenden, und den Dritten nur umformen, um insgesamt

$$(3.27) \quad \partial\bar{\partial}\phi(T)(Z_T, \bar{Z}_T) = \nabla^2 u(x)(Y_x, Y_x) + \nabla^2 u(x)(Y'_x, Y'_x) + 2 \cdot d\pi_T(J[U, V])_T u$$

mit $Y_x := d\pi_T(JU)_T, Y'_x := d\pi_T(JV)_T$ zu erhalten. Beachte auch, dass es für eine andere Wahl von $T' \neq T$, aber noch immer mit $\pi(T') = x$, ein $U \in G$ gibt, so dass $T' = TU$ gilt, was im Grunde genommen keinen Unterschied von (3.27) im dritten Ausdruck macht, wegen der Invarianz unter G , und die ersten beiden Terme bleiben sowieso unverändert. Damit haben wir die Identifikation (3.21) erlangt, indem man $\partial\bar{\partial}\phi$ zu $\nabla^2 u$ assoziiert, genau dann, wenn (3.12),(3.13),(3.20) in jedem Punkt $x \in M$ und $T \in G^{\mathbb{C}}$ mit $\pi(T) = x$ gilt, und beide Tensoren lassen sich gegenseitig auseinander bestimmen. \square

Korollar 3.2. Seien $Z_T \leftrightarrow Y_Z + iY'_Z, W_T \leftrightarrow Y_W + iY'_W$ unter der Identifikation aus Gleichung (3.13) zueinander assoziiert. Wir berechnen die Polarisation der quadratischen Form $Q^\omega(Z_T) = \omega(Z_T, \bar{Z}_T)$, und gehen mit Gleichung (3.27) nach M über.

$$\begin{aligned}
 (3.28) \quad \partial\bar{\partial}\phi(Z_T, \bar{W}_T) &= \frac{1}{4}(Q^\omega(Z_T + W_T) - Q^\omega(Z_T - W_T)) + \\
 &+ iQ^\omega(Z_T + iW_T) - iQ^\omega(Z_T - iW_T) = \\
 &= \frac{1}{4}(q^s(Y_Z + Y_W) + q^s(Y'_Z + Y'_W)) + \\
 &+ 2d\pi(J[-Jd\pi^{-1}(Y_Z + Y_W), -Jd\pi^{-1}(Y'_Z + Y'_W)])u - \\
 &- \frac{1}{4}(q^s(Y_Z - Y_W) + q^s(Y'_Z - Y'_W)) + \\
 &+ 2d\pi(J[-Jd\pi^{-1}(Y_Z - Y_W), -Jd\pi^{-1}(Y'_Z - Y'_W)])u + \\
 &+ \frac{i}{4}(q^s(Y_Z - Y'_W) + q^s(Y'_Z + Y_W)) + \\
 &+ 2d\pi(J[-Jd\pi^{-1}(Y_Z - Y'_W), -Jd\pi^{-1}(Y'_Z + Y_W)])u - \\
 &- \frac{i}{4}(q^s(Y_Z + Y'_W) + q^s(Y'_Z - Y_W)) + \\
 &+ 2d\pi(J[-Jd\pi^{-1}(Y_Z + Y'_W), -Jd\pi^{-1}(Y'_Z - Y_W)])u
 \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Bedingung $Y' = 0$ an, um ganz nach M zu gelangen. Der obige Ausdruck reduziert sich auf

$$s(Y_Z, Y_W) + id\pi(J[-Jd\pi^{-1}(Y_Z), -Jd\pi^{-1}(Y_W)])u$$

so dass die Matrix bezüglich der Basis $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ wie folgt aussieht:

$$\left(s_{ij} + id\pi(J[-Jd\pi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i}), -Jd\pi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^j})])u \right)$$

Beispiel 3.5. Im torischen Fall haben wir gerade das Identifikationsverfahren 2 in fest gehaltenen Punkten $T \in G^{\mathbb{C}}$, und $\pi(T) = x$ aufgezogen, dieses können wir direkt auf die Identifikation 3 hier übertragen, mit variierendem Basispunkt zwar, aber es entstehen keine Zusatzterme, da $\mathfrak{g} \cong i\mathbb{R}^n$ abelsch ist und $M = \mathbb{R}^n$ flach ist. Das zweite Beispiel, das wir stets noch verfolgen, ist aussagekräftiger, siehe das folgende Beispiel.

Die Identifikation 3 reduziert sich ganz allgemein auf die Identifikation 2, wenn man sie nur in zwei festgehaltenen Punkten ablaufen lässt, denn man findet sich im linear algebraischen Fall wieder.

Beispiel 3.6. Hier ist also $G = \mathrm{SU}(2)$, $M = \mathbb{H}^3$. Sei $s = \nabla^2 u$ zuerst vorgegeben. Für jedes $v = d\mu_T Z$, mit $Z_e \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, sei $Z_e = c_1 X + c_2 H + c_3 Y = \begin{pmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & -c_2 \end{pmatrix}$, mit $c_j = c_j^1 + ic_j^2 \in \mathbb{C}$ in $e \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ das neutrale Element. Zerlege Z_e in seine Bestandteile aus der direkten Summe $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathit{herm}_2^{>0,1}(\mathbb{C})$:

$$Z_e = \begin{pmatrix} ic_2^2 & \frac{1}{2}(c_1 - \bar{c}_3) \\ \frac{1}{2}(c_3 - \bar{c}_1) & -ic_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2^1 & \frac{1}{2}(c_1 + \bar{c}_3) \\ \frac{1}{2}(c_3 + \bar{c}_1) & -c_2^1 \end{pmatrix}$$

Vergleiche dieses mit dem Ergebnis in (3.13), so dass die Vektoren Y, Y' , die zu Z korrespondieren, durch die Komponenten

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}(-c_3^2 - c_1^2), Y_2 = \frac{1}{2}(c_1^1 - c_3^1), Y_3 = -c_2^2 \\ Y_1' &= \frac{1}{2}(c_1^1 + c_3^1), Y_2' = \frac{1}{2}(c_1^2 - c_3^2), Y_3' = c_2^1 \end{aligned}$$

bezüglich der Basis $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial r})$ gegeben sind. In $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, der Einfachheit halber, ist ω_e bestimmt über die Polarisierung von

$$Q^\omega(Z_e) = q^s(Y) + q^s(Y') + 2d\pi_e(J[U, V])u$$

Man erhält unter Berücksichtigung, dass Z_e schon ein Vektor vom Typ $(1, 0)$ ist, und man die \Re Funktion im Folgenden vernachlässigen kann

$$\begin{aligned} U &:= pr_{\mathfrak{su}(2)}(Z_e) = c_2^2 \cdot iH + \frac{1}{2}(c_1^1 - c_3^1) \cdot (X - Y) + \frac{1}{2}(c_1^2 + c_3^2) \cdot i(X + Y) = \\ &= -Y_3 \cdot iH + Y_2 \cdot (X - Y) + (-Y_1) \cdot i(X + Y) \\ V &:= -Jpr_{\mathit{herm}_2^{>0,1}(\mathbb{C})}(Z) = -J[c_2^1 \cdot H + \frac{1}{2}(c_1^2 - c_3^2) \cdot i(X - Y) + \\ &+ \frac{1}{2}(c_1^1 + c_3^1) \cdot (X + Y)] = -Y_3' \cdot iH + Y_2' \cdot (X - Y) - Y_1' \cdot i(X + Y) \end{aligned}$$

somit

$$[U, V]_{\text{su}(2)} = 2(Y_1Y_2' - Y_2Y_1')iH + 2(Y_1Y_3' - Y_3Y_1')(X - Y) + 2(Y_2Y_3' - Y_3Y_2')i(X + Y)$$

und im Hinblick auf Beispiel 3.2 und die Berechnungen dort, folgert man

$$2d\pi_e(J[U, V]) = 4(Y_1Y_2' - Y_2Y_1')(-2j) + 4(Y_1Y_3' - Y_3Y_1')(2i) + 4(Y_2Y_3' - Y_3Y_2')(-2)$$

was

$$-8(Y_1Y_2' - Y_2Y_1')\frac{\partial}{\partial r} + 8(Y_1Y_3' - Y_3Y_1')\frac{\partial}{\partial y} - 8(Y_2Y_3' - Y_3Y_2')\frac{\partial}{\partial x}$$

entspricht. Dies liefert den ganzen Ausdruck für $Q^\omega(Z_e)$:

$$(3.29) \quad \begin{aligned} Q^\omega(Z) &= q^s(Y) + q^s(Y') + \\ &+ 8 \left(-(Y_2Y_3' - Y_3Y_2')\frac{\partial}{\partial x} + (Y_1Y_3' - Y_3Y_1')\frac{\partial}{\partial y} - (Y_1Y_2' - Y_2Y_1')\frac{\partial}{\partial r} \right) = \\ &= q^s(Y) + q^s(Y') - 8 \left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ Y_3' \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

wobei wir aus formalen Gründen das Vektorprodukt und Skalarprodukt in \mathbb{R}^3 eingesetzt haben.

Sei umgekehrt ω gegeben, das sich aus der Polarisierung von Q^ω gewinnen lässt, und Q^ω ist ein Ausdruck wie er in (3.21) auftaucht. Damit erhält man die symmetrische Bilinearform $s = \nabla^2 u$ aus der Polarisierung von q^s , und q^s ist einfach Q^ω auf $T\mathbb{H}^3$ eingeschränkt, d.h. $Y' = 0$ setzen, wobei der Term $q^s(Y')$ verschwindet, ebenso wie $2d\pi_T(J[U, V])u$, weil V nach der Identifikation 1 und oben berechneter Formel zu Y' korrespondiert. \square

Bemerkung 3.4. (Erklärung zum Identifikationsverfahren) Wie in Bemerkung 3.3 schon angedeutet wurde, wird ω aus der Polarisierung von Q^ω gewonnen, vgl. Identifikationslemma 3, und Q^ω wird als quadratische Form auf ganz $TG_{\text{hol}}^{\mathbb{C}}$ wirkend konstruiert. Die Vorfaktoren $\det(\phi_{k\bar{l}})$ von $(\partial\bar{\partial}\phi)^n$ (kartenabhängig) und $\det(u_{ij})$ bzgl. der kanonischen Koordinaten x auf M sind nicht identisch, da auf $G^{\mathbb{C}}$ sozusagen mehr Informationen vorhanden sind als auf M . Diese geht bei der Richtung nach M durch das Einschränken verloren. Es handelt sich dabei im nichtabelschen Fall um den dritten Term in (3.21), der ersatzlos mitsamt seiner lokalen, nichttensoriellen Informationen wegfällt. Dies führt zum Fehler, der bei dem Verfahren gemacht wird. Torisch geht nichts verloren, da es den dritten Term von Anfang an gar nicht gibt, und man $s = \nabla^2 u$ auf den Y' Vektoren übernehmen kann, von den Werten auf Vektoren Y , in den Benennungen von Identifikationslemma 1 für Y, Y' .

3.2.2 Aufstellung der reellen Monge-Ampère-Gleichung

Wir werden Theorem 3.1 zeigen. Die Kählerform ω erfülle die Gleichung (3.4) und sei invariant unter der Wirkung der maximalen kompakten Untergruppe G von $G^{\mathbb{C}}$. Unter Einschränkung

von ω auf die offene Bahn $U := G^{\mathbb{C}}.x_0 \xrightarrow{i_U} \mathbf{X}$, für ein festes $x_0 \in \mathbf{X}$, und anschließendem Rückzug mit der Abbildung, die der Operation auf dem Punkt x_0

$$\Phi_{x_0} : G^{\mathbb{C}} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}, \quad T \mapsto T.x_0$$

(von rechts) entspricht, induziert es eine exakte $(1,1)$ -Form auf $G^{\mathbb{C}}$, weil $G^{\mathbb{C}}$ eine Stein'sche Mannigfaltigkeit ist, und somit alle höheren Kohomologiegruppen verschwinden, und man das $\partial\bar{\partial}$ -Lemma (Lemma 3.2) für diesen Spezialfall anwenden kann. Wir erhalten

$$(3.30) \quad \Phi_{x_0}^* i_U^*(\omega) = \partial\bar{\partial}\tilde{\phi}$$

mit einer glatten reellen Funktion $\tilde{\phi}$, die unter G invariant ist. Daher finden wir eine andere G -invariante Funktion ϕ , indem wir auf $G^{\mathbb{C}}$ gleichsetzen

$$(\partial\bar{\partial}\tilde{\phi})^n = e^{-\phi}\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$$

Wir beziehen hierbei alle Volumenformen auf diese fixierte Volumenform $\psi^*(dV_M \wedge dV_G)$ auf $G^{\mathbb{C}}$, wobei dV_M das Riemann'sche Volumenelement zur Riemann'schen Metrik auf dem symmetrischen Raum M ist, und dV_G eine mindestens G -rechtsinvariante Volumenform auf G ist. Man kann aber einfach auch eine biinvariante Metrik auf der kompakten Liegruppe wählen, und dazu dV_G als Riemann'sches Volumenelement ansetzen. Auf der anderen Seite, nach den Identifikationen des letzten Abschnitts, korrespondiert $\partial\bar{\partial}\tilde{\phi}$ zu $\nabla^2\tilde{u}$ auf M , und dies ist symmetrisch und positiv definit auf M , nach [L], so dass es folgende Riemann'sche Volumenform auf M mit Koordinaten x in der globalen Karte auf M gibt

$$\sqrt{\det((\nabla^2\tilde{u})_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{\frac{\det((\nabla^2\tilde{u})_{ij})}{\det((g_{ij}^M))}} dVol_M$$

Schreibe für $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$ einen lokalen Ausdruck in komplexen Koordinaten in der Umgebung $V \subseteq G^{\mathbb{C}}$ hin, wie in Gleichung (3.5) mit einer lokalen Funktion $h^{(w)}$, wobei ausführlich

$$(3.31) \quad h^{(w)} = \left(\sqrt{\det(g_{ij}^M)} \circ \Psi \right) \left(\sqrt{\det(g_{ij}^G)} \circ \Psi \right) J^{(w,\vartheta)}$$

sein muss, und $J^{(w,\vartheta)}$ die lokale Transformationsfunktion von der $2n$ -Form $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ auf $M \times G$ nach $dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n$ auf $G^{\mathbb{C}}$ in den entsprechenden Umgebungen ist. Genauer kann man festhalten:

$$\begin{aligned} J^{(w,\vartheta)} &= \frac{\Psi^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n)}{dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n} = \\ &= \frac{d(x^1 \circ \Psi) \wedge \dots \wedge d(x^n \circ \Psi) \wedge d(\vartheta^1 \circ \Psi) \wedge \dots \wedge d(\vartheta^n \circ \Psi)}{dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial(\vartheta^i \circ \Psi)}{\partial w^{k_i}} dw^{k_i} + \frac{\partial(\vartheta^i \circ \Psi)}{\partial \bar{w}^{l_i}} d\bar{w}^{l_i} \right) \wedge \\ &\quad \wedge \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial(\vartheta^j \circ \Psi)}{\partial w^{k'_j}} dw^{k'_j} + \frac{\partial(\vartheta^j \circ \Psi)}{\partial \bar{w}^{l'_j}} d\bar{w}^{l'_j} \right) / (dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n) \end{aligned}$$

Gleichung (3.5) war:

$$\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G^{\text{G-r-invar.}}) = h^{(w)} dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n$$

Durch Anwendung von Cherns Riccikrümmungsformel

$$Ric(\omega) = -\partial\bar{\partial} \ln \det(g_{i\bar{j}}), \quad \text{für } \omega = g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$$

auf X , erhält man einen Ausdruck für die Krümmungsform auf dem kanonischen Linienbündel K_X , und zur Unterscheidung schreiben wir einen unteren Index X bzw. $G^{\mathbb{C}}$ an Ric , je nachdem wo man diese Formel anwendet, um die Krümmungsform zu bestimmen. Unter Ausnutzung der Tatsache

$$(3.32) \quad \Phi^* i_U^* Ric_X(\omega) = Ric_{G^{\mathbb{C}}}(\Phi^* i_U^* \omega)$$

folgt mit $Ric_{G^{\mathbb{C}}}(\Phi^* i_U^* \omega) = Ric_{G^{\mathbb{C}}}(\partial\bar{\partial}\tilde{\phi})$ die Formel für die Kähler-Einstein-Bedingung

$$(3.33) \quad \partial\bar{\partial}\phi - \partial\bar{\partial} \log(h^{(w)}) = \partial\bar{\partial}\tilde{\phi}$$

für exakte $(1, 1)$ -Formen auf $G^{\mathbb{C}}$, aus der Anwendung des Rückzugs $\Phi^* i_U^*$ auf beide Seiten der Kähler-Einstein-Bedingung (3.4). Als erste direkte Konsequenz von (3.33) erkennt man die G -Invarianz von

$$\partial\bar{\partial} \ln h^{(w)} = \partial\bar{\partial}(\phi - \tilde{\phi})$$

weil ϕ und $\tilde{\phi}$ beide selbst G -invariant unter der Rechtswirkung von G auf $G^{\mathbb{C}}$ sind, und weiterhin folgt die Existenz von $h \in C^\infty(M)$ in Gleichung (3.6), so dass $h \circ \Psi$ globale, G -invariante Funktion auf $G^{\mathbb{C}}$ wird. Im Allgemeinen ist sie nur bis auf Addition von Charakteren auf $G^{\mathbb{C}}$ und eine Konstante eindeutig bestimmt, wogegen im Fall dass $G^{\mathbb{C}}$ halbeinfach ist, sogar die Eindeutigkeit folgt, vgl. Bemerkung 3.8. In nichttorischen Fällen ist $h^{(w)}$ eine echt lokale Funktion und nichtkonstant, für beliebige komplexe Koordinaten (w^1, \dots, w^n) auf $G^{\mathbb{C}}$.

Bilde die n -te äußere Potenz der $(1, 1)$ -Formen auf beiden Seiten der Gleichung (3.33), und erhalte folgende Gleichheit von Volumenformen

$$(3.34) \quad (\partial\bar{\partial}\phi - \partial\bar{\partial} \ln h^{(w)})^n = e^{-\phi} \Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$$

Daraus leitet sich die wohlgermerkt lokale, komplexe Monge-Ampère-Gleichung für diese Situation auf $V \subseteq G^{\mathbb{C}}$ her:

$$(3.35) \quad \begin{cases} \det((\phi - \ln h^{(w)})_{i\bar{j}}) = e^{-\phi} h^{(w)} \\ (\phi_{i\bar{j}} - (\ln h^{(w)})_{i\bar{j}}) > 0 \end{cases}$$

wobei man auf beiden Seiten den gleichen Basisvektor $dw^1 \wedge \dots \wedge dw^{\bar{n}}$ zu lokalen Koordinaten w^1, \dots, w^n auf $G^{\mathbb{C}}$ vorfindet. Wir benutzen die Konvention, dass Indizes $k, (i, j), (i, \bar{j})$ die rechts unterhalb einer differenzierbaren Funktion stehen, stets die diesbezüglichen partiellen Ableitungen dieser Funktion bedeuten, im passenden jeweiligen Kontext in den vorgegebenen reellen oder komplexen (lokalen) Koordinaten. Es dürfte keine Schwierigkeiten bereiten. Beachte, dass Gleichung (3.35) nur lokale Gültigkeit hat, von der Wahl von Koordinaten auf $G^{\mathbb{C}}$ abhängt, und i.A. nicht G -invariant ist. Die Funktion ϕ ist jedoch nach Vorgabe G -invariant, also ist

$$(3.36) \quad \frac{\det((\phi - \ln h^{(w)})_{i\bar{j}})}{h^{(w)}} = e^{-\phi}$$

kartenunabhängiger Ausdruck und invariant unter G -Wirkung auf $G^{\mathbb{C}}$. Bis zu dieser komplexen Monge-Ampère-Gleichung ist die Kähler-Einstein-Bedingung noch korrekt ausgedrückt.

Wir übertragen die rechte Seite von Gleichung (3.34) als Erstes nach $M \times G$ (mit Hilfe des Rückzugs bezüglich Ψ^{-1}), und eliminieren nächstens $dVol_G$ auf der rechten Seite um nach M zu gelangen. Indem man auch auf der linken Seite diesen Weg der Übertragung wählt, kann man eine Gleichung aufstellen, die ebenfalls die Kähler-Einstein-Bedingung korrekt abbildet:

$$(3.37) \quad \frac{(\Psi^{-1})^*(\partial\bar{\partial}u' \circ \Psi)^n}{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dVol_G} = e^{-u' - \ln h'}$$

Diese ist jedoch mit einem i.A. unbekanntem Differentialoperator geschrieben, also nicht unbedingt von reellem Monge-Ampère-Typ. Will man jedoch diesen Typ gewaltsam erzwingen, so muss man das Identifikationsverfahren aus Identifikationslemma 3 ausführen, bei dem jedoch die Beziehung zur komplexen Gleichung soweit aufgegeben wird, dass sich Lösungen nicht übertragen lassen, vgl. Bemerkung 3.4. Das Vorgehen assoziiert nun die linke Seite $\partial\bar{\partial}(\phi - \ln h^{(w)})|_V$ von Gleichung (3.34), was gleich $\partial\bar{\partial}(\phi - \ln h \circ \Psi)|_V$ ist, und sich zu $\partial\bar{\partial}(\phi - \ln h \circ \Psi)$ auf ganz $G^{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt, in einem einzigen Schritt mit $\nabla^2(u - \ln h)$ auf M . Dies ist die Anwendung des Identifikationslemmas 3, insbesondere Gleichung (3.21). Bilde die korrespondierende Volumenform, auf Grundlage der globalen Koordinaten x . Die Ersetzung der lokalen Funktion $h^{(w)}$ durch eine globale, invariante Funktion $h \circ \psi$ auf $G^{\mathbb{C}}$ mit Hilfe der Gleichung (3.6), gestattet eine unmittelbare Übertragung zu h auf M . Schließlich erreichen wir

$$\sqrt{\det((\nabla^2(u - \ln h))_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = e^{-u} dVol_M$$

auf M , was eine Gleichsetzung von auf zwei unterschiedliche Weisen induzierten Volumenformen darstellt. Dies liefert, nachdem man Exponenten um Faktor zwei angepasst hat, um die Quadratwurzel loszuwerden, da das Riemann'sche Volumenelement seinen Koeffizienten unter einer Quadratwurzel hat, wogegen dies auf der rechten Seite nicht der Fall ist, weshalb hier Anpassungen vorzunehmen sind, die folgende Gleichung an die Koeffizienten

$$\frac{\det((\nabla^2(u - \ln h))_{ij})}{\det(g_{ij}^M)} = e^{-u}$$

Somit erhalten wir nach der Festsetzung in Theorem 3.1 von $u' := u - \ln h$ und $h' := \frac{h}{\det(g_{ij}^M)}$, die folgende reelle Monge-Ampère-Gleichung in (3.7)

$$(3.38) \quad \det((\nabla^2 u')_{ij}) = e^{-u' - \ln h'}$$

Jedoch ist die reelle Gleichung (3.7), wegen der Identifikation 3, wie in Bemerkung 3.4 beschrieben wurde, eine falsche Bedingung für eine KE-Metrik. Genauer sehen wir in Abschnitt 3.4 im Beispiel $G = \text{SU}(2)$, dass bekannte Potentiale für G -invariante KE-Metriken auf $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -fasthomogenen Varietäten X die Gleichung (3.7) nicht erfüllen.

Der Unterschied in der reellen Situation kann durch folgende Rechnung sichtbar gemacht werden :

$$(3.39) \quad \frac{(\partial\bar{\partial}\tilde{\phi})^n}{\Psi^*(\sqrt{\det((\nabla^2\tilde{u})_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)} := \Psi^*(l \cdot dVol_G)$$

Mit $\partial\bar{\partial}\tilde{\phi} = \partial\bar{\partial}\phi'$ und entsprechend $\nabla^2\tilde{u} = \nabla^2 u'$ bekommen wir

$$l = \frac{(\Psi^{-1})^*(\partial\bar{\partial}\phi')^n}{\det((\nabla^2 u')_{ij}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dVol_G}$$

als den Faktor, der den Unterschied ausmacht: Die eine Volumenform erhält man durch Weglassen von $dVol_G$, die Andere über das Identifikationsverfahren, das insgesamt $ldVol_G$ wegekürzt, so dass man dieses l auf der linken Seite wieder zurückmultiplizieren muss. Beobachte jedoch, dass l selbst ein partieller Differentialoperator ist, der auf die Funktion u' wirkt. Die gesamte linke Seite wird mit diesem Operator zu

$$\det((\nabla^2 u')_{ij}) \cdot l = \frac{(\Psi^{-1})^*(\partial\bar{\partial}u' \circ \Psi)^n}{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dVol_G}$$

was die folgende Gleichung (im Allgemeinen wohl nicht von reellen Monge-Ampère-Typ, vgl. (3.37)) liefert.

$$(3.40) \quad \frac{(\Psi^{-1})^*(\partial\bar{\partial}u' \circ \Psi)^n}{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dVol_G} = e^{-u' - \ln h'}$$

Bemerkung 3.5. Bei gleicher rechnerischer Behandlung beider Seiten der Gleichung (3.34) in obiger Herleitung, d.h. Quadrieren beider Seiten nach dem Identifikationsverfahren, erhält man statt (3.7) folgende Gleichung in denselben Bezeichnungen wie eben.

$$(3.41) \quad \det((\nabla^2 u')_{ij}) = e^{-2u' - \ln(hh')}$$

Bemerkung 3.6. Die Rückrichtung obiger Herleitung von (3.7) unter Benutzung der Identifikationen 0 - 3 läuft folgendermaßen ab. Sei u' eine Funktion, zu der $\phi' := u' \circ \pi$ nach (3.12) korrespondiert und die im Folgenden aufgelisteten Eigenschaften besitzt:

- i. u' erfüllt Gleichung (3.7)
- ii. ϕ' auf $G^{\mathbb{C}}$ ist plurisubharmonisch, d.h. für u' hat man auf jeden Fall $\nabla^2 u' > 0$ (geodätische Konvexitätsbedingung) und eine weitere Nebenbedingung, ohne die es nicht gehen wird, vgl. [Ak4]
- iii. $\partial\bar{\partial}\phi'$ auf $G^{\mathbb{C}}$ setzt sich auf ganz \mathbf{X} als Randbedingung fort, für u' oktroyiert dies ebenfalls eine Randbedingung.

Aus (3.7) erhält man

$$\sqrt{\det((\nabla^2 u')_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = e^{-u' - \ln h'} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Ergänze die rechte Seite mit der n -Form $dVol_G$, und überführe die linke Seite mittels Identifikation (3.21) auf $G^{\mathbb{C}}$

$$(\partial\bar{\partial}\phi')^n = e^{-\phi' - \ln h \circ \Psi + \ln \det(g_{ij}^M \circ \Psi)} \Psi^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dVol_G)$$

Deshalb schreibe in lokalen Koordinaten auf $G^{\mathbb{C}}$

$$(\partial\bar{\partial}\phi')^n = e^{-\phi' - \ln h \circ \Psi} h^{(w)} dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n$$

Jetzt können wir die Ricciformal auf beiden Seiten der letzten Gleichung bilden, d.h. $-\partial\bar{\partial}\ln(\cdot)$ auf die Koeffizientenfunktion der lokal geschriebenen Volumenform anwenden, somit folgt

$$Ric_{G^{\mathbb{C}}}(\partial\bar{\partial}\phi') = \partial\bar{\partial}\phi' + \partial\bar{\partial}\ln h - \partial\bar{\partial}\ln h^{(w)}$$

was sich mit Gleichung (3.6) auf

$$\begin{aligned} Ric(\partial\bar{\partial}\phi') &= \partial\bar{\partial}\phi' \\ \implies Ric(\omega) &= \omega \end{aligned}$$

transformiert, wobei wir ω als Fortsetzung von $(\Phi^{-1}|U)^*(\partial\bar{\partial}\phi')$ auf dem offenen Orbit $U = G^{\mathbb{C}}.x_0 \subseteq X$ auf ganz X definieren, unter erfüllter Randbedingung, die vorausgesetzt wird. Es ist wegen der Plurisubharmonizitätsvoraussetzung und Glattheit eine Kählerform, und daher ist ω eine Kähler-Einstein-Form auf X , die auf $G^{\mathbb{C}}$ durch $\partial\bar{\partial}\phi'$ bestimmt ist.

3.2.3 Aufstellung der Einsteingleichung für homogene Räume unter Verwendung von Ω

Anstelle der Volumenform $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$ kann man jedoch auch $|\Omega|^2 = \Omega \wedge \bar{\Omega}$ wie in der einführenden Gleichung (3.1) wählen, die zu der unter der natürlichen Gruppenmultiplikation auf $G^{\mathbb{C}}$ rechtsinvarianten, holomorphen n -Form $\Omega := \Omega_{G^{\mathbb{C}}}$ gehört. Alle möglichen solchen Ω differieren nur um eine Konstante ungleich Null, da man sie als mit der Gruppenmultiplikation vom neutralen Element verschobene n -Form im Tangentialraum auf der Liegruppe $G^{\mathbb{C}}$ realisieren kann. Manchmal gibt es eine natürliche algebraische Konstruktion einer solchen holomorphen Form, wie es z.B. für $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ der Fall ist. Weitere Beispiele für holomorphe Ω_L , wobei L sogar eine homogene Varietät sein kann, folgen in den Kapiteln 4, 5. Vergleiche zur Existenz und Eindeutigkeit von Ω_L auch Lemma 5.7.

Schreibe für eine derartige n -Form lokal in Umgebung $V \subset G^{\mathbb{C}}$ mit Koordinaten w^1, \dots, w^n :

$$(3.42) \quad \Omega = f^{(w)} dw^1 \wedge \dots \wedge dw^n$$

mit einer lokalen holomorphen Funktion $f^{(w)}$, so dass gilt:

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = |f^{(w)}|^2 dw^1 \wedge dw^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge dw^n \wedge dw^{\bar{n}}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial} \ln |f^{(w)}|^2 &= \partial \frac{f^{(w)} \cdot \overline{\partial f^{(w)}}}{|f^{(w)}|^2} = \\ &= \frac{|f^{(w)}|^2 |\partial f^{(w)}|^2 - |\partial f^{(w)}|^2 |f^{(w)}|^2}{|f^{(w)}|^4} = 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $|\Omega|^2$ die Krümmungsform Null besitzt. $|\Omega|^2$ unterscheidet sich um eine Funktion $k(x^1, \dots, x^n)$ von der in Unterkapitel 3.2.2 betrachteten Volumenform $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$ auf $G^{\mathbb{C}}$

$$(3.43) \quad \Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G) = k \cdot |\Omega|^2$$

und es trifft zu, dass man nicht leicht einen Ausdruck für k finden kann, wie es im Fall $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ zum Beispiel schon zu beschwerlich ist. Die Funktion k muss zwar G -rechtsinvariant sein, aber vom selben $G^{\mathbb{C}}$ -Invarianztyp wie $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$.

Der übliche Ansatz geht von der Gleichung

$$(3.44) \quad \begin{aligned} (\partial\bar{\partial}\phi)^n &= e^{-\phi} |\Omega_{G^{\mathbb{C}}}|^2 = \\ &= e^{-\phi} |f^{(w)}|^2 dw^1 \wedge \dots \wedge dw^{\bar{n}} \end{aligned}$$

aus, was genau der Kähler-Einstein-Bedingung (3.4) entspricht, bei erfüllter Randbedingung zur Fortsetzbarkeit auf ganz X in der Rückrichtung. Es liegt nahe, im Hinblick auf die Identifikationen aus Unterabschnitt 3.2.1, $\partial\bar{\partial}\phi$ sofort (n. [D1]) durch $\nabla^2 u$ zu ersetzen. Allerdings ist unklar, was $(\nabla^2 u)^n$ in (3.44) sein soll. Außerdem sind die beiden Operatoren ja nicht gleich im naiven Sinn, sondern stehen in einer bijektiven Korrespondenz auf bestimmten Mengen von Funktionen. Ferner ist unklar, wie man formal richtig von (3.44) nach $\det((\nabla^2 u)_{ij}) = e^{-u}$ gelangen sollte, da zwar $(\partial\bar{\partial}\phi)^n = \det(\phi_{i\bar{j}})dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n$ gilt, das heißt, eine lokale Gleichung ist in $V \subseteq G^{\mathbb{C}}$ erfüllt: $\det(\phi_{i\bar{j}}) = e^{-\phi}|f^{(w)}|^2$, und invariant unter Koordinatenwechsel und G -Wirkung aufgeschrieben stößt man auf

$$(3.45) \quad \frac{\det(\phi_{i\bar{j}})}{|f^{(w)}|^2} = e^{-\phi}$$

Hier spielen die gewählten komplexen Koordinaten keine Rolle, und man ist versucht, die Identifikation 3 aus Abschnitt 3.2.1 anzuwenden, aber wie man den Tensor $\nabla^2 u$ einsetzt und dann weiterrechnet, ist auch nicht klar. Wenn man die Rückrichtung zeigen will, also von der reellen Monge-Ampère-Gleichung $\det((\nabla^2 u)_{ij}) = e^{-u}$ auf die Kähler-Einstein-Bedingung (3.4) schließen möchte, so hat man ebenfalls das Problem, dass man nur die Koeffizienten ersetzen möchte, dies ist aber nicht möglich, wenn auch die Koeffizienten $(\nabla^2 u)_{ij}$ durch die kanonischen Koordinaten auf M feststehen, weil $(\phi_{i\bar{j}})$ kartenabhängig ist.

Die einzige Möglichkeit, die verbleibt, ist, das Ziel eine reelle Gleichung von Monge-Ampère-Typ zu erzielen, aufzugeben, und einen der speziellen Situation angepassten Differentialoperator zuzulassen, wie in Theorem 3.2 behauptet. Die Herleitung verläuft dabei so, dass der Operator $(\partial\bar{\partial}\phi)^n$ mittels Gleichung (3.18)

$$\partial\bar{\partial}\phi = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}^l} + \frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \right) dz^k \wedge d\bar{z}^l$$

direkt berechnet wird, nach Wahl von reellen Koordinatenfunktionen x^1, \dots, x^n , und auf eine geeignete Volumenform bezogen wird. Man erhält für eine Volumenform $dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r-invar.}$, die vom Grad der Invarianz her genügt, um eine Gleichung zu schreiben, unter Benutzung lokaler Koordinaten w^i und der Formeln:

$$(3.46) \quad dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r-invar.} = \frac{1}{j(x^1, \dots, x^n)} \Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G^{r-invar.})$$

$$(3.47) \quad \Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G^{r-invar.}) = h^{(w)} dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n$$

die diese Volumenform mit minimalen Invarianzanforderungen auf die in Abschnitt 3.2.2 verwendete Form $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G^{r-invar.})$ bezieht, via einer nirgends verschwindenden, G -invarianten Funktion $j = j(x^1, \dots, x^n)$ folgende Gleichsetzung.

$$(3.48) \quad \begin{aligned} (\partial\bar{\partial}\tilde{\phi})^n &= A(x, \tilde{u}, D\tilde{u}, D^2\tilde{u}) dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r-invar.} = \\ &= e^{-\phi} dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r-invar.} \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\phi}$ wie in (3.30) das Potential von ω auf $G^{\mathbb{C}}$ bezeichnet. Die entstehende Gleichung lautet

$$(3.49) \quad A(x, f := u + \ln j - \ln h, Df, D^2f) = e^{-u}$$

mit der Ersetzung (3.6), die wegen der nur von x abhängigen Funktion j hier auch gelten muss.

Wir können mit den beiden benutzten Volumenformen, dem allgemeinen $dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r\text{-invar.}}$, und $|\Omega|^2$, das über (3.43) zu $dVol_M \wedge dVol_G^{G-r\text{-inv}}$ bezogen ist, schreiben:

$$(3.50) \quad \begin{cases} (\partial\bar{\partial}f \circ \Psi)^n = e^{-\phi} dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r\text{-invar.}} = e^{-\phi \frac{k}{j}} |\Omega|^2 \\ (\partial\bar{\partial}\phi)^n = A(x, u, Du, D^2u) dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r\text{-invar.}} = A'(x, u, Du, D^2u) |\Omega|^2 \end{cases}$$

wobei der Operator A' durch obige Gleichung $(\partial\bar{\partial}\phi)^n = A'|\Omega|^2$ definiert wird. Die für $\partial\bar{\partial}\ln j = 0$ und $\partial\bar{\partial}\ln h = 0$, d.h. $\partial\bar{\partial}\ln j \circ \Psi = 0$ und $\partial\bar{\partial}\ln h \circ \Psi = 0$ erhältliche reelle Gleichung lautet

$$(3.51) \quad A'(x, u, Du, D^2u) = e^{-u \frac{k}{j}}$$

Wir wollen ausschließlich die spezielle Wahl $|\Omega|^2$ für $dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r\text{-invar.}}$ mitsamt den Gleichungen (3.42), (3.43) und (3.46) verwenden, um die Hilfsfunktion $\frac{k}{j}$ letztlich loszuwerden. Dazu fordert man die Gleichheit (3.44) ein, also nicht mehr in Bezugnahme auf eine andere Volumenform $dVol_{G^{\mathbb{C}}}^{G-r\text{-invar.}}$ die man erst noch umrechnen muss, um eine passende lokale Gestalt zu erzeugen. Man bekommt einen Operator A' mit $A' = \frac{k}{j}A$ und setzt an, wie eben, mit

$$(3.52) \quad (\partial\bar{\partial}\phi)^n = A'(x, u, Du, D^2u) |\Omega|^2$$

für alle G -rechtsinvarianten Funktionen ϕ auf $G^{\mathbb{C}}$, und wir erhalten

$$(3.53) \quad A'(x, u, Du, D^2u) = e^{-u}$$

ohne die Funktion j , was man als reelle Einsteingleichung ansehen kann, wie in Gleichung (3.9) von Theorem 3.2 behauptet.

Bemerkung 3.7. Ausschließlich die Art (3.53) einer reellen Gleichung wird in den Kapiteln 4 und 5 hergeleitet, durch die Berechnung der Operatoren A' bezüglich der Wahl von $|\Omega_L|^2$ und geeigneter r Stück ($r = \text{Rang}(L)$) reeller Koordinatenfunktionen x auf affinen homogenen Varietäten $L := G/H$, für eine reductive algebraische Gruppe G , und H eine abgeschlossene Untergruppe von G . Stets gilt $r \leq 2n$, wobei $n = \dim_{\mathbb{C}}(L)$ die komplexe Dimension ist. In allen Beispielen liegen folgende Werte vor: $r = 1$, $r = 2$ oder für die beiden quasihomogenen Beispiele (torischer Fall und $G = \text{SU}(2)$ aus dem noch folgenden Abschnitt 3.4; r ist nur mehr die Anzahl reeller Variablen) mit $r = n$. Zur Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Form Ω_L , beachte die zusätzlichen Voraussetzungen an G und H aus Lemma 5.7.

3.3 Wichtige Eigenschaften von $G^{\mathbb{C}}$ in Bezug auf den homogenen Raum M

Wie in der Darstellung im ersten Abschnitt von [Ba], zeigen wir verallgemeinernd die folgenden Aussagen.

Lemma 3.2 ($\partial\bar{\partial}$ -Lemma für lineare komplex reductive Liegruppen $G^{\mathbb{C}}$). *Sei G eine kompakte Liegruppe. Jede geschlossene $(1, 1)$ -Form ω auf $G^{\mathbb{C}}$ kann durch $\omega = \partial\bar{\partial}\beta$ dargestellt werden, für eine glatte Funktion β auf $G^{\mathbb{C}}$. Wenn ω reell ist (d.h. $\bar{\omega} = \omega$), so kann β auch reell gewählt werden. Wenn ω unter Multiplikation $\mu : G \times G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ mit Elementen aus G invariant ist, so kann β auch G -invariant gewählt werden.*

Beweis. Setze die lokale Version dieses $\partial\bar{\partial}$ -Lemmas auf Stein'sche Mannigfaltigkeiten unseres Typs fort. In der Literatur gibt es entweder die lokale Version oder die globale Version für kompakte Mannigfaltigkeiten in fast jedem Textbuch zur komplexen Geometrie. Weil ω geschlossene Form ist, gibt es wegen $H_{\bar{\partial}}^{1,1}(G^{\mathbb{C}}) = 0$ und dem d -Poincaré-Lemma ein $\alpha = \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1} \in H^1(G^{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned}\omega &= d\alpha = (\partial + \bar{\partial})\alpha = \\ &= \partial\alpha^{1,0} + \bar{\partial}\alpha^{1,0} + \partial\alpha^{0,1} + \bar{\partial}\alpha^{0,1}\end{aligned}$$

Es muss also $\partial\alpha^{1,0} = 0 = \bar{\partial}\alpha^{0,1}$ gelten, weil ω nach Voraussetzung eine $(1,1)$ -Form ist. Wegen des Verschwindens der Dolbeault'schen Kohomologiegruppen $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(G^{\mathbb{C}}) = 0 = H_{\partial}^{0,1}(G^{\mathbb{C}})$ bzw. wegen des sog. Dolbeault'schen Lemmas, existieren Funktionen β_1, β_2 , so dass $\alpha^{1,0} = \partial\beta_1$ und $\alpha^{0,1} = \bar{\partial}\beta_2$ gilt. Setze $\beta := \beta_2 - \beta_1$, damit folgt:

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial}\beta &= \partial(\bar{\partial}\beta_2 - \bar{\partial}\beta_1) = \partial(\alpha^{0,1} - \bar{\partial}\beta_1) = \partial\alpha^{0,1} - \partial\bar{\partial}\beta_1 = \\ &= \partial\alpha^{0,1} + \bar{\partial}\partial\beta_1 = \partial\alpha^{0,1} + \bar{\partial}\alpha^{1,0} = d\alpha = \omega\end{aligned}$$

Wenn ω reell ist, so wähle $\frac{1}{2}(\beta + \bar{\beta})$ als reelles Potential für ω . Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial\bar{\partial}(\beta + \bar{\beta}) &= \frac{1}{2}(\omega + \overline{\partial\bar{\partial}\beta}) = \\ &= \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega}) = \omega\end{aligned}$$

Wenn ω invariant unter der Links- oder Rechtsmultiplikation μ in $G^{\mathbb{C}}$ mit Elementen $U \in G$ ist,

$$\begin{aligned}\mu : G \times G^{\mathbb{C}} &\rightarrow G^{\mathbb{C}} \\ (U, T) &\mapsto U \cdot T, \text{ bzw. } T \cdot U\end{aligned}$$

und wir schreiben $\mu_U : G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ für die Multiplikation mit einem festen U auf $G^{\mathbb{C}}$, dann bedeutet dies: $\mu_U^*\omega = \partial\bar{\partial}(\mu_U^*\beta) = \partial\bar{\partial}(\beta \circ \mu_U)$, man muss also β invariant unter der Gruppenwirkung machen, wenn es das nicht schon ist. Dazu mittelt man die Funktion β über die kompakte Gruppe G , in der üblichen Weise mit dem Haarschen Integral, und erhält:

$$(3.54) \quad \hat{\beta} := \int_G \mu_U^*\beta d\mu_{\text{Haar}}(U)$$

was als neues Potential verwendet werden kann, das G -invariant ist. □

Korollar 3.3 ($\partial\bar{\partial}$ -Lemma für affine homogene Varietäten). Sei G reductive algebraische Gruppe, $H \leq G$ abgeschlossene reductive Untergruppe. Dann ist der homogene Raum G/H eine affine Varietät, insbesondere eine Stein'sche Mannigfaltigkeit. Wir können darauf Lemma 3.2 anwenden, der Beweis funktioniert analog. Für eine maximale kompakte Untergruppe $K \leq G$, die auf G/H natürlich von links operiert, können wir wie oben, für eine K -invariante $(1,1)$ -Form ω , ein zugehöriges invariantes Potential durch Integration finden.

Bemerkung 3.8 (Eindeutigkeit des Potentials in Lemma 3.2). Aus [BO] entnehmen wir, dass im Spezialfall dass $G^{\mathbb{C}}$ halbeinfach ist, die Eindeutigkeit bis auf Addition von Konstanten für

solche Potentiale wie in Lemma 3.2 folgt, weil pluriharmonische, G -invariante Funktionen auf $G^{\mathbb{C}}$, die man zu Potentialen beliebig addieren könnte, ohne ω zu ändern, nur konstante Funktionen sein können. Im Allgemeinen, wenn $G^{\mathbb{C}}$ reduktiv ist, haben wir wegen des Auftretens nichttrivialer Charaktere von $G^{\mathbb{C}}$ eine Uneindeutigkeit zu verzeichnen, d.h. bis auf monomiale Funktionen in $\dim(Z(G^{\mathbb{C}}))$ Variablen plus einer Konstanten. \square

Lemma 3.3 (Beweis der Formel (3.32)). *Sei $\omega = g_{i\bar{j}} dz^i \wedge dz^{\bar{j}}$ eine positiv definite hermitesche (1, 1) Form auf X . Dann gilt*

$$\Phi^* i_U^* Ric_X(\omega) = Ric_{G^{\mathbb{C}}}(\Phi^* i_U^* \omega)$$

Beweis. Wir berechnen dies explizit in Koordinaten z^i auf X , und w^i auf $G^{\mathbb{C}}$, in geeignet gewählten Umgebungen. Die rechte Seite ist leichter zu sehen:

$$\begin{aligned} Ric_{G^{\mathbb{C}}}(\Phi^* i_U^* \omega) &= -\partial\bar{\partial} \ln((\Phi^* i_U^* \omega^n)_{1\dots\bar{n}}) = -\partial\bar{\partial} \ln(((\Phi^* i_U^* \omega)^n)_{1\dots\bar{n}}) = \\ &= -\partial\bar{\partial} \ln(((\partial\bar{\partial}\tilde{\phi})^n)_{1\dots\bar{n}}) = -\partial\bar{\partial} \ln \det(\tilde{\phi}_{i\bar{j}}^{(w)}) \end{aligned}$$

Auf der linken Seite haben wir

$$\begin{aligned} \Phi^* i_U^* Ric_X(\omega) &= -\partial\bar{\partial}(\Phi^* i_U^* \ln((\omega^n)_{1\dots\bar{n}})) = -\partial\bar{\partial} \ln(\Phi^* i_U^* (\omega^n)_{1\dots\bar{n}}) = \\ &= -\partial\bar{\partial} \ln(\Phi^* i_U^* \det(g_{i\bar{j}}^{(z)})) \end{aligned}$$

Anstelle dieses Ansatzes, rechnen wir den inversen Transformationskoeffizienten aus.

$$\begin{aligned} \Phi^* i_U^* (dz^1 \wedge \dots \wedge dz^{\bar{n}}) &= \\ &= \frac{\partial z^1}{\partial w^{k_1}} \dots \frac{\partial z^n}{\partial w^{k_n}} \cdot \frac{\partial z^{\bar{1}}}{\partial w^{\bar{l}_1}} \dots \frac{\partial z^{\bar{n}}}{\partial w^{\bar{l}_n}} \cdot dw^{k_1} \wedge dw^{\bar{l}_1} \wedge \dots \wedge dw^{k_n} \wedge dw^{\bar{l}_n} = \\ &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \operatorname{sgn}(\sigma_2) \frac{\partial z^1}{\partial w^{\sigma_1(1)}} \dots \frac{\partial z^n}{\partial w^{\sigma_1(n)}} \cdot \frac{\partial z^{\bar{1}}}{\partial w^{\sigma_2(1)}} \dots \frac{\partial z^{\bar{n}}}{\partial w^{\sigma_2(n)}} \cdot \\ &\cdot dw^1 \wedge dw^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge dw^n \wedge dw^{\bar{n}} = \\ &= \det \left(\left(\frac{\partial z^i}{\partial w^j} \right)_{i,j=1\dots n} \right) \cdot \det \left(\left(\frac{\partial z^{\bar{i}}}{\partial w^{\bar{j}}} \right)_{i,j=1\dots n} \right) dw^1 \dots dw^{\bar{n}} = \\ &= \left| \det \left(\left(\frac{\partial z^i}{\partial w^j} \right)_{i,j=1\dots n} \right) \right|^2 dw^1 \dots dw^{\bar{n}} \end{aligned}$$

und $f := \det \left(\left(\frac{\partial z^i}{\partial w^j} \right)_{i,j=1\dots n} \right)$ stellt eine holomorphe Funktion dar, so dass $\partial\bar{\partial} \ln |f|^2 = 0$, wenn überall $f \neq 0$ gilt. Dieser extra entstehende Faktor verschwindet oben eingesetzt, und beide Seiten stimmen überein. \square

Lemma 3.4 (Beweis der Gleichung (3.24) für eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit (M, g)). *Für jedes $Y \in T_x M, x \in M$ und jede Funktion u gilt:*

$$(3.55) \quad \nabla^2 u(x)(Y, Y) = \left(\frac{d^2}{dt^2} u \circ \gamma(t) \right) \Big|_{t=0}$$

wobei γ die Geodäte mit $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = Y$ bezeichne.

Beweis. (nach [J] Abschnitt 3.3) Erinnere, dass die Riemann'sche Hessesche einer glatten Funktion in Koordinaten x auf M durch

$$\nabla^2 u = \nabla du = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial u}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \right) dx^i \otimes dx^j$$

gegeben ist (sh. Gleichung (3.25)). Angewandt auf Vektorfelder X, Y auf M erhält man:

$$\nabla du(X, Y) = g(\nabla_X \text{grad } u, Y) = X(Y(u)) - (\nabla_X Y)u$$

weil

$$X(Y(f)) = Xg(\text{grad } u, Y) = g(\nabla_X \text{grad } u, Y) + g(\text{grad } u, \nabla_X Y)$$

Jetzt benutzen wir die Vorgaben aus der Voraussetzung, und mit

$$\begin{aligned} \nabla du(Y, Y) &= Y(Y(u)) - (\nabla_Y Y)u = Y(\text{grad } u(Y)) = \\ &= \dot{\gamma}(0)(\text{grad } u(\dot{\gamma}))|_0 = \dot{\gamma}(0) \frac{d}{dt}|_0 u \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt}|_0 \frac{d}{dt} u \circ \gamma(t) \end{aligned}$$

erzielen wir das Ergebnis. □

Lemma 3.5 (Explizite Berechnung der Funktion $h^{(w)}$, bezüglich komplexer Koordinaten (w^1, \dots, w^n) auf $G^{\mathbb{C}}$). Wir erinnern an die Definition von $h^{(w)}$ in (3.5). Daraus erhält man

$$\begin{aligned} h^{(w)} &= \Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G) \left(\frac{\partial}{\partial w^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{w}^n} \right) = \\ &= dVol_M \wedge dVol_G \left(\Psi_* \frac{\partial}{\partial w^1}, \dots, \Psi_* \frac{\partial}{\partial \bar{w}^n} \right) \end{aligned}$$

Alternativ vergleiche man die Koeffizienten in

$$dVol_M \wedge dVol_G^{r\text{-invar.}} = (h^{(w)} \circ \Psi^{-1})(\Psi^{-1})^*(dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n)$$

für bekannte $dVol_M$ und $dVol_G^{r\text{-invar.}}$.

Dies kann man nun rechnerisch bestimmen, wozu man das Differential $D\Psi$ oder $D\Psi^{-1}$ auszurechnen hat. Stattdessen bringen wir, neben dem torischen Fall, der in Abschnitt 3.4 geschildert wird, den aus den Beispielen 3.2, 3.4 und 3.6 bekannten Fall $G = \text{SU}(2)$, als nichttriviales Analogon.

Beispiel 3.7. Wir haben die Isomorphie $\text{SU}(2) \cong S^3$ im Sinn, wo man Volumenformen in einer Karte mit trigonometrischen Vorfaktorfunktionen findet. So bekommt man in [Ba] für $(\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3)$ bei Wahl der Eulerwinkel $(\beta, \alpha, \gamma) \in]0, 4\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ und Einsformen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\sin \gamma d\alpha + \cos \gamma \sin \alpha d\beta \\ \sigma_2 &= \cos \gamma d\alpha + \sin \gamma \sin \alpha d\beta \\ \sigma_3 &= \cos \alpha d\beta + d\gamma \end{aligned}$$

die Volumenform $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = -\sin \alpha d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma$. Nach Gleichung (3.5) haben wir: $h^{(w)} = \left(\sqrt{\det((g_{ij}^{\mathbb{H}^3}))} \sqrt{|g^{\text{SU}(2)}|} \right) \circ \Psi J = \sqrt{\frac{1}{r^6}} (\sqrt{\sin \alpha} \circ \Psi) J$, mit $r = \frac{1}{|c|^2 + |d|^2}$, wie im Beispiel 3.2 gesetzt wurde, und wofür man noch lokale Koordinaten (w^1, w^2, w^3) auf $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ einführen

muss, in einer der vier Umgebungen wo a, b, c , oder $d \neq 0$ ist. Denn Ψ auf \mathbb{H}^3 betrachtet ist einfach $\pi : \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$ wie in (3.15) festgelegt wurde (vgl. auch (3.61)). Für den interessanten Teil von $h^{(w)}$ erhält man als Pendant zu h' die lokale Funktion $-\sin \alpha \circ \Psi \cdot J$, wobei J hier nicht bestimmt wird. Für den anderen Teil $\frac{1}{r^3}$ findet man $\partial\bar{\partial} \ln(r^3) \neq 0$. Wenn, wie im torischen Fall, $-\partial\bar{\partial} \ln h^{(w)} = -\partial\bar{\partial} \ln(h \circ \Psi) = 0$ ist, d.h. die Krümmungsform Null ist, so muss $h \circ \Psi = \text{konst.}$ sein.

Nach [Ba] ist die Volumenform $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3$ sogar unter $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ -Wirkung invariant, d.h. von links mit U_1 und von rechts mit inverser Matrix U_2^{-1} multiplizieren, für $U_1, U_2 \in \text{SU}(2)$.

Als schon früher empfohlene Konstruktion einer Volumenform können wir das von der (-1) -fachen Killingform $-\kappa_{\mathfrak{su}(2)}$ auf $\mathfrak{su}(2)$ als Riemann'sche Metrik induzierte Riemann'sche Volumenelement wählen. Es gilt:

$$\kappa_{\mathfrak{su}(2)}(v, w) = \text{tr}(ad(v)ad(w)) = 4\text{tr}(vw), \forall v, w \in \mathfrak{su}(2)$$

und in der schon unterhalb von Gleichung (3.16) aufgeschriebenen Basis von $\mathfrak{su}(2)$: $\langle iH, X - Y, i(X + Y) \rangle$ ist

$$-\kappa_{\mathfrak{su}(2)} = 4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

was man nun an jeden Punkt der Liegruppe durch Translation verschieben kann, und damit als die ausgezeichnete biinvariante Metrik installieren kann. Explizit bestimmen wollen wir dafür nichts weiter.

Insgesamt vermuten wir, dass i.A. h nichtkonstant und $\partial\bar{\partial} \ln(h \circ \Psi) \neq 0$ ist. Wir wissen, dass $h^{(w)}$ i.A. nichtkonstant ist, $\partial\bar{\partial} \ln \det(g_{ij}^{\mathbb{H}^3}) \neq 0$ und falls $\partial\bar{\partial} \ln(h \circ \Psi) = 0$ ist, so war $\Psi^*(dVol_M \wedge dVol_G)$ schon eine Volumenform auf $G^{\mathbb{C}}$ mit Krümmungsform gleich Null, wie bei $|\Omega_{G^{\mathbb{C}}}|^2$ auch. Sonst muss sie nur die Chernklasse $c_1(G^{\mathbb{C}}) = 0$ repräsentieren können.

3.4 Die Beispiele der torischen Varietäten und SL₂(C)-fast-homogenen Varietäten

Von der Geometrie einer kompakten Liegruppe G ist bekannt, dass

1. sie eine biinvariante Metrik g besitzt,
2. der korrespondierende Riemann'sche Zusammenhang mit

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

gegeben ist,

3. $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ der Krümmungstensor ist, und man in ähnlicher Weise auch die Schnittkrümmung K , die Riccikrümmung und die Skalarkrümmung aufschreiben kann.

Für die bisher in Abschnitt 3.2.1 behandelten beiden Beispiele $G^{\mathbb{C}} = \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n$ und $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ wird nun rechnerisch ausgewertet, ob man zur reellen Monge-Ampère-Gleichung für Kähler-Einstein-Metriken gelangen kann. Man setzt dabei in die reelle Monge-Ampère-Gleichung (3.7) die klassischen Potentiale als Funktionen u' ein, die als Lösungen bekannt sind, und bestimmt gegebenenfalls die Funktion h' .

3.4.1 Der torische Fall $G = (S^1)^n$ und torische Varietäten

Wir werden zuerst das grundlegende, instruktive Beispiel einer torischen Varietät genauer untersuchen, hinsichtlich der Fragestellung nach $G = (S^1)^n$ -invarianten Kähler-Einstein-Metriken. Vergleiche [F], [WZ], [M].

Hier ist $G^{\mathbb{C}} := \mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n = ((\mathbb{C}^*)^n, \cdot)$, und $M = \mathbb{R}^n$ der flache euklidische Raum. Seien (x^1, \dots, x^n) die natürlichen Koordinaten auf \mathbb{R}^n , (z^1, \dots, z^n) die komplexen auf $(\mathbb{C}^*)^n$, und $(\vartheta^1, \dots, \vartheta^n)$ (echt) lokale Koordinaten auf $(S^1)^n$ gegeben durch (vgl. [F])

$$\vartheta^i = -\sqrt{-1} \log_{\mathbb{C}} \left(\frac{z^i}{|z^i|} \right)$$

Hier bekommt man $h = 1$, weil sowohl die Volumenform der Standard (symmetrischen) Metrik $g_{ij}^{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}$ einfach $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ ist, und man auf $G = (S^1)^n$ die globale, biinvariante Volumenform $d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$ wählen kann, die den Faktor eins als Koeffizient besitzt, so dass

$$h' = \frac{h}{\det \left(g_{ij}^{\mathbb{R}^n} \right)} \equiv 1$$

ist. Daher erhält man wie in [M] die reelle Monge-Ampère-Gleichung (3.8). Beachte jedoch, dass die Koordinaten auf $G = (S^1)^n$ nicht global definiert sind, aber dass der Koordinatenwechsel nur aus der Addition einer Konstanten in jeder einzelnen Koordinate eines Faktors S^1 von G besteht, so dass schon Ausdrücke wie $d\vartheta_i$ für jedes $i = 1, \dots, n$ invariant sind, und daher ganz $d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^n$. Dasselbe Verhalten tritt auch bei der Multiplikation mit einem festen Element von G auf, deshalb folgt die Biinvarianz. Auf jeden Fall haben wir

$$\begin{aligned} \frac{dz^1 \wedge d\bar{z}^1}{|z^1|^2} \wedge \dots \wedge \frac{dz^n \wedge d\bar{z}^n}{|z^n|^2} &= dw^1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}^n \\ \Rightarrow \partial\bar{\partial} \ln h^{(z)} &= \partial\bar{\partial} \ln h^{(w)} = 0 \end{aligned}$$

bezüglich der affinen logarithmischen Koordinaten $w^i = x^i + \sqrt{-1}\vartheta^i$. Das sind komplexe Koordinaten, wie sie im Lemma 3.1 behandelt werden, und hier im kommutativen Fall auftreten.

Sei X eine glatte torische Varietät, d.h. sie enthält einen algebraischen n -Torus als offene Menge $U \subset X$ und die natürliche Operation auf sich selbst setzt sich fort zu einer Wirkung auf ganz X . Eine $(1, 1)$ -Form ω wird auf U ganz allgemein durch ein Potential ϕ als $\omega = \partial\bar{\partial}\phi$ beschrieben, das wegen der Invarianzforderung zu $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ absteigt.

Wie oben erläutert, erhält man auf jedem der Wege, sowohl durch die Identifizierungsmethode im Abschnitt 3.2.2, als auch durch direkte Berechnung des Operators $A' = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \right)$ bezüglich der globalen, holomorphen, invarianten n -Form $\Omega_{\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^n} = \frac{dz^1}{z^1} \wedge \dots \wedge \frac{dz^n}{z^n}$ wie in Abschnitt 3.2.3, diesselbe torische Einsteingleichung (3.11) $\det(u_{ij}) = e^{-u}$. Denn die Berechnung von

$\det((\partial\bar{\partial}\phi)_{i\bar{j}})$ als lokaler Koeffizient von $(\partial\bar{\partial}\phi)^n$ unter Benutzung von affinen logarithmischen Koordinaten und Gleichung (3.18) ergibt, wie in Bemerkung 3.2 schon mitgeteilt

$$\det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right) = \det(u_{ij}) \frac{1}{|z^1|^2 \dots |z^n|^2}$$

Der Faktor $\frac{1}{|z^1|^2 \dots |z^n|^2}$ wird von der Volumenform absorbiert, und er verschwindet unter dem Ricciformaloperator $-\partial\bar{\partial}\ln(\cdot)$, so dass man die behauptete Gestalt der Einsteingleichung (3.11) aus $(\partial\bar{\partial}\phi)^n = e^{-\phi}|\Omega_{\mathbb{T}^n_c}|^2$ bzw. $(\partial\bar{\partial}\phi)^n = e^{-\phi}\Psi^*(dV_{\mathbb{R}^n} \wedge dV_{(S^1)^n})$ erhält.

3.4.2 Der hyperbolische Raum und die halbeinfache Gruppe $G = \text{SU}(2)$

Wir behalten die Notation und Konventionen wie in den Beispielen 3.2, 3.4 und 3.6 eingeführt bei. Es sei stets

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$$

Eine transitive SL₂(C)-Wirkung auf \mathbb{H}^3 wird durch die Festsetzung

$$(3.56) \quad \chi_{z+jr}(T) := \frac{(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d})+a\bar{c}r^2}{|cz+d|^2+|c|^2r^2} + j \frac{r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}$$

gegeben. Dies stattet \mathbb{H}^3 mit der Struktur eines homogenen Raumes aus. Halte den Punkt $j \in \mathbb{H}^3$ fest, der als Stabilisator SU(2) hat, so dass $\mathbb{H}^3 \cong \text{SL}_2(\mathbb{C})/\text{SU}(2)$ ist. Die SL₂(C)-invariante Metrik auf dem hyperbolischen dreidimensionalen Raum \mathbb{H}^3 ist bekanntermaßen

$$(3.57) \quad ds^2 = \frac{1}{r^2}dx^2 + \frac{1}{r^2}dy^2 + \frac{1}{r^2}dr^2$$

für $r > 0$. Das Riemann'sche Volumenelement dazu lautet:

$$(3.58) \quad dVol_{\mathbb{H}^3} = \frac{dx dy dr}{r^3}$$

und die Christoffelsymbole berechnen sich über Ableitungen der Metrik

$$(3.59) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

für das angeordnete Koordinatentripel (x, y, r) , was folgendes Bild ergibt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}r^2 \left(-\frac{-2}{r^3} \right) = \frac{1}{r} & \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{12}^3 = 0 & \quad \Gamma_{23}^1 = 0, \Gamma_{23}^2 = -\frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = 0 \\ \Gamma_{13}^1 = -\frac{1}{r}, \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{13}^3 = 0 & \quad \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0, \Gamma_{33}^3 = -\frac{1}{r} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen erhält man alle Symbole. Für eine Rechnung muss man noch Koordinaten auf SL₂(C) wählen. Dabei geht man wie im Beispiel 3.6 vor und wählt als Karte $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \supseteq U_{11} := \{a \neq 0\}$, mit zugehöriger Abbildung

$$(3.60) \quad \begin{aligned} \varphi_{11} : U_{11} &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ T &\mapsto (a, b, c) \\ \begin{pmatrix} w^1 & w^2 \\ w^3 & \frac{1+w^2w^3}{w^1} \end{pmatrix} &\longleftarrow (w^1, w^2, w^3) \end{aligned}$$

Weil ein Diffeomorphismus $SU(2) \cong S^3$ besteht, und $SU(2)$ nichtabelsch ist, ist die Schnittkrümmung $+1$ in jedem Punkt für alle Ebenen, also ist $SU(2)$ nicht lokal isometrisch zum flachen euklidischen Raum, und es gibt keine lokalen Koordinaten, um konstanten metrischen Tensor auf $SU(2)$ in einer ganzen lokalen Koordinatenumgebung zu bekommen. Die zugeordnete Riemann'sche Volumenform bekommt dadurch ihren Vorfaktor $\sqrt{\det(g_{ij}^{SU(2)})}$. Die Abbildung Ψ lautet

$$(3.61) \quad \begin{aligned} \Psi : SL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{H}^3 \times SU(2) \\ T &\mapsto \left(\frac{a\bar{c} + b\bar{d} + j}{|c|^2 + |d|^2}, U_T := |T|^{-1}T \right) \\ \tau(x, y, r)U &\leftarrow ((x, y, r), U) \end{aligned}$$

für einen globalen Schnitt $\tau : \mathbb{H}^3 \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$. Daraus kann man nach Lemma 3.5 $h^{(w)}$ berechnen.

Die direkte Berechnung von $(\partial\bar{\partial}\varphi)^3$, wie in den Bemerkungen 3.1, 3.2 und 3.7 vorgezeichnet, und in den Kapiteln 2, 4, 5 für die dort herrschenden Bedingungen ausgeführt, um eine reelle Gleichung (3.9) zu sehen, führt auf:

$$(3.62) \quad \begin{aligned} (\partial\bar{\partial}\varphi)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (u_{ij}\partial p^i \wedge \bar{\partial}p^j)^k \wedge (u_m\partial\bar{\partial}p^m)^{3-k} = \\ &= \binom{3}{0} (u_k\partial\bar{\partial}p^k)^3 + \binom{3}{1} (u_{ij}\partial p^i \wedge \bar{\partial}p^j)^1 (u_k\partial\bar{\partial}p^k)^2 + \\ &+ \binom{3}{2} (u_{ij}\partial p^i \wedge \bar{\partial}p^j)^2 (u_k\partial\bar{\partial}p^k)^1 + \binom{3}{3} (u_{ij}\partial p^i \wedge \bar{\partial}p^j)^3 \end{aligned}$$

für $p^1 = x, p^2 = y, p^3 = r$. Im Einzelnen:

$$\begin{aligned} \partial x &= \frac{1}{2} \left\{ r\bar{c}\partial a + r\bar{d}\partial b + \partial c \underbrace{[r^2(-a\bar{c}\bar{c} - b\bar{c}\bar{d} - \bar{a}|c|^2 - \bar{b}\bar{c}d) + \bar{a}r]}_{x_c} \right. \\ &\quad \left. + \partial d \underbrace{[r^2(-a\bar{c}\bar{d} - b\bar{d}\bar{d} - \bar{a}c\bar{d} - \bar{b}|d|^2) + \bar{b}r]}_{x_d} \right\} \\ \partial y &= \frac{1}{2i} \left\{ r\bar{c}\partial a + r\bar{d}\partial b + \partial c \underbrace{[r^2(-a\bar{c}\bar{c} - b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}|c|^2 + \bar{b}\bar{c}d) - \bar{a}r]}_{y_c} \right. \\ &\quad \left. + \partial d \underbrace{[r^2(-a\bar{c}\bar{d} - b\bar{d}\bar{d} + \bar{a}c\bar{d} + \bar{b}|d|^2) - \bar{b}r]}_{y_d} \right\} \\ \partial r &= -\bar{c}r^2\partial c - \bar{d}r^2\partial d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial}x &= \frac{1}{2} \{ (-|c|^2r^2 + r)\partial c \wedge \partial\bar{a} - c\bar{d}r^2\partial d \wedge \partial\bar{a} - \bar{c}d r^2\partial c \wedge \partial\bar{b} + (-|d|^2r^2 + r)\partial d \wedge \partial\bar{b} + \\
&\quad + |d|^2r^2\partial a \wedge \partial\bar{c} - \bar{c}d r^2\partial a \wedge \partial\bar{d} - c\bar{d}r^2\partial b \wedge \partial\bar{c} + |c|^2r^2\partial b \wedge \partial\bar{d} + \\
&\quad + \partial c \wedge \partial\bar{c}[2r^3(-a\bar{c}|d|^2 + \bar{a}c|c|^2 + b\bar{d}|c|^2 + \bar{b}d|c|^2) + r^2(-b\bar{d} - \bar{b}d - \bar{a}c)] + \\
&\quad + \partial d \wedge \partial\bar{c}[2r^3(-a\bar{d}|d|^2 + \bar{b}c|c|^2 + \bar{a}c\bar{c}d + b\bar{c}d\bar{d}) + r^2(a\bar{d} - \bar{b}c)] + \\
&\quad + \partial c \wedge \partial\bar{d}[2r^3(\bar{a}d|c|^2 - \bar{b}\bar{c}|c|^2 + a\bar{c}\bar{c}d + \bar{b}\bar{c}d\bar{d}) + r^2(-\bar{a}d + b\bar{c})] + \\
&\quad + \partial d \wedge \partial\bar{d}[2r^3(\bar{a}c|d|^2 + a\bar{c}|d|^2 - b\bar{d}|c|^2 + \bar{b}d|d|^2) + r^2(-a\bar{c} - \bar{a}c - \bar{b}d)] \} \\
\partial\bar{\partial}y &= \frac{1}{2i} \{ (-|c|^2r^2 + r)\partial c \wedge \partial\bar{a} - c\bar{d}r^2\partial d \wedge \partial\bar{a} - \bar{c}d r^2\partial c \wedge \partial\bar{b} + (-|d|^2r^2 + r)\partial d \wedge \partial\bar{b} - \\
&\quad - |d|^2r^2\partial a \wedge \partial\bar{c} + \bar{c}d r^2\partial a \wedge \partial\bar{d} + c\bar{d}r^2\partial b \wedge \partial\bar{c} - |c|^2r^2\partial b \wedge \partial\bar{d} + \\
&\quad + \partial c \wedge \partial\bar{c}[2r^3(a\bar{c}|d|^2 + \bar{a}c|c|^2 + \bar{b}d|c|^2 - b\bar{d}|c|^2) + r^2(b\bar{d} - \bar{b}d - \bar{a}c)] + \\
&\quad + \partial d \wedge \partial\bar{c}[2r^3(a\bar{d}|d|^2 + \bar{b}c|d|^2 + \bar{a}c\bar{c}d - b\bar{c}d\bar{d}) + r^2(-a\bar{d} - \bar{b}c)] + \\
&\quad + \partial c \wedge \partial\bar{d}[2r^3(\bar{a}d|c|^2 + \bar{b}\bar{c}|c|^2 - a\bar{c}\bar{c}d + \bar{b}\bar{c}d\bar{d}) + r^2(-\bar{a}d - b\bar{c})] + \\
&\quad + \partial d \wedge \partial\bar{d}[2r^3(\bar{a}c|d|^2 - a\bar{c}|d|^2 + b\bar{d}|c|^2 + \bar{b}d|d|^2) + r^2(a\bar{c} - \bar{a}c - \bar{b}d)] \} \\
\partial\bar{\partial}r &= \partial c \wedge \partial\bar{c}(-r^2 + 2r^3|c|^2) + \partial d \wedge \partial\bar{d}(-r^2 + 2r^3|d|^2) + 2c\bar{d}r^3\partial d \wedge \partial\bar{c} + 2\bar{c}d r^3\partial c \wedge \partial\bar{d}
\end{aligned}$$

Wir erhalten für Gleichung (3.62) folgenden Ausdruck.

$$(3.63) \quad (\partial\bar{\partial}\varphi)^3 = \binom{3}{0} 0 \cdot |\Omega|^2 + \binom{3}{1} F_2 |\Omega|^2 + \binom{3}{2} F_3 |\Omega|^2 + \binom{3}{3} 3! \det(u_{ij}) \frac{1}{4} r^2 |\Omega|^2$$

Dabei sind F_2, F_3 Ausdrücke in entsprechenden Anteilen von u_{ij} und $u_k; i, j, k = 1, 2, 3$, die jedoch in unseren Rechnungen nur teilweise weitestgehend vereinfacht sind. So ist in $F_2 = \frac{1}{12}(u_{xx} - 2iu_{xy} - u_{yy})[2u_r^2r^4 - \frac{1}{2}u_x^2(\dots) - \frac{1}{2}u_y^2(\dots) - i\frac{1}{2}u_xu_yr^4(\dots) + (u_x - iu_y)u_rr^5(|c|^2 - |d|^2)(\bar{a}b - \bar{b}d)]$

$$\frac{1}{6}r^4(u_{xx} - 2iu_{xy} - u_{yy})u_r^2$$

der einzige Term in u_r^2 . $F_1 = 0$ wäre der erste Faktor in Gleichung (3.63).

Beobachte, dass die Determinante der Riemannschen Hesseschen $(\nabla^2 u)_{ij}$ nach Gleichung (3.25) und oben bestimmten Christoffelsymbolen uns liefert:

$$\begin{aligned}
(3.64) \quad \det(\nabla^2 u) &= \begin{vmatrix} u_{xx} - \frac{u_x}{r} & u_{xy} & u_{xy} + \frac{u_x}{r} \\ u_{yx} & u_{yy} - \frac{u_r}{r} & u_{yr} + \frac{u_y}{r} \\ u_{rx} + \frac{u_x}{r} & u_{ry} + \frac{u_r}{r} & u_{rr} + \frac{u_r}{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xr} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yr} \\ u_{rx} & u_{ry} & u_{rr} \end{vmatrix} + \\
&\quad + \frac{u_r}{r}(u_{xx}u_{yy} - u_{xx}u_{rr} - u_{yy}u_{rr} + u_{xr}^2 - u_{xy}^2 + u_{yr}^2) + \\
&\quad + 2\frac{u_x}{r}(u_{xy}u_{yr} - u_{yy}u_{xr}) + 2\frac{u_y}{r}(u_{xy}u_{xr} - u_{xx}u_{yr}) + \\
&\quad + 2u_{xy}\frac{u_xu_y}{r^2} + 2u_{xr}\frac{u_xu_r}{r^2} + 2u_{yr}\frac{u_yu_r}{r^2} + (-u_{xx} - u_{yy} + u_{rr})\frac{u_r^2}{r^2} - \\
&\quad - u_{yy}\frac{u_x^2}{r^2} - u_{xx}\frac{u_y^2}{r^2} + \underbrace{\frac{u_x^2u_r}{r^3} + \frac{u_y^2u_r}{r^3} + \frac{u_r^3}{r^3}}_{\text{vgl. Term } F_1 \text{ in Gleichung (3.63)}}
\end{aligned}$$

Der Term F_1 wurde aber als verschwindend erkannt. Wir werden in den folgenden Abschnitten auf eine andere Weise vorgehen, und bekannte Lösungspotentiale in (3.7) einsetzen.

3.4.3 Verschiedene $SL_2(\mathbb{C})$ - und $PSL_2(\mathbb{C})$ -Einbettungen \mathbf{X} und ihre Kähler-Einstein-Metriken

Wir betrachten im Folgenden in Kapitel 4 wiederkehrende sphärische Varietäten, die hier als $G^{\mathbb{C}} = SL_2(\mathbb{C})$ -Einbettungen mit dichtem Orbit und trivialer, bzw. diskreter Isotropiegruppe auftreten. Im einzelnen sind dies die $SL_2(\mathbb{C})$ -Varietäten $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, $Q \subset \mathbb{P}^4$ und $H^{(1,1)} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Ferner wird die $PSL_2(\mathbb{C})$ -Varietät \mathbb{P}^3 auftauchen, mit formal demselben Kählerpotential wie auf der Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^4$. Die Berechnungen der reellen Ausdrücke in (x, y, r) wurden mit dem Formelmanipulationsprogramm Maple 10 der Firma Maplesoft, [Ma], ausgeführt.

Die Einbettung $SL_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$

Gebe Punkte in $\mathbf{X} := \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ wie üblich mit homogenen Koordinaten $[X^0 : X^1 : X^2][Y^0 : Y^1]$ an, und wähle den komplexen Atlas, der aus offenen Teilmengen wie $U_0 \times U'_0$ besteht, wobei $U_0 := \{X^0 \neq 0\}$ bzw. $U'_0 := \{Y^0 \neq 0\}$ auf dem zweitem Faktor, und analog für alle anderen möglichen Teilmengen. Definiere eine Wirkung $\Phi : SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ auf \mathbf{X} durch

$$\Phi(T, x) := [X^0 : aX^1 + cX^2 : bX^1 + dX^2][aY^0 + cY^1 : bY^0 + dY^1]$$

Die dichte Bahn ist $U := \Phi(SL_2(\mathbb{C}), x_0) = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \setminus (D_0 \cup D_1)$ bezüglich des Punktes $x_0 := [1 : 1 : 0][0 : 1]$, wobei $D_0 := \{X^0 = 0\}$ und $D_1 := \{X^1Y^2 - X^2Y^1 = 0\}$ Primdivisoren sind. Stelle eine Beziehung zwischen den Karten des Atlases von $SL_2(\mathbb{C})$ mit bestimmten offenen Teilmengen auf $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ vermöge des Isomorphismus Φ_{x_0} her.

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0|U_{11}} : U_{11} &\rightarrow U_1 \times \mathbb{P}^1 \setminus (D_0 \cup D_1) \\ T &\mapsto [1 : a : b][c : d] \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{X^1}{Y^0 X^0} & \frac{X^2}{Y^0 X^0} \\ \frac{Y^0 X^0}{X^1 Y^1 - X^2 Y^0} & \frac{Y^0 X^0}{X^1 Y^1 - X^2 Y^0} \end{array} \right) &\leftarrow [X^0 : X^1 : X^2][Y^0 : Y^1] \end{aligned}$$

was auch vollständig lokal in den betroffenen Umgebungen $U_1 \times U'_0 \setminus (D_0 \cup D_1)$ und $U_1 \times U'_1 \setminus (D_0 \cup D_1)$ für diese offene Teilmenge von $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ auf der rechten Seite ausgedrückt werden kann. Für die erste davon bedeutet es demnach

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0} : U_{11} &\rightarrow U_1 \times U'_0 \setminus (D_0 \cup D_1) \\ (w^1, w^2, w^3) &\mapsto \left(\frac{1}{w^1}, \frac{w^2}{w^1}, \frac{1 + w^2 w^3}{w^3 w^1} \right) \\ \left(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}, \frac{z^1}{z^3 - z^2} \right) &\leftarrow (z^1, z^2, z^3) \end{aligned}$$

Wir bestimmen das invariante Potential der Kähler-Einstein-Metrik als Funktion auf \mathbb{H}^3 . Dazu beginne mit dem lokalen Ausdruck des Kählerpotentials der Produkt Fubini-Study-Metrik von $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$

$$\ln(1 + |z^1|^2 + |z^2|^2)^3 + \ln(1 + |z^3|^2)^2$$

in gewissen komplexen Koordinaten, und schränke dies auf U ein. Danach ziehe es nach $SL_2(\mathbb{C})$ zurück, was zuerst nur lokal in einer offenen Kartenumgebung auf $SL_2(\mathbb{C})$ definiert ist, wie uns die Beziehung oben vorgibt, aber diese Funktion liefert uns die globale Potentialfunktion:

$$\phi(T) = \ln(1 + |a|^2 + |b|^2)^3 + \ln(|c|^2 + |d|^2)^2$$

die in den reellen Koordinaten auf \mathbb{H}^3 wie folgt aussieht:

$$u := \ln \left(1 + r + \frac{|z|^2}{r} \right)^3 + \ln \left(\frac{1}{r} \right)^2$$

Daraus berechnet man die Riemann'sche Hessesche, von der wir nur die nicht Null Beiträge aufschreiben

$$\begin{pmatrix} u_{11} - u_3 \Gamma_{11}^3 & u_{12} & u_{13} - u_1 \Gamma_{13}^1 \\ u_{21} & u_{22} - u_3 \Gamma_{22}^3 & u_{23} - u_2 \Gamma_{23}^2 \\ u_{31} - u_1 \Gamma_{31}^1 & u_{32} - u_2 \Gamma_{32}^2 & u_{33} - u_3 \Gamma_{33}^3 \end{pmatrix}$$

Wir lassen vorerst die Exponenten der beiden Summanden noch unbestimmt $A, B \in \mathbb{N}$ sein, weil in der Herleitung in Abschnitt 3.2.2 eine Quadratwurzel zum Verschwinden gebracht wurde, somit durchaus andere Exponenten auftreten könnten, und rechnen mit $u := \ln(1 + r + \frac{|z|^2}{r})^A + \ln(\frac{1}{r})^B$. Die klassische Lösung ist also u für $A = 3 \wedge B = 2$. Wir erhalten für beliebiges A, B :

$$\begin{aligned} \det((\nabla^2 u)_{ij}) &= \frac{1}{r^5(r + r^2 + |z|^2)^4} [(A|z|^2 + Ar^2 + B|z|^2 + Br^2 + Br) \cdot \\ &A \cdot (A(2r^2|z|^2 + r^4 + |z|^4) + \\ &+ B(\underbrace{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{=|z|^4}) + \\ &+ Br(|z|^2 + \underbrace{4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4}_{=4|z|^4}) + \\ &+ Br^2(6|z|^2) + \\ &+ Br^3(4|z|^2 + 1) + \\ &+ Br^4)] \end{aligned}$$

Dies verglichen mit

$$e^{-u} = \frac{r^{A+B}}{(r^2 + |z|^2 + r)^A}$$

liefert einen größeren Ausdruck in r und $|z|^2$ für $h' = \frac{1}{\det((\nabla^2 u)_{ij})e^u}$, der insbesondere für die klassische Lösung so umfangreich bestehen bleibt.

Die Einbettung $SL_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow Q \subset \mathbb{P}^4$

Die Quadrik Q in \mathbb{P}^4 werde in homogenen Koordinaten $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4]$ durch die Gleichung $X_0^2 = X_1X_4 - X_2X_3$ beschrieben. Definiere die Wirkung durch

$$\begin{aligned} \Phi : SL_2(\mathbb{C}) \times Q &\rightarrow Q \\ (T, [X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4]) &\mapsto [X_0 : T \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}] \end{aligned}$$

Für den Punkt $x_0 := [1 : 1 : 0 : 0 : 1] \in Q$ erhält man triviale Isotropiegruppe, und $U = \mathbf{x} \setminus D_0$.

Als klassisches Potential findet man $u = \ln(r + \frac{|z|^2}{r} + \frac{1}{r})^4$, genauso wie im $PSL_2(\mathbb{C})$ -Einbettungsbeispiel \mathbb{P}^3 unten. Dort steht auch die Berechnung von $\det(\nabla^2 u)$, e^{-u} und h' .

Die Einbettung $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow H^{(1,1)} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$

Die Gleichung der Hyperfläche $H^{(1,1)} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ in homogenen Koordinaten $[X_0 : X_1 : X_2][Y_0 : Y_1 : Y_2]$ lautet: $X_0Y_0 - X_1Y_2 + X_2Y_1 = 0$. Definiere eine Wirkung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times H^{(1,1)} &\rightarrow H^{(1,1)} \\ (T, [X_0 : X_1 : X_2][Y_0 : Y_1 : Y_2]) &\mapsto [X_0 : T \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}][Y_0 : T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}] \end{aligned}$$

was im Punkt $x_0 := [1 : 1 : 0][1 : 0 : 1] \in H^{(1,1)}$ triviale Isotropiegruppe hat.

Das klassische Lösungspotential ist

$$u = \ln \left(1 + r + \frac{|z|^2}{r} \right)^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right)^2$$

Man erhält für Konstanten A, B und die Funktion $u = \ln(1 + r + \frac{|z|^2}{r})^A + \ln(1 + \frac{1}{r})^B$ folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \det((\nabla^2 u)_{ij}) &= \frac{1}{r^5(1+r)^4(r^2 + |z|^2 + r)^4} \\ &\cdot (Br^2 + Br + B|z|^2 + A|z|^2 + Ar|z|^2 + Ar^2 + Ar^3)(\dots) \\ e^{-u} &= \frac{r^{A+B}}{(r^2 + |z|^2 + r)^A(1+r)^B} \end{aligned}$$

Daraus lässt sich $h' = \frac{1}{\det((\nabla^2 u)_{ij})e^u}$ in Abhängigkeit von A und B bestimmen, das auch für die klassische Lösung mit $A = 2 = B$ keinen kürzeren Ausdruck liefert, und er ist verschieden von den anderen Beispielen.

3.4.4 Die einfache Gruppe $\mathrm{PSU}(2)$

Diese Gruppe ist als $\mathrm{SU}(2)/Z(\mathrm{SU}(2)) = \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$ definiert. Ihre Komplexifizierung ist $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, dessen Elemente als Nebenklassen

$$T = \begin{pmatrix} \pm a & \pm b \\ \pm c & \pm d \end{pmatrix}$$

beschrieben werden können, und der homogene Raum $M = G^{\mathbb{C}}/G$ ist ebenfalls \mathbb{H}^3 . Der Grund dafür ist, dass die $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ -Wirkung χ auf \mathbb{H}^3 , die formal genauso wie in (3.56) gegeben wird, für jedes darstellende Element einer Klasse $\pm T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ dasselbe Ergebnis liefert, weil das unterschiedliche Vorzeichen in folgender Formel keinen Unterschied macht:

$$\chi_{z+jr}(T) := \frac{(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d})+a\bar{c}r^2}{|cz+d|^2+|c|^2r^2} + j \frac{r}{|cz+d|^2+|c|^2r^2}$$

Daher liefert es auch eine wohldefinierte, transitive und effektive Wirkung auf $M = \mathbb{H}^3$. Ferner kann $\mathrm{PSU}(2)$ mit $\mathrm{SO}(3)$ identifiziert werden.

Um explizite Rechnungen auszuführen, wählt man sich wieder einen Atlas auf PSL₂(C), ähnlich dem für SL₂(C) aus (3.60), nur mit dem Unterschied, dass die Ambiguität des Vorzeichens eines Repräsentanten einer Klasse aufgehoben werden muss. Zum Beispiel die Kartenumgebung PSL₂(C) ⊇ $\tilde{U}_{11} := \{a \neq 0\}$ mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_{11} : \tilde{U}_{11} &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ T &\mapsto (a^2, ab, ac) \\ \frac{\pm 1}{\sqrt{w^1}} \begin{pmatrix} w^1 & w^2 \\ w^3 & \frac{w^1 + w^2 w^3}{w^1} \end{pmatrix} &\longleftarrow (w^1, w^2, w^3) \end{aligned}$$

Die Einbettung PSL₂(C) ↪ P³

Bezeichne Punkte durch homogene Koordinaten [X⁰ : X¹ : X² : X³], und wähle die üblichen Koordinatenumgebungen U₀ := {X⁰ ≠ 0}, analog für die drei anderen Mengen, zusammen mit den kanonischen Homöomorphismen nach C³ wie immer. Gebe die Wirkung vor mit

$$\begin{aligned} \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ (T, [X^0 : X^1 : X^2 : X^3]) &\mapsto [(X^0 \ X^1) T : (X^2 \ X^3) T] \end{aligned}$$

von rechts also. Die offene Bahn von PSL₂(C) in P³ ist U := P³ \ D₁ bezüglich des Punktes x₀ := [1 : 0 : 0 : 1], und mit dem Divisor D₁ := {X⁰X³ - X¹X² = 0}, der auch eine abgeschlossene PSL₂(C)-Bahn darstellt. Via der Abbildung Φ_{x₀} erhält man einen Isomorphismus, der die Karten $\tilde{U}_{ij}, i, j = 1, 2$ auf PSL₂(C) nach dem Muster $\tilde{U}_{11} = \{a \neq 0\}$, mit bestimmten offenen Teilmengen auf P³ in Relation stellt, die hierbei gleichzeitig eine echte Teilmenge der jeweils zugehörigen Kartenumgebung ist, anders als im Fall SL₂(C), wo es zu Überlappungen zweier Kartenumgebungen von P² × P¹ kommt. Dies gilt natürlich nur für die gewählten Standardkarten auf den projektiven Räumen.

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0} : \text{PSL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{P}^3 \setminus D_1 \\ T &\mapsto [a : b : c : d] \\ \frac{\pm 1}{X^0 X^3 - X^1 X^2} \begin{pmatrix} X^0 & X^1 \\ X^2 & X^3 \end{pmatrix} &\longleftarrow [X^0 : X^1 : X^2 : X^3] \end{aligned}$$

und exemplarisch lokal

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0|_{\tilde{U}_{11}}} : \tilde{U}_{11} &\rightarrow U_0^{\mathbb{P}^3} \setminus D_1 \subset \mathbb{P}^3 \\ (w^1, w^2, w^3) &\mapsto \left(\frac{w^2}{w^1}, \frac{w^3}{w^1}, \frac{w^2 w^3 + w^1}{(w^1)^2} \right) \\ \left(\frac{1}{(z^3 - z^1 z^2)^2}, \frac{z^1}{(z^3 - z^1 z^2)^2}, \frac{z^2}{(z^3 - z^1 z^2)^2} \right) &\longleftarrow (z^1, z^2, z^3) \end{aligned}$$

Man kann beobachten, dass jedesmal, wenn a ≠ 0 für ein T ∈ PSL₂(C) gilt, das Bild automatisch in U₀ ⊂ P³ ist, analog in den anderen Fällen, und ebenso umgekehrt. Die Kartenumgebungen auf PSL₂(C) und auf P³ verhalten sich also sehr angepasst zueinander.

Das weitere Vorgehen ist fast das Gleiche als in den SL₂(C)-Einbettungen oben, nur mit kleineren Änderungen an manchen Stellen. Schränke auf die offene PSL₂(C)-Bahn U ⊆ P³ ein und ziehe ein lokal geschriebenes Potential der Fubini-Study Metrik

$$\ln(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)^4$$

von \mathbb{P}^3 in komplexen Koordinaten einer Karte dort zurück nach $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, wo es zuerst nur in einer Umgebung gegeben ist, und setze es von dort auf ganz $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ fort, zu einem globalen Potential

$$\phi(T) = 4 \ln(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)$$

Die Substitution der Koordinatenfunktionen x, y, r von \mathbb{H}^3 in diese $\mathrm{PSU}(2)$ -invariante Funktion führt auf

$$u = 4 \ln \left(r + \frac{|z|^2}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

somit sieht das Ergebnis zu Exponent $A \in \mathbb{N}$ des Potentials

$$u = \ln \left(r + \frac{|z|^2}{r} + \frac{1}{r} \right)^A$$

wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \det((\nabla^2 u)_{ij}) &= \frac{4A^3}{r^4(r^2 + |z|^2 + 1)^2} \\ e^{-u} &= \frac{r^A}{(r^2 + |z|^2 + 1)^A} \\ h' &= \frac{1}{\det(\nabla^2 u)e^u} = \frac{r^{A+4}(r^2 + |z|^2 + 1)^2}{4A^3(r^2 + |z|^2 + 1)^A} \end{aligned}$$

und für $A = 2$ finden wir den kürzesten Ausdruck für $h' = \frac{r^6}{32}$ und nicht für die klassische Lösung $A = 4$, denn da ist $h' = \frac{r^8}{256(r^2 + |z|^2 + 1)^2}$.

3.4.5 Interpretation der Beispiele

Man erkennt anhand der obigen Berechnungen, dass eine reelle Monge-Ampère-Gleichung vom Typ $\det((\nabla^2 u)_{ij}) = e^{-u}$, oder auch $\det((\nabla^2 u')_{ij}) = e^{-u'-h'}$ die Kähler-Einstein-Bedingung auf \mathbb{H}^3 an Potentiale u bzw. u' nicht korrekt beschreibt, da die obigen Potentiale jeweils Lösung sein müssten. h' kann auch nicht identifiziert werden, da die errechnete Unterschiedsfunktion h' stets eine andere ist. Insbesondere hat die Wahl der Exponenten A, B großen Einfluss auf den Unterschiedsfaktor von $\det(\nabla^2 u')$ und $e^{-u'}$. In [PS] ist im toroidalen horosphärischen Fall eine Gleichung hergeleitet worden, die einen Faktor zusätzlich hat, der von Liealgebradaten abhängig ist, und vergleichbar mit dem hier verwendeten $e^{-\ln h'}$ ist. Siehe Kapitel 2. Es sind echt transzendente Methoden verwendet worden, um auf reellen Monge-Ampère-Typ zu stoßen, wobei allerdings die dort behandelten toroidalen, horosphärischen Varietäten sehr nahe am torischen Fall liegen, weil sie Einbettungen von homogenen Torusbündeln sind. In [Bi1] wird für Komplexifizierungen $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ riemannscher symmetrischer Räume G/K von kompaktem Typ, was für das kompakte G und $K = \{e\}$ die hier geschilderte Situation enthält, ebenfalls eine Gleichung dieses Typs aufgestellt, wieder mit transzendenten Methoden, da man lokale, komplexe Koordinaten über die Exponentialabbildung verwendet. Die Gleichung hat jedoch Anpassungen an den einzusetzenden Funktionen nötig, ist daher nicht in unmittelbar zu gebrauchender Form wie im torischen Fall oder in (2.5) geschrieben worden.

Kapitel 4

Kähler-Metriken auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ -Varietäten ($n \geq 3$) und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$ -Varietäten

4.1 Einführung in diese Problemstellung

In diesem Kapitel sei stets

	$G^{\mathbb{C}}, H$	G
$n \geq 3$	$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$	$\mathrm{SU}(n)$
$n = 2$	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m, \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \right\} : \lambda \in \mathbb{C}^* \}$	$\mathrm{SU}(2) \times S^1$

mit G als maximale kompakte Untergruppe von $G^{\mathbb{C}}$, und H als abgeschlossene Stabilisatoruntergruppe von $G^{\mathbb{C}}$ gegeben, bezüglich der man den homogenen Raum bildet. Diese Unterscheidung ist nötig, weil man $G^{\mathbb{C}}/H$ als sphärischen Raum bekommen will, und es wäre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, und mit einer nur 2-dimensionalen Boreluntergruppe $T_2(\mathbb{C})$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ könnte man keine offene Bahn bekommen. Deswegen nimmt man im Fall $n = 2$ für $G^{\mathbb{C}}$ die Gruppe \mathbb{G}_m zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mit dazu, und teilt durch einen Torus H in jetzt $G^{\mathbb{C}} := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$, um $G^{\mathbb{C}}/H$ zu erhalten. Eine Boreluntergruppe $B \leq G^{\mathbb{C}}$ besitzt jetzt die Dimension 3 wie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Damit kann man eine Wirkung definieren, so dass $G^{\mathbb{C}}/H$ sphärisch und isomorph zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist, siehe unten. Statt des Torus $H_1 := H$, kann man auch alternativ einen Torus $H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \right\} : \lambda \in \mathbb{C}^* \}$ wählen, und zum selben Quotienten gelangen. Sei $\pi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$, bzw. $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H_i$ die kanonische Projektion in der jeweiligen Situation.

Zur Bestimmung des Quotienten $G^{\mathbb{C}}/H$, bzw. einer Darstellung des homogenen Raumes dazu, benutzt man für den Fall $n \geq 3$ den Vektorraum $V := \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$, und operiert mit $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ linear im ersten Faktor und kontragredient linear im zweiten Faktor auf V .

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times V &\rightarrow V \\ (T, v) &\mapsto (Tv^{(1)}, {}^t(T^{-1})v^{(2)}) \end{aligned}$$

Lege den Vektor $v_0 := (e_1, (e_1)^*) \in V$ fest, wobei e_i der i -te Standardbasisvektor von \mathbb{C}^n sei und e_i^* der zur Standardbasis i -te duale Basisvektor, und operiere darauf mit $G^{\mathbb{C}}$.

Damit bekommt man als Stabilisator: $H = \text{Stab}_{SL_n(\mathbb{C})}(v_0) = SL_{n-1}(\mathbb{C})$, und als Bahn: $Y := SL_n(\mathbb{C}).v_0 \cong G^{\mathbb{C}}/H$, und rechnet Folgendes nach:

$$Y = \{(x, y) \in V : \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1\}$$

Die Bahn kann als Quadrik in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$ aufgefasst werden, in dem man die lineare und die duale lineare Struktur vergisst.

Lemma 4.1. *Für $n \geq 3$ ist $SL_n(\mathbb{C})/SL_{n-1}(\mathbb{C})$ isomorph zu $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$, und es ist ein sphärischer homogener Raum.*

Details hierzu finden sich in mehreren am Lehrstuhl Prof. V. Batyrev verfassten Schriften. Im Fall $n = 2$ ergibt sich folgender homogener Raum:

Lemma 4.2. *Als Varietäten sind $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H \cong SL_2(\mathbb{C})$ isomorph. $SL_2(\mathbb{C})$ ist dadurch ein sphärischer homogener Raum.*

Beweis. Sei

$$T := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

ein typisches Element aus $SL_2(\mathbb{C})$. Beobachte zuerst, dass H_i , $i = 1, 2$ nicht normal in $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$ ist, weswegen man keine Faktorgruppe erhält. Für H_1 zum Beispiel, gilt mit einem beliebigen Element $(T, t) \in SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, t \right) \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \right) \left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, t^{-1} \right) = \\ \left(\begin{pmatrix} ad\lambda - bc\lambda^{-1} & ab(\lambda^{-1} - \lambda) \\ cd(\lambda - \lambda^{-1}) & -bc\lambda + ad\lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \right) \end{aligned}$$

für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Lasse $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$ auf der Menge $SL_2(\mathbb{C})$ wirken, durch:

$$\begin{aligned} (SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m) \times SL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow SL_2(\mathbb{C}) \\ (T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, t), T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} &\mapsto TT' \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} (aa' + bc')t^{-1} & (ab' + bd')t \\ (ca' + dc')t^{-1} & (cb' + dd')t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies liefert im Basispunkt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ den Stabilisator H_1 . Wenn man alternativ durch die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ von rechts her operiert, so erhielte man als Stabilisator in der Einheitsmatrix H_2 . Als Boreluntergruppe B kann man sich die Menge aller Paare in $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$ der Form

$$\left(\begin{pmatrix} \zeta & \alpha \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, t \right) \quad \zeta \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{G}_m$$

wählen. Als offene B -Bahn findet man $SL_2(\mathbb{C}) \setminus (\mathbb{V}(T_{21}) \cup \mathbb{V}(T_{22}))$, wobei $\mathbb{V}(T_{21}) \subset SL_2(\mathbb{C})$ die Zariski-abgeschlossene Menge der Matrizen T mit Koordinatenfunktion $T_{21} = 0$ sei, und $\mathbb{V}(T_{22})$ entsprechend. Dass diese beiden Divisoren B -Bahnen sind, sieht man leicht an der

Berechnung des Bildes eines beliebigen Punktes $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ unter einem allgemeinen Element von B :

$$\begin{pmatrix} \zeta & \alpha \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta a \lambda^{-1} + \alpha c \lambda^{-1} & \zeta b \lambda + \alpha d \lambda \\ \zeta^{-1} c \lambda^{-1} & \zeta^{-1} d \lambda \end{pmatrix}$$

Es ist offenkundig, dass dies für $c = 0$ bzw. $d = 0$ unter der Wirkung auch so bleibt. Es ist weiterhin klar: $\mathbb{V}(T_{21}) \cap \mathbb{V}(T_{22}) = \emptyset$. Weitere abgeschlossene B -Bahnen gibt es nicht, und die offene Bahn ist das Komplement zu beiden Divisoren, denn für den Punkt $T_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ gilt:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \setminus (\mathbb{V}(T_{21}) \cup \mathbb{V}(T_{22})) = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis dazu:

“ \supseteq ”: Klar durch Bestimmung des Bildes von T_0 unter einem allgemeinen Element von B wie eben: $\begin{pmatrix} (\zeta + \alpha)t^{-1} & \alpha t \\ \zeta^{-1}t^{-1} & \zeta^{-1}t \end{pmatrix}$, was für die zulässigen $\zeta, t \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{C}$ stets in der offenen Menge liegt.

“ \subseteq ”: Sei T beliebig gewählt aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Dann ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für ein Element aus B , das den Punkt T_0 auf T überführt:

$$cd = \zeta^{-2}, \quad \frac{c}{d} = t^{-2}, \quad \alpha = \frac{bc}{\sqrt{cd}}$$

für die Lösungen ζ, t, α existieren. □

Proposition 4.1. Es gibt eine Bijektion (für $n \geq 3$)

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathrm{SU}(n) \setminus \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) / \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C}) &\rightarrow \{(x, y) \in N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0\} \\ Z, W \bmod \mathrm{SU}(n) &\mapsto (-\log \|Z\|^2, -\log \|W\|^2) \end{aligned}$$

für $Z, W \in Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$ wie in Lemma 4.1 behauptet. Der Fall $n = 2$ wird entsprechend nach Lemma 4.2 und dem noch folgenden Unterkapitel 4.2.3 beschrieben. Der Bildraum kann dabei mit dem Bewertungskegel im mit \mathbb{R} tensorierten Gitter $N_{\mathbb{R}}$ identifiziert werden.

Beweis. Es sind $-\log \|Z\|^2$ und $-\log \|W\|^2$ offensichtlich $\mathrm{SU}(n)$ -invariante Funktionen von Y nach \mathbb{R} , da $\|Z\|^2 \neq 0 \neq \|W\|^2$ gelten muss. Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das (hermitesche) Standardskalarprodukt auf \mathbb{C}^n mit konjugiert linearem zweitem Eintrag bezeichnet, so kann man schreiben:

$$1 = \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 = |\langle Z, \bar{W} \rangle|^2 \leq \|Z\|^2 \|\bar{W}\|^2$$

Daraus folgt durch Logarithmieren und Multiplikation mit -1 :

$$0 \geq -\log \|Z\|^2 - \log \|W\|^2$$

Also liegt das Bild im Bereich $\{(x, y) : x + y \leq 0\}$. Zur Injektivität seien zwei gleiche Bildpunkte $(x, y) = (x', y')$ mit $x + y \leq 0$ und $x' + y' \leq 0$ gegeben, für die als Bilder gilt: $x = -\log \|Z\|^2, y = -\log \|W\|^2$, wie auch $x' = -\log \|Z'\|^2, y' = -\log \|W'\|^2$, für gewisse $(Z, W), (Z', W') \in Y$. Also sind bereits die Längen $\|Z\|^2 = \|Z'\|^2, \|W\|^2 = \|W'\|^2$ gleich. Daher gibt es unitäre Matrizen $U_1, U_2 \in \mathrm{SU}(n)$, so dass $Z' = U_1 Z$ und $W' = {}^t U_2^{-1} W$ gilt. Weiterhin ist $e^{\frac{x+y}{2}} = e^{\frac{x'+y'}{2}}$, was nach Definition gleich $\frac{1}{\|Z\| \|W\|} = \frac{1}{\|Z'\| \|W'\|}$ ist. Weil aber die Paare

von Vektoren (Z, W) , (Z', W') aus Y kommen, folgern wir mit Hilfe der Relation dort weiter, dass es gleich $\frac{\langle Z, \bar{W} \rangle}{\|Z\| \|W\|} = \frac{\langle Z', \bar{W}' \rangle}{\|Z'\| \|W'\|}$ ist, was aber jeweils Cosinus von Winkeln $\beta, \beta' \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist, die übereinstimmen. Daher ist $U_1 = \lambda^t U_2^{-1}$ und wegen der Längengleichheit sogar $\lambda = 1$, d.h. $Z' = U_1 Z \wedge W' = U_1 W$.

Zur Surjektivität: Wähle hierfür einen Punkt (x, y) mit $x+y \leq 0$ beliebig. Man findet einen Vektor (Z, W) mit $-\log \|Z\|^2 = x$, $-\log \|W\|^2 = y$ in Y , das heißt, er muss $\sum_{i=1}^n z_i w_i = 1$ erfüllen. Setze $Z := (z_1, z_2, 0, \dots, 0)$ und $W := (w_1, w_2, 0, \dots, 0)$, als Koordinatenvektoren in \mathbb{C}^n interpretiert. Die Bedingungen an $(Z, W) \in Y$ sind:

$$\begin{aligned} x &\stackrel{(!)}{=} -\log(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = -\log(\|Z\|^2) \\ y &\stackrel{(!)}{=} -\log(|w_1|^2 + |w_2|^2)^2 = -\log(\|W\|^2) \\ 1 &\stackrel{(!)}{=} z_1 w_1 + z_2 w_2 \end{aligned}$$

Wähle eine Matrix $\begin{pmatrix} z_1 & -w_2 \\ z_2 & w_1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, denn dann gilt die dritte Bedingung automatisch.

Multipliziere die Spalte eins mit $\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\|Z\|}$ und Spalte zwei mit $\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\|W\|}$. Dann sind die beiden Spaltennormen

$$\begin{aligned} \sqrt{|z_1|^2 \frac{e^{-x}}{\|Z\|^2} + |z_2|^2 \frac{e^{-x}}{\|Z\|^2}} &= e^{-\frac{x}{2}} \frac{\|Z\|}{\|Z\|} = e^{-\frac{x}{2}} \\ \sqrt{|w_1|^2 \frac{e^{-y}}{\|W\|^2} + |w_2|^2 \frac{e^{-y}}{\|W\|^2}} &= e^{-\frac{y}{2}} \frac{\|W\|}{\|W\|} = e^{-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

woraus sich die ersten beiden Bedingungen erfüllen, und die Dritte bleibt unverändert gültig, denn:

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\|Z\|} & -w_2 \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\|W\|} \\ z_2 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\|Z\|} & w_1 \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\|W\|} \end{pmatrix} = z_1 w_1 \frac{e^{-\frac{x+y}{2}}}{\|Z\| \|W\|} + w_2 z_2 \frac{e^{-\frac{x+y}{2}}}{\|Z\| \|W\|} = \frac{e^{-\frac{x+y}{2}}}{\|Z\| \|W\|} = 1$$

Also hat man (Z, W) gefunden, mit

$$\begin{aligned} Z &:= \left(z_1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\|Z\|}, z_2 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\|Z\|}, 0, \dots, 0 \right) \\ W &:= \left(w_1 \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\|W\|}, w_2 \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\|W\|}, 0, \dots, 0 \right) \end{aligned}$$

für eine beliebige $SL_2(\mathbb{C})$ -Matrix $\begin{pmatrix} z_1 & -w_2 \\ z_2 & w_1 \end{pmatrix}$. Falls $x = 0$ oder $y = 0$ ist, so setze $Z = 0$ bzw. $W = 0$. Zusammen ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^n z_i w_i = 1$$

wie in Y erforderlich. □

4.2 Die Bestimmung der invarianten Volumenform und der Ersetzungsregeln

4.2.1 Ersetzungsregeln für Y in den Fällen $n \geq 3$

Betrachte die affine Quadrik Y in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$, $\forall n \geq 3$, was als Hyperfläche mit quadratischem, irreduziblem definierendem Polynom eine Varietät der Dimension $2n - 1$ ist, wobei man die natürlichen Koordinatenfunktionen in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$ mit $(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$ bezeichnet. Wichtig dabei ist die Unterteilung in zwei Klassen, die der bereits aufgestellten Gleichung genügen:

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^n z_i w_i = 1$$

Als abgeleitete Gleichung ergibt sich folgende Bedingung an die Differentiale

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^n w_i dz_i + \sum_{i=1}^n z_i dw_i = 0$$

Es tauchen verschiedene $(2n - 1)$ -Formen auf, die jeweils eine andere Variable nicht als Basiskovektor, sondern als multiplikativen Vorfaktor besitzen. Diese wollen wir ineinander umrechnen können. Dies ist eine Fähigkeit, die bei den in Abschnitt 4.3 folgenden Berechnungen wichtig sein wird. Im weiteren Verlauf werden die folgenden Umrechnungsformeln nur noch kurz Ersetzungsregeln genannt.

Multipliziere dazu die Gleichung (4.3) mit den drei folgenden $(2n - 2)$ -Formen,

$$\begin{aligned} & (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge dw_{l-1} \wedge dw_{l+1} \wedge \dots \wedge dw_n) = \\ & = (dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_k \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge d\check{w}_l \wedge \dots \wedge dw_n) \\ & (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_{l-1} \wedge dz_{l+1} \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n) = \\ & = (dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_k \wedge \dots \wedge d\check{z}_l \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n) \\ & (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge d\check{w}_k \wedge \dots \wedge d\check{w}_l \wedge \dots \wedge dw_n) \end{aligned}$$

Es fehlen also stets zwei andere Basiskovektoren, wodurch eine Umrechnung stattfinden kann.

Die erste Relation von $(2n - 1)$ -Formen lautet wie folgt:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & (-1)^{n+l-2} z_l (dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_k \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n) + \\ & + (-1)^{k-1} w_k (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge d\check{w}_l \wedge \dots \wedge dw_n) = 0 \end{aligned}$$

Für das zweite Produkt ergibt sich

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & \left((-1)^{k-1} w_k (dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_l \wedge \dots \wedge dz_n) + \right. \\ & \left. + (-1)^{l-2} w_l (dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_k \wedge \dots \wedge dz_n) \right) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n) = 0 \end{aligned}$$

Genauso multipliziere die differentielle Bedingung (4.3) mit der dritten Form, so erhält man als dritte Regel

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge \left((-1)^{n+k-1} z_k dw_1 \wedge \dots \wedge d\check{w}_l \wedge \dots \wedge dw_n + \right. \\ & \left. + (-1)^{n+l-2} z_l dw_1 \wedge \dots \wedge d\check{w}_k \wedge \dots \wedge dw_n \right) \end{aligned}$$

4.2.2 Die invariante Volumenform für Y , $n \geq 3$

Wir konstruieren hier eine invariante, algebraisch definierte $(2n - 1)$ -Differentialform Ω auf Y , die uns die gesuchte Volumenform durch $\Omega \wedge \bar{\Omega}$ bringen wird. Setze an mit:

$$(4.7) \quad \omega_Y = \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n}{\left(\sum_{i=1}^n z_i w_i - 1\right)}$$

Lemma 4.3. ω_Y ist eine meromorphe, $SL_n(\mathbb{C})$ -invariante $2n$ -Form vom Variablentyp (n, n) auf $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$, mit einem Pol erster Ordnung entlang Y , und holomorph außerhalb von Y .

Beweis. $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ sind globale Koordinaten auf \mathbb{C}^{2n} , was man auch als komplexen Vektorraum auffassen kann. Daraus ersieht man, dass die $2n$ -Form im Zähler von ω_Y invariant sein muss, auch wenn man auf den beiden Sätzen von Variablen (Z, W) mit $SL_n(\mathbb{C})$ linear und kontragredient operiert, da die Determinante der beiden einzeln schon eins ist. Für den Nenner rechnet man schnell nach:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (TZ)_i ({}^t T^{-1} W)_i - 1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n (T_{ij} z_j) (({}^t T^{-1})_{ik} w_k) - 1 = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n (T^{-1})_{ki} T_{ij} z_j w_k = \sum_{j,k=1}^n \delta_{jk} z_j w_k - 1 = \sum_{j=1}^n z_j w_j - 1 \end{aligned}$$

Alles andere ist offenkundig richtig. □

Proposition 4.2. Die holomorphe, $SL_n(\mathbb{C})$ -invariante Volumenform $|\Omega|^2$ auf Y lautet

$$\begin{aligned} \{w_i \neq 0\} : |\Omega_{w_i}|^2 &:= \Omega_{w_i} \wedge \overline{\Omega_{w_i}} = \\ &= \frac{1}{|w_i|^2} |dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n|^2 \wedge |dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n|^2 \\ \{z_j \neq 0\} : |\Omega_{z_j}|^2 &:= \Omega_{z_j} \wedge \overline{\Omega_{z_j}} = \\ &= \frac{1}{|z_j|^2} |dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n|^2 \wedge |dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n|^2 \end{aligned}$$

in angegebenen offenen Umgebungen von Y .

Beweis. Aus der zweiten Adjunktionsformel ([GH] 1.1) ergibt sich wegen

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^n z_i w_i - 1)}{\partial z_j} = w_j, \quad \frac{\partial(\sum_{i=1}^n z_i w_i - 1)}{\partial w_k} = z_k$$

die Ausübbarkeit der Poincaré Residuumsabbildung

$$\begin{aligned} \omega_Y \xrightarrow{\text{P.R.}} \omega'_Y &:= (-1)^{j-1} \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge \check{z}_j \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n}{w_j} \Big|_Y \\ \omega_Y \xrightarrow{\text{P.R.}} \omega''_Y &:= (-1)^{k-1} \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge \check{w}_k \wedge \dots \wedge dw_n}{z_k} \Big|_Y \end{aligned}$$

was für die richtige Wahl offener Teilmengen $\{z_k \neq 0\}$ bzw. $\{w_j \neq 0\}$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$, eine wohldefinierte, holomorphe $(2n - 1)$ -Form auf Y hergibt. Die Invarianz unter der $SL_n(\mathbb{C})$ -

Wirkung bleibt erhalten, da die abgespaltene Einsform $\frac{d(\sum_{i=1}^n z_i w_i - 1)}{(\sum_{i=1}^n z_i w_i - 1)}$ invariant ist, wobei man dafür die Relation

$$(4.8) \quad \omega_Y = \frac{d(\sum_{i=1}^n z_i w_i - 1)}{(\sum_{i=1}^n z_i w_i - 1)} \wedge \omega'_Y \text{ bzw. } \omega''_Y$$

vorfindet. Spezifiziere die Formen ω'_Y und ω''_Y genauer als Ω_{w_i} und Ω_{z_j} :

$$\begin{aligned} \{w_i \neq 0\} : \Omega_{w_i} &= \frac{(-1)^i}{w_i} (dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_i \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n) \\ \{z_j \neq 0\} : \Omega_{z_j} &= \frac{(-1)^{j-1}}{z_j} (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge (dw_1 \wedge \dots \wedge d\check{w}_j \wedge \dots \wedge dw_n) \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit einer daraus gebildeten globalen Form auf Y ist gesichert, weil wegen der drei Ersetzungsregeln ein Übergang zwischen all diesen lokalen $(2n - 1)$ -Formen auf dem Schnitt der jeweiligen Definitionsbereiche möglich wird.

Von Ω ausgehend, konstruieren wir die invariante Volumenform von Grad $(4n - 2)$ aus der Behauptung durch $|\Omega|^2 := \Omega \wedge \bar{\Omega}$. Das (zweite) Gleichheitszeichen ergibt sich dort jeweils aus dem positiven Signum der Permutation von

$$\begin{aligned} \Omega_{w_i} \wedge \bar{\Omega}_{w_i} &= \\ &= \underbrace{((-1)^n)^{n-1}}_{=+1} \frac{1}{|w_i|^2} |dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_i \wedge \dots \wedge dz_n|^2 \wedge |dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n|^2 \end{aligned}$$

für Ω_{w_i} , analog bei Ω_{z_j} . Insbesondere gilt:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} |w_i|^2 |\Omega|^2 &= |dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_i \wedge \dots \wedge dz_n|^2 \wedge |dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n|^2 \\ |z_j|^2 |\Omega|^2 &= |dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n|^2 \wedge |dw_1 \wedge \dots \wedge d\check{w}_j \wedge \dots \wedge dw_n|^2 \end{aligned}$$

□

Desweiteren ist folgendes technisches Lemma nützlich beim Beschreiben von Volumenformen in dz_i, dw_j durch Ω .

Lemma 4.4. *Es gelten folgende Vorzeichenregeln:*

$$\begin{aligned} |dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_i \wedge \dots \wedge dz_n|^2 &= dz_1 \wedge \dots \wedge d\check{z}_i \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\check{\bar{z}}_i \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n = \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\check{\bar{z}}_i \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n|^2 &= dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}_n = \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n} dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n \end{aligned}$$

was zusammengesetzt und mit Hilfe obiger Proposition 4.2

$$\begin{aligned} |\Omega_{w_i}|^2 |w_i|^2 &= \\ &= (-1)^{n^2+1} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \check{v} \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \wedge \\ &\wedge dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n \end{aligned}$$

liefert.

Beweis. Durch Nachrechnen der einzelnen Permutationen. □

4.2.3 Volumenform und Ersetzungsregeln für den homogenen Raum $SL_2(\mathbb{C})$

Die invariante Volumenform für $SL_2(\mathbb{C})$

Die Existenz einer bis auf konstanten Vorfaktor eindeutigen, biinvarianten Volumenform ist für die komplexe Liegruppe $SL_2(\mathbb{C})$ aus der Theorie klar, und kann durch Links- bzw. Rechts-translationen einer Volumenform in der Liealgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ angegeben werden, die wegen der Unimodularität von $SL_2(\mathbb{C})$ auch biinvariant ist. Um eine praktische, lokale Darstellung zu erzielen, ohne transzendente Methoden, gehen wir ähnlich wie für Y vor.

Betrachte hier die affine Quadrik $SL_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$, mit den Koordinatenfunktionen T_{ij} , $i, j = 1, 2$ von $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$, die der Bedingung: $T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$ genügen. $SL_2(\mathbb{C})$ kann analog zu Y in den Fällen $n \geq 3$ aus Abschnitt 4.2.1 als Hyperfläche beschrieben werden, wenn man die Gestalt der Elemente in $SL_2(\mathbb{C})$ anders als üblich vorgibt:

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : \det((T_{ij})) = 1 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & -w_2 \\ z_2 & w_1 \end{pmatrix} : z_1 w_1 + z_2 w_2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

Die Wirkung von $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$ auf $SL_2(\mathbb{C})$, Elemente als Vierervektoren $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ aufgefasst, transformiert sich so zu

$$\begin{aligned} (SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m) \times SL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow SL_2(\mathbb{C}) \\ ((T, t), \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}) &\mapsto \begin{pmatrix} t & & & \\ & t & & \\ & & t^{-1} & \\ & & & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & & & \\ & c & -d & \\ & a & -b & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Determinante der Matrizen, die die Operation hierbei beschreiben, ist gleich eins. Setze

$$\begin{aligned} (4.10) \quad \omega_{SL_2(\mathbb{C})} &:= \frac{dT_{11} \wedge dT_{12} \wedge dT_{21} \wedge dT_{22}}{(T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} - 1)} \\ &= - \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_1 \wedge dw_2}{(z_1 w_1 + z_2 w_2 - 1)} \end{aligned}$$

Man hat es im Vergleich mit Y in den Fällen $n \geq 3$ mit einem zusätzlichen Minuszeichen zu tun, ansonsten genauso wie dort. Der Deutlichkeit halber und als Beispiel, soll es dennoch ausgeführt werden.

Lemma 4.5. $\omega_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ ist eine meromorphe, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$ -invariante 4-Form vom Variablentyp $(2, 2)$, bezüglich der Koordinaten (z_1, z_2, w_1, w_2) , auf $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$ mit einem Pol erster Ordnung entlang $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ versehen, und holomorph außerhalb von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$.

Beweis. Der Zähler ist eine 4-Form in \mathbb{C}^4 , die mit Multiplikation mit der Determinante auf die Wirkung durch $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$ antwortet, wie in Lemma 4.2 für zwei zweikomponentige Vektoren $(Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix})$, hier in \mathbb{C}^4 als Vierervektor $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ aufgefasst. Die Matrizen aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m$, die diese Wirkung ausüben, haben aber Determinante eins, wie oben beschrieben. Der Nenner ist $\det((T_{ij})) - 1$, was selbstverständlich eigenständig invariant bleibt, und es folgt die behauptete Invarianz von $\omega_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$. Alles Andere ist klar. \square

Proposition 4.3. Die holomorphe, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -invariante Volumenform auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ als homogenem Raum lautet

$$\begin{aligned} \{w_1 \neq 0\} & \quad |\Omega_{w_1}|^2 = \frac{|dz_2 \wedge dw_1 \wedge dw_2|^2}{|w_1|^2} \\ \{z_2 \neq 0\} & \quad |\Omega_{z_2}|^2 = \frac{|dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_1|^2}{|z_2|^2} \\ \{w_2 \neq 0\} & \quad |\Omega_{w_2}|^2 = \frac{|dz_1 \wedge dw_1 \wedge dw_2|^2}{|w_2|^2} \\ \{z_1 \neq 0\} & \quad |\Omega_{z_1}|^2 = \frac{|dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2|^2}{|z_1|^2} \end{aligned}$$

in den ausgewählten offenen Umgebungen geschrieben.

Beweis. Unter der Poincaréschen Residuumsabbildung wie in Proposition 4.2 erhält man lokal in $\{T_{22} \neq 0\}$, $\{T_{21} \neq 0\}$, $\{T_{12} \neq 0\}$ und $\{T_{11} \neq 0\}$ die folgenden 3-Formen

$$\begin{aligned} \Omega_{T_{22}} & : = \frac{dT_{12} \wedge dT_{21} \wedge dT_{22}}{T_{22}} = -\frac{dz_2 \wedge dw_1 \wedge dw_2}{w_1} \\ \Omega_{T_{21}} & : = \frac{dT_{11} \wedge dT_{21} \wedge dT_{22}}{T_{21}} = \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_1}{z_2} \\ \Omega_{T_{12}} & : = -\frac{dT_{11} \wedge dT_{12} \wedge dT_{22}}{T_{12}} = \frac{dz_1 \wedge dw_1 \wedge dw_2}{w_2} \\ \Omega_{T_{11}} & : = -\frac{dT_{11} \wedge dT_{12} \wedge dT_{21}}{T_{11}} = -\frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2}{z_1} \end{aligned}$$

Beachte, dass Vorzeichen aufgrund des Vorfaktors bei der P.R.-Abbildung $(-1)^{j-1}$ entstehen können, aber auch aufgrund der Ableitung der Determinantenrelation im Nenner. Beobachte ferner, dass man sich ein Minuszeichen Unterschied in der Konvention bei Y bei Wahl von $n = 2$ einhandelt. Durch Bildung der Volumenformen in den lokalen Umgebungen mit $w_1 \neq 0$, etc., verschwindet aber jegliches Vorzeichen wieder, so dass man hier die gleiche Gestalt wie bei Y für $n \geq 3$, nur eben für $n = 2$ erhält. \square

Ersetzungsregeln für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Aus der differentiellen Bedingung für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$: $T_{22}dT_{11} - T_{12}dT_{21} + T_{11}dT_{22} - T_{21}dT_{12} = 0$, bzw. $w_1dz_1 + w_2dz_2 + z_1dw_1 + z_2dw_2 = 0$, ergeben sich die Ersetzungsregeln wie oben durch

Multiplikation mit einer entsprechenden 2-Form, so dass eine Beziehung zwischen zwei 3-Formen offenbar wird (für Koordinaten (z_1, z_2, w_1, w_2)):

(4.11)	Multiplikation mit	Ersetzungsregel
	$dz_1 \wedge dz_2$	$z_1 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_1 + z_2 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2 = 0$
	$dz_1 \wedge dw_1$	$-w_2 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_1 + z_2 dz_1 \wedge dw_1 \wedge dw_2 = 0$
	$dz_1 \wedge dw_2$	$-w_2 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2 - z_1 dz_1 \wedge dw_1 \wedge dw_2 = 0$
	$dz_2 \wedge dw_1$	$w_1 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_1 + z_2 dz_2 \wedge dw_1 \wedge dw_2 = 0$
	$dz_2 \wedge dw_2$	$w_1 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2 - z_1 dz_2 \wedge dw_1 \wedge dw_2 = 0$
	$dw_1 \wedge dw_2$	$w_1 dz_1 \wedge dw_1 \wedge dw_2 + w_2 dz_2 \wedge dw_1 \wedge dw_2 = 0$

Diese Regeln finden sich genauso bei denen für Y wenn man $n = 2$ setzt, da die Relation (4.2) und die differentielle Relation (4.3) in allen betrachteten Fällen $n \geq 2$ übereinstimmen.

4.3 Berechnung des Operators A' im allgemeinen Fall $n \geq 3$

Wir wollen den partiellen Ableitungsoperator A' bestimmen, der die Wirkung von $\partial\bar{\partial}$ auf einer $SU(n)$ -invarianten Potentialfunktion f beschreibt und in die Aufstellung der Einsteingleichung eingehen wird. Dazu führt man auf der Quadrik Y in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$ für die kanonischen (affinen) Koordinaten $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ folgende Abkürzungen ein:

$$\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i, \quad \|W\|^2 = \sum_{i=1}^n w_i \bar{w}_i,$$

und Differentiale bezüglich ∂ und $\bar{\partial}$:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\|Z\|^2 &= \sum_{i=1}^n z_i d\bar{z}_i, & \bar{\partial}\|W\|^2 &= \sum_{i=1}^n w_i d\bar{w}_i. \\ \partial\|Z\|^2 &= \sum_{i=1}^n \bar{z}_i dz_i, & \partial\|W\|^2 &= \sum_{i=1}^n \bar{w}_i dw_i \end{aligned}$$

Außerdem benötigen wir später auch:

$$\partial\bar{\partial}\|Z\|^2 = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i, \quad \partial\bar{\partial}\|W\|^2 = \sum_{i=1}^n dw_i \wedge d\bar{w}_i$$

Als reelle, invariante Koordinaten wählt man x, y wie folgt:

$$(4.12) \quad x := -\log \|Z\|^2 \quad y := -\log \|W\|^2$$

Also:

$$e^x = \frac{1}{\|Z\|^2}, \quad e^y = \frac{1}{\|W\|^2}$$

und mit Vorteil kann benutzt werden:

$$\begin{aligned} \partial x &= -\frac{\partial\|Z\|^2}{\|Z\|^2} & \bar{\partial} x &= -\frac{\bar{\partial}\|Z\|^2}{\|Z\|^2} \\ \partial y &= -\frac{\partial\|W\|^2}{\|W\|^2} & \bar{\partial} y &= -\frac{\bar{\partial}\|W\|^2}{\|W\|^2} \end{aligned}$$

Das Ziel ist, für eine reellwertige Funktion $f(x, y)$ auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0\}$, nach Proposition 4.1, den Differentialoperator $A'(f)$ in folgender Gleichung zu bestimmen:

$$(\partial\bar{\partial}f)^{2n-1} = A'(f)|\Omega|^2$$

Beginnen wir mit $\bar{\partial}f$:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}f &= \bar{\partial}f(-\log \|Z\|^2, -\log \|W\|^2) = \\ &= -f_x \cdot \frac{1}{\|Z\|^2}(\bar{\partial}\|Z\|^2) - f_y \cdot \frac{1}{\|W\|^2}(\bar{\partial}\|W\|^2) = \\ &= -f_x e^x(\bar{\partial}\|Z\|^2) - f_y e^y(\bar{\partial}\|W\|^2)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $\partial\bar{\partial}f$ folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}(4.13) \quad \partial\bar{\partial}f &= f_{xx}\partial x \wedge \bar{\partial}x + f_{yy}\partial y \wedge \bar{\partial}y + f_{yx}\partial y \wedge \bar{\partial}x + f_{xy}\partial x \wedge \bar{\partial}y - \\ &\quad - f_x\partial\bar{\partial}x - f_y\partial\bar{\partial}y = \\ &= \frac{f_{xx} + f_x}{\|Z\|^4}(\partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2) + \frac{f_{yy} + f_y}{\|W\|^4}(\partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2) + \\ &\quad + \frac{f_{xy}}{\|Z\|^2\|W\|^2}(\partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2) + \frac{f_{xy}}{\|Z\|^2\|W\|^2}(\partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2) - \\ &\quad - \frac{f_x}{\|Z\|^2}(\partial\bar{\partial}\|Z\|^2) - \frac{f_y}{\|W\|^2}(\partial\bar{\partial}\|W\|^2)\end{aligned}$$

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$\begin{aligned}\omega_1 &:= \frac{f_{xx} + f_x}{\|Z\|^4}(\partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2) + \frac{f_{yy} + f_y}{\|W\|^4}(\partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2) + \\ &\quad + \frac{f_{xy}}{\|Z\|^2\|W\|^2}(\partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2) + \frac{f_{xy}}{\|Z\|^2\|W\|^2}(\partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2) \\ \omega_2 &:= \frac{f_x}{\|Z\|^2}(\partial\bar{\partial}\|Z\|^2) + \frac{f_y}{\|W\|^2}(\partial\bar{\partial}\|W\|^2)\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass für das Quadrat von ω_1 gilt:

$$\omega_1^2 = 2 \left(\frac{(f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2}{\|Z\|^4\|W\|^4} \right) \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2$$

Lemma 4.6. *Mit den Festsetzungen von ω_1 oben, und den beiden Summanden*

$$\begin{aligned}\omega'_2 &:= \frac{f_x}{\|Z\|^2}(\partial\bar{\partial}\|Z\|^2) \\ \omega''_2 &:= \frac{f_y}{\|W\|^2}(\partial\bar{\partial}\|W\|^2)\end{aligned}$$

von ω_2 , erhält man die Behauptung:

$$\omega_1^3 = 0, \quad (\omega'_2)^{n+1} = (\omega''_2)^{n+1} = 0$$

und alle höheren Potenzen dieser Formen verschwinden ebenso.

Beweis. Um die erste Gleichung einzusehen, schreibe zunächst ω_1^2 auf, und beobachte, dass aus der allgemeinen Tatsache, dass das Dachprodukt einer Einsform α mit sich selber stets Null ergibt, $\alpha \wedge \alpha = 0$, der Ausdruck sich wegen gleichlautender Einsformen um Einiges reduziert. Daher hat man noch übrig:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= ((f_{xx} + f_x)\partial x \wedge \bar{\partial}x + (f_{yy} + f_y)\partial y \wedge \bar{\partial}y + \\ &\quad + f_{xy}\partial x \wedge \bar{\partial}y + f_{yx}\partial y \wedge \bar{\partial}x)^2 = \\ &= (f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y)\partial x \wedge \bar{\partial}x \wedge \partial y \wedge \bar{\partial}y + \\ &\quad + (f_{yy} + f_y)(f_{xx} + f_x)\partial y \wedge \bar{\partial}y \wedge \partial x \wedge \bar{\partial}x + \\ &\quad + f_{xy}f_{yx}\partial x \wedge \bar{\partial}y \wedge \partial y \wedge \bar{\partial}x + f_{yx}f_{xy}\partial y \wedge \bar{\partial}x \wedge \partial x \wedge \bar{\partial}y = \\ &= 2((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2)\partial x \wedge \bar{\partial}x \wedge \partial y \wedge \bar{\partial}y = \\ &= 2((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2)e^{2(x+y)}\partial\|Z\| \wedge \bar{\partial}\|Z\| \wedge \partial\|W\| \wedge \bar{\partial}\|W\| \end{aligned}$$

Es wird ω_1^3 sofort Null sein, da alle Einsformen schon in dieser Vierform auftreten, und alle weiteren Dachprodukte mit ω_1 verschwinden müssen. Im zweiten Teil der Behauptung sind ω'_2 und ω''_2 reine Ausdrücke in $dz_i, d\bar{z}_j$ bzw. $dw_i, d\bar{w}_j$. Daher ist die höchste nichttriviale Form in jedem Typ der Basiskovektoren von Grad $2n$. Aber $(\omega'_2)^{n+1}$ und $(\omega''_2)^{n+1}$ produzieren eine $2n + 2$ Form bzgl. der beiden Typen, also Null. Die Behauptung für noch höhere Potenzen ist klar. \square

Bemerkung 4.1. Die $2n \times 2n$ -Koeffizientenmatrix der Form $\partial\bar{\partial}f$ sieht bezüglich der Basis

$$dq^\alpha \wedge d\bar{q}^\beta, \text{ für } q^\alpha = \begin{cases} z_\alpha, \alpha \leq n \\ w_\alpha, \alpha \geq n + 1 \end{cases} \text{ mit } \alpha, \beta = 1 \dots 2n,$$

wie folgt aus:

$$(f_{\alpha\bar{\beta}}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{f_{xx}+f_x}{\|Z\|^4} \bar{z}_i z_j - \frac{f_x}{\|Z\|^2} \delta_{ij} \right) & \left(\frac{f_{xy}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} \bar{z}_i w_l \right) \\ \left(\frac{f_{xy}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} \bar{w}_k z_j \right) & \left(\frac{f_{yy}+f_y}{\|W\|^4} \bar{w}_k w_l - \frac{f_y}{\|W\|^2} \delta_{kl} \right) \end{pmatrix}$$

für alle $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Die vier Untermatrizen sind jeweils $n \times n$ -dimensioniert, und die gesamte Matrix ist von der Größe $2n \times 2n$. Nach Einschränkung auf $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$ hat man Relationen unter den Einträgen. \square

Laut Definition von ω_1 und ω_2 ist:

$$\partial\bar{\partial}f = \omega_1 - \omega_2$$

und die zugehörige Volumenform bzw. höchste nichttriviale äußere Potenz auf der $(2n - 1)$ -dimensionalen affinen Quadrik Y ergibt sich als

$$\begin{aligned} (4.14) \quad (\partial\bar{\partial}f)^{2n-1} &= (\omega_1 - \omega_2)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \omega_1^{(2n-1)-k} (-\omega_2)^k = \\ &= \underbrace{-\omega_2^{2n-1}}_A + (2n-1) \underbrace{\omega_2^{2n-2} \omega_1}_{B} - (2n-1)(n-1) \underbrace{\omega_2^{2n-3} \omega_1^2}_C \end{aligned}$$

denn wegen Lemma 4.6 sind alle anderen Summanden in der Summe gleich Null.

Berechnung von Term A:

$$\omega_2^{2n-1} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} ((\omega_2')^n (\omega_2'')^{n-1} + (\omega_2')^{n-1} (\omega_2'')^n)$$

Man benötigt

$$(\omega_2')^n (\omega_2'')^{n-1} = \frac{f_x^n f_y^{n-1}}{\|Z\|^{2n} \|W\|^{2n-2}} (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^n \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-1}$$

wobei

$$\begin{aligned} (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^n &= n!(dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n) \\ (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-1} &= (n-1)! \sum_{j=1}^n (dw_1 \wedge d\bar{w}_1) \wedge \dots \wedge \widehat{dw_j \wedge d\bar{w}_j} \wedge \dots \wedge (dw_n \wedge d\bar{w}_n) \end{aligned}$$

So dass zusammen

$$(\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^n \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-1} \stackrel{\text{Lemma 4.4}}{=} n!(n-1)! \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) |\Omega|^2 = n!(n-1)! \|Z\|^2 |\Omega|^2$$

Wir erhalten

$$(\omega_2')^n (\omega_2'')^{n-1} = n!(n-1)! \frac{f_x^n f_y^{n-1}}{\|Z\|^{2n-2} \|W\|^{2n-2}} |\Omega|^2$$

Analog

$$(\omega_2')^{n-1} (\omega_2'')^n = n!(n-1)! \frac{f_x^{n-1} f_y^n}{\|Z\|^{2n-2} \|W\|^{2n-2}} |\Omega|^2$$

Also haben wir Term A schon ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \omega_2^{2n-1} &= (2n-1)! \frac{f_x^{n-1} f_y^{n-1} (f_x + f_y)}{\|Z\|^{2n-2} \|W\|^{2n-2}} |\Omega|^2 = \\ &= (2n-1)! f_x^{n-1} f_y^{n-1} (f_x + f_y) e^{(n-1)(x+y)} |\Omega|^2 \end{aligned}$$

Berechnung von Term B: Beobachte, dass

$$\begin{aligned} \omega_2^{2n-2} &= (\omega_2' + \omega_2'')^{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2} \binom{2n-2}{k} (\omega_2')^{(2n-2)-k} (\omega_2'')^k = \\ &= \binom{2n-2}{n-2} (\omega_2')^n (\omega_2'')^{n-2} + \binom{2n-2}{n-1} (\omega_2')^{n-1} (\omega_2'')^{n-1} + \\ &+ \binom{2n-2}{n} (\omega_2')^{n-2} (\omega_2'')^n = \frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-2)!} \cdot \\ &\left(\frac{1}{n(n-1)} (\omega_2')^n (\omega_2'')^{n-2} + \frac{1}{(n-1)^2} (\omega_2')^{n-1} (\omega_2'')^{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} (\omega_2')^{n-2} (\omega_2'')^n \right) \end{aligned}$$

Wir benennen die auftretenden Summanden der gesamten Ausdrücke in Term B (mit ω_1), wie folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-2)!} \\ & \left(\frac{1}{n(n-1)} \underbrace{(\omega'_2)^n (\omega''_2)^{n-2} \omega_1}_{\text{Ba}} + \frac{1}{(n-1)^2} \underbrace{(\omega'_2)^{n-1} (\omega''_2)^{n-1} \omega_1}_{\text{Bb}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n(n-1)} \underbrace{(\omega'_2)^{n-2} (\omega''_2)^n \omega_1}_{\text{Bc}} \right) \end{aligned}$$

Wir benutzen die Tatsache:

$$\begin{aligned} (\omega'_2)^n &= \left(\frac{f_x}{\|Z\|^2} \partial \bar{\partial} \|Z\|^2 \right)^n = n! \frac{f_x^n}{\|Z\|^{2n}} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \\ (\omega''_2)^n &= n! \frac{f_y^n}{\|W\|^{2n}} dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n \end{aligned}$$

Nun zu den Termen Ba und Bc:

$$\begin{aligned} (\omega'_2)^n \wedge (\omega''_2)^{n-2} \wedge \omega_1 &= (\omega'_2)^n \wedge (\omega''_2)^{n-2} \wedge \frac{(f_{yy} + f_y)}{\|W\|^4} \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 \\ (\omega''_2)^n \wedge (\omega'_2)^{n-2} \wedge \omega_1 &= (\omega''_2)^n \wedge (\omega'_2)^{n-2} \wedge \frac{(f_{xx} + f_x)}{\|Z\|^4} \partial \|Z\|^2 \wedge \bar{\partial} \|Z\|^2 \end{aligned}$$

weil alle Kovektoren dz_i und $d\bar{z}_j$ in Ba durch $(\omega'_2)^n$ schon vorhanden sind, muss man von den Einzeltermen in ω_1 nur die Kombination von dw_i und $d\bar{w}_j$ ranmultiplizieren, alle anderen äußeren Produkte sind Null. Analog treten im Term Bc schon alle $dw^i, d\bar{w}^j$ in $(\omega'_2)^n$ auf, so dass man von ω_1 nur mehr die Kovektoren $dz^i, d\bar{z}^j$ nichttrivial multiplizieren muss.

Wir führen die Rechnung für den ersten Term Ba durch:

$$\begin{aligned} & (\omega'_2)^n \wedge (\omega''_2)^{n-2} \wedge \frac{(f_{yy} + f_y)}{\|W\|^4} \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 = n! \frac{f_x^n}{\|Z\|^{2n}} \frac{f_y^{n-2}}{\|W\|^{2n-4}} \frac{f_{yy} + f_y}{\|W\|^4} \\ & dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \wedge (\partial \bar{\partial} \|W\|^2)^{n-2} \wedge \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 = \\ & = n!(n-2)! \frac{f_x^n f_y^{n-2} (f_{yy} + f_y)}{\|Z\|^{2n} \|W\|^{2n}} dz_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge \\ & \wedge \left(\sum_{i,j=1, i \neq j}^n dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \dots \check{i} \dots \check{j} \dots dw_n \wedge d\bar{w}_n \right) \wedge \left(\sum_{k,l=1}^n \bar{w}_k w_l dw_k \wedge d\bar{w}_l \right) = \end{aligned}$$

wobei wir für i, j die Reihenfolge $i < j$ verlangen, was man sofort statt $i \neq j$ genauer schreiben kann, denn die $(2n-4)$ -Formen sind in Reihenfolge gebracht und aufsummiert worden, also kommen alle Paare (i, j) von fehlenden Basiskovektoren auch mit $i < j$ geordnet vor. Daher

ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
 &= n!(n-2)!f_x^n f_y^{n-2}(f_{yy} + f_y)e^{n(x+y)} dz_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge \\
 &\sum_{i < j}^n (|w_i|^2 dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{j} \overset{\check{\check{}}}{j} \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n + \\
 &+ \bar{w}_i w_j dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{i} dw_i \wedge \dots \wedge \overset{\check{\check{}}}{j} d\bar{w}_j \wedge \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n - \\
 &- w_i \bar{w}_j dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{i} d\bar{w}_i \wedge \dots \wedge dw_j \overset{\check{\check{}}}{j} \wedge \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n + \\
 &+ |w_j|^2 dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{i} \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n)
 \end{aligned}$$

weil wir nur für entweder $(k = i \wedge l = i)$ oder $(k = i \wedge l = j)$ oder $(k = j \wedge l = i)$ oder $(k = j \wedge l = j)$ einen nicht Null Beitrag vom äußeren Produkt beider Summen erhalten. Wende die dritte Ersetzungsregel an, um zur Gestalt (4.9) der Volumenform Ω auch in den zwei Mitteltermen zu gelangen. Das Verfahren läuft jetzt folgendermaßen: Entscheide was ersetzt werden soll, d.h. entweder den fehlenden Kovektor vom Index i oder vom Index j einzutauschen, um den gleichen Index zu bekommen, also zum Beispiel

$$\bar{w}_i w_j dz_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{i} dw_i \wedge \dots \wedge \overset{\check{\check{}}}{j} d\bar{w}_j \wedge \dots \wedge d\bar{w}_n$$

wir haben hier $d\bar{w}_i$ gegen $d\bar{w}_j$ eingewechselt. Versammle alle Kovektoren vom selben Typ, die für die Substitution nach der Regel notwendig sind, in unserem Beispiel ergibt dies den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 &\bar{w}_i w_j (-1)^{j-i+n(n-2)} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{i} \dots \wedge d\bar{w}_n \wedge \\
 &\wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dw_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{j} \dots \wedge dw_n
 \end{aligned}$$

wobei das richtige Vorzeichen entscheidend ist und von den ausgeführten Permutationen herrührt. Wende die Ersetzungsregel (4.6) für die hintereinander aufgereihten antiholomorphen Kovektoren an, um $d\bar{w}_j$ weglassen zu können, und setze dafür $d\bar{w}_i$ ein:

$$\begin{aligned}
 &d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{i} \dots \wedge d\bar{w}_n = \\
 &= (-1)^{i+j} \frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_j} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{j} \dots \wedge d\bar{w}_n
 \end{aligned}$$

Wir stellen die natürliche Reihenfolge der Basiskovektoren durch geeignetes Permutieren wieder her, um

$$dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{j} \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n$$

zu erhalten, wobei man ein Vorzeichen $(-1)^{-2n+1}$ aufnimmt. Das gesamte Vorzeichen, was man sich damit eingebrockt hat, ist das Produkt der drei einzelnen aus den drei Schritten

$$(-1)^{j-i+n(n-2)+i+j-3n+1} = (-1)^{2j+n(n-2)-2n+1} = (-1)^1 = (-1)$$

Setze dies in den Summanden der laufenden Rechnung ein:

$$\begin{aligned}
 &\bar{w}_i w_j dz_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{i} dw_i \wedge \dots \wedge \overset{\check{\check{}}}{j} d\bar{w}_j \wedge \dots \wedge d\bar{w}_n = \\
 &= -\frac{\bar{w}_i w_j \bar{z}_i}{\bar{z}_j} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \overset{\check{\check{}}}{j} \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n = \\
 &= -\frac{\bar{w}_i w_j \bar{z}_i}{\bar{z}_j} |z_j|^2 |\Omega|^2 = -\bar{w}_i w_j \bar{z}_i z_j |\Omega|^2
 \end{aligned}$$

wobei noch Gleichung (4.9) verwendet wurde, um $|\Omega|^2$ dastehen zu haben. Wir werden von nun an darauf verzichten, dieses Verfahren jedesmal zu beschreiben, wenn es zum Einsatz kommt, denn es sind im Grunde immer dieselben Überlegungen mit Hilfe einer geeigneten Ersetzungsregel, und den beiden Permutationen hin zu der Gestalt, die man für die jeweilige Ersetzungsregel benötigt. Am Ende tauscht man wieder zurück in die natürliche Reihenfolge. Bei diesen Permutationen muss peinlich genau auf das korrekte Vorzeichen geachtet werden.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & (\omega'_2)^n \wedge (\omega''_2)^{n-2} \wedge \left(\frac{f_{yy} + f_y}{\|W\|^4} \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 \right) = \\
 & = n!(n-2)! f_x^n f_y^{n-2} (f_{yy} + f_y) e^{n(x+y)} \sum_{i < j} (|w_i|^2 |z_j|^2 |\Omega|^2 - \bar{w}_i w_j \bar{z}_i z_j |\Omega|^2 - \\
 & - w_i \bar{w}_j z_i \bar{z}_j |\Omega|^2 + |w_j|^2 |z_i|^2 |\Omega|^2) = \\
 & = n!(n-2)! f_x^n f_y^{n-2} (f_{yy} + f_y) e^{n(x+y)} \sum_{i < j} |w_i \bar{z}_j - w_j \bar{z}_i|^2 |\Omega|^2 = \\
 & = n!(n-2)! f_x^n f_y^{n-2} (f_{yy} + f_y) e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) |\Omega|^2
 \end{aligned}$$

wobei wir folgendes nützliches Lemma bei der Summe anwenden können.

Lemma 4.7. *Wir behaupten für alle $(Z, W) \in Y \subset \mathbb{C}^{2n}$, wobei $Z = (z_1, \dots, z_n)$, $W = (w_1, \dots, w_n)$ sei, und mit $x := -\log \|Z\|$, $y := -\log \|W\|$, dass*

$$\sum_{i < j} |w_i \bar{z}_j - w_j \bar{z}_i|^2 = e^{-x-y} - 1$$

für $i, j = 1, \dots, n$ gilt.

Beweis. Setze

$$\begin{aligned}
 A & := \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ \bar{w}_1 & \cdots & \bar{w}_n \end{pmatrix} \implies \\
 \bar{A}A^t & = \begin{pmatrix} \bar{Z}Z & \bar{Z}W \\ WZ & W\bar{W} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

worin $ZW := \sum_{i=1}^n z_i w_i$ bedeutet, und analog bei den übrigen Ausdrücken. Dann folgt

$$\det(\bar{A}A^t) = \bar{Z}Z \bar{W}W - \bar{W}\bar{Z} ZW = \|Z\|^2 \|W\|^2 - |\langle \bar{W}, Z \rangle|^2$$

bezüglich des natürlichen Skalarprodukts in \mathbb{C}^n . Auf der anderen Seite, aufgrund der verallgemeinerten Determinantenmultiplikationsformel, erhält man

$$\begin{aligned}
 \det(\bar{A}A^t) & = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(\bar{A}^{ij}) \det(A^{ij}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} \bar{z}_i & \bar{z}_j \\ w_i & w_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_i & z_j \\ \bar{w}_i & \bar{w}_j \end{vmatrix} = \\
 & = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\bar{z}_i w_j - \bar{z}_j w_i)(z_i \bar{w}_j - z_j \bar{w}_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \bar{w}_j - z_j \bar{w}_i|^2
 \end{aligned}$$

wobei A^{ij} den 2×2 Minor der Matrix A aus den Spalten i und j bezeichnet. Aus der Definition von x und y folgt

$$\|Z\|^2 \|W\|^2 - |\langle \bar{W}, Z \rangle|^2 = \left(\sum |z_i|^2 \right) \left(\sum |w_j|^2 \right) - \left| \sum_{k=1}^n \bar{w}_k z_k \right|^2 = e^{-x-y} - 1$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Der Term Bc kann ähnlich bestimmt werden, nur mit vertauschten Z und W . Das heißt, er ist gleich

$$\begin{aligned} (\omega_2'')^n \wedge (\omega_2')^{n-2} \wedge \omega_1 &= (\omega_2'')^n \wedge (\omega_2')^{n-2} \wedge \left(\frac{f_{xx} + f_x}{\|Z\|^4} \partial \|Z\|^2 \wedge \bar{\partial} \|Z\|^2 \right) = \\ &= n!(n-2)! f_x^{n-2} f_y^n (f_{xx} + f_x) e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) |\Omega|^2 \end{aligned}$$

Der noch fehlende Term im Ausdruck B: $\omega_2^{2n-2} \omega_1$ ist Term Bb, dessen Berechnung nun die Aufgabe ist. Erinnerung, dass Term Bb gleich $(\omega_2')^{n-1} (\omega_2'')^{n-1} \omega_1$ war. Ohne Vorfaktoren behaupten wir Folgendes:

$$\begin{aligned} (\partial \bar{\partial} \|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial \bar{\partial} \|W\|^2)^{n-1} \partial \|Z\|^2 \wedge \bar{\partial} \|Z\|^2 &= (n-1)!(n-1)! \left(\sum_{i,j=1}^n |z_i|^2 |z_j|^2 |\Omega|^2 \right) \\ (\partial \bar{\partial} \|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial \bar{\partial} \|W\|^2)^{n-1} \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 &= (n-1)!(n-1)! \left(\sum_{i,j=1}^n |w_j|^2 |w_i|^2 |\Omega|^2 \right) \\ (\partial \bar{\partial} \|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial \bar{\partial} \|W\|^2)^{n-1} \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|Z\|^2 &= (n-1)!(n-1)! \left(\sum_{i,j=1}^n -z_i \bar{w}_j \bar{z}_j w_i |\Omega|^2 \right) \\ (\partial \bar{\partial} \|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial \bar{\partial} \|W\|^2)^{n-1} \partial \|Z\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 &= (n-1)!(n-1)! \left(\sum_{i,j=1}^n -\bar{z}_i w_j z_j \bar{w}_i |\Omega|^2 \right) \end{aligned}$$

Um dies einzusehen, betrachte zuerst nur $(\omega_2')^{n-1} \wedge (\omega_2'')^{n-1}$ (ohne die Vorfaktoren wiederum)

$$\begin{aligned} (\partial \bar{\partial} \|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial \bar{\partial} \|W\|^2)^{n-1} &= (n-1)! \left(\sum_{i=1}^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \check{i} \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \right) \\ &\wedge (n-1)! \left(\sum_{j=1}^n dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \check{j} \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n \right) = \\ &= (n-1)!(n-1)! \left(\sum_{i,j=1}^n dz_1 \wedge \dots \check{i} \dots d\bar{z}_n \wedge dw_1 \dots \check{j} \dots d\bar{w}_n \right) \end{aligned}$$

Als Zweites liefert ω_1 die Zweiformen

$$\begin{aligned} \partial \|Z\|^2 \wedge \bar{\partial} \|Z\|^2 &= \sum_{k,l=1}^n \bar{z}_k z_l dz_k \wedge d\bar{z}_l \\ \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 &= \sum_{k,l=1}^n \bar{w}_k w_l dw_k \wedge d\bar{w}_l \\ \partial \|W\|^2 \wedge \bar{\partial} \|Z\|^2 &= \sum_{k,l=1}^n \bar{w}_k z_l dw_k \wedge d\bar{z}_l \\ \partial \|Z\|^2 \wedge \bar{\partial} \|W\|^2 &= \sum_{k,l=1}^n \bar{z}_k w_l dz_k \wedge d\bar{w}_l \end{aligned}$$

Die Kombination aus beiden reduziert die Summierung über k, l zu den einzigen nicht Null Beiträgen die man für: $(k = i \wedge l = i)$, $(k = j \wedge l = j)$, $(k = j \wedge l = i)$, $(k = i \wedge l = j)$ bekommt,

ähnlich zu dem, was wir weiter oben schon einmal gesehen hatten. Die vier zu berechnenden Produkte sind:

$$\begin{aligned} & (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-1} \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 = \\ & = ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n |z_i|^2 dz_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge \check{j}\check{j} \dots \wedge d\bar{w}_n \right) = \\ & \stackrel{(4.9)}{=} ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n |z_i|^2 |z_j|^2 |\Omega|^2 \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-1} \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 = \\ & = ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n |w_j|^2 dz_1 \wedge \dots \wedge \check{i}\check{i} \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}_n \right) = \\ & \stackrel{(4.9)}{=} ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n |w_j|^2 |w_i|^2 |\Omega|^2 \right) \end{aligned}$$

Bei den anderen zwei Ausdrücken muss man jedoch die Ersetzungsregel (4.4) vorher benutzen, um $|\Omega|^2$ letztlich mit (4.9) einsetzen zu können, wie es oben auch getan wurde.

$$\begin{aligned} & (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-1} \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 = \\ & = ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n \bar{w}_j z_i (-1) dz_1 \wedge \dots \wedge \check{i}d\bar{z}_i \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge dw_j \check{j} \wedge \dots \wedge d\bar{w}_n \right) = \\ & \stackrel{(4.9)}{=} ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n (-1) z_i \bar{w}_j \bar{z}_j w_i |\Omega|^2 \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-1} \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 = \\ & = ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n w_j \bar{z}_i dz_1 \wedge \dots \wedge dz_i \check{i} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge \check{j}d\bar{w}_j \wedge \dots \wedge d\bar{w}_n \right) = \\ & \stackrel{(4.9)}{=} ((n-1)!)^2 \left(\sum_{i,j=1}^n (-1) \bar{z}_i w_j z_j \bar{w}_i |\Omega|^2 \right) \end{aligned}$$

Beachte, dass das Minus in diesen beiden letzten Fällen von unterschiedlichen Schritten herrührt:

- Im ersten Fall tritt es wegen $\bar{w}_j z_i dw_j \wedge d\bar{z}_i$ auf, was mit $(\omega'_2)^{n-1} \wedge (\omega''_2)^{n-1}$ multipliziert wird und geordnet werden muss, so dass $d\bar{z}_i$ mit dem Kovektor dw_j zusätzlich noch vertauscht werden muss. Die Ersetzungsregel ergibt ein Plus, so dass insgesamt das Minus der Vertauschung weiterhin besteht.
- Im zweiten Fall kann man $\bar{z}_i w_j dz_i \wedge d\bar{w}_j$ leicht in $(\omega'_2)^{n-1} \wedge (\omega''_2)^{n-1}$ mit einem Plus einfügen, da dz_i schon auf der linken Seite steht, wo es hingehört, aber die Ersetzungsregel (4.4) liefert letztlich doch das Minuszeichen.

Deshalb erlangen wir das, was wir eingangs behauptet hatten, und der vollständige Ausdruck von Bb : $(\omega'_2)^{n-1}(\omega''_2)^{n-1}\omega_1$ lautet:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{f_x}{\|Z\|^2} \partial \bar{\partial} \|Z\|^2 \right)^{n-1} \wedge \left(\frac{f_y}{\|W\|^2} \partial \bar{\partial} \|W\|^2 \right)^{n-1} \wedge \omega_1 = \\
 & = ((n-1)!)^2 \frac{f_x^{n-1} f_y^{n-1}}{\|Z\|^{2n-2} \|W\|^{2n-2}} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{f_{xx} + f_x}{\|Z\|^4} |z_i|^2 |z_j|^2 + \frac{f_{yy} + f_y}{\|W\|^4} |w_j|^2 |w_i|^2 - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{f_{yx}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} z_i \bar{w}_j \bar{z}_j w_i - \frac{f_{xy}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} \bar{z}_i w_j z_j \bar{w}_i \right) |\Omega|^2 = \\
 & = ((n-1)!)^2 f_x^{n-1} f_y^{n-1} e^{(n-1)(x+y)} \left(\frac{f_{xx} + f_x}{\|Z\|^4} \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^2 + \frac{f_{yy} + f_y}{\|W\|^4} \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right)^2 - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{f_{yx}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 - \frac{f_{xy}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} \left| \sum_{i=1}^n \bar{z}_i \bar{w}_i \right|^2 \right) |\Omega|^2 = \\
 & = ((n-1)!)^2 f_x^{n-1} f_y^{n-1} e^{(n-1)(x+y)} \left(\frac{f_{xx} + f_x}{\|Z\|^4} e^{-2x} + \frac{f_{yy} + f_y}{\|W\|^4} e^{-2y} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{f_{yx}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} \cdot 1 - \frac{f_{xy}}{\|Z\|^2 \|W\|^2} \cdot 1 \right) |\Omega|^2 = \\
 & = (n-1)!(n-1)! f_x^{n-1} f_y^{n-1} e^{(n-1)(x+y)} (f_{xx} + f_x + f_{yy} + f_y - 2f_{xy} e^{x+y}) |\Omega|^2
 \end{aligned}$$

wobei wir die Formeln folgenden Lemmas benutzt haben.

Lemma 4.8. Für alle Koordinatenvektoren $Z = (z_1, \dots, z_n)$, $W = (w_1, \dots, w_n)$ in \mathbb{C}^n gilt

$$\sum_{i,j=1}^n |z_i|^2 |z_j|^2 = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^n z_i w_i \bar{z}_j \bar{w}_j = \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2$$

Beweis. Mit einer einfachen Induktion über n sieht man es. Der Fall $n = 1$ ist trivial, also behandle gleich $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{n+1} |z_i|^2 |z_j|^2 = \sum_{i,j=1}^n |z_i|^2 |z_j|^2 + \\
& + \sum_{j=1}^n |z_{n+1}|^2 |z_j|^2 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2 |z_{n+1}|^2 + |z_{n+1}|^4 = \\
& = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^2 + |z_{n+1}|^2 \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) |z_{n+1}|^2 + |z_{n+1}|^4 = \\
& = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 + |z_{n+1}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right) + |z_{n+1}|^2 \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 + |z_{n+1}|^2 \right) = \\
& = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 + |z_{n+1}|^2 \right) = \\
& = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 \right)^2
\end{aligned}$$

und in gleicher Weise

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j=1}^{n+1} z_i w_i \bar{z}_j \bar{w}_j = \sum_{i,j=1}^n z_i w_i \bar{z}_j \bar{w}_j + \\
& + \sum_{j=1}^n z_{n+1} w_{n+1} \bar{z}_j \bar{w}_j + \sum_{i=1}^n z_i w_i \bar{z}_{n+1} \bar{w}_{n+1} + z_{n+1} w_{n+1} \bar{z}_{n+1} \bar{w}_{n+1} = \\
& = \left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right| + z_{n+1} w_{n+1} \left(\sum_{j=1}^n \bar{z}_j \bar{w}_j + \bar{z}_{n+1} \bar{w}_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n z_i w_i \right) + |z_{n+1} w_{n+1}|^2 \right) = \\
& = \left(\sum_{i=1}^n z_i w_i + z_{n+1} w_{n+1} \right) \left(\sum_{j=1}^n \bar{z}_j \bar{w}_j \right) + \bar{z}_{n+1} \bar{w}_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n z_i w_i + z_{n+1} w_{n+1} \right) = \\
& = \left(\sum_{i=1}^{n+1} z_i w_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \bar{z}_j \bar{w}_j \right) + \bar{z}_{n+1} \bar{w}_{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} z_i w_i \right) = \\
& = \left| \sum_{i=1}^{n+1} z_i w_i \right|^2
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Aussage des Lemmas. □

Mit den drei Ausdrücken für die Terme Ba: $(\omega'_2)^n (\omega''_2)^{n-2} \omega_1$, Bc: $(\omega'_2)^{n-2} (\omega''_2)^n \omega_1$ und Bb:

$(\omega'_2)^{n-1}(\omega''_2)^{n-1}\omega_1$ in der Hand, können wir den ganzen Term B zusammensetzen: $\omega_2^{2n-2}\omega_1$ ist

$$\begin{aligned}
 \omega_2^{2n-2}\omega_1 &= \\
 &= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-2)!} \left(\frac{n!(n-2)!}{n(n-1)} f_x^n f_y^{n-2} (f_{yy} + f_y) e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) + \right. \\
 &+ \frac{(n-1)!(n-1)!}{(n-1)^2} f_x^{n-1} f_y^{n-1} e^{(n-1)(x+y)} (f_{xx} + f_x + f_{yy} + f_y - 2f_{xy} e^{x+y}) + \\
 &+ \left. \frac{n!(n-2)!}{n(n-1)} f_y^n f_x^{n-2} (f_{xx} + f_x) e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) \right) |\Omega|^2 = \\
 &= (2n-2)! \left[(f_x^n f_y^{n-2} (f_{yy} + f_y) + f_y^n f_x^{n-2} (f_{xx} + f_x)) (e^{(n-1)(x+y)} - e^{n(x+y)}) + \right. \\
 &+ \left. f_x^{n-1} f_y^{n-1} (f_{xx} + f_x + f_{yy} + f_y - 2f_{xy} e^{x+y}) e^{(n-1)(x+y)} \right] |\Omega|^2
 \end{aligned}$$

Berechnung des Terms C:

Erinnere, dass der Term C gleich $\omega_1^2 \wedge \omega_2^{2n-3}$ war. Betrachte jeden Faktor dieses Ausdrucks einzeln. Beginne mit ω_1^2 . Viele Kombinationen verschwinden aufgrund der Tatsache, dass dieselbe 1-Form von $\partial\|Z\|^2$, $\bar{\partial}\|Z\|^2$, $\partial\|W\|^2$, $\bar{\partial}\|W\|^2$ zweimal in solch einem Produkt auftritt, also Null ergibt. Übrig bleiben

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= \frac{(f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y)}{\|Z\|^4 \|W\|^4} \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 + \\
 &+ \frac{(f_{yy} + f_y)(f_{xx} + f_x)}{\|Z\|^4 \|W\|^4} \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 + \\
 &+ \frac{f_{xy}^2}{\|Z\|^4 \|W\|^4} \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 + \\
 &+ \frac{f_{xy}^2}{\|Z\|^4 \|W\|^4} \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 = \\
 &= 2((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2) e^{2(x+y)} \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2
 \end{aligned}$$

Als nächstes zum Faktor ω_2^{2n-3} . Er bringt

$$\begin{aligned}
 \omega_2^{2n-3} &= (\omega'_2 + \omega''_2)^{2n-3} = \sum_{i=0}^{2n-3} \binom{2n-3}{i} (\omega'_2)^i (\omega''_2)^{(2n-3)-i} = \\
 &= \binom{2n-3}{n} (\omega'_2)^n (\omega''_2)^{n-3} + \binom{2n-3}{n-1} (\omega'_2)^{n-1} (\omega''_2)^{n-2} + \\
 &+ \binom{2n-3}{n-2} (\omega'_2)^{n-2} (\omega''_2)^{n-1} + \binom{2n-3}{n-3} (\omega'_2)^{n-3} (\omega''_2)^n
 \end{aligned}$$

weil alle anderen Terme verschwinden, wie wir schon in Lemma 4.6 bemerkt haben: $(\omega'_2)^{n+1} = 0$ und höhere Ordnungen, $(\omega''_2)^{n+1} = 0$ und höhere Ordnungen.

Betrachte die Dachprodukte der vier Summanden von oben, mit dem davor bestimmten

ω_1^2 :

$$\begin{array}{cc} \underbrace{(\omega'_2)^n (\omega''_2)^{n-3} \wedge \omega_1^2}_{\text{Ca}} & \underbrace{(\omega'_2)^{n-1} (\omega''_2)^{n-2} \wedge \omega_1^2}_{\text{Cb}} \\ \underbrace{(\omega'_2)^{n-2} (\omega''_2)^{n-1} \wedge \omega_1^2}_{\text{Cc}} & \underbrace{(\omega'_2)^{n-3} (\omega''_2)^n \wedge \omega_1^2}_{\text{Cd}} \end{array}$$

und beginne mit Term Ca:

$$\begin{aligned} & (\omega'_2)^n \wedge (\omega''_2)^{n-3} \wedge \omega_1^2 = \\ &= \frac{f_x^n}{\|Z\|^{2n}} (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^n \wedge \frac{f_y^{n-3}}{\|W\|^{2n-6}} (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-3} \wedge \\ & \wedge 2((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}) e^{2(x+y)} \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 \end{aligned}$$

was Null ergibt, da

$$(\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^n = \left(\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i \right)^n = n! dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

schon alle möglichen Basisvektoren $dz_i, d\bar{z}_j$ enthält, so dass der ganze Ausdruck mit ω_1^2 multipliziert nur verschwinden kann, weil in ω_1^2 weitere genau dieser Kovektoren auftreten. Beobachte, dass Term Cd auch Null wird, aus demselben Grund, bezüglich der Kovektoren $dw_i, d\bar{w}_j$ allerdings. Als Nächstes bestimmen wir Term Cb:

$$\begin{aligned} & (\omega'_2)^{n-1} \wedge (\omega''_2)^{n-2} \wedge \omega_1^2 = \\ &= \frac{f_x^{n-1} f_y^{n-2}}{\|Z\|^{2n-2} \|W\|^{2n-4}} 2((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2) e^{2(x+y)} \cdot \\ & (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-2} \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 \end{aligned}$$

und rechnen vorerst nur mit dem Basisanteil:

$$\begin{aligned} & (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2)^{n-1} \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2)^{n-2} \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 = \\ &= (n-1)! \left(\sum_{i=1}^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \check{i} \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \right) \wedge \\ & \wedge (n-2)! \left(\sum_{i,j=1, i \neq j}^n dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n \right) \wedge \\ & \wedge \left(\sum_{k,l=1}^n \bar{z}_k z_l dz_k \wedge d\bar{z}_l \right) \wedge \left(\sum_{p,q=1}^n \bar{w}_p w_q dw_p \wedge d\bar{w}_q \right) = \\ &= (n-1)!(n-2)! \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \right) \wedge \\ & \wedge \left(\sum_{i,j=1, i \neq j}^n dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge dw_n \wedge d\bar{w}_n \right) \wedge \\ & \wedge \left(\sum_{p,q=1}^n \bar{w}_p w_q dw_p \wedge d\bar{w}_q \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n-1)!(n-2)!e^{-x}dz_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge \left(\sum_{i,j=1,i<j}^n |w_i|^2 dw_1 \wedge \dots \wedge \check{j}\check{j} \dots d\bar{w}_n + \right. \\
 &+ \bar{w}_i w_j dw_1 \wedge \dots \wedge \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge d\bar{w}_n - \bar{w}_j w_i dw_1 \wedge \dots \wedge \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge d\bar{w}_n + \\
 &+ |w_j|^2 dw_1 \wedge \dots \wedge \check{i}\check{i} \dots \wedge d\bar{w}_n \left. \right) = \\
 &= (n-1)!(n-2)!e^{-x} \sum_{i,j=1,i<j}^n (|w_i|^2 |z_j|^2 - \bar{w}_i w_j \bar{z}_i z_j - w_i \bar{w}_j z_i \bar{z}_j + |w_j|^2 |z_i|^2) |\Omega|^2 = \\
 &= (n-1)!(n-2)!e^{-x} \sum_{i,j=1,i<j}^n |w_i \bar{z}_j - w_j \bar{z}_i|^2 |\Omega|^2 = \\
 &\stackrel{\text{Lemma 4.8}}{=} (n-1)!(n-2)!e^{-x}(e^{-x-y} - 1) |\Omega|^2
 \end{aligned}$$

wobei wir Ersetzungsregel (4.4) für die mittleren beiden Terme bemüht haben.

Der entsprechende Ausdruck kommt auch im Term Cc vor: $(\omega'_2)^{n-2}(\omega''_2)^{n-1}\omega_1^2$, nur x und y vertauscht. Setze die Terme ungleich Null Cb, Cc zu Term C zusammen (mit allen Vorfaktoren und Konstanten dabei)

$$\begin{aligned}
 \omega_2^{2n-3}\omega_1^2 &= \binom{2n-3}{n-1} 2(n-1)!(n-2)! \cdot \\
 f_x^{n-1} f_y^{n-2} &((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2) e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) |\Omega|^2 + \\
 &+ \binom{2n-3}{n-2} 2(n-1)!(n-2)! f_x^{n-2} f_y^{n-1} \cdot \\
 &((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2) e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) |\Omega|^2 = \\
 &= 2(2n-3)! (f_x^{n-1} f_y^{n-2} + f_y^{n-1} f_x^{n-2}) \cdot \\
 &((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2) e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) |\Omega|^2
 \end{aligned}$$

Wir sind jetzt in der Lage, alle drei Terme von $(\partial\bar{\partial}f)^{2n-1}$ zu kombinieren, wie es in der Gleichung (4.14) mit noch beizufügenden Konstanten verlangt ist:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\omega_2^{2n-1}}_A &= (2n-1)! f_x^{n-1} f_y^{n-1} (f_x + f_y) e^{(n-1)(x+y)} |\Omega|^2 \\
 \underbrace{\omega_1 \omega_2^{2n-2}}_B &= (2n-2)! [(f_x^n f_y^{n-2} (f_{yy} + f_y) + f_y^n f_x^{n-2} (f_{xx} + f_x)) \cdot \\
 &\cdot (e^{(n-1)(x+y)} - e^{n(x+y)}) + \\
 &+ f_x^{n-1} f_y^{n-1} (f_{xx} + f_x + f_{yy} + f_y - 2f_{xy} e^{x+y}) e^{(n-1)(x+y)}] |\Omega|^2 \\
 \underbrace{\omega_1^2 \omega_2^{2n-3}}_C &= 2(2n-3)! (f_x^{n-1} f_y^{n-2} + f_x^{n-2} f_y^{n-1}) ((f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2) \cdot \\
 &\cdot e^{n(x+y)} (e^{-x-y} - 1) |\Omega|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad & \xrightarrow{=} \frac{(\partial\bar{\partial}f)^{2n-1}}{(2n-1)!|\Omega|^2} = \\
 & = -f_x^{n-1}f_y^{n-1}(f_x + f_y)e^{(n-1)(x+y)} + \\
 & + (f_x^n f_y^{n-2}(f_{yy} + f_y) + f_y^n f_x^{n-2}(f_{xx} + f_x))(e^{(n-1)(x+y)} - e^{n(x+y)}) + \\
 & + f_x^{n-1}f_y^{n-1}(f_{xx} + f_x + f_{yy} + f_y - 2f_{xy}e^{x+y})e^{(n-1)(x+y)} - \\
 & - (f_x^{n-1}f_y^{n-2} + f_x^{n-2}f_y^{n-1})(f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2(e^{(n-1)(x+y)} - e^{n(x+y)}) = \\
 & = [f_x^n f_y^{n-2}(f_{yy} + f_y) + f_x^{n-2}f_y^n(f_{xx} + f_x) - \\
 & - (f_x^{n-1}f_y^{n-2} + f_x^{n-2}f_y^{n-1})(f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2](e^{(n-1)(x+y)} - e^{n(x+y)}) + \\
 & f_x^{n-1}f_y^{n-1}(f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}e^{x+y})e^{(n-1)(x+y)} = \\
 & = [f_x^{n-1}f_y^{n-1}(f_{xx} + f_{yy}) + (f_x^{n-1}f_y^{n-2} + f_x^{n-2}f_y^{n-1}) \cdot \\
 & (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)](e^{n(x+y)} - e^{(n-1)(x+y)}) + \\
 & + f_x^{n-1}f_y^{n-1}(f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}e^{x+y})e^{(n-1)(x+y)} = \\
 & = [(f_x^{n-1}f_y^{n-2} + f_x^{n-2}f_y^{n-1})(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)](e^{n(x+y)} - e^{(n-1)(x+y)}) + \\
 & + f_x^{n-1}f_y^{n-1}(f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy})e^{n(x+y)}
 \end{aligned}$$

Zum Abschluss erreicht man das

Theorem 4.1. *Die Einsteingleichung*

$$(4.15) \quad A'((x, y), f, Df, D^2f) = e^{-f}$$

d.h. die reelle Differentialgleichung, die die Kähler-Einstein-Bedingung (3.1) auf $L := Y$ im Bild des Bewertungskegel $\{(x, y) \in N_{\mathbb{R}} : x + y \leq 0\}$, als Teilmenge in $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$, ausdrückt, lautet

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad & (2n-1)![(f_x^{n-1}f_y^{n-2} + f_x^{n-2}f_y^{n-1})(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(e^{n(x+y)} - e^{(n-1)(x+y)}) + \\
 & + f_x^{n-1}f_y^{n-1}(f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy})e^{n(x+y)}] = \\
 & = e^{-f}
 \end{aligned}$$

mit $\partial\bar{\partial}(f \circ \pi) > 0$, weil es eine positiv definite Form sein muss.

4.4 Die Berechnung von A' für den Fall $n = 2$

Wir rechnen durchweg in den Koordinatenfunktionen (z_1, z_2, w_1, w_2) auf $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$. Beobachte, dass trotz des zusätzlichen Minuszeichens vor w_2 und der Vertauschung der Einträge im zweiten Spaltenvektor der $SL_2(\mathbb{C})$ -Matrizen, die Normausdrücke

$$\|Z\|^2 := |z_1|^2 + |z_2|^2 \quad \|W\|^2 := |w_1|^2 + |w_2|^2$$

der Vektoren $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ identisch zu den Definitionen für die Rechnung für Y sind, wenn man $n = 2$ setzt. Demzufolge sind auch alle davon abgeleiteten Formen, wie

$\partial\|Z\|^2, \partial\|W\|^2, \partial\bar{\partial}\|Z\|^2, \partial\bar{\partial}\|W\|^2$ und komplex konjugierte Ausdrücke identisch. Die reellen Koordinaten sind genauso mit $x = -\ln(\|Z\|^2), y = -\ln(\|W\|^2)$ gegeben. Daher wird man diesselbe Gleichung in x, y erhalten, nur eben für $n = 2$.

In dem Fall $n = 2$ sieht die Formel von $(\partial\bar{\partial}f)^3$ folgendermaßen aus:

$$(\partial\bar{\partial}f)^3 = - \underbrace{\omega_2^3}_A + 3 \underbrace{\omega_2^2\omega_1}_B - 3 \underbrace{\omega_2\omega_1^2}_C$$

Wir werden die drei Summanden einzeln berechnen. Der Erste, $A: \omega_2^3$ ist schon aus dem letzten Kapitel bekannt.

$$3!f_x^1f_y^1(f_x + f_y)e^{(x+y)}|\Omega|^2$$

Für $C: \omega_2\omega_1^2$ berechnen wir die beiden Basisvektoren darin:

$$\partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 \wedge (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2) = \|Z\|^2 \cdot |w_1\bar{z}_2 - w_2\bar{z}_1|^2 \cdot |\Omega|^2$$

$$\partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 \wedge (\partial\bar{\partial}\|W\|^2) = \|W\|^2 \cdot |\bar{w}_1z_2 - \bar{w}_2z_1|^2 \cdot |\Omega|^2$$

Ausführlicher für den Ersten:

$$\begin{aligned} & (\partial\bar{\partial}\|Z\|^2) \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 = \\ & = \left(\sum_{i=1}^2 dz_i \wedge d\bar{z}_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^2 \bar{z}_j dz_j \right) \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 = \\ & = (dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \bar{z}_2 dz_2 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \bar{z}_1 dz_1) \wedge \left(\sum_{k=1}^2 z_k d\bar{z}_k \right) \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 = \\ & = (|z_2|^2 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + |z_1|^2 dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 = \\ & = \|Z\|^2 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \\ & \wedge (|w_1|^2 dw_1 \wedge d\bar{w}_1 + \bar{w}_1 w_2 dw_1 \wedge d\bar{w}_2 + \bar{w}_2 w_1 dw_2 \wedge d\bar{w}_1 + |w_2|^2 dw_2 \wedge d\bar{w}_2) = \end{aligned}$$

Benutze die Ersetzungsregeln für den Fall $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H$, und achte auf die Vorzeichen:

$$\begin{aligned} & = \|Z\|^2 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \\ & \wedge (|w_1|^2 dw_1 \wedge d\bar{w}_1 - \frac{\bar{w}_1 w_2 \bar{z}_1}{\bar{z}_2} dw_1 \wedge d\bar{w}_1 - \frac{\bar{w}_2 w_1 \bar{z}_2}{\bar{z}_1} dw_2 \wedge d\bar{w}_2 + |w_2|^2 dw_2 \wedge d\bar{w}_2) = \\ & = \|Z\|^2 \cdot \left[(|w_1|^2 - \frac{\bar{w}_1 w_2 \bar{z}_1}{\bar{z}_2}) |z_2|^2 + (|w_2|^2 - \frac{\bar{w}_2 w_1 \bar{z}_2}{\bar{z}_1}) |z_1|^2 \right] \cdot |\Omega|^2 = \\ & = \|Z\| \cdot [|w_1|^2 |z_2|^2 - \bar{w}_1 w_2 \bar{z}_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 z_1 \bar{z}_2 + |w_2|^2 |z_1|^2] \cdot |\Omega|^2 = \\ & = \|Z\|^2 \cdot |w_1 \bar{z}_2 - w_2 \bar{z}_1|^2 \cdot |\Omega|^2 \end{aligned}$$

Beobachte, dass $|w_1 \bar{z}_2 - w_2 \bar{z}_1|^2$ folgendermaßen ausgeschrieben werden kann:

$$|w_1 \bar{z}_2 - w_2 \bar{z}_1|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_2|^2 + |w_1|^2) - 1 = e^{-x-y} - 1$$

weil die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} z_1 & -w_2 \\ z_2 & w_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2) \quad \det(T) = z_1 w_1 + z_2 w_2 = 1$$

erfüllt. Also

$$\begin{aligned} T^\dagger T &= \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{w}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & -w_2 \\ z_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|^2 + |z_2|^2 & -\bar{z}_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1 \\ -\bar{w}_2 z_1 + \bar{w}_1 z_2 & |w_1|^2 + |w_2|^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-x} & -\bar{z}_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1 \\ -\bar{w}_2 z_1 + \bar{w}_1 z_2 & e^{-y} \end{pmatrix} \in SL(2) \end{aligned}$$

so dass wir die Beziehung $e^{-x-y} - |-\bar{z}_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1|^2 = 1$ aus der Determinante hiervon erhalten. Dies liefert den invariant geschriebenen Ausdruck für diesen Faktor.

Für Term B: $\omega_2^2 \omega_1$ finden wir

$$\omega_2^2 \omega_1 = (\omega_2' + \omega_2'')^2 \cdot \omega_1 = ((\omega_2')^2 + 2\omega_2' \omega_2'' + (\omega_2'')^2) \cdot \omega_1$$

Die einzelnen Basisanteile dieses Ausdrucks lauten

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 &= 0 \\ \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 &= 2|\bar{w}_1 z_2 - \bar{w}_2 z_1|^2 \cdot |\Omega|^2 = 2(e^{-x-y} - 1)|\Omega|^2 \\ \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 &= 0 \\ \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 &= (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 \cdot |\Omega|^2 = (\|Z\|^2)^2 \cdot |\Omega|^2 \\ \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 &= (|w_1|^2 + |w_2|^2)^2 \cdot |\Omega|^2 = (\|W\|^2)^2 \cdot |\Omega|^2 \\ \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 &= -|\Omega|^2 \\ \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 &= -|\Omega|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 &= 2|\bar{z}_1 w_2 - \bar{z}_2 w_1|^2 \cdot |\Omega|^2 = 2(e^{-x-y} - 1)|\Omega|^2 \\ \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 &= 0 \\ \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|Z\|^2 &= 0 \\ \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|W\|^2 \wedge \partial\|Z\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Zum Beispiel berechnet man

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\bar{\partial}\|Z\|^2 \wedge \partial\|W\|^2 \wedge \bar{\partial}\|W\|^2 &= \\ &= 2 \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \\ &\wedge (|w_1|^2 dw_1 \wedge d\bar{w}_1 + \bar{w}_1 w_2 dw_1 \wedge d\bar{w}_2 + w_1 \bar{w}_2 dw_2 \wedge d\bar{w}_1 + |w_2|^2 dw_2 \wedge d\bar{w}_2) = \end{aligned}$$

benutze wieder die Ersetzungsregeln in den geeigneten Umgebungen, und achte auf Vorzeichen

$$\begin{aligned} &2 \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \\ &\wedge (|w_1|^2 dw_1 \wedge d\bar{w}_1 - \frac{\bar{w}_1 w_2 \bar{z}_1}{\bar{z}_2} dw_1 \wedge d\bar{w}_1 - \frac{\bar{w}_2 w_1 \bar{z}_2}{\bar{z}_1} dw_2 \wedge d\bar{w}_2 + |w_2|^2 dw_2 \wedge d\bar{w}_2) = \\ &= 2(|w_1|^2 |z_2|^2 - \bar{w}_1 w_2 \bar{z}_1 z_2 + |w_2|^2 |z_1|^2 - w_1 \bar{w}_2 z_1 \bar{z}_2) \cdot |\Omega|^2 = \\ &= 2|\bar{w}_1 z_2 - \bar{w}_2 z_1|^2 \cdot |\Omega|^2 \end{aligned}$$

Zusammengenommen können wir jetzt den vollständigen Ausdruck mit den Konstanten für

$$-\omega_2^3 + 3\omega_2^2\omega_1 - 3\omega_2\omega_1^2$$

als Vorfaktor von $|\Omega|^2$ aufschreiben

$$\begin{aligned} & (-1) \cdot (3! f_x^1 f_y^1 (f_x + f_y) e^{(x+y)}) + \\ & + 3 \cdot (f_x^2 (f_{yy} + f_y) e^{2(x+y)} 2 |\bar{w}_1 z_2 + \bar{w}_2 z_1|^2 + \\ & + 2 f_x f_y (f_{xx} + f_x) e^{3x+y} (\|Z\|^2)^2 + 2 f_x f_y (f_{yy} + f_y) e^{x+3y} (\|W\|^2)^2 \\ & + 2 f_x f_y f_{xy} e^{2x+2y} (-1) + 2 f_x f_y f_{xy} e^{2x+2y} (-1) \\ & + f_y^2 (f_{xx} + f_x) e^{2(x+y)} 2 |\bar{z}_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1|^2) - \\ & - 3 \cdot (2 f_x [(f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2] e^{3x+2y} \|Z\|^2 |\bar{z}_1 w_2 + \bar{z}_2 w_1|^2 + \\ & + 2 f_y [(f_{xx} + f_x)(f_{yy} + f_y) - f_{xy}^2] e^{2x+3y} \|W\|^2 |\bar{w}_1 z_2 + \bar{w}_2 z_1|^2) \end{aligned}$$

was sich vereinfachen lässt zu

$$\begin{aligned} & 6 \cdot (-(f_x + f_y)(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) + f_x f_y (f_{xx} + f_{yy})) \cdot e^{2(x+y)} (e^{-x-y} - 1) + \\ & + f_x f_y (f_{xx} + f_{yy}) e^{x+y} - 2 f_x f_y f_{xy} e^{2x+2y}) = \\ & = 6 \cdot (-(f_x + f_y)(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) (e^{x+y} - e^{2(x+y)}) + f_x f_y (f_{xx} + f_{yy} - 2 f_{xy}) e^{2(x+y)}) = \\ & = 6 \cdot ((f_x + f_y)(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) (e^{2(x+y)} - e^{x+y}) + f_x f_y (f_{xx} + f_{yy} - 2 f_{xy}) e^{2(x+y)}) \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich

Theorem 4.2. *Die reelle Gleichung*

$$(4.17) \quad A'((x, y), f, Df, D^2 f) = e^{-f}$$

für $n = 2$ in $\{(x, y) \in N_{\mathbb{R}} : x + y \leq 0\}$ für den homogenen Raum $L := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ lautet:

$$\begin{aligned} (4.18) \quad & 6 \cdot [(f_x + f_y)(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) (e^{2(x+y)} - e^{x+y}) + \\ & + f_x f_y (f_{xx} + f_{yy} - 2 f_{xy}) e^{2(x+y)}] = \\ & = e^{-f} \end{aligned}$$

für $\partial\bar{\partial}(f \circ \pi) > 0$.

4.5 Beispiele von Kompaktifizierungen für $n \geq 2$

Wir geben in diesem Abschnitt Lösungen für die oben aufgestellten Gleichungen (4.16), (4.18) an. Dabei bettet man den homogenen Raum $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H_i$, ($i = 1, 2$) in verschiedenen Varietäten äquivariant ein, und sucht nach geeigneten Funktionen, die Potentiale von $\mathrm{SU}(n)$ - bzw. $\mathrm{SU}(2) \times S^1$ -invarianten Kählermetriken auf der ganzen Varietät sind, und die Gleichungen lösen. Das bedeutet insbesondere, dass man neben der nötigen Differenzierbarkeitsklasse und der Plurisubharmonizität, auch Randbedingungen zu berücksichtigen hat, wie sich die Metrik “am Rand”, also außerhalb des offenen Orbits zu verhalten hat, was wir aber aussparen in dieser Arbeit.

4.5.1 Beispiele im Fall $n = 2$

Glücklicherweise kennt man für die folgenden Beispiele der Kompaktifizierungen X jeweils Kählermetriken, die die geforderte Invarianz besitzen, und zudem auch noch Kähler-Einstein-Metriken mit positiver Skalarkrümmung sind. Aus den bekannten lokalen Potentialen muss man sich nur noch die auf dem offenen Orbit darstellende, invariante Funktion f verschaffen, dazu siehe das Kapitel 3. Diese müssen Lösungen der Gleichung (4.18) sein.

$$X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

Die Kompaktifizierung $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ von $SL_2(\mathbb{C})$ wurde schon hinlänglich in Kapitel 3 besprochen. Für $f = \ln(1 + e^{-x}) + \ln e^{-y} = \ln(1 + e^{-x}) - y$ erhält man aus den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}, f_{xx} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ f_y &= -1, f_{yy} = 0 = f_{xy} \end{aligned}$$

die folgende linke Seite in der Gleichung (4.18):

$$\begin{aligned} 6 \cdot \left(-\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} (-1) \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} e^{2(x+y)} \right) &= 6 \frac{e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^3} e^{2(x+y)} = \\ &= 6 \cdot e^{-\ln(1+e^{-x})^3 + \ln e^{2y}} = e^{-3 \ln(1+e^{-x}) - 2 \ln e^{-y} + \ln 6} \end{aligned}$$

Anstelle von diesem f , wählt man die leicht abgeänderte Funktion $f = \ln(1+e^{-x})^3 + \ln(e^{-y})^2 - \ln 6$, und setzt diese in die Differentialgleichung ein. Dies bringt einen zusätzlichen Vorfaktor $3^2 \cdot 2 = 18$ ein, wegen der Exponenten der neuen Funktion f . Jetzt muss man diese Konstante in f wieder abziehen $f := \ln(1 + e^{-x})^3 + \ln(e^{-y})^2 - \ln 6 - \ln 18 = \ln(1 + e^{-x})^3 + \ln(e^{-y})^2 - \ln 108$, was Gleichung (4.18) löst. Der Faktor $6 = (2 \cdot 2 - 1)! = 3!$ vor der linken Seite von (4.17) ist stets vorhanden, wie die Berechnung dieses Operators zeigt. Er beschreibt den konstanten Koeffizienten einer Volumenform, die hier bezüglich der Variablenklassen vom Typ $(3, 3)$ ist. Die Exponenten 3 und 2 sind die Einsteinkonstanten der Fubini-Study-Metrik der projektiven Räume \mathbb{P}^2 und \mathbb{P}^1 , die zu diesem Potential der Produktmetrik beitragen, weil wegen der Beziehung $c_1(\mathbb{P}^n) = \frac{n+1}{\pi} [\omega_{FS}]$ bezüglich der Standard Fubini-Study-Metrik auf dem projektiven Raum gilt: $Ric(\omega_{FS}) = (n + 1)\omega_{FS}$.

X ist Quadrik in \mathbb{P}^4

Für $f = \ln(e^{-x} + e^{-y})$ mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + e^{-y}}, f_{xx} = \frac{e^{-x-y}}{(e^{-x} + e^{-y})^2} = f_{yy} \\ f_y &= \frac{-e^{-y}}{e^{-x} + e^{-y}}, f_{xy} = \frac{-e^{-x-y}}{(e^{-x} + e^{-y})^2} \end{aligned}$$

bekommt man für die linke Seite:

$$6 \frac{4}{(e^{-x} + e^{-y})^4} = 24 \cdot e^{-4f}$$

Wähle $f = \ln(e^{-x} + e^{-y})^4 - \ln 24$ als Potentialfunktion in einer ersten Verbesserung. Beobachte, dass dies einen zusätzlichen Faktor $4^3 = 64$ wegen des Exponenten 4 einbringt, so dass

$$f := \ln(e^{-x} + e^{-y})^4 - \ln 1536$$

Gleichung (4.18) exakt löst.

X ist **Fahnenvarietät** $\mathbf{SL}_3(\mathbb{C})/B$ in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$

Für $f := \ln(1 + e^{-x}) + \ln(1 + e^{-y})$ berechnet man die partiellen Ableitungen zu

$$f_x = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}, f_y = \frac{-e^{-y}}{1 + e^{-y}}, f_{xx} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, f_{yy} = \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite in (4.17) ist damit:

$$6 \frac{2}{(1 + e^{-x})^2 (1 + e^{-y})^2} = e^{\ln 12 - 2 \ln(1 + e^{-x})(1 + e^{-y})}$$

Verändere f zu $f := 2 \ln(1 + e^{-x})(1 + e^{-y}) - \ln 12$. Dies produziert einen Zusatzfaktor von 8 wegen des Exponenten 2 in dem Term auf der linken Seite. Somit löst die Funktion

$$f := 2 \ln(1 + e^{-x})(1 + e^{-y}) - \ln 96$$

Gleichung (4.18) exakt.

4.5.2 Die Beispiele im Fall $n > 2$

$X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

Für $f = \ln(1 + e^{-x})^{n+1} + \ln(e^{-y})^n - \ln((2n - 1)!)$ erhalten wir :

$$\begin{aligned} f_x &= (n + 1) \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}, f_{xx} = (n + 1) \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ f_y &= -n, f_{yy} = 0 = f_{xy} \end{aligned}$$

Dies liefert nach Anwendung des Operators auf f den folgenden Vorfaktor von $|\Omega|^2$:

$$\begin{aligned} &(2n - 1)! (n + 1)^{n-1} n^{n-1} (n + 1) \frac{e^{-(n-1)x}}{(1 + e^{-x})^{n-1}} \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} e^{n(x+y)} = \\ &= (2n - 1)! \frac{(n + 1)^n}{(1 + e^{-x})^{n+1}} \frac{n^{n-1}}{(e^{-y})^n} = e^{-(n \ln(1 + e^{-x}) - n \ln n - \ln((2n - 1)!))} \end{aligned}$$

Weil $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = f_{xx} \cdot 0 - 0 = 0$ gilt, ist der erste Summand Null, also stammt der ganze Ausdruck vom letzten Term $f_x^{n-1} f_y^{n-1} (f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}) e^{n(x+y)}$. Der Vorfaktor für $n = 2$ bringt $6 \cdot 18 = 108$ wie für diesen Fall ausgerechnet wurde. Schließlich findet man als exakte Lösung von (4.16)

$$f = \ln(1 + e^{-x})^{n+1} + \ln(e^{-y})^n - \ln[((2n - 1)!) (n + 1)^n n^{n-1}]$$

X ist Quadrik in \mathbb{P}^{2n}

Für $f = \ln(e^{-x} + e^{-y})^{2n} - \ln((2n-1)!)$ rechnen wir

$$\begin{aligned} f_x &= 2n \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + e^{-y}}, \quad f_{xx} = 2n \frac{e^{-x-y}}{(e^{-x} + e^{-y})^2} = f_{yy} \\ f_y &= 2n \frac{-e^{-y}}{e^{-x} + e^{-y}}, \quad f_{yy} = 2n \frac{-e^{-x-y}}{(e^{-x} + e^{-y})^2} \end{aligned}$$

Daher hat man auf der Operatorseite von (4.15)

$$(2n-1)!(2n)^{2n-1} 4 \frac{1}{(e^{-x} + e^{-y})^{2n}}$$

Dies kommt wiederum alleinig vom zweiten Teil des Operators, weil $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ist. Der Vorfaktor im Fall $n = 2$ ergab $6 \cdot 4^4 = 1536$, was diese Berechnung auch bestätigt. Die endgültige Funktion ist

$$f = \ln(e^{-x} + e^{-y})^{2n} - \ln[(2n-1)!(2n)^{2n-1}4]$$

als Lösung von (4.16).

X ist Hyperfläche in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ vom Bigrad (1, 1)

Für $f = \ln(1 + e^{-x})^n + \ln(1 + e^{-y})^n - \ln((2n-1)!)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} f_x &= n \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad f_{xx} = n \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad f_{xy} = 0 = f_{yx} \\ f_y &= n \frac{-e^{-y}}{1 + e^{-y}}, \quad f_{yy} = n \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2} \end{aligned}$$

Der Operator auf der linken Seite der Gleichung (4.15) auf f angewandt, führt zu

$$\begin{aligned} &(2n-1)! [n^{2n-1} (-1)^{2n-3} \left(\frac{e^{-nx-(n-1)y}}{(1+e^{-x})^{n+1}(1+e^{-y})^n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-(n-1)x-ny}}{(1+e^{-x})^n(1+e^{-y})^{n+1}} \right) (e^{n(x+y)} - e^{(n-1)(x+y)}) + \\ &\quad + n^{2n-1} (-1)^{2n-2} \frac{e^{-(n-1)(x+y)} (e^{-x}(1+e^{-y})^2 + e^{-y}(1+e^{-x})^2)}{(1+e^{-x})^{n+1}(1+e^{-y})^{n+1}} e^{n(x+y)}] = \\ &= (2n-1)! n^{2n-1} [-e^{-(n-1)(x+y)} \frac{(1+e^{-y})e^{-x} + (1+e^{-x})e^{-y}}{(1+e^{-x})^{n+1}(1+e^{-y})^{n+1}} (e^{n(x+y)} - e^{(n-1)(x+y)}) + \\ &\quad + e^{-(n-1)(x+y)} \frac{e^{-x} + e^{-y} + 4e^{-x-y} + e^{-x-2y} + e^{-2x-y}}{(1+e^{-x})^{n+1}(1+e^{-y})^{n+1}} e^{n(x+y)}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2n-1)!n^{2n-1} \frac{-(e^{x+y}-1)(e^{-x}+e^{-y}+2e^{-x-y})+(e^y+e^x+4+e^{-x}+e^{-y})}{(1+e^x)^{n+1}(1+e^{-y})^{n+1}} = \\
 &= (2n-1)!n^{2n-1} \frac{2e^{-x}+2e^{-y}+2e^{-x-y}+2}{(1+e^x)^{n+1}(1+e^{-y})^{n+1}} = \\
 &= (2n-1)!n^{2n-1} 2 \frac{(1+e^{-x})(1+e^{-y})}{(1+e^x)^{n+1}(1+e^{-y})^{n+1}} = \\
 &= (2n-1)!n^{2n-1} 2 \frac{1}{(1+e^x)^n(1+e^{-y})^n}
 \end{aligned}$$

Beobachte, dass diese Berechnung umfangreicher als die Vorherigen ist, da der erste Teil des Operators nicht verschwindet. Verglichen mit dem konstanten Faktor im Fall $n = 2$ gilt, dass $3!2^3 = 6 \cdot 8 \cdot 2 = 96$ ist, was mit der expliziten Kalkulation davon übereinstimmt. Schließlich hat man als Lösung der Gleichung (4.16) die Funktion

$$f = \ln(1 + e^{-x})^n + \ln(1 + e^{-y})^n - \ln[((2n-1)!)n^{2n-1}2]$$

4.6 Bezug zu Operatoren aus dem Kapitel 3

Wir erinnern uns an die Theoreme 3.1, 3.2, und beleuchten die Relation der reellen Koordinatenfunktionen von $SL_2(\mathbb{C})$, die $SU(2)$ -invariant zu \mathbb{H}^3 gehören, zu denen für $SL_2(\mathbb{C}) \cong SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{G}_m/H$, die $SU(2) \times S^1$ -invariant auf $\{(\hat{x}, \hat{y}) \in N_{\mathbb{R}} : \hat{x} + \hat{y} \leq 0\}$ bezogen sind. Diese seien wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 x &:= \frac{\Re(b\bar{d}+a\bar{c})}{|c|^2+|d|^2} & \hat{x} &:= -\ln(|a|^2 + |b|^2) \\
 y &:= \frac{\Im(b\bar{d}+a\bar{c})}{|c|^2+|d|^2} & \hat{y} &:= -\ln(|c|^2 + |d|^2) \\
 r &:= \frac{1}{|c|^2+|d|^2}
 \end{aligned}$$

Sie verhalten sich zueinander in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
 |z|^2 := x^2 + y^2 &= e^{-\hat{x}+\hat{y}} - e^{2\hat{y}} & \hat{x} &= -\ln(r + \frac{|z|^2}{r}) \\
 r = e^{\hat{y}} & & \hat{y} &= \ln(r)
 \end{aligned}$$

Die Koordinate $|z|^2 := x^2 + y^2$ hat eine zusätzliche S^1 -Invarianz, und kann statt mit x, y durch \hat{x}, \hat{y} ausgedrückt werden. Allerdings können x, y nicht als Funktionen von \hat{x}, \hat{y} abhängig gemacht werden. Es korrespondieren die Grundfunktionen der Lösungen, ohne die Exponenten, der drei besprochenen $SL_2(\mathbb{C})$ -Einbettungen in folgender Weise:

X	$f(x, y, r)$	\leftrightarrow	$f(\hat{x}, \hat{y})$
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$	$\ln(1 + r + \frac{ z ^2}{r}) + \ln(\frac{1}{r})$	\leftrightarrow	$\ln(1 + e^{-\hat{x}}) - \hat{y}$
$Q \subset \mathbb{P}^4$	$\ln(r + \frac{ z ^2}{r} + \frac{1}{r})$	\leftrightarrow	$\ln(e^{-\hat{x}} + e^{-\hat{y}})$
$H^{1,1} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$\ln(1 + r + \frac{ z ^2}{r}) + \ln(1 + \frac{1}{r})$	\leftrightarrow	$\ln(1 + e^{-\hat{x}}) + \ln(1 + e^{-\hat{y}})$

Kapitel 5

Wundervolle Einbettungen sphärischer homogener Räume

5.1 Spezielle Kähler-Metriken wundervoller Varietäten vom Rang eins

Für sphärische Varietäten vom Rang eins ist eine vollständige Klassifikation basierend auf Arbeiten von Akhiezer in [Ak4], Brion [Br1], und von Huckleberry und Snow [HS] bekannt. Vergleiche die Diskussion in Abschnitt 1.3. Man hat genau zwei Klassen zu unterscheiden: Diejenigen, die eine wundervolle Kompaktifizierung zulassen, siehe [T1] Tafel 5.10, um die es hier gehen soll, und die horosphärischen homogenen Räume, von denen in Kapitel 2 ein Beispiel behandelt wurde. Diese zwei Klassen sind dadurch unterschieden, dass Vervollständigungen im Rand, d.h. außerhalb des offenen Orbits, entweder einen homogenen Divisor haben (wundervolle Einbettung), oder zwei Divisoren. Andere Fälle mit mehr Divisoren oder anderen abgeschlossenen Untervarietäten gibt es nicht. Einbettungen von symmetrischen Varietäten vom Rang eins, die auch wundervolle Kompaktifizierungen besitzen, gehören ebenfalls in diesen Rahmen. Wir greifen im folgenden Abschnitt zwei Beispiele wundervoller Kompaktifizierungen heraus, und bestimmen die Einsteingleichung dazu, die eine invariante Kähler-Einstein-Metrik festlegt. Es entstehen gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichungen, die eine Lösung besitzen.

5.1.1 \mathbb{P}^3 als $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ -, und die Quadrik in \mathbb{P}^4 als $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -Einbettung

Obwohl Rang eins auf den ersten Blick verspricht, nicht zu kompliziert zu sein, ist dies insofern ein Irrtum, dass die Rechnung nicht schwierig ist, aber recht lange. Führe folgende Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} G_1 &:= \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & H_1 &= \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \\ G_2 &:= \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) & H_2 &= \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

wobei H_i hier die Stabilisatoren unter der G_i -Wirkung auf den Varietäten

$$\begin{aligned} X_1 &:= \{ \det(X) = t^2 : X \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}), t \in \mathbb{C} \} \subset \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}) \\ X_2 &:= \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{P}^3 \end{aligned}$$

in den Punkten $((\frac{1}{0} \ 0), 1) \in \mathbf{X}_1$, bzw. $(\frac{1}{0} \ 0) \in \mathbf{X}_2$ sind. Für die homogenen Koordinaten wählt man die Bezeichnungen $[X_{00} : X_{01} : X_{10} : X_{11} : t] \in \mathbf{X}_1$ bzw. $[X_{00} : X_{01} : X_{10} : X_{11}] \in \mathbf{X}_2$. Die Operation mit Matrizen $S, T \in G_i, i = 1, 2$ findet dabei jeweils von links mit S und von rechts mit T^{-1} auf $X \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ statt. Die offene Bahn von G_i in $\mathbf{X}_i, i = 1, 2$, findet man leicht als Komplement zu $\mathbb{V}_{\mathbf{X}_1}(t)$ bzw. $\mathbb{V}_{\mathbf{X}_2}(\det(X))$, wobei $X \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ liegt, heraus. Denn es bestehen folgende Bijektionen

$$\begin{aligned} G_1/H_1 \cong \text{SL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbf{X}_1 \setminus \mathbb{V}_{\mathbf{X}_1}(t) \subset \mathbf{X}_1 \\ T &\mapsto [T : 1] \\ \frac{X}{t} &\leftrightarrow [X : t \neq 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2/H_2 \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbf{X}_2 \setminus \mathbb{V}_{\mathbf{X}_2}(\det(X)) \subset \mathbf{X}_2 \\ T &\mapsto [T] \\ \frac{X}{\det(X)} &\leftrightarrow [X] \end{aligned}$$

Damit ist klar: Homogene Räume $G_i/H_i, i = 1, 2$ werden in \mathbf{X}_i eingebettet. Die weggenommenen Divisoren sind irreduzible, homogene Hyperflächen in den Varietäten $\mathbf{X}_i, i = 1, 2$ und andere G_i -Bahnen gibt es nicht. Bezeichne mit $L_1 := \text{SL}_2(\mathbb{C})$ bzw. $L_2 := \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ die den Quotienten G_i/H_i entsprechenden homogenen Räume, für $i = 1, 2$.

Lemma 5.1. *Es gibt Isomorphismen der offenen Bahnen*

$$\begin{aligned} \text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \text{SL}_2(\mathbb{C})/\text{SL}_2(\mathbb{C}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{C}) \quad \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PSL}_2(\mathbb{C})/\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \\ (X, t) \mapsto \frac{1}{t} X \qquad \qquad \qquad X \mapsto \frac{1}{\sqrt{\det(X)}} X \end{aligned}$$

wobei für den Wurzel Ausdruck ein Zweig der komplexen Wurzel zu wählen ist.

Beweis. Klar. □

Bemerkung 5.1. Für $\mathbb{V}_{\mathbf{X}_1}(t)$ erkennt man eine Isomorphie via

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X \in \text{Mat}_{2 \times 2} : \det(X) = 0\} &\rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ X = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{01} \\ X_{10} & X_{11} \end{pmatrix} &\mapsto [\text{Spaltenraum}(X) : \text{Zeilenraum}(X)] \\ \begin{bmatrix} X_0 Y_0 & X_0 Y_1 \\ X_1 Y_0 & X_1 Y_1 \end{bmatrix} &\leftrightarrow [X_0 : X_1][Y_0 : Y_1] \end{aligned}$$

mit $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. □

Als maximale kompakte Untergruppen nimmt man

$$K_1 := \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \leq G_1 \quad \text{bzw.} \quad K_2 := \text{PSU}(2) \times \text{PSU}(2) \leq G_2$$

und bildet den Quotienten des homogenen Raums L_1 bzw. L_2 danach, da man diesbezüglich invariante Kählermetriken auf $\mathbf{X}_i, i = 1, 2$ studieren will. Auf L_i erwählt man folgendes q

als K_i -invariante Koordinatenfunktion, $i = 1, 2$, das als Summe der unter Linksmultiplikation invarianten Spaltenvektornormen von $X \in Mat_{2 \times 2}$, und unter der Rechtsmultiplikation invarianten Zeilenvektornormen von X insgesamt unverändert bleibt.

$$(5.1) \quad q := -\ln(|X_{00}|^2 + |X_{01}|^2 + |X_{10}|^2 + |X_{11}|^2)$$

Diese Funktion ist für beide Fälle $i = 1, i = 2$ wohldefiniert, und liefert die Bijektion $K_i \setminus L_i \cong \mathbb{R}_{\leq 0}$ nach Proposition 1.5. Es folgt:

$$\begin{aligned} \partial q &= -\frac{\bar{X}_{00}dX_{00} + \bar{X}_{01}dX_{01} + \bar{X}_{10}dX_{10} + \bar{X}_{11}dX_{11}}{\|X\|^2} \\ \bar{\partial} q &= \overline{\partial q}, \text{ d.h. komplex konjugiert} \\ \partial \bar{\partial} q &= -\sum_{i,j,k,l=0}^1 \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - \bar{X}_{ij}X_{kl}}{\|X\|^4} dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl} \end{aligned}$$

Wir führen zur Abkürzung und übersichtlicheren Darstellbarkeit ein:

$$(ij, \bar{k}l) := \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - \bar{X}_{ij}X_{kl}}{\|X\|^4} dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl}$$

für $i, j, k, l = 0, 1$, so dass man bzgl. der Reihenfolge (00), (01), (10), (11) schreiben kann:

$$(5.2) \quad \partial \bar{\partial} q = \sum_{i,j,k,l=0}^1 (ij, \bar{k}l) = \begin{pmatrix} (00, \bar{00}) & (00, \bar{01}) & (00, \bar{10}) & (00, \bar{11}) \\ (01, \bar{00}) & (01, \bar{01}) & (01, \bar{10}) & (01, \bar{11}) \\ (10, \bar{00}) & (10, \bar{01}) & (10, \bar{10}) & (10, \bar{11}) \\ (11, \bar{00}) & (11, \bar{01}) & (11, \bar{10}) & (11, \bar{11}) \end{pmatrix}$$

Sei $\phi : L_i := G_i/H_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ eine glatte, K_i -invariante Funktion, d.h. $\phi =: u \circ \pi_{K_i}$, für die Projektion $\pi_{K_i} : L_i \rightarrow K_i \setminus L_i$, und eine Funktion u auf $K_i \setminus G_i/H_i$, $i = 1, 2$. Es ergibt sich

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (\partial \bar{\partial} \phi)^3 &= (u_{11} \partial q \wedge \bar{\partial} q + u_1 \partial \bar{\partial} q)^3 = \\ &= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (u_{11} \partial q \wedge \bar{\partial} q)^i \wedge (u_1 \partial \bar{\partial} q)^{3-i} = \\ &= \binom{3}{0} (u_1 \partial \bar{\partial} q)^3 + \binom{3}{1} (u_{11} \partial q \wedge \bar{\partial} q)^1 (u_1 \partial \bar{\partial} q)^2 + 0 \end{aligned}$$

Man hat sich daher um die Terme

$$\begin{array}{ll} \text{A} & (\partial \bar{\partial} q)^3 \\ \text{B} & \partial q \wedge \bar{\partial} q \wedge (\partial \bar{\partial} q)^2 \end{array}$$

zu kümmern und berechnen diese jetzt.

Berechnung von Term A: Bestimme $(\partial \bar{\partial} q)^2$ durch äußere Multiplikation jedes Eintrages $(ij, \bar{k}l)$ mit allen neun komplementären Einträgen $(i'j', \bar{k}'l')$ mit $ij \neq i'j'$ und $kl \neq k'l'$ die nicht Null ergeben. Dies bringt 144 Summanden hervor, die man wieder zu je 4 Summanden

nach Basisformen aufaddieren kann. Allgemein bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
 & (ij, \bar{kl}) \wedge (i'j', \bar{k'l'}) + (ij, \bar{k'l'}) \wedge (i'j', \bar{kl}) + \\
 & + (i'j', \bar{kl}) \wedge (ij, \bar{k'l'}) + (i'j', \bar{k'l'}) \wedge (ij, \bar{kl}) = \\
 & = \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - X_{ij} \bar{X}_{kl}}{\|X\|^4} \cdot \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{k'l'} - X_{i'j'} \bar{X}_{k'l'}}{\|X\|^4} dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl} \wedge dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k'l'} + \\
 & + \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{k'l'} - X_{i'j'} \bar{X}_{k'l'}}{\|X\|^4} \cdot \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - X_{ij} \bar{X}_{kl}}{\|X\|^4} dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{k'l'} \wedge dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{kl} + \\
 & + \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{kl} - X_{i'j'} \bar{X}_{kl}}{\|X\|^4} \cdot \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{k'l'} - X_{ij} \bar{X}_{k'l'}}{\|X\|^4} dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{kl} \wedge dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{k'l'} + \\
 & + \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{k'l'} - X_{i'j'} \bar{X}_{k'l'}}{\|X\|^4} \cdot \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - X_{ij} \bar{X}_{kl}}{\|X\|^4} dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k'l'} \wedge dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl} = \\
 & = 2 \left[\frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - X_{ij} \bar{X}_{kl}}{\|X\|^4} \cdot \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{k'l'} - X_{i'j'} \bar{X}_{k'l'}}{\|X\|^4} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{k'l'} - X_{ij} \bar{X}_{k'l'}}{\|X\|^4} \cdot \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{kl} - X_{i'j'} \bar{X}_{kl}}{\|X\|^4} \right] \cdot \\
 & \quad \cdot dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl} \wedge dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k'l'}
 \end{aligned}$$

was wir im Folgenden mit

$$=: (ij, kl)(i'j', k'l')$$

bezeichnen wollen. Damit haben wir 36 Terme der Form $(ij, kl)(i'j', k'l')$ vorliegen:

	<i>a</i>	(00, 00)(01, 01)	<i>s</i>	(01, 00)(10, 01)	<i>ae</i>	(10, 00)(11, 01)
	<i>b</i>	(00, 00)(01, 10)	<i>t</i>	(01, 00)(10, 10)	<i>af</i>	(10, 00)(11, 10)
	<i>c</i>	(00, 00)(01, 11)	<i>u</i>	(01, 00)(10, 11)	<i>ag</i>	(10, 00)(11, 11)
	<i>d</i>	(00, 00)(10, 01)	<i>v</i>	(01, 00)(11, 01)	---	---
	<i>e</i>	(00, 00)(10, 10)	<i>w</i>	(01, 00)(11, 10)	<i>ah</i>	(10, 01)(11, 10)
	<i>f</i>	(00, 00)(10, 11)	<i>x</i>	(01, 00)(11, 11)	<i>ai</i>	(10, 01)(11, 11)
	<i>g</i>	(00, 00)(11, 01)	---	---	---	---
	<i>h</i>	(00, 00)(11, 10)	<i>y</i>	(01, 01)(10, 10)	<i>aj</i>	(10, 10)(11, 11)
	<i>i</i>	(00, 00)(11, 11)	<i>z</i>	(01, 01)(10, 11)	---	---
	---	---	<i>aa</i>	(01, 01)(11, 10)		
(5.4)	<i>j</i>	(00, 01)(01, 10)	<i>ab</i>	(01, 01)(11, 11)		
	<i>k</i>	(00, 01)(01, 11)	---	---		
	<i>l</i>	(00, 01)(10, 10)	<i>ac</i>	(01, 10)(10, 11)		
	<i>m</i>	(00, 01)(10, 11)	<i>ad</i>	(01, 10)(11, 11)		
	<i>n</i>	(00, 01)(11, 10)	---	---		
	<i>o</i>	(00, 01)(11, 11)				
	---	---				
	<i>p</i>	(00, 10)(01, 11)				
	<i>q</i>	(00, 10)(10, 11)				
	<i>r</i>	(00, 10)(11, 11)				
	---	---				

Zum Lesen der Tabelle: Man sammelt alle nichttrivialen Produkte unter dem Namen des ersten Auftretenden, wie in der Definition von $(ij, kl)(i'j', k'l')$ ausgesagt ist. Die Spalten eins bis drei stammen alle aus Produkten von Einträgen der Matrix (5.2) der ersten bis dritten Zeile mit allen Matrixeinträgen. Jede Spalte hat eine Untergliederung nach den Produkten der einzelnen Einträge der jeweiligen Zeile, sofern vorhanden. Damit hat man nun $(\partial\bar{\partial}q)^2$ vollkommen berechnet.

Zur Bestimmung von $(\partial\bar{\partial}q)^3$ müssen alle diese Einträge $(ij, kl)(i'j', k'l')$ von $a - aj$ nochmals mit (5.2) multipliziert werden. Dabei bleiben nur vier Produkte $(ij, kl)(i'j', k'l') \wedge (i'', j'', \bar{k}''l'')$ ungleich Null übrig, die man aufschreiben muss. Diese sammelt man wieder zusammen zum folgenden System von 16 äußeren Produkten ungleich Null:

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{a} & (00,00)(01,01) \wedge (10, \bar{10}) & \mathbf{m} & (01,00)(10,01) \wedge (11, \bar{10}) \\
 \mathbf{b} & (00,00)(01,01) \wedge (10, \bar{11}) & \mathbf{n} & (01,00)(10,01) \wedge (11, \bar{11}) \\
 \mathbf{c} & (00,00)(01,01) \wedge (11, \bar{10}) & \mathbf{o} & (01,00)(10,10) \wedge (11, \bar{11}) \\
 \mathbf{d} & (00,00)(01,01) \wedge (11, \bar{11}) & \text{---} & \text{---} \\
 \mathbf{e} & (00,00)(01,10) \wedge (10, \bar{11}) & \mathbf{p} & (01,01)(10,10) \wedge (11, \bar{11}) \\
 \mathbf{f} & (00,00)(01,10) \wedge (11, \bar{11}) & \text{---} & \text{---} \\
 \mathbf{g} & (00,00)(10,01) \wedge (11, \bar{10}) & & \\
 \mathbf{h} & (00,00)(10,01) \wedge (11, \bar{11}) & & \\
 \mathbf{i} & (00,00)(10,10) \wedge (11, \bar{11}) & & \\
 \text{---} & \text{---} & & \\
 \mathbf{j} & (00,01)(01,10) \wedge (10, \bar{11}) & & \\
 \mathbf{k} & (00,01)(01,10) \wedge (11, \bar{11}) & & \\
 \mathbf{l} & (00,01)(10,10) \wedge (11, \bar{11}) & & \\
 \text{---} & \text{---} & & \\
 \text{---} & \text{---} & \mathbf{0} & \text{---} \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---}
 \end{array}
 \tag{5.5}$$

Erklärung der Tabelle: Man sammelt wieder nur unter dem ersten auftretenden Produkt alle neun zu einer festen Basissechseform auf. Die erste Spalte besteht aus Produkten der Einträge $a - e$ aus (5.4) mit (5.2)-Einträgen. Es folgen weiter in derselben Spalte Produkte von j, l mit (5.2). Danach geht es in der zweiten Spalte von (5.4) mit s, t -Produkten weiter, und schließlich noch ein y -Vielfaches. Damit hat man alle Summen von Produkten aufgelistet, je neun Stück verbergen sich hinter jedem Ausdruck eines Frakturbuchstaben, wobei diese Form dem ersten auftretenden Produkt in der Reihenfolge der vorherigen Tabelle entspricht. In allgemeinen Ausdrücken bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
 & (ij, kl)(i'j', k'l') \wedge (i''j'', \bar{k}''l'') + \\
 & + (ij, kl)(i'j', k''l'') \wedge (i''j'', \bar{k}'l') + \\
 & + (ij, kl)(i''j'', k'l') \wedge (i'j', \bar{k}''l'') + \\
 & + (ij, kl)(i''j'', k''l'') \wedge (i'j', \bar{k}'l') + \\
 & + (ij, k'l')(i'j', k''l'') \wedge (i''j'', \bar{k}'l') + \\
 & + (ij, k'l')(i''j'', k'l') \wedge (i'j', \bar{k}l) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(i'j', kl)(i''j'', k'l') \wedge (ij, \overline{k''l''}) + \\
& +(i'j', kl)(i''j'', k''l'') \wedge (ij, \overline{k''l''}) + \\
& +(i'j', k'l')(i''j'', k''l'') \wedge (ij, \overline{k'l}) = \\
= & 6 \left(\frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - \bar{X}_{ij} X_{kl}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{k'l'} - \bar{X}_{i'j'} X_{k'l'}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i''j''}^{k''l''} - \bar{X}_{i''j''} X_{k''l''}}{\|X\|^4} - \right. \\
& - \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{k'l'} - \bar{X}_{ij} X_{k'l'}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{kl} - \bar{X}_{i'j'} X_{kl}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i''j''}^{k''l''} - \bar{X}_{i''j''} X_{k''l''}}{\|X\|^4} \\
& - \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - \bar{X}_{ij} X_{kl}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{k''l''} - \bar{X}_{i'j'} X_{k''l''}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i''j''}^{k'l'} - \bar{X}_{i''j''} X_{k'l'}}{\|X\|^4} - \\
& - \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{k''l''} - \bar{X}_{ij} X_{k''l''}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{kl} - \bar{X}_{i'j'} X_{kl}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i''j''}^{k'l'} - \bar{X}_{i''j''} X_{k'l'}}{\|X\|^4} + \\
& + \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{k''l''} - \bar{X}_{ij} X_{k''l''}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{kl} - \bar{X}_{i'j'} X_{kl}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i''j''}^{k'l'} - \bar{X}_{i''j''} X_{k'l'}}{\|X\|^4} + \\
& \left. + \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{k'l'} - \bar{X}_{ij} X_{k'l'}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{kl} - \bar{X}_{i'j'} X_{kl}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i''j''}^{k''l''} - \bar{X}_{i''j''} X_{k''l''}}{\|X\|^4} \right). \\
& dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl} \wedge dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k'l'} \wedge dX_{i''j''} \wedge d\bar{X}_{k''l''}
\end{aligned}$$

Diese Terme müssen aufaddiert werden, indem man für die Indizes (ij, kl) , $(i'j', k'l')$ und $(i''j'', k''l'')$ die 16 Einträge der Tabelle (5.5) von $(\partial\bar{\partial}q)^3$ -Summanden $\mathfrak{a} - \mathfrak{p}$ durchlaufen lässt und summiert, um zu Term A zu gelangen. Dies erfordert viel Schreibearbeit, und man kann weiter vereinfachen. Setze schließlich eine explizit bekannte Referenzvolumenform ein, auf die alle Terme bezogen werden, z.B. wählen wir in der Umgebung $\{X_{00} \neq 0\} \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ bzw. $\subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ folgende aus Proposition 4.3 bekannte Form.

$$dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} = - \left| \frac{X_{00}}{-1} \right|^2 \Omega_{X_{00}} \wedge \bar{\Omega}_{X_{00}}$$

Es folgt letztlich:

$$\begin{aligned}
(\partial\bar{\partial}q)^3 &= -6 \cdot \frac{4}{\|X\|^8} \cdot \Omega \wedge \bar{\Omega} = -24 \frac{1}{(\|X\|^2)^4} |\Omega|^2 = \\
&= 24e^{4q} (-|\Omega|^2)
\end{aligned}$$

wobei wir q in Gleichung (5.1) definiert hatten. Beachte, dass $-|\Omega|^2$ eine positiv definite Volumenform ist, wenn man sie in den Koordinatenbasiskovektoren ausdrückt. Dies ist am Ende entscheidend für die Aufstellung der Gleichung und um die gewünschten Lösungen zu bekommen.

Berechnung von Term B: Man hat also $\partial q \wedge \bar{\partial} q \wedge (\partial \bar{\partial} q)^2$ zu bestimmen. $(\partial \bar{\partial} q)^2$ ist schon berechnet und in Tabelle (5.4) aufgelistet worden. Also bleibt

$$\begin{aligned}
 \partial q \wedge \bar{\partial} q &= \\
 &= \frac{1}{\|X\|^2 \|X\|^2} (\bar{X}_{00} dX_{00} + \bar{X}_{01} dX_{01} + \bar{X}_{10} dX_{10} + \bar{X}_{11} dX_{11}) \wedge \\
 &\wedge (X_{00} d\bar{X}_{00} + X_{01} d\bar{X}_{01} + X_{10} d\bar{X}_{10} + X_{11} d\bar{X}_{11}) = \\
 &= \frac{1}{\|X\|^4} (|X_{00}|^2 dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} + \bar{X}_{00} X_{01} dX_{00} \wedge d\bar{X}_{01} + \\
 &+ \bar{X}_{00} X_{10} dX_{00} \wedge d\bar{X}_{10} + \bar{X}_{00} X_{11} dX_{00} \wedge d\bar{X}_{11} + \\
 &+ \bar{X}_{01} X_{00} dX_{01} \wedge d\bar{X}_{00} + |\bar{X}_{01}|^2 dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} + \\
 &+ \bar{X}_{01} X_{10} dX_{01} \wedge d\bar{X}_{10} + \bar{X}_{01} X_{11} dX_{01} \wedge d\bar{X}_{11} + \\
 &+ \bar{X}_{10} X_{00} dX_{10} \wedge d\bar{X}_{00} + \bar{X}_{10} X_{01} dX_{10} \wedge d\bar{X}_{01} + \\
 &+ |\bar{X}_{10}|^2 dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} + \bar{X}_{10} X_{11} dX_{10} \wedge d\bar{X}_{11} + \\
 &+ \bar{X}_{11} X_{00} dX_{11} \wedge d\bar{X}_{00} + \bar{X}_{11} X_{01} dX_{11} \wedge d\bar{X}_{01} + \\
 &+ \bar{X}_{11} X_{10} dX_{11} \wedge d\bar{X}_{10} + |\bar{X}_{11}|^2 dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11})
 \end{aligned}$$

Schreibe die nichttrivialen äußeren Produkte davon mit dem Term $(\partial \bar{\partial} q)^2$ auf. Dann summiere dies auf zum gleichen Basisvektor. Dazu betrachten wir einen allgemeinen Term zum Basisvektor $dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl} \wedge dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k'l'} \wedge dX_{i''j''} \wedge d\bar{X}_{k''l''}$. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 &(ij, kl)(i'j', k'l') \wedge \bar{X}_{i''j''} X_{k''l''} dX_{i''j''} \wedge d\bar{X}_{k''l''} + \\
 &+ (ij, kl)(i'j', k''l'') \wedge \bar{X}_{i''j''} X_{k'l'} dX_{i''j''} \wedge d\bar{X}_{k'l'} + \\
 &+ (ij, kl)(i''j'', k'l') \wedge \bar{X}_{i'j'} X_{k''l''} dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k''l''} + \\
 &+ (ij, kl)(i''j'', k''l'') \wedge \bar{X}_{i'j'} X_{k'l'} dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k'l'} + \\
 &+ (ij, k'l')(i'j', k''l'') \wedge \bar{X}_{i''j''} X_{kl} dX_{i''j''} \wedge d\bar{X}_{kl} + \\
 &+ (ij, k'l')(i''j'', k''l'') \wedge \bar{X}_{i'j'} X_{kl} dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{kl} + \\
 &+ (i'j', kl)(i''j'', k'l') \wedge \bar{X}_{ij} X_{k''l''} dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{k''l''} + \\
 &+ (i'j', kl)(i''j'', k''l'') \wedge \bar{X}_{ij} X_{k'l'} dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{k'l'} + \\
 &+ (i'j', k'l')(i''j'', k''l'') \wedge \bar{X}_{ij} X_{kl} dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl}
 \end{aligned}$$

wobei wieder

$$\begin{aligned}
 &(ij, kl)(i'j', k'l') := \\
 &= 2 \left(\frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{kl} - \bar{X}_{ij} X_{kl}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{k'l'} - \bar{X}_{i'j'} X_{k'l'}}{\|X\|^4} - \frac{\|X\|^2 \delta_{ij}^{k'l'} - \bar{X}_{ij} X_{k'l'}}{\|X\|^4} \frac{\|X\|^2 \delta_{i'j'}^{kl} - \bar{X}_{i'j'} X_{kl}}{\|X\|^4} \right) \\
 &dX_{ij} \wedge d\bar{X}_{kl} \wedge dX_{i'j'} \wedge d\bar{X}_{k'l'}
 \end{aligned}$$

gesetzt ist, und noch ein Nenner bei $\partial q \wedge \bar{\partial} q$ von $\frac{1}{\|X\|^4}$ weggelassen wurde. Zusammenfassen

dieser Terme liefert mit allen Faktoren:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\|\bar{X}\|^8} [\bar{X}_{ij} X_{kl} (\delta_{i'j'}^{k'l'} \delta_{i''j''}^{k''l''} - \delta_{i'j'}^{k''l''} \delta_{i''j''}^{k'l'}) + \\ & + \bar{X}_{ij} X_{k'l'} (\delta_{i'j'}^{k''l''} \delta_{i''j''}^{kl} - \delta_{i''j''}^{k''l''} \delta_{i'j'}^{kl}) + \\ & + \bar{X}_{ij} X_{k''l''} (\delta_{i'j'}^{kl} \delta_{i''j''}^{k'l'} - \delta_{i'j'}^{k'l'} \delta_{i''j''}^{kl}) + \\ & + \bar{X}_{i'j'} X_{kl} (\delta_{ij}^{k''l''} \delta_{i''j''}^{k'l'} - \delta_{i''j''}^{k''l''} \delta_{ij}^{k'l'}) + \\ & + \bar{X}_{i'j'} X_{k'l'} (\delta_{ij}^{kl} \delta_{i''j''}^{k''l''} - \delta_{ij}^{k''l''} \delta_{i''j''}^{kl}) + \\ & + \bar{X}_{i'j'} X_{k''l''} (\delta_{ij}^{k'l'} \delta_{i''j''}^{kl} - \delta_{ij}^{kl} \delta_{i''j''}^{k'l'}) + \\ & + \bar{X}_{i''j''} X_{kl} (\delta_{ij}^{k'l'} \delta_{i'j'}^{k''l''} - \delta_{i'j'}^{k'l'} \delta_{ij}^{k''l''}) + \\ & + \bar{X}_{i''j''} X_{k'l'} (\delta_{ij}^{k''l''} \delta_{i'j'}^{kl} - \delta_{ij}^{kl} \delta_{i'j'}^{k''l''}) + \\ & + \bar{X}_{i''j''} X_{k''l''} (\delta_{ij}^{kl} \delta_{i'j'}^{k'l'} - \delta_{ij}^{k'l'} \delta_{i'j'}^{kl})] \end{aligned}$$

Diesen allgemeinen Ausdruck muss man mit den bekannten 16 Kombinationen $\mathfrak{a} - \mathfrak{p}$ aus der Tabelle (5.5) für $(\partial\bar{\partial}q)^3$ befüllen. Damit ergibt sich:

$$(\partial\bar{\partial}q)^2 \wedge \partial q \wedge \bar{\partial} q = \frac{2}{\|\bar{X}\|^8} \cdot$$

\mathfrak{a}	$(\bar{X}_{00} X_{00} + \bar{X}_{01} X_{01} + \bar{X}_{10} X_{10}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} +$
\mathfrak{b}	$(\bar{X}_{10} X_{11}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{c}	$(\bar{X}_{11} X_{10}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{10} +$
\mathfrak{d}	$(X_{00} + X_{01} ^2 + X_{11} ^2) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{e}	$(-\bar{X}_{01} X_{11}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{f}	$(\bar{X}_{01} X_{10}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{g}	$(-\bar{X}_{10} X_{01}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{10} +$
\mathfrak{h}	$(\bar{X}_{10} X_{01}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{i}	$(X_{00} ^2 + X_{10} ^2 + X_{11} ^2) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{j}	$(\bar{X}_{00} X_{11}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{k}	$(-\bar{X}_{00} X_{10}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{l}	$(\bar{X}_{00} X_{01}) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{m}	$(\bar{X}_{11} X_{00}) dX_{01} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{10} +$
\mathfrak{n}	$(-\bar{X}_{10} X_{00}) dX_{01} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{o}	$(\bar{X}_{01} X_{00}) dX_{01} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11} +$
\mathfrak{p}	$(X_{01} ^2 + X_{10} ^2 + X_{11} ^2) dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} \wedge dX_{11} \wedge d\bar{X}_{11}$

was man wieder mit Hilfe der Ersetzungsregeln aus Abschnitt 4.2.3 auf die Referenzform $dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10}$ beziehen kann:

$$\begin{aligned} & = \frac{2}{\|\bar{X}\|^8} [(|X_{00}|^2 + |X_{01}|^2 + |X_{10}|^2) + \frac{\bar{X}_{01}}{\bar{X}_{00}} \bar{X}_{10} X_{11} + \frac{X_{01}}{X_{00}} \bar{X}_{11} X_{10} + \\ & + (|X_{00}|^2 + |X_{01}|^2 + |X_{11}|^2) \frac{|X_{01}|^2}{|X_{00}|^2} + \frac{\bar{X}_{10}}{\bar{X}_{00}} \bar{X}_{01} X_{11} - \frac{X_{01} \bar{X}_{10}}{|X_{00}|^2} \bar{X}_{01} X_{10} + \\ & + \frac{X_{10}}{X_{00}} \bar{X}_{11} X_{01} - \frac{\bar{X}_{01} X_{10}}{|X_{00}|^2} \bar{X}_{10} X_{01} + \left| \frac{X_{10}}{X_{00}} \right|^2 (|X_{00}|^2 + |X_{10}|^2 + |X_{11}|^2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{X}_{11}}{\bar{X}_{00}}\bar{X}_{00}X_{11} + \frac{X_{01}\bar{X}_{11}}{|X_{00}|^2}\bar{X}_{00}X_{10} + \frac{X_{10}\bar{X}_{11}}{|X_{00}|^2}\bar{X}_{00}X_{01} - \\
& -\frac{X_{11}}{X_{00}}\bar{X}_{11}X_{00} + \frac{X_{11}\bar{X}_{01}}{|X_{00}|^2}\bar{X}_{10}X_{00} + \frac{X_{11}\bar{X}_{10}}{|X_{00}|^2}\bar{X}_{01}X_{00} + \\
& + \left| \frac{X_{11}}{X_{00}} \right|^2 (|X_{01}|^2 + |X_{10}|^2 + |X_{11}|^2) dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10}
\end{aligned}$$

Wenn man jetzt die Volumenform $|\Omega|^2$ in ihrer Gestalt auf der offenen Teilmenge $\{X_{00} \neq 0\}$ einsetzt, d.h. $dX_{00} \wedge d\bar{X}_{00} \wedge dX_{01} \wedge d\bar{X}_{01} \wedge dX_{10} \wedge d\bar{X}_{10} = -|X_{00}|^2 \Omega_{X_{00}} \wedge \bar{\Omega}_{X_{00}}$, so erhält man nach weiterem Zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
& = -2\left(\frac{1}{\|X\|^4} - \frac{4}{\|X\|^8}\right)\Omega_{X_{00}} \wedge \bar{\Omega}_{X_{00}} = \\
& = -2(e^{2q} - 4e^{4q})|\Omega_{X_{00}}|^2
\end{aligned}$$

weil nach (5.1) $q = -\ln(\|X\|^2)$ gilt.

Wir setzen nun Terme A und B zusammen in (5.3) ein.

$$\begin{aligned}
(\partial\bar{\partial}u)^3 & = \binom{3}{0}(u_1^3\partial\bar{\partial}q)^3 + \binom{3}{1}(u_{11}\partial q \wedge \bar{\partial}q) \wedge (u_1\partial\bar{\partial}q)^2 = \\
& = (u_1)^3(\partial\bar{\partial}q)^3 + 3u_{11}u_1^2\partial q \wedge \bar{\partial}q \wedge (\partial\bar{\partial}q)^2 = \\
& = u_1^3 \cdot (-24e^{4q}|\Omega|^2) + 3u_{11}u_1^2[-2(e^{2q} - 4e^{4q})|\Omega|^2] = \\
& = [-24e^{4q}u_1^3 + 6(e^{2q} - 4e^{4q})u_{11}u_1^2](-|\Omega|^2)
\end{aligned}$$

Dazu erinnern wir uns an die positive Definitheit von $-|\Omega|^2$, was man bezüglich eines lokalen Basisausdrucks direkt sieht, und wir erhalten als reellen Operator A' , wie in (3.52) definiert:

$$(5.6) \quad A'(q, u, Du, D^2u) = -24e^{4q}u_1^3 + 6(e^{2q} - 4e^{4q})u_{11}u_1^2$$

Die Einsteingleichung für $X_1 = \{\det(X) = t^2\} \subset \mathbb{P}^4$ und $X_2 = \mathbb{P}^3$

Die Aufstellung der Einsteingleichung nach Kapitel 3, insbesondere analog zur Gleichung (3.53) für Ω_{L_i} , $i = 1, 2$, führt auf das folgende Ergebnis

Theorem 5.1. *Die reelle Gleichung für eine invariante Kähler-Einstein-Metrik ω auf $L_i \hookrightarrow X_i$, $i = 1, 2$, lautet auf dem Bewertungskegel $\mathbb{R}_{\leq 0}$ als Teilmenge in $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$*

$$(5.7) \quad -24e^{4q}u_1^3 + 6(e^{2q} - 4e^{4q})u_{11}u_1^2 = e^{-u}$$

Als Lösungspotentiale in den beiden Einbettungsvarietäten X_1 bzw. X_2 findet man folgende zwei Funktionen:

$$\begin{aligned}
u & = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{-q}\right)^3 + \ln\left(\frac{3^4}{2}\right) && \text{für } X_1 \\
u & = -4q - \ln(3 \cdot 2^9) && \text{für } X_2
\end{aligned}$$

wie man leicht durch Einsetzen in Gleichung (5.7) verifizieren kann. Die Herleitung dieser Funktionen vollzieht sich in der folgenden Weise. Für \mathbf{x}_1 braucht man das Potential der Fubini-Study-Metrik von \mathbb{P}^4 auf der affinen Karte $\{t \neq 0\}$ nicht weiter einzuschränken, da diese genau der offenen, dichten G_1 -Bahn entspricht. Dann entspricht aber $\frac{X}{t}$ einer $SL_2(\mathbb{C})$ -Matrix, wie oben in Lemma 5.1 bemerkt, daher kann man direkt die Koordinatenfunktion q einführen. Für \mathbf{x}_2 wählt man ebenfalls ein lokales Fubini-Study-Potential in $X_{ij} \neq 0$, für Paare $i, j \in \{0, 1\}$, und schränkt dieses auf den offenen G_2 -Orbit ein.

5.1.2 $\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ als $PSL(n+1)$ -Varietät

Sei $G := PSL(n+1)$, mit $K = PSU(n+1)$ als maximale kompakte Untergruppe in G . Der homogene Raum $G/H = PSL_{n+1}(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C})$ wird folgendermaßen konstruiert: Bezeichne einen Punkt in $\mathbf{x} := \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ in homogenen Koordinaten mit $[X_0 : \dots : X_n][Y_0 : \dots : Y_n]$, und betrachte $X = {}^t(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ als Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis dieses Vektorraumes. Y entsprechend als Kovektor in $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ bezüglich der zur Standardbasis dualen Basis. Einen Spaltenvektor erhält man aus Y durch Transposition tY . Die Wirkung legt man so fest:

$$\begin{aligned} PSL_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{x} \\ (A, [X][Y]) &\mapsto [AX][{}^t(A^{-1}){}^tY] \end{aligned}$$

wobei AX die gewöhnliche Matrixmultiplikation darstellt, und im zweiten Faktor analog. Fixiere den Punkt $[1 : 0 : \dots : 0][1 : 0 : \dots : 0] \in \mathbf{x}$, so erkennt man $H = GL_n$ als Stabilisator dieses Punktes. \mathbf{x} zerlegt sich in zwei Bahnen, den offenen Orbit und eine abgeschlossene Hyperfläche, homogen unter G : $\mathbf{x} = G/H \cup G/P$ mit $L := G/H = \{[X][Y] \in \mathbf{x} : Y(X) \neq 0\}$ als offene Bahn, und den homogenen Divisor G/P folglich als die Menge auf der $Y(X) = Y_0(X_0) + \dots + Y_n(X_n) = 0$ ist, für eine geeignete, parabolische Untergruppe $P \leq G$. Offenbar ist $Y(X)$ ein invariantes Polynom unter der Wirkung von G , da für ein $T \in PSL_{n+1}(\mathbb{C})$ gilt

$$({}^tT^{-1}Y)(TX) = \sum_{i=1}^n ({}^tT^{-1}Y)_i (TX)_i = \dots = Y(X)$$

wie etwa bei vorherigem Beispiel $SL_n(\mathbb{C})/SL_{n-1}(\mathbb{C})$ ($n \geq 3$) in Abschnitt 4.2.2 schon gesehen. Als Koordinate wählen wir

$$(5.8) \quad q := \log \frac{|\langle X, {}^t\bar{Y} \rangle|^2}{\|X\|^2 \|{}^tY\|^2} = \log \frac{|\sum_{i=0}^n X^i Y^i|^2}{(\sum_{i=0}^n |X^i|^2)(\sum_{j=0}^n |Y^j|^2)}$$

in den $(2n+2)$ homogenen Koordinaten $(X^0, \dots, X^n)(Y^0, \dots, Y^n)$ von \mathbf{x} ausgedrückt, was invariant unter $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ -Wirkung bleibt, also auf $\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ wohldefiniert ist. Dies entspricht dem Logarithmus des quadrierten Cosinus des Winkels, der zwischen den Geraden $\mathbb{C}X$ und $\mathbb{C}Y$ in \mathbb{C}^n eingeschlossen ist, wobei die Gerade $\mathbb{C}Y$ dual eine Hyperebene durch Null beschreibt.

Lemma 5.2. *Die reelle Koordinatenfunktion q auf G/H ist invariant unter der Operation von $K = PSU(n+1)$ auf der offenen Teilmenge $\{Y(X) \neq 0\}$ in \mathbf{x} .*

Beweis. Sei $U \in K$. Dann hat man

$$\begin{aligned} q(U.[X][Y]) &= \log \frac{|\langle UX, \overline{{}^t(U^{-1}){}^tY} \rangle|^2}{\|UX\|^2 \|({}^t(U^{-1}){}^tY)\|^2} = \log \frac{|\langle UX, U({}^t\bar{Y}) \rangle|^2}{\|X\|^2 \|\bar{U}{}^tY\|^2} = \\ &= \log \frac{|\langle UX, U({}^t\bar{Y}) \rangle|^2}{\|X\|^2 \|U{}^t\bar{Y}\|^2} = \log \frac{|\langle X, ({}^t\bar{Y}) \rangle|^2}{\|X\|^2 \|{}^t\bar{Y}\|^2} = q([X][Y]) \end{aligned}$$

□

Es ist bereits aus Kapitel 3 klar, dass zu einer K -invarianten Funktion ϕ auf der offenen G -Bahn $G/H \subseteq \mathbf{X}$ eine Funktion $u = u(q)$ auf dem Bewertungskegel $\rho\nu \subseteq N_{\mathbb{R}}$ gehört, wobei der Quotient $M := K \setminus (G/H) \cong \mathbb{R}_{\leq 0}$ hierbei ist, für die folgende Regel gilt:

$$(5.9) \quad \partial\bar{\partial}\phi = u_{11}\partial q \wedge \bar{\partial}q + u_1\partial\bar{\partial}q$$

$$(5.10) \quad \begin{aligned} (\partial\bar{\partial}\phi)^{2n} &= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (u_{11}\partial q \wedge \bar{\partial}q)^i (u_1\partial\bar{\partial}q)^{2n-i} = \\ &= \binom{2n}{0} (u_1\partial\bar{\partial}q)^{2n} + \binom{2n}{1} (u_{11}\partial q \wedge \bar{\partial}q)^1 (u_1\partial\bar{\partial}q)^{2n-1} \end{aligned}$$

weil alle höheren Potenzen von $\partial q \wedge \bar{\partial}q$, die größer oder gleich zwei sind, wegen der auftretenden Einsformen ∂q bzw. $\bar{\partial}q$ verschwinden. Um konkret rechnen zu können, wenden wir die Segre-Einbettung auf \mathbf{X} an, und gehen dann im Zielraum in eine affine lokale Karte über, in der wir ableiten können. Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} S : \mathbf{X} = \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^* &\rightarrow \mathbb{P}^{n^2+2n} \\ [X_0 : \dots : X_n] [Y_0 : \dots : Y_n] &\mapsto [X_0Y_0 : X_0Y_1 : \dots : X_0Y_n : X_1Y_0 : \dots : X_nY_n] \end{aligned}$$

wobei X und Y als Koordinatenvektoren aus \mathbb{C}^{n+1} eingesetzt werden. Im Zielraum seien die homogenen Koordinaten mit $[Z_{00} : Z_{01} : \dots : Z_{0n} : Z_{10} : \dots : Z_{nn}]$ passenderweise bezeichnet. Das wohlbekannte Bild ist die Varietät

$$\mathbb{V}_{\mathbb{P}^{n^2+2n}}(Z_{ij}Z_{i'j'} - Z_{ij'}Z_{i'j}), \quad 0 \leq i, i', j, j' \leq n$$

Wir wählen die Karte $U_{00} := \{Z_{00} \neq 0\}$ aus, und setzen:

$$\mathfrak{z}^{ij} := \frac{Z_{ij}}{Z_{00}}, \quad \forall i, j = 0, \dots, n \wedge (i, j) \neq (0, 0)$$

Somit hat man im Bild der Segreabbildung Relationen:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \mathfrak{z}^{ij} = \frac{X_i Y_j}{X_0 Y_0} &= \begin{cases} \frac{Y_j}{Y_0} = \mathfrak{z}^{0j}, i = 0 \\ \frac{X_i}{X_0} = \mathfrak{z}^{i0}, j = 0 \\ \frac{X_i Y_j}{X_0 Y_0}, i \neq 0 \wedge j \neq 0 \end{cases} \\ \implies \mathfrak{z}^{ij} = \mathfrak{z}^{i0} \mathfrak{z}^{0j} & : R_{ij}, i, j = 0, \dots, n \wedge (i, j) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

Auf dem Bild des Divisors gilt offenkundig: $1 + \sum_{i=1}^n \mathfrak{z}^{ii} = 0$. Für die Koordinate q folgt:

$$\begin{aligned} q &= \log \frac{|\sum_{i=0}^n X_i Y_i|^2}{(\sum_{i=0}^n |X_i|^2)(\sum_{j=0}^n |Y_j|^2)} = \\ &= \log \frac{|\sum_{i=0}^n \frac{Z_{ii}}{Z_{00}}|^2}{(\sum_{i=0}^n |\frac{X_i}{X_0}|^2)(\sum_{j=0}^n |\frac{Y_j}{Y_0}|^2)} = \\ &= \log \frac{|\sum_{i=0}^n \mathfrak{z}^{ii}|^2}{(1 + \sum_{i=1}^n |\mathfrak{z}^{i0}|^2)(1 + \sum_{j=1}^n |\mathfrak{z}^{0j}|^2)} \end{aligned}$$

Daraus errechnet man die Differentialformen

$$\begin{aligned}\partial q &= \frac{\sum_{i=1}^n d\mathfrak{z}^{ii}}{1 + \sum_{i=0}^n \mathfrak{z}^{ii}} - \frac{\sum_{i=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{i0} d\mathfrak{z}^{i0}}{1 + \sum_{i=1}^n |\mathfrak{z}^{i0}|^2} - \frac{\sum_{j=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{0j} d\mathfrak{z}^{0j}}{1 + \sum_{j=1}^n |\mathfrak{z}^{0j}|^2} \\ \bar{\partial} q &= \overline{\partial q}, \text{ d.h. komplex konjugiert} \\ \partial\bar{\partial} q &= -\frac{\sum_{i,j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2) \delta_{ij} - \bar{\mathfrak{z}}^{i0} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)} \\ &\quad - \frac{\sum_{i,j=1}^n (1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2) \delta_{ij} - \bar{\mathfrak{z}}^{0i} \mathfrak{z}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)}\end{aligned}$$

Der Ausdruck (5.10) zeigt, dass

$$\begin{aligned}\text{A} &\quad (\partial\bar{\partial} q)^{2n} \\ \text{B} &\quad (\partial q \wedge \bar{\partial} q) \wedge (\partial\bar{\partial} q)^{2n-1}\end{aligned}$$

die entscheidenden Terme sind. Setze

$$\partial\bar{\partial} q =: \omega_a + \omega_b$$

für die zwei Summanden zur Abkürzung. Dann folgt:

$$\begin{aligned}(\partial\bar{\partial} q)^{2n} &= \sum_{l=0}^{2n} \binom{2n}{l} \omega_a^l \omega_b^{2n-l} = \binom{2n}{n} \omega_a^n \omega_b^n \\ (\partial\bar{\partial} q)^{2n-1} &= \sum_{l=0}^{2n-1} \omega_a^l \omega_b^{2n-1-l} = \binom{2n-1}{n-1} \omega_a^{n-1} \omega_b^n + \binom{2n-1}{n} \omega_a^n \omega_b^{n-1}\end{aligned}$$

Beweis. Bei Term A muss $l = n$ sein, da wegen der Trennung der Variablen nach Typ $k0$ in ω_a bzw. $0k$ in ω_b verschwinden äußere Potenzen von ω_a, ω_b , die größer oder gleich $n + 1$ sind, wie bisher schon öfter aufgetaucht. Bei $(\partial\bar{\partial} q)^{2n-1}$ ist es genauso. \square

Berechnung von Term A: Dazu benutzen wir das nützliche Lemma

Lemma 5.3. *Für die metrische Form der Fubini-Study-Metrik in lokalen Koordinaten auf $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$*

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{i}{2\pi} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j = \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{(1 + \|z\|) \delta_{ij} - \bar{z}^i z^j}{(1 + \|z\|^2)^2} dz^i \wedge d\bar{z}^j\end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned}\text{a, } \det(g_{i\bar{j}}) &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)^{n+1}} \\ \text{b, } g^{i\bar{j}} &= g_{i\bar{j}}^{-1} = (1 + \|z\|^2) \cdot (\delta^{ij} + \bar{z}^i z^j) \\ \text{c, } (g^{\text{ad}})_{i\bar{j}} &= \det(g) g^{i\bar{j}}\end{aligned}$$

Beweis. a,

$$\begin{aligned}
 \det(g_{i\bar{j}}) &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)^{2n}} \det((1 + \|z\|^2)\delta_{ij} - \bar{z}^i z^j) = \\
 &= \frac{(1 + \|z\|^2)^n}{(1 + \|z\|^2)^{2n}} \det\left(\delta_{ij} + \underbrace{\frac{-1}{(1 + \|z\|^2)} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ \vdots \\ \bar{z}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & \dots & z^n \end{pmatrix}}_{=:A}\right) = \\
 &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)^n} (1 + \operatorname{tr}(A)) = \frac{1}{(1 + \|z\|^2)^n} \left(1 + \frac{-\|z\|^2}{1 + \|z\|^2}\right) = \\
 &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

b, Rechne $(g \cdot g^{-1})_{i\bar{k}} = g_{i\bar{j}} g^{j\bar{k}}$ nach:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1 + \|z\|^2)\delta_{ij} - \bar{z}_i z_j}{(1 + \|z\|^2)^2} \cdot (1 + \|z\|^2)(\delta^{jk} + \bar{z}^j z^k) = \\
 &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)} \left[(1 + \|z\|^2)\delta_{ij}\delta^{jk} + (1 + \|z\|^2)\delta_{ij}\bar{z}^j z^k - \bar{z}_i z_j \delta^{jk} - \bar{z}_i z_j \bar{z}^j z^k \right] = \\
 &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)} \left[(1 + \|z\|^2)\delta_i^k + (1 + \|z\|^2)\bar{z}_i z^k - \bar{z}_i z_k - \bar{z}_i z_k \bar{z}^j z^j \right] = \\
 &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)} \left[(1 + \|z\|^2)(\delta_i^k + \bar{z}_i z^k) - \bar{z}_i z_k (1 + \bar{z}^j z^j) \right] = \\
 &= \frac{1}{(1 + \|z\|^2)} (1 + \|z\|^2)(\delta_i^k + \bar{z}_i z^k - \bar{z}_i z_k) = \\
 &= \delta_i^k
 \end{aligned}$$

c, Klar da $(g_{i\bar{j}})$ invertierbare Matrix ist, sind die Einträge der adjungierten (komplementären) Matrix in angegebener Weise bestimmt. \square

Mit diesem Lemma haben wir für Term A in $U_{\mathbb{Z}_0}^{\mathbb{P}^{n^2+2n}} \cap S(\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*)$ Folgendes erzielt:

$$\begin{aligned}
 (\partial\bar{\partial}q)^{2n} &= \\
 &= (2n)! \frac{d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{\bar{n}0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\bar{\mathfrak{z}}^{k0}|^2)^{n+1}} \wedge \frac{d\bar{\mathfrak{z}}^{01} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{\bar{0}n}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\bar{\mathfrak{z}}^{0k}|^2)^{n+1}} = \\
 &= (2n)! \frac{e^{(n+1)q} d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n}}{(|1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk}|^2)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

mit der Definition von q in Gleichung (5.8).

Berechnung von Term B: Wir haben oben gesehen, dass

$$(\partial\bar{\partial}q)^{2n-1} = (\omega_a + \omega_b)^{2n-1} = \binom{2n-1}{n-1} \omega_a^{n-1} \omega_b^n + \binom{2n-1}{n} \omega_a^n \omega_b^{n-1}$$

ist. Weil

$$\begin{aligned}\omega_a^n &= \frac{(-1)^n n!}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^{n+1}} d\mathfrak{z}^{10} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \\ \omega_b^n &= \frac{(-1)^n n!}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^{n+1}} d\mathfrak{z}^{01} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{01} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{0n} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n}\end{aligned}$$

bereits aus der Berechnung von Term A klar sind, benötigt man nur noch die $n - 1$ -te äußere Potenz der beiden. Es genügt, Term ω_a^{n-1} zu betrachten. Es gilt: $\omega_a^n = (\omega_a^{n-1}) \wedge \omega_a$, und sowohl ω_a als auch ω_a^n sind bekannt. Für die Koeffizientenmatrizen $g = (g_{i\bar{j}})$ gilt also: $g^{\text{ad}}g = gg^{\text{ad}} = (\det(g))\mathbb{E}_n$. Deshalb sind nach Lemma 5.3 die Einträge der adjungierten Matrix einzusetzen und der Basisvektoranteil entsprechend zu berücksichtigen (nach weiter unten folgendem Lemma 5.4):

$$\begin{aligned}\omega_a^{n-1} &= (-1)^{n-1} \sum_{i,j=1}^n \det(g_{k\bar{l}}) \frac{n!}{n} (g^{\text{ad}})_{j\bar{i}} (\pm 1) d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} = \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_{i,j=1}^n \frac{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)(1\delta_{ij} + \bar{\mathfrak{z}}^{j0}\mathfrak{z}^{i0})}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^{n+1}} (\pm 1) \\ &\quad d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} = \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_{i,j=1}^n \frac{(1\delta_{ij} + \bar{\mathfrak{z}}^{j0}\mathfrak{z}^{i0})}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^n} (\pm 1) \\ &\quad d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0}\end{aligned}$$

Der andere Faktor $\partial q \wedge \bar{\partial} q$ sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}\partial q \wedge \bar{\partial} q &= \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{d\mathfrak{z}^{ii}}{1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk}} - \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{i0} d\mathfrak{z}^{i0}}{1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{0i} d\mathfrak{z}^{0i}}{1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2} \right) \wedge \\ &\wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{d\bar{\mathfrak{z}}^{jj}}{1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk}} - \sum_{j=1}^n \frac{\mathfrak{z}^{j0} d\bar{\mathfrak{z}}^{j0}}{1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\mathfrak{z}^{0j} d\bar{\mathfrak{z}}^{0j}}{1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2} \right) =\end{aligned}$$

Vereinfache weiter, mit Hilfe der abgeleiteten Relationen dR_{ij} , für $i, j = 0, \dots, n$ und $(i, j) \neq (0, 0)$, aus (5.11):

$$d\mathfrak{z}^{ii} = \mathfrak{z}^{0i} d\mathfrak{z}^{i0} + \mathfrak{z}^{i0} d\mathfrak{z}^{0i}$$

Man erhält folgenden Ausdruck, der aus vier Doppelsummen besteht:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\mathfrak{z}^{0i} \bar{\mathfrak{z}}^{0j}}{|1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk}|^2} - \frac{\mathfrak{z}^{0i} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk})(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{i0} \bar{\mathfrak{z}}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk})} + \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{i0} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^2} \right) d\mathfrak{z}^{i0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{j0} + \\
 & \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\mathfrak{z}^{0i} \bar{\mathfrak{z}}^{j0}}{|1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk}|^2} - \frac{\mathfrak{z}^{0i} \mathfrak{z}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk})(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{i0} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk})} + \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{i0} \mathfrak{z}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)} \right) d\mathfrak{z}^{i0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0j} + \\
 & \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\mathfrak{z}^{i0} \bar{\mathfrak{z}}^{0j}}{|1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk}|^2} - \frac{\mathfrak{z}^{i0} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk})(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{0i} \bar{\mathfrak{z}}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk})} + \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{0i} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)} \right) d\mathfrak{z}^{0i} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{j0} + \\
 & \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\mathfrak{z}^{i0} \bar{\mathfrak{z}}^{j0}}{|1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk}|^2} - \frac{\mathfrak{z}^{i0} \mathfrak{z}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk})(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{0i} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk})} + \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{0i} \mathfrak{z}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^2} \right) d\mathfrak{z}^{0i} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0j}
 \end{aligned}$$

Wir gehen daran, $\partial q \wedge \bar{\partial} q$ und $(\partial \bar{\partial} q)^{2n-1}$ zu Term B zusammensetzen. Doch davor ein kleines technisches Lemma zum Vorzeichenverhalten.

Lemma 5.4. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt bei der Umordnung der Basiskovektoren

$$\begin{aligned}
 d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d\mathfrak{z}^{10} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \\
 \text{analog für } d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} &
 \end{aligned}$$

mit +1 als Vorzeichen also, wenn man von der $4n$ -Form

$$d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n}$$

ausgeht. Bei der Einordnung von einer Zweiform aus Basiskovektoren in die darauffolgende $(2n-2)$ -Form, mit Trennung nach holomorphen bzw. antiholomorphen Einsformen, weil dann die relative Lage von i zu j unerheblich ist, hat man als Vorzeichen:

$$\begin{aligned}
 (d\mathfrak{z}^{i0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{j0}) \wedge d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \overset{\checkmark}{\dots} \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \overset{\checkmark}{\dots} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} &= \\
 = (-1)^{n+i+j-1} d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} &
 \end{aligned}$$

und analog für den anderen Koordinatentyp. Bei der Hineintauschung von $d\mathfrak{z}^{i0} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{j0}$ in $d\mathfrak{z}^{10} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{10} \wedge \dots \overset{\checkmark}{\dots} \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0}$ entsteht andererseits jedoch:

$$\begin{aligned}
 (+1) d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0}, \text{ falls } i \leq j \\
 (-1) d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0}, \text{ falls } i > j
 \end{aligned}$$

Beweis. Nachrechnen. Vergleiche dazu auch Lemma 4.4 zum gleichen technischen Sachverhalt. \square

Dies ergibt für $\partial q \wedge \bar{\partial} q \wedge (\partial \bar{\partial} q)^{2n-1}$:

$$\begin{aligned}
 & (\partial q \wedge \bar{\partial} q) \wedge \left[\binom{2n-1}{n-1} \omega_a^{n-1} \omega_b^n + \binom{2n-1}{n} \omega_a^n \omega_b^{n-1} \right] = \\
 & = (\partial q \wedge \bar{\partial} q) \wedge \\
 & \left[\binom{2n-1}{n-1} (-1)^{2n-1} (\pm 1) n! (n-1)! \frac{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}|^2)(\delta_{ji} + \bar{\mathfrak{z}}^j \mathfrak{z}^{i0})}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^{n+1}} \right. \\
 & \quad d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n} + \\
 & \left. + \binom{2n-1}{n} (-1)^{2n-1} (\pm 1) n! (2n-1)! \frac{1}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^{n+1}} \cdot \frac{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)(\delta_{ji} + \bar{\mathfrak{z}}^{0j} \mathfrak{z}^{0i})}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^{n+1}} \right. \\
 & \quad \left. d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \check{i} \dots \check{j} \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n} \right] = \\
 & = \binom{2n-1}{n-1} (-1)^{2n-1} n! (n-1)! \sum_{i,j=1}^n \frac{(\delta_{ji} + \bar{\mathfrak{z}}^j \mathfrak{z}^{i0})}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^n (1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^{n+1}} \\
 & \quad \left(\frac{\mathfrak{z}^{0i} \bar{\mathfrak{z}}^{0j}}{|1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{kk}|^2|} - \frac{\mathfrak{z}^{0i} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk})(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{i0} \bar{\mathfrak{z}}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk})} + \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{i0} \mathfrak{z}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^2} \right) \\
 & \quad d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n} + \\
 & + \binom{2n-1}{n} (-1)^{2n-1} n! (n-1)! \sum_{i,j=1}^n \frac{(\delta_{ji} + \bar{\mathfrak{z}}^{0j} \mathfrak{z}^{0i})}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^{n+1} (1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^n} \\
 & \quad \left(\frac{\mathfrak{z}^{i0} \bar{\mathfrak{z}}^{j0}}{|1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{kk}|^2|} - \frac{\mathfrak{z}^{i0} \mathfrak{z}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk})(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{0i} \bar{\mathfrak{z}}^{j0}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)(1 + \sum_{k=1}^n \bar{\mathfrak{z}}^{kk})} + \frac{\bar{\mathfrak{z}}^{0i} \mathfrak{z}^{0j}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^2} \right) \\
 & \quad d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n} = \\
 & = \frac{(2n-1)! (-1)^{2n-1} d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n}}{(1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2)^{n+1} (1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2)^{n+1}} \cdot \\
 & \quad \left[\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ji} + \bar{\mathfrak{z}}^j \mathfrak{z}^{i0}) (1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{k0}|^2) (\dots) + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ji} + \bar{\mathfrak{z}}^{0j} \mathfrak{z}^{0i}) (1 + \sum_{k=1}^n |\mathfrak{z}^{0k}|^2) (\dots) \right] = \\
 & = (-1) 2(2n-1)! e^{(n+1)q} (e^{-q} - 1) \frac{d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\bar{\mathfrak{z}}^{0n}}{|1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk}|^{2n+2}}
 \end{aligned}$$

Invariante Volumenform und Einsteingleichung auf $\mathbf{X} = \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$

Wir wollen eine $\text{PSU}(n+1)$ -invariante Volumenform auf der offenen $\text{PSL}_{n+1}(\mathbb{C})$ -Bahn L in $\mathbf{X} := \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ konstruieren. Sie kann also durchaus Pole entlang des homogenen Divisors am Rand besitzen.

Lemma 5.5. $\Omega := \frac{\Omega_X \wedge \Omega_Y}{(\sum_{i=0}^n X_i Y_i)^{n+1}}$, für

$$\begin{aligned}\Omega_X &:= \sum_{j=0}^n (-1)^j X_j dX_0 \wedge \dots \check{j} \dots \wedge dX_n \\ \Omega_Y &:= \sum_{j=0}^n (-1)^j Y_j dY_0 \wedge \dots \check{j} \dots \wedge dY_n\end{aligned}$$

ist eine rationale $2n$ -Form auf \mathbf{X} und holomorph auf dem offenen Orbit $L = \mathbf{X} \setminus A$. Sie ist invariant unter der $\text{PSL}_{n+1}(\mathbb{C})$ -Wirkung und besitzt einen einfachen Pol entlang $A := \{[X][Y] \in \mathbf{X} : Y(X) = 0\}$.

Beweis. Betrachte Ω_X auf \mathbb{C}^{n+1} . Rechne die äußere Ableitung davon aus:

$$\begin{aligned}d\Omega_X &= \sum_{j=0}^n (-1)^j dX_j \wedge dX_0 \wedge \dots \check{j} \dots \wedge dX_n = \\ &= \sum_{j=0}^n dX_0 \wedge \dots \wedge dX_n = \\ &= (n+1)dX_0 \wedge \dots \wedge dX_n\end{aligned}$$

Dies ist invariant unter $G = \text{PSL}_{n+1}(\mathbb{C})$ -Wirkung, also auch Ω_X , da beide Formen mit der Multiplikation der Determinante antworten. Dies zeigt die Invarianz von ganz Ω unter G , da es für Ω_Y analog gilt, und Ω auf $N \subset \mathbf{X}$ offenkundig wohldefiniert ist. Die Glattheitseigenschaften sind klar. \square

Als nächstes bestimmen wir die lokale Gestalt von Ω in der affinen Karte $U_{Z_{00}} \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$ mit den inhomogenen Koordinaten \mathfrak{z}^{ij} , $i, j = 0, \dots, n$ und i, j nicht beide gleich Null.

Lemma 5.6. Für die n -Formen $d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0}$ und $d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{0n}$ behaupten wir wegen $\{Z_{00} \neq 0\} \cap \text{im}(S) \cong \{X_0 \neq 0\} \cap \{Y_0 \neq 0\}$:

$$\begin{aligned}d\mathfrak{z}^{10} \wedge d\mathfrak{z}^{20} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} &= \\ &= \frac{1}{X_0^{n+1}} \sum_{i=0}^n (-1)^i X_i dX_0 \wedge \dots \check{i} \dots \wedge dX_n \\ d\mathfrak{z}^{01} \wedge d\mathfrak{z}^{02} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{0n} &= \\ &= \frac{1}{Y_0^{n+1}} \sum_{j=0}^n (-1)^j Y_j dY_0 \wedge \dots \check{j} \dots \wedge dY_n\end{aligned}$$

Beweis. (Es genügt für Ω_X .) Wir verwenden Induktion über n . Für $n = 1$, ist wegen $\mathfrak{z}^{10} := \frac{Z_{10}}{Z_{00}} = \frac{X_1 Y_0}{X_0 Y_0} = \frac{X_1}{X_0}$ die Sache durch Ableiten klar:

$$d\mathfrak{z}^{10} = \frac{1}{X_0^2} (X_0 dX_1 - X_1 dX_0)$$

Für $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
 d\mathfrak{z}^{10} \wedge d\mathfrak{z}^{20} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n+10} &= \Omega_X^{(n)} \wedge d\mathfrak{z}^{n+10} = \\
 &= \frac{1}{X_0^{n+1}} \sum_{i=0}^n (-1)^i X_i dX_0 \wedge \dots \check{i} \dots \wedge dX_n \wedge \left(\frac{dX_{n+1}}{X_0} - \frac{X_{n+1}dX_0}{X_0^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{X_0^{n+2}} \sum_{i=0}^n (-1)^i X_i dX_0 \wedge \dots \check{i} \dots \wedge dX_n \wedge dX_{n+1} - \\
 &\quad - \frac{(-1)^0 X_{n+1}}{X_0^{n+2}} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_n \wedge dX_{n+1} = \\
 &= \frac{1}{X_0^{n+2}} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i X_i dX_0 \wedge \dots \check{i} \dots \wedge dX_{n+1} = \Omega_X^{(n+1)}
 \end{aligned}$$

wobei wir eine Abkürzung eingeführt haben: $\Omega_X^{(n)} := \frac{1}{X_0^{n+1}} \sum_{i=0}^n (-1)^i X_i dX_0 \wedge \dots \check{i} \dots \wedge dX_n$, wie der Leser sicherlich wahrgenommen hat. Es wurde dabei, wie für $n = 1$, $d\mathfrak{z}^{n+10} = \frac{1}{X_0^2} (X_0 dX_{n+1} - X_{n+1} dX_0)$ in der Rechnung benutzt. \square

Zusammen ergibt sich die lokale Gestalt von Ω als

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \frac{\Omega_X \Omega_Y}{\left(\sum_{k=0}^n X_k Y_k \right)^{n+1}} = \\
 &= X_0^{n+1} Y_0^{n+1} \frac{d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{0n}}{\left(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk} \right)^{n+1} Z_{00}^{n+1}} = \\
 &= \frac{d\mathfrak{z}^{10} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{n0} \wedge d\mathfrak{z}^{01} \wedge \dots \wedge d\mathfrak{z}^{0n}}{\left(1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{z}^{kk} \right)^{n+1}}
 \end{aligned}$$

Mit Gleichung (3.1) auf $L \subset \mathbf{X}$ formuliert, für eine invariante Funktion ϕ , die zu $u = u(q)$ auf $M := \text{PSU}(n+1) \backslash \text{PSL}_{n+1}(\mathbb{C}) / \text{GL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}_{\leq 0}$ korrespondiert, finden wir unser Ergebnis.

Theorem 5.2. *Die Einsteingleichung auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$, für eine invariante Kähler-Einstein-Metrik ω auf einer Einbettung \mathbf{X} von L , lautet wegen*

$$A'(q^1, u, Du, D^2u) = e^{-u}$$

für alle $n \geq 1$ wie folgt:

$$[((2n)!u_1^{2n} - 2((2n)!)u_{11}u_1^{2n-1}(e^{-q} - 1)]e^{(n+1)q} = e^{-u}$$

Beweis. Setze die Terme A und B wie in (5.10) ausgerechnet zusammen:

$$(\partial\bar{\partial}\phi)^{2n} = \binom{2n}{0} (u_1\partial\bar{\partial}q^1)^{2n} + \binom{2n}{1} (u_{11}\partial q \wedge \bar{\partial}q)^1 (u_1\partial\bar{\partial}q)^{2n-1}$$

wobei wir oben Term A mit: $(\partial\bar{\partial}q)^{2n} = (2n)!e^{(n+1)q}|\Omega|^2$ berechnet haben, und Term B als: $(\partial q \wedge \bar{\partial}q) \wedge (\partial\bar{\partial}q)^{2n-1} = -2((2n-1)!)e^{(n+1)q}(e^{-q} - 1)|\Omega|^2$. Es folgt die Behauptung. \square

Als Lösung dieser Gleichung für die wundervolle Einbettung $X = \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ von L finden wir, durch Einschränken der Fubini-Study-Metrik auf $L \subset X$ und Umschreiben als Funktion, die von q abhängig ist, $u = -(n+1)q$ mit $u_1 = -(n+1)$ und $u_{11} = 0$. Man sieht, dass der Term B wegen $u_{11} = 0$ komplett wegfällt. In die Gleichung einsetzen liefert: $(2n)!(n+1)^{2n}e^{(n+1)q} \stackrel{(!)}{=} e^{-u}$, somit als exakte Lösung:

$$u = -(n+1)q + \ln[(2n)!(n+1)^{2n}]$$

5.1.3 Andere wundervolle Varietäten vom Rang eins

In mehreren Arbeiten wurden die sogenannten symmetrischen Varietäten behandelt, die oft als Komplexifizierungen $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ kompakter, riemannscher symmetrischer Räume G/K , wobei G eine kompakte, zusammenhängende und halbeinfache Liegruppe ist, K eine abgeschlossene Untergruppe, so dass eine Involution θ von G existiert, die die Eigenschaft $(G^\theta)^0 \subset K \subset G^\theta$ besitzt, definiert sind. Darunter finden sich [S] und [AK], die beide riccifache, vollständige und G -invariante Kählermetriken darauf konstruieren, wobei man sich in [AK] auch symmetrischen Varietäten höheren Ranges widmet, was im nächsten Teil besprochen wird. Das Vorgehen unterscheidet sich in beiden Arbeiten etwas. Während in [S] eine besondere Koordinatenfunktion q gewählt wird, die die homogene Monge-Ampère-Gleichung $(\partial\bar{\partial}q)^n = 0$ erfüllt, so dass in der Berechnung von $(\partial\bar{\partial}\varphi(q))^n$ der Term A , der zum Basisanteil $(\partial\bar{\partial}q)^n$ gehörige Ausdruck in unseren Beispielrechnungen, stets verschwinden muss, wie bei uns nur im ersten horosphärischen, Rang eins Beispiel $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ in Kapitel 2, so benutzen H. Azad und R. Kobayashi in [AK] (4.3) eine Fortsetzungsmethode einer Lösungsmetrik auf $X \setminus D$, wobei D eine glatte homogene Randhyperfläche ist, auf ganz X . Ein darauffolgendes Beispiel zeitigt allerdings wiederum die Einführung einer als radiale Variable bezeichnete Funktion, die Methodik schlechthin. Wundervolle Kompaktifizierungen von symmetrischen Varietäten vom Rang eins sind nach [AK] (4.1) glatte homogene Varietäten, d.h. letztlich verallgemeinerte Fahnenvarietäten als kompakte, homogene Kählermannigfaltigkeiten, die natürlich eine Kähler-Einstein-Metrik positiver Riccirkrümmung besitzen.

Für bestimmte, konkrete Beispiele wundervoller Varietäten vom Rang eins, vergleiche [T1] in Kapitel V.30 hierzu. Es gibt eine reelle Variable q , die zwei Terme $A: (\partial\bar{\partial}\phi)^N$, $B: \partial q \wedge \bar{\partial} q \wedge (\partial\bar{\partial}q)^{N-1}$, mit $N := \dim_{\mathbb{C}} X$, sind wie in den oben ausführlich behandelten Fällen zu berechnen, der speziellen geometrischen Situation gemäß, und einzusetzen in den Ansatz wie in den Gleichungen (5.3) und (5.10). Die Volumenform spielt dabei eine wichtige Rolle. Die allgemeine Gestalt der Einstein-Gleichung vermuten wir als:

$$(5.12) \quad N!(t_1 e^{s_1 q} u_1^N + t_2(1 - t_3 e^{s_2 q}) e^{s_3 q} u_{11} u_1^{N-1}) = e^{-u}$$

für gewisse $t_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1; 2; 3\}$, und $s_j \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1; 2; 3\}$.

5.2 Spezielle Kähler-Metriken auf wundervollen Einbettungen höheren Ranges

Der Artikel [Bi1] weist für irreduzible, komplexifizierte, kompakte, symmetrische Räume $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$, mit zusammenhängendem K nach, dass man jede beliebige reelle, exakte, G -invariante $(1, 1)$ -Form als Ricciform realisieren kann, insbesondere erhält man riccifache Kählermetriken für die Wahl von Null als Ricciform. Durch Vervollständigung dieser symmetrischen Varietäten

erhält man Kähler-Einstein-Metriken auf der zugeordneten Einbettungsvarietät X , falls sich die Lösungen zu Kählermetriken auf X fortsetzen lassen, was sich als Randbedingungen äußert.

Diese Arbeit verallgemeinert die Resultate von [Bi2] und [AK] um ein großes Stück. Sie spart aber auch die Sprache der in [AK] verwendeten DeConcini-Procesi-Kompaktifizierung völlig aus und behandelt das Problem mit Hilfe transzendenter Methoden, was letzten Endes auf eine schon in Abschnitt 3.4.5 besprochene reelle Monge-Ampère-Gleichung führt.

Ein Resultat hat jedoch insbesondere in diesem Kapitel große Bedeutung. Es handelt sich um folgendes

Lemma 5.7 ([AK] (3.2), [S] 3.). *Sei $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ die Komplexifikation eines kompakten, riemannsch symmetrischen Raumes G/K , wobei K zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von G sei, und G kompakte und halbeinfache Liegruppe, mit $\dim_{\mathbb{C}}(G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}) = n$. Dann existieren eine bis auf Konstante eindeutige $G^{\mathbb{C}}$ -invariante, holomorphe n -Form Ω auf der symmetrischen Varietät $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$, und somit auch $|\Omega|^2$ als ricciflathe Volumenform auf $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$.*

Unter diesen Voraussetzungen kann daher die in all unseren Beispielen verwendete Methode der Gleichungsaufstellung (die aus Abschnitt 3.2.3, in der verallgemeinerten Version für homogene Räume L), mittels einer $G^{\mathbb{C}}$ -invarianten, holomorphen Volumenform $|\Omega_L|^2$ auf einer homogenen Varietät $L := G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$, benutzt werden. Man erhält eine Gleichung der Form (3.1) im Kähler-Einstein-Problem (3.4) auf äquivarianten Vervollständigungen X von L , und wenn man sich geeignete reelle, G -invariante Koordinatenfunktionen (q^1, \dots, q^r) nach Abschnitt 1.3 auf L verschafft hat, landet man schlussendlich immer bei einer reellen Differentialgleichung vom Typ (3.7) auf inneren Punkten von $G \setminus L$.

Literaturverzeichnis

- [A1] *M. Abreu*, Kähler geometry of toric varieties and extremal metrics, *internat. J. Math.* **9** (1998)
- [A2] *M. Abreu*, Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates, *Symplectic and contact topology: interactions and perspectives* (Toronto, ON/Montreal, QC) (2001), *Fields Inst. Commun.* **35**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003)
- [Ak1] *D. Akhiezer*, On the concept of the rank of a spherical homogeneous space, *Russian Math. Surveys* **43**:5 (1988)
- [Ak2] *D. Akhiezer*, Invariant plurisubharmonic functions and geodesic convexity, *Expo. Math.* **11** (1993), 261-270
- [Ak3] *D. Akhiezer*, *Lie Group Actions in Complex Analysis*, *Aspects of Mathematics*, F. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH Braunschweig/Wiesbaden (1995)
- [Ak4] *D. Akhiezer*, Equivariant completions of homogeneous algebraic varieties by homogeneous divisors, *Ann. Glob. Analysis and Geometry* **1** No. 1 (1983), 49-78
- [AL] *H. Azad, J.J. Loeb*, Plurisubharmonic functions and Kählerian metrics on complexification of symmetric spaces, *Indag. Mathem. (N.S.)* **3** (1992)
- [AK] *H. Azad, R. Kobayashi*, Ricci-flat Kähler metrics on symmetric varieties, IAEA and UN Educational Scientific and Cultural Org., *Internat. Centre for Theoretical Physics* (1994)
- [B] *W. Ballmann*, *Lectures on Kähler manifolds*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, MPIM-Bonn Homepage
- [Ba] *J.M. Baptista*, Some special Kähler metrics on $SL(2, \mathbb{C})$ and their holomorphic quantization, *J. Geom. Phys.* **50** (2004), 1-27
- [BB] *R. Berman, B. Berndtsson*, The volume of Kähler-Einstein Fano varieties and convex bodies, arxiv:1204.1308 [math.DG] (2012)
- [Be] *A. Besse*, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st Reprint (2002)
- [Bi1] *R. Bielawski*, Prescribing Ricci curvature on complexified symmetric spaces, *Math. Res. Lett.* **11** (2004)
- [Bi2] *R. Bielawski*, Kähler metrics on $G^{\mathbb{C}}$, *J. reine angew. Math.* **559** (2003), 123-136

- [BO] *F. Berteloot, K. Oejeklaus*, Invariant plurisubharmonic functions and hypersurfaces on semisimple complex Lie groups, *Math. Ann.* **281** (1988), 513-530
- [Br1] *M. Brion*, On spherical homogeneous spaces of rank one, *Canadian Math. Soc. Conference Proc.* **10** (1989)
- [Br2] *M. Brion*, Variétés sphériques, Notes de la session de la S.M.F. “Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques”, Grenoble (1997)
- [CdS] *A. Cannas da Silva*, Symplectic Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Lecture Notes in Mathematics 1764 (2008)
- [D1] *S.K. Donaldson*, Kähler geometry on toric manifolds, and some other manifolds with large symmetry, preprint arxiv:0803.0985 [math.DG] (2008)
- [D2] *S.K. Donaldson*, A note on the alpha-invariant of the Mukai-Umemura 3-fold, arxiv:0711.4357 [math-DG] (2007)
- [EGM] *J. Elstrodt, F. Grunewald, J. Mennicke*, Groups acting on hyperbolic space: harmonic analysis and number theory, Springer monographs in mathematics, Springer Berlin Heidelberg (1998)
- [F] *S. Feuerer*, Einstein-Kähler metrics and Kähler-Ricci solitons on toric Fano manifolds, Diplomarbeit, Universität Tübingen - Mathematisches Institut (2006)
- [GH] *P. Griffiths, J. Harris*, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, New York, (1978)
- [G] *V. Guillemin* Kähler structures on toric varieties, *J. Differential Geom.* **40** No. 2 (1994)
- [H] *R. Hartshorne*, Algebraic Geometry, Springer Science+Business Media, Inc., New York (1977)
- [HN] *J. Hilgert, K.-H. Neeb*, Structure and Geometry of Lie groups, Onlinebook, Address: <http://math-www.upb.de/user/hilgert/static/Lehrveranstaltungen/lgla.pdf> (2010), Springer Monographs in Mathematics, Springer Science+Business Media LLC, New York (2012)
- [HS] *A.T. Huckleberry, D.M. Snow*, Almost-homogeneous Kähler manifolds with hypersurface orbits, *Osaka J. Math.* **19** (1982)
- [Hu] *J.E. Humphreys*, Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag, New York (1975)
- [J] *J. Jost*, Riemannian geometry and Geometric Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2002)
- [K] *F. Knop*, The Luna-Vust theory of spherical embeddings, Proc. of the Hyderabad Conf. on Algebraic Groups, Dec. 1989, Madras, Manoj Prakashan (1991)
- [KN] *S. Kobayashi, K. Nomizu*, Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, New York I (1963), II (1969)

- [L] *M. Lassalle*, Deux généralisations du „théorème des trois cercles“ de Hadamard, *Math. Ann.* **249** (1980), 17-26
- [Le] *E. Legendre*, Toric Kähler-Einstein metrics and convex compact polytopes, arxiv:1112.3229 [math-DG] (2011)
- [L1] *C. Li*, Greatest lower bounds on Ricci curvature for toric Fano manifolds, arxiv:0909.3443 [math.DG] (2009)
- [L2] *C. Li*, On the limit behaviour of metrics in continuity method to Kähler-Einstein problem in toric Fano case, arxiv:1012.5229 [math.DG] (2010)
- [M] *T. Mabuchi*, Einstein-Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties, *Osaka J. Math.* **24** (1987), 705-737
- [Ma] *Maplesoft, Waterloo Maple Inc.* Formelmanipulationsprogramm MapleTM 10, Lizenziert für: ASKnet AG, Mathematics Department (13.5.2005)
- [Mar] *M. S. Marinov*, Invariant volumes of compact groups, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** (1980)
- [MK] *J. Morrow, K. Kodaira*, Complex Manifolds, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York (1971)
- [P1] *B. Pasquier*, Variétés Horosphériques de Fano, Dissertation Université Joseph Fourier (Grenoble I) (2006)
- [P2] *B. Pasquier*, Introduction to spherical varieties and description of special classes of spherical varieties, Vorlesungsskript, KIAS Seoul, Südkorea (2009)
- [PhSt] *D.H. Phong, J. Sturm*, Lectures on Stability and constant scalar curvature, arxiv:0801.4179 [math-DG] (2008)
- [PS] *F. Podestà, A. Spiro*, Kähler-Ricci solitons on homogeneous toric bundles, *J. reine angew. Math.* **642** (2010)
- [PS1] *F. Podestà, A. Spiro*, Kähler-Ricci solitons on homogeneous toric bundles (I), arxiv:0604070 [math.DG], (II), arxiv:0604071 [math-DG] (2006)
- [Pe] *G. Pezzini*, Lectures on spherical and wonderful varieties, Rencontre “Actions hamiltoniennes: invariants et classification” CIRM (2010)
- [R] *A. Raza*, Scalar curvature and multiplicity-free actions, Dissertation Imperial College (London) (2004)
- [SZ] *Y. Shi, X.-H. Zhu*, Kähler-Ricci solitons on toric Fano orbifolds, arxiv:1102.2764 [math-DG] (2011)
- [S] *M.B. Stenzel*, Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space, *manuscripta math.* **80** (1993)
- [T1] *D.A. Timashev*, Homogeneous spaces and equivariant embeddings, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2011)

- [T2] *D.A. Timashev*, Spherical homogeneous spaces and their equivariant embeddings, Kurzvorlesung, gehalten im Rahmen der Konferenz “Homogeneous Spaces and Geometric Representation Theory”, Bochum (2012)
- [TZ1] *G. Tian, X.-H. Zhu*, Uniqueness of Kähler-Ricci solitons, *acta math.* **184** (2000)
- [TZ2] *G. Tian, X.-H. Zhu*, A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons, *comm. math. helv.* **77** (2002)
- [W] *R.O. Wells*, Differential Analysis on Complex Manifolds, Springer-Verlag, New York, (1980)
- [Wo] *C. Woodward*, Invariant Kähler structures on spherical varieties, *Duke math. J.* **93** No. 2 (1998)
- [WZ] *X.-J. Wang, X.-H. Zhu*, Kähler-Einstein metrics on toric Fano manifolds with positive first Chern class, *Advances in Math.* **188** (2004), 87-103
- [Y1] *S.T. Yau*, Calabi’s conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **74**(5) (1977), 1798-1799
- [Y2] *S.T. Yau*, On the Ricci curvature of a compact complex manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 339-411
- [Z] *X.-H. Zhu*, Kähler-Ricci flow on a toric manifold with positive first Chern class, *arxiv:0705480 [math.DG]* (2007)