

# Erste Chernform und Chambert-Loir Maße auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

**Dissertation**

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Eberhard Karls Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von  
Dipl.-Math. Christian Christensen  
aus Dortmund

Tübingen  
2013

Tag der mündlichen Qualifikation:

13.05.2013

Dekan:

Prof. Dr. Wolfgang Rosenthal

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. Walter Gubler

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. Anton Deitmar

Für meine Frau, die mich stets bestärkt hat, wenn ich an mir  
gezweifelt habe.



## Danksagung

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Walter Gubler. Er hat mich während meiner ganzen Promotionszeit begleitet, stand mir immer mit Rat und Tat zur Seite und verstand es mich in den richtigen Momenten zu motivieren.

Ich bedanke mich sehr bei Prof. Dr. Anton Deitmar, dass er das Zweitgutachten für meine Dissertation übernommen hat.

Herzlich danken möchte ich Prof. Dr. Klaus Künnemann für die Hilfe und die Anregungen bei der abschließenden Korrektur.

Einen großer Dank geht an die deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des DFG-Projekts „ $p$ -adische Arakelovgeometrie“, die es mir ermöglicht hat diese Dissertation zu schreiben.

Ich bedanke mich an dieser Stelle auch bei vielen Freunden für ihre liebe Unterstützung und die Motivation im richtigen Moment.

Meinen Eltern Annette und Niels Christensen danke ich von ganzem Herzen für ihre unermüdliche Unterstützung, ihre Liebe und Motivation.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1. Grundlagen zur Tate-Kurve . . . . .	9
2.2. Geradenbündel auf der Tate-Kurve . . . . .	12
2.3. Das Quadrat einer Tate-Kurve . . . . .	14
2.4. Mumfords Konstruktion . . . . .	16
2.5. Modelle für das Geradenbündel . . . . .	19
2.6. Konstruktion einer Kurve mit strikt semistabilen Modell . . . . .	20
2.7. Das Skelett und die tropische Varietät . . . . .	21
2.8. Das kanonische Maß auf der Kurve . . . . .	24
2.9. Grad der konstruierten Kurven . . . . .	29
<b>3. Explizite Beispiele kanonischer Maße</b>	<b>31</b>
3.1. 1-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße . . . . .	31
3.2. 2-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße . . . . .	38
3.3. Weitere Beispiele mit 9 Punkten . . . . .	44
3.4. Beispiele mit 25 Punkten . . . . .	50
3.5. Ein Beispiel mit einer anderen Bilinearform . . . . .	56
3.6. Zusammenhang zwischen den kanonischen und den tropischen Gewichten .	62
<b>4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen</b>	<b>69</b>
4.1. Ausgangslage . . . . .	69
4.2. Die Poincaré-Lelong Gleichung für $\mathbf{L} = \mathbf{O}_X$ . . . . .	73
4.3. Allgemeiner Fall . . . . .	78
<b>5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve</b>	<b>83</b>
5.1. Die Ausgangslage . . . . .	83

*Inhaltsverzeichnis*

5.2. Die erste Chernform für eine Modellmetrik . . . . .	84
5.3. Der Chambert-Loir Test . . . . .	86
5.4. Der Test für eine Modellmetrik im 1-dimensionalen Fall . . . . .	91
5.5. Der Test für eine Modellmetrik . . . . .	93
5.6. Der Chambert-Loir Test im gemischten Fall . . . . .	100
<b>6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve</b>	<b>117</b>
6.1. Der Differentialoperator $\square$ im 1-dimensionalen Fall . . . . .	117
6.2. Der Differentialoperator $\square$ für Modellmetriken . . . . .	120
6.3. Der Differentialoperator $\square$ für die kanonische Metrik . . . . .	124
6.4. Das 3-dimensionale Beispiel . . . . .	127
<b>7. Greensche Ströme</b>	<b>129</b>
7.1. Interpretation von $\square$ auf Strömen . . . . .	129
7.2. Der glatte Fall . . . . .	131
7.3. Der stetige, stückweise lineare Fall . . . . .	132
7.4. Ausblick auf Greensche Ströme . . . . .	140
<b>A. Programm</b>	<b>143</b>
<b>Literatur</b>	<b>149</b>



# 1. Einleitung

In der komplexen Analysis lässt sich für ein metrisiertes Geradenbündel  $\bar{L}$  auf einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  der Dimension  $d$  eine erste Chernform  $c_1(\bar{L})$  definieren. Letztere ist eine  $(1, 1)$ -Form und das  $d$ -fache Produkt liefert uns eine Differentialform  $c_1(\bar{L})^d$  vom Typ  $(d, d)$  auf  $X$ . Solch eine Form können wir nun über  $X$  integrieren und wir erhalten damit ein Maß auf  $X$ . Hier ist eine wichtige Formel die Poincaré-Lelong Gleichung. Diese besagt, dass für jeden globalen meromorphen Schnitt  $s$  von  $L$  die auf  $X$  gegebene Distribution  $g := -\log \|s\|^2$  die Differentialgleichung  $dd^c g = c_1(\bar{L}) - \delta_{\text{div}(s)}$  erfüllt, wobei  $\delta_{\text{div}(s)}$  das Dirac-Strom im Divisor von  $s$  ist.

In der nicht-archimedischen Analysis war diese Betrachtung nicht möglich: Gegeben seien Geradenbündel  $L_1, \dots, L_d$  auf einer projektiven Varietät  $X$  der Dimension  $d$  und wir wählen dazu Modelle über einem gegebenen vollständigen diskreten Bewertungsring. Die Wahl der Modelle induziert jeweils eine Metrik  $\|\cdot\|_i$  auf  $L_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ), die man Modellmetrik nennt. Für die erste Chernform von  $(L_i, \|\cdot\|_i)$  war noch kein nicht-archimedisches Analogon bekannt. Wir können jedoch zu  $X$  den Berkovich analytischen Raum  $X^{\text{an}}$  bestimmen (siehe [Ber90]), der dieselbe Rolle für eine nicht-archimedische Stelle spielt wie die komplexen Mannigfaltigkeiten an der unendlichen Stelle. Dann hat Chambert-Loir in [Cham06] gezeigt, dass es ein Maß  $c_1(L_1, \|\cdot\|_1) \wedge \dots \wedge c_1(L_d, \|\cdot\|_d)$  auf  $X^{\text{an}}$  gibt, das analog zum Maß  $c_1(\bar{L})^d$  auf der komplexen Mannigfaltigkeit ist. Dabei kommt die Analogie zu den Formen der Differentialgeometrie aus der Arakelov-Geometrie. Diese Maße fanden interessante Anwendungen bei der Äquidistribution arithmetischer dynamischer Systeme (siehe [Cham06], [Yua08], [Gub08], [Fab09]) und bei der geometrischen Bogomolov-Vermutung aus der diophantischen Geometrie (siehe [Gub07b], [Ya12a], [Ya12b]).

Für ein nicht-archimedisches Analogon der Poincaré-Lelong Gleichung fehlte auch noch ein Ersatz für den Differentialoperator  $dd^c$ . Im Fall einer Kurve haben Chinburg-Rumely [CR93] und Zhang [Zha93] durch Analysis auf dem Reduktionsgraphen eine entsprechende Analogie zur Poincaré-Lelong Gleichung gefunden.

## 1. Einleitung

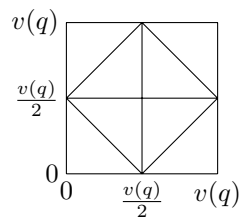
Die vorliegende Arbeit ist eine Fallstudie für die Definition der ersten Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve. Die Definition beruht auf Ideen aus der tropischen Geometrie. Es werden verschiedene Eigenschaften der ersten Chernform anhand von Beispielen herausgearbeitet. Insbesondere wird gezeigt, dass die topdimensionale Wedge-Potenz der ersten Chernform das entsprechende Chambert-Loir Maß ergibt und dass die Poincaré-Lelong Gleichung gilt.

Bei der Fertigstellung dieser Dissertation wurde mir ein Preprint von Chambert-Loir und Ducros [CD12] bekannt, in dem Differentialformen und Ströme ganz allgemein auf Berkovich analytischen Räumen studiert werden. Damit erhält man Verallgemeinerungen vieler Resultate dieser Dissertation. Um die Unabhängigkeit dieser Dissertation von dem erwähnten Preprint zu behalten, wird hier auf einen Vergleich mit [CD12] nur am Rande eingegangen. Diese Dissertation war Teil des DFG Forschungsprojekts „ $p$ -adische Arakelovgeometrie“ von 2008 bis 2011 und damit ist die Unabhängigkeit der Resultate in den Arbeitsberichten der DFG detailliert dokumentiert (siehe [DFG06], [DFG10], [DFG12]).

Gegeben sei eine endliche Körpererweiterung  $K$  von  $\mathbb{Q}_p$  mit Absolutbetrag  $|\cdot|$ , der den  $p$ -adischen Absolutbetrag fortsetzt. Dann bezeichnen wir mit  $v(\cdot) := -\log |\cdot|$  die assoziierte Bewertung auf  $K$  und  $K^\circ := \{\alpha \in K \mid v(\alpha) \geq 0\}$  ist der Bewertungsring.

Für jedes  $q \in K^\times$  mit  $v(q) > 0$  existiert eine Tate elliptische Kurve  $E$ , deren  $K$ -rationale Punkte isomorph zu  $K^\times/q^\mathbb{Z}$  sind (siehe Abschnitt 2.1). Wir wählen nun den 2-Torsionspunkt  $P = [-q^{1/2}] \in K^\times/q^\mathbb{Z}$  und betrachten das ample Geradenbündel  $O(P)$ . Aufbauend darauf untersuchen wir das Quadrat  $E \times E$  der Tate elliptischen Kurve zusammen mit dem amplen Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$ , wobei  $p_i$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente ist. (siehe Abschnitt 2.3).

Für diese Situation wenden wir nun Mumfords Konstruktion an (siehe [Mum72]). Dabei entsteht durch die Wahl einer polytopalen Zerlegung von  $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}(v(q), 0) \times \mathbb{Z}(0, v(q)))$  ein eigentliches algebraisches Modell  $\mathcal{B}$  von  $E \times E$  über dem Bewertungsring  $K^\circ$ . Durch die zusätzliche Voraussetzung, dass die polytopale Zerlegung eine Unterteilung in kongruente Standardsimplexe besitzt, erreichen wir sogar strikte Semistabilität. Zum Beispiel induziert die Zerlegung



ein strikt semistabiles Modell  $\mathcal{B}$  von  $E \times E$ , das wir mit  $V1$  bezeichnen. Für Details siehe Abschnitt 2.4.

Weiter liefert uns dann eine stetige, stückweise lineare strikt konvexe Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein amples Modell  $\mathcal{L}$  des Geradenbündels  $L$ . Durch Übergang zu einer Potenz  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  wird dann das Modell sehr ample (siehe Abschnitt 2.5). Für  $m \gg 0$  liefert uns der Schnitt des Modells  $\mathcal{B}$  mit einer generischen Hyperebene  $H$  eine glatte zusammenhängende Kurve  $X \subset E \times E$  mit strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$  (siehe Abschnitt 2.6).

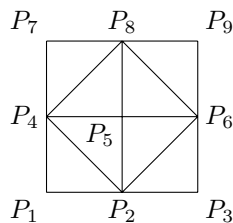
Die Abbildung  $\text{val} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z}(v(q), 0) \times \mathbb{Z}(0, v(q)))$  ist die durch  $v$  induzierte Bewertung auf dem Quadrat der Tate-Kurve. Damit ist dann die tropische Varietät zur obigen Kurve  $X$  gegeben durch  $\text{Trop}(X) := \overline{\text{val}(X)}$ . Zum Beispiel ist für das obige strikt semistabile Modell  $\mathcal{B}$  mit der Zerlegung  $V1$  die tropische Varietät von  $X$  gleich dem 1-Skelett von  $\mathcal{B}$  (siehe Abschnitt 2.7).

Durch die Wahl einer beliebigen stetigen Metrik auf dem Geradenbündel  $L$  können wir über ein Grenzwertargument eine eindeutig bestimmte kanonische Metrik  $\|\cdot\|_{\text{kan}}$  auf  $L$  definieren. Damit definieren wir dann das kanonische Maß der obigen Kurve  $X$  durch das Chambert-Loir Maß  $c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 1}$ . Im Beispiel mit der Zerlegung  $V1$  gilt

$$c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}}) = \sum_{\Delta \text{ Kante von } V1} \lambda_{\Delta} \delta_{\Delta}, \quad (1.1)$$

wobei  $\delta_{\Delta}$  das euklidische Maß auf der Kante  $\Delta$  ist und wir die kanonischen Gewichte  $\lambda_{\Delta} > 0$  konkret berechnen können (siehe Abschnitt 2.8).

Im dritten Kapitel bestimmen wir das kanonische Maß  $c_1(L|_X; \|\cdot\|_{\text{kan}})$  für die obige Kurve  $X$  in mehreren Fällen explizit. Als Ausgangsbasis für die ersten Rechnungen dient die Zerlegung  $V1$  des strikt semistabilen Modells  $\mathcal{B}$ , wobei wir die „Eckpunkte“ wie folgt



bezeichnen und  $\Delta$  ab jetzt eine beliebige Kante von  $V1$  ist. In dieser speziellen Situation (vergleiche Abschnitt 3.2) gilt schließlich, dass die kanonischen Gewichte  $\lambda_{\Delta}$  nur von dem dualen Polytop  $\Delta^f$  von  $\Delta$  bezüglich  $f$  abhängen. Dabei ist  $f$  die zur Konstruktion des Modells  $\mathcal{L}$  des Geradenbündels  $L$  benutzte Funktion. Genauer ist das kanonische Gewicht

## 1. Einleitung

$\lambda_\Delta$  für alle Kanten  $\Delta$  von  $V1$  dann gegeben durch  $\lambda_\Delta = m \cdot \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$ , wobei  $m \gg 0$  die benötigte Potenz von  $\mathcal{L}$  ist, die weiter oben in der Konstruktion von  $X$  auftauchte.

**Beispiel 1.1.** Wir setzen nun zur Vereinfachung der Notation  $v(q) = 1$  und legen die stetige stückweise lineare Funktion  $f$  wie folgt fest:

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
$f(P_i)$	0	0,19	0,5	0,19	0,4	0,69	0,5	0,69	1

Für diese Wahl ergeben sich dann die kanonischen Gewichte wie folgt

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{19}{25} & \text{für } \Delta \in \{\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{P_4P_7}\} \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{4}{25} & \text{für } \Delta \in \{\overline{P_2P_5}, \overline{P_5P_8}, \overline{P_4P_5}, \overline{P_5P_6}\} \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{\sqrt{2}}{25} & \text{für } \Delta \in \{\overline{P_2P_4}, \overline{P_2P_6}, \overline{P_4P_8}, \overline{P_6P_8}\}. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir in Gleichung (1.1) die euklidische Normierung. In der Kombinatorik wird jedoch oft die Normierung so gewählt, dass alle Kanten des Modells  $\mathcal{B}$  die Länge  $1/2$  haben, was hier der halben Gitterlänge entspricht. Dies wollen wir jetzt mit  $\delta_\Delta^{(\text{komb})}$  bezeichnen und erhalten

$$c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}}) = \sum_{\Delta} \lambda_\Delta \delta_\Delta = \sum_{\Delta} \lambda_\Delta^{(\text{komb})} \delta_\Delta^{(\text{komb})}.$$

Für dieses Beispiel auf der Zerlegung  $V1$  gilt damit:

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta^{(\text{komb})} &= \lambda_\Delta & = m \cdot \frac{19}{25} & \text{für } \Delta \in \{\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{P_4P_7}\} \\ \lambda_\Delta^{(\text{komb})} &= \lambda_\Delta & = m \cdot \frac{4}{25} & \text{für } \Delta \in \{\overline{P_2P_5}, \overline{P_5P_8}, \overline{P_4P_5}, \overline{P_5P_6}\} \\ \lambda_\Delta^{(\text{komb})} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda_\Delta & = m \cdot \frac{1}{25} & \text{für } \Delta \in \{\overline{P_2P_4}, \overline{P_2P_6}, \overline{P_4P_8}, \overline{P_6P_8}\}. \end{aligned}$$

In der tropischen Geometrie sind tropische Varietäten gewichtete polyedrische Komplexe (siehe [Gub12, §13]). Genau so können wir hier für alle Kanten  $\Delta$  der tropischen Varietät  $\text{Trop}(X)$ , zu der obigen Kurve  $X$ , die tropischen Gewichte  $c_\Delta \in \mathbb{N}$  definieren. Bernd Sturmfels hatte dazu die Frage aufgeworfen, ob die kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$ , bezüglich einer geeigneten Normierung, gleich den tropischen Gewichten  $c_\Delta$  sind. Im Beispiel 1.1 gilt tatsächlich  $\lambda_\Delta^{(\text{komb})} = c_\Delta$ . Dabei spielt jedoch die Wahl des Geradenbündels  $L$  eine entscheidende Rolle. Um nun eine allgemeinere Aussage machen zu können, ist es also nötig das Geradenbündel zu variieren. Dies führen wir für die Zerlegung  $V1$  in Abschnitt 3.5 durch und können damit in Abschnitt 3.6 die von Bernd Sturmfels aufgeworfene Frage beantworten.

**Satz 1.2.** Im Allgemeinen sind die kanonischen Gewichte  $\lambda_{\Delta}^{(\text{komb})}$  verschieden von den tropischen Gewichten  $c_{\Delta}$ .

Unser Ziel im vierten Kapitel ist es, ein nicht-archimedisches Analogon der Poincaré-Lelong Gleichung zu finden. Dazu erinnern wir kurz an die komplexe Poincaré-Lelong Gleichung  $dd^c g = c_1(L, \|\cdot\|) - \delta_D$ , bei der  $g$  der Greensche Strom  $-\log \|s\|^2$  für einen meromorphen Schnitt  $s$  von  $L$ ,  $c_1(L, \|\cdot\|)$  die erste Chernform von  $(L, \|\cdot\|)$  und  $\delta_D$  der Diracoperator zu dem Divisor  $D = \text{div}(s)$  ist. Für die genauen Definitionen und die Details siehe [GH78, Kapitel 1.1, Abschnitt 3 und Kapitel 3.2, Abschnitt 1]. In der nicht-archimedischen Situation gehen wir nun von einer arithmetischen Fläche  $\mathcal{X}$  mit generischer Faser  $X$  aus und betrachten ein metrisiertes Geradenbündel  $(L, \|\cdot\|)$  auf  $X$ . Dann findet die Analysis auf dem Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$  der speziellen Faser  $\mathcal{X}_v$  von  $\mathcal{X}$  statt, wobei das Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$  dem Reduktionsgraphen entspricht. Weiter benutzen wir als Metrik jetzt eine Modellmetrik, die induziert wird von einem Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{X}$  mit generischer Faser  $L$  (siehe 2.8.1). Da wir das Skelett kanonisch als kompakte Teilmenge des Berkovichraumes  $X^{\text{an}}$  ansehen können, ist das Chambert-Loir Maß  $c_1(L, \|\cdot\|)$  eine gewichtete Summe der Dirac-Maße in den Ecken des Skelettes  $S(\mathcal{X}_v)$  (siehe [Cham06]). Weiter spielt für einen meromorphen Schnitt  $s$  von  $L$  die Funktion  $-\log \|s\|$  die Rolle des Greenschen Stromes  $g$  für den Divisor  $\text{div}(s)$  auf  $X$ . Damit fehlt nun noch ein neuer Differentialoperator, der den Operator  $dd^c$  ersetzt. Dazu übertragen wir den für metrisierte Graphen definierten Laplaceoperator  $\Delta$  (siehe [BR07] oder Definition 4.1.7) auf das Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$ . Alles zusammen liefert uns dann die folgende nicht-archimedische Poincaré-Lelong Gleichung.

**Satz 1.3.** Unter obigen Voraussetzungen gilt die folgende Gleichung von Maßen auf dem Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$ :

$$-\Delta g = c_1(L, \|\cdot\|) - \delta_{\text{val}(\text{div}(s))}.$$

Eine ähnliche Version dieses Satzes tauchte schon in [Zha93] auf. Neu ist hier, dass auf der rechten Seite das Chambert-Loir Maß auftaucht. Satz 1.3 wurde unabhängig von der vorliegenden Arbeit von Chambert-Loir in [Cham11, Lemma 2.2.5] bewiesen.

Wir kehren nun zu unserer vorigen Situation, dem Quadrat  $E \times E$  einer Tate-Kurve mit amplem Geradenbündel  $L$ , Modell  $\mathcal{B}$  und Zerlegung  $V1$  von  $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q))$  zurück. Unser Ziel in den Kapiteln 5 und 6 ist es jetzt auch für diesen 2-dimensionalen Fall ein nicht-archimedisches Analogon der komplexen Poincaré-Lelong Gleichung zu finden. Zunächst ist

## 1. Einleitung

aber im 2-dimensionalen nicht-archimedischen Fall eine Entsprechung für die im komplexen benutzte Differentialform  $c_1(L, \|\cdot\|)$  unbekannt. Wir kennen dort nur das Chambert-Loir Maß  $c_1(L, \|\cdot\|)^2$ , was uns einen guten Test für mögliche Kandidaten liefert.

In Abschnitt 5.2 definieren wir zunächst die erste Chernform  $c_1(L, \|\cdot\|)$  für Modellmetriken  $\|\cdot\|$ . Das heißt die Metrik  $\|\cdot\|$  wird durch die das ample Modell  $\mathcal{L}$  von  $L$  bestimmende stetige, stückweise lineare strikt konvexe Funktion  $f$  gegeben. Da wir die Zerlegung  $V1$  zugrunde legen, verlangen wir, dass  $f$  auf den Dreiecken von  $V1$  linear ist. Das führt dann zu einem amplen Modell  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{B}$ . In der tropischen Geometrie spielt so eine Funktion  $f$  die Rolle eines Cartier-Divisors. Dazu können wir dann einen tropischen Weil-Divisor definieren (siehe [AR10, §3]), der in unserem Fall eine gewichtete Kantensumme der Zerlegung  $V1$  ist. Wenn wir die Kante  $\sigma$  von  $V1$  mit dem Dirac-Strom  $\delta_\sigma$  identifizieren, dann erhalten wir einen Strom  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  auf  $S(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q))$ , der auf den 1-Formen von  $S(\mathcal{B})$  operiert (siehe Bemerkung 5.3.4). Diesen Strom definieren wir als die erste Chernform des metrisierten Geradenbündels  $(L, \|\cdot\|)$ . Die erste Chernform hat dann die Form

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = \sum_{\sigma \text{ Kante von } V1} \omega^{\text{AR}}(\sigma) \cdot \delta_\sigma ,$$

wobei  $\omega^{\text{AR}}(\sigma)$  explizit in Abhängigkeit der Funktion  $f$  und der Zerlegung  $V1$  gegeben ist. Wir definieren dann das  $\wedge$ -Produkt  $c_1^{\text{AR}}(L; \|\cdot\|)^2$  von  $c_1^{\text{AR}}(L; \|\cdot\|)$  mit sich selbst als das Maß zum tropischen Selbstschnitt von  $f$  (siehe Abschnitt 5.3). Damit erhalten wir den folgenden Test für unsere Definition der ersten Chernform, den wir in Abschnitt 5.5 beweisen.

**Satz 1.4** (Chambert-Loir Test). Mit obigen Bezeichnungen gilt:

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^2 = c_1(L, \|\cdot\|)^2 ,$$

wobei auf der rechten Seite das Chambert-Loir Maß des metrisierten Geradenbündels  $(L, \|\cdot\|)$  auftaucht.

Im Falle der kanonischen Metrik konstruieren wir die erste Chernform  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})$  nun jedoch so, dass sie den Chambert-Loir Test  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^2 = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^2$  erfüllt (siehe Abschnitt 5.3). Dazu setzen wir die erste Chernform als allgemeine 1-Form an und verlangen in Analogie zum komplexen Fall, dass sich unser  $\wedge$ -Produkt wie bei 2-Formen verhält (siehe 5.3.3). Dies liefert uns:

**Definition 1.5.** Für ein mit der kanonischen Metrik  $\|\cdot\|_{\text{kan}}$  versehenes Geradenbündel  $L$  ist die erste Chernform gegeben durch

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) := \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)} .$$

Als letztes beschäftigen wir uns dann in Abschnitt 5.6 noch mit der Frage, was passiert, wenn in der ersten Chernform sowohl die aus dem kanonischen Fall bekannten 1-Formen als auch eine aus dem Fall mit einer Modellmetrik bekannte gewichtete Kanten-summe auftaucht. Wir setzen deshalb  $c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|) := c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) + c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  und beweisen dann, nach Erweiterung der Regeln für unser  $\wedge$ -Produkt (siehe 5.3.6), dass auch hier der Chambert-Loir Test (siehe Satz 5.6.1) gilt.

Damit fehlt uns in der 2-dimensionalen Situation für ein nicht-archimedisches Analogon der Poincaré-Lelong-Gleichung noch ein geeigneter Ersatz für den Differentialoperator  $dd^c$ . Dazu verallgemeinern wir die Definition von  $-\Delta$  schrittweise auf die 2-dimensionale Situation (siehe Definitionen 6.1.2 und 6.2.3) und erhalten einen neuen Differentialoperator  $\square$ . Damit können wir dann in den Abschnitten 6.2 für eine Modellmetrik und 6.3 für die kanonische Metrik das folgende nicht-archimedische Analogon der Poincaré-Lelong-Gleichung beweisen.

**Satz 1.6** (Poincaré-Lelong-Gleichung). Auf dem Quadrat  $E \times E$  einer Tate-Kurve mit dem amplen Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(D)$  zum Divisor  $D = E \times P + P \times E$  wie zu Beginn der Einleitung und entsprechendem globalem Schnitt  $s = s_D$  von  $L$  gilt die Gleichung

$$\square(-\log \|s\|) = c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) - \delta_{\text{Trop}(\text{div}(s))}$$

von Strömen auf dem Skelett  $S(\mathcal{B})$ . Dabei ist  $\|\cdot\|$  entweder die kanonische Metrik oder eine Modellmetrik auf dem Geradenbündel  $L$ , die wie oben beschrieben zu der Zerlegung  $V1$  gehört.

In Satz 7.1.3 werden wir sehen, dass der Differentialoperator  $\square$  eine natürliche Interpretation hat als Strom auf dem Skelett. Am Schluß werden wir in Abschnitt 7.4 einen Ausblick auf Greensche Ströme geben. Hier besteht die Hoffnung, dass der in dieser Arbeit an Beispielen beschriebene Formalismus Anwendungen findet bei der Beschreibung der nicht-archimedischen Beiträge in der Arakelov-Theorie.





# 2. Grundlagen

## 2.1. Grundlagen zur Tate-Kurve

Zu Beginn wiederholen wir einige Grundlagen und weiterführende Resultate zur Tate-Kurve.

**Theorem 2.1.1** (Tate; [Sil94, §5, Theorem 3.1]). *Sei  $K$  eine endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}_p$  mit vollständigem (diskretem) Absolutbetrag  $|\cdot|$ ,  $q \in K^\times$  mit  $|q| < 1$  und*

$$s_k(q) := \sum_{n \geq 1} \frac{n^k q^n}{1 - q^n}, \quad a_4(q) := -5s_3(q), \quad a_6(q) := -\frac{5s_3(q) + 7s_5(q)}{12}.$$

1. Die Reihen  $a_4(q)$  und  $a_6(q)$  konvergieren in  $K$  und definieren die Tate-Kurve  $E_q$  durch die Gleichung

$$E_q : y^2 + xy = x^3 + a_4(q)x + a_6(q).$$

2. Die Tate-Kurve  $E_q$  ist eine über  $K$  definierte elliptische Kurve mit Diskriminante

$$\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$$

und  $j$ -Invariante

$$j = j(q) = j(E_q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \dots$$

3. Die Reihen

$$x(\zeta, q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n \zeta}{(1 - q^n \zeta)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n}$$
$$y(\zeta, q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2n} \zeta^2}{(1 - q^n \zeta)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n}.$$

konvergieren für alle  $\zeta \in \overline{K}$  mit  $\zeta \notin q^{\mathbb{Z}}$  und sie definieren einen surjektiven Homomorphismus

$$\Phi : \overline{K}^\times \rightarrow E_q(\overline{K}) \text{ mit } u \mapsto \begin{cases} (x(\zeta, q), y(\zeta, q)) & \text{für } \zeta \notin q^{\mathbb{Z}} \\ O & \text{für } \zeta \in q^{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

## 2. Grundlagen

4. Die Abbildung  $\Phi$  aus 3. ist kompatibel mit der Aktion der Galois-Gruppe  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  in dem Sinne, dass

$$\Phi(\zeta^\sigma) = \Phi(\zeta)^\sigma \text{ für alle } \zeta \in \overline{K}^\times, \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K).$$

Das heißt  $\Phi$  ist auch ein Isomorphismus von  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -Modulen. Insbesondere induziert  $\Phi$  für jede algebraische Erweiterung  $L/K$  einen Isomorphismus

$$\Phi : L^\times / q^\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} E_q(L).$$

**Bemerkung 2.1.2.** Bei Theorem 2.1.1 ist ein Druckfehler in [Sil94] und damit auch in [BG06]. In beiden ist in der Aussage  $a_4(q) = -5s_3(q)$  die 5 vergessen worden. Zur Verifizierung der richtigen Aussage siehe die Originalquelle: [Roq70, §3, Formel (37)].

**Proposition 2.1.3.** Für jede endliche Körpererweiterung  $K$  von  $\mathbb{Q}_p$  und jedes  $q \in K^\times$  mit  $|q| < 1$  ist der analytische Torus  $\overline{K}^\times / q^\mathbb{Z}$  (analytisch) isomorph zu einer Tate (elliptischen) Kurve  $E_q(\overline{K})$ .

*Beweis:* Folgt direkt aus Theorem 2.1.1, wobei  $\Phi$  den Isomorphismus  $\overline{K}^\times / q^\mathbb{Z} \cong E_q$  liefert.  $\square$

**Lemma 2.1.4** ([Sil94, §5, Lemma 5.1]). Sei  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$  mit  $|\alpha| > 1$ . Dann existiert ein eindeutiges Element  $q \in \mathbb{Q}_p(\alpha)^\times$  mit  $|q| < 1$  so, dass  $j(E_q) = \alpha$ .

**Definition 2.1.5** ([BG06, 9.5.24]). Die Menge  $\overline{K}^\times / q^\mathbb{Z}$  aus Proposition 2.1.3 wird die Tate-Uniformisierung der Tate-Kurve  $E_q$  genannt.

**Definition 2.1.6** ([Sil86, Chapter VII, §5]). Sei  $K$  ein  $p$ -adischer Körper mit vollständigen (diskreten) Absolutbetrag und  $E$  eine in minimaler Weierstraß-Normalform gegebene elliptische Kurve über  $K$ . Weiter sei  $\tilde{E}$  die Reduktion von  $E$ .

1.  $E$  hat gute (oder stabile) Reduktion über  $K$ , wenn  $\tilde{E}$  nicht singulär ist.
2.  $E$  hat multiplikative (oder semi-stabile) Reduktion über  $K$ , wenn  $\tilde{E}$  eine „Schleife“ hat.
3.  $E$  hat additive (oder nicht-stabile) Reduktion über  $K$ , wenn  $\tilde{E}$  eine „Spitze“ hat.

In den Fällen 2. und 3. sagt man, dass  $E$  schlechte Reduktion hat. In dem Fall, dass  $E$  multiplikative Reduktion hat, nennt man die Reduktion split (bzw. nicht-split), falls die Steigung jeder im „Kreuzungspunkt“ anliegenden Tangenten in  $K$  (bzw. nicht in  $K$ ) ist.

**Definition 2.1.7** ([BG06, 9.5.24]). Die elliptischen Kurven mit split multiplikativer Reduktion haben eine Tate-Uniformisierung und werden Tate (elliptische) Kurven genannt.

**Bemerkung 2.1.8** ([BG06, 9.5.24]). Die Reduktion der Tate-Kurve  $E_q$  (aus Theorem 2.1.1) ist gegeben durch  $y^2 + xy = x^3$ .

**2.1.9** ([BG06, 9.5.24]). Wir wollen hier kurz auf die komplexe Analogie zu Theorem 2.1.1 Punkt 3) eingehen. Es gilt: Jede komplexe elliptische Kurve ist biholomorph zum einem komplexen Torus  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$  mit  $\text{Re}(\tau) > 0$ . Die Abbildung  $\zeta = \exp(2\pi iz)$  liefert uns dann einen analytischen Gruppenisomorphismus in die Tate-Uniformisierung  $\mathbb{C}^\times/q^\mathbb{Z}$  mit  $q := e^{2\pi i\tau}$ , das heißt wir haben die folgende Situation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{\text{mod}} & \mathbb{C}^\times/q^\mathbb{Z} \\ & \nearrow e^{2\pi iz} & \\ & \sim & \\ \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) & & \end{array}$$

Im nicht-archimedischen Fall gilt:

**Theorem 2.1.10** (Tate; [Sil86, Appendix C, §14, Theorem 14.1]). Sei  $K$  ein Körper mit einer diskreten Bewertung  $\nu$ .

1. Für beliebiges  $q \in K^\times$  mit  $|q|_\nu < 1$  ist die in 2.1.5 definierte Abbildung  $\overline{K}^\times/q^\mathbb{Z} \rightarrow E_q$  ein Isomorphismus von  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -Modulen.
2. Für jedes  $j_0 \in K^\times$  mit  $|j_0|_\nu > 1$  existiert ein  $q \in K^\times$  mit  $|q|_\nu < 1$  so, dass die elliptische Kurve  $E_q/K$  die  $j$ -Invariante  $j_0$  hat.  $E_q$  ist charakterisiert durch  $j(E_q) = j_0$  und dadurch, dass  $E_q$  split multiplikative Reduktion an der Stelle  $\nu$  hat.
3. Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve mit nicht ganzzahliger  $j$ -Invariante, welche keine split multiplikative Reduktion hat. Aus (2) folgt, dass  $q \in K^\times$  existiert mit  $j(E) = j(E_q)$ . Dann gibt es eine eindeutige quadratische Erweiterung  $L/K$  so, dass  $E$  über  $L$  isomorph zu  $E_q$  ist und

$$E(K) \cong \{u \in L^\times \mid \text{Norm}_{L/K}(u) \in q^\mathbb{Z}\}/q^\mathbb{Z}.$$

Die Erweiterung  $L/K$  ist unverzweigt genau dann wenn  $E$  (keine split) multiplikative Reduktion hat. In diesem Fall ist die „Restklassenkörpererweiterung“ von  $L/K$  erzeugt durch die in den Knoten der Reduktion  $\tilde{E}$  von  $E$  an der Stelle  $\nu$  anliegenden Tangenten.

## 2. Grundlagen

Auch hier ist ein Druckfehler im Buch [Sil86]. In der Aussage (2) muss  $|j_0|_v > 1$  statt des dort abgedruckten  $<$  stehen. Zur Verifizierung der richtigen Aussage siehe die Originalquelle: [Roq70], §3, Aussage VII.

In [Sil86] ist dieses Theorem nicht bewiesen, dort wird auf [Roq70], [Rob71], II §5 und [Sil94]; V.5.3, V.5.4 verwiesen.

## 2.2. Geradenbündel auf der Tate-Kurve

Ab jetzt sei  $K$  eine endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}_p$  mit vollständigem (diskretem) Absolutbetrag  $|\cdot|$  und zugehöriger Bewertung  $v(\cdot) := -\log|\cdot|$ . Dann ist  $\mathbb{C}_K := (\overline{K}_v)_v$  die kleinste algebraisch abgeschlossene Körpererweiterung von  $K$ , welche bezüglich einer Erweiterung von  $|\cdot|$  zu einem vollständigen Absolutbetrag, vollständig ist. Wir benutzen auf  $\mathbb{C}_K$  wieder die Notationen  $|\cdot|$  für den Absolutbetrag und  $v(\cdot)$  für die zugehörige Bewertung. Unser Ziel ist es nun die Resultate aus [Gub07a, 6.5] auf den Fall einer Tate elliptische Kurve  $E$  anzuwenden. Zunächst gibt es nach Proposition 2.1.3 eine Quotientenabbildung  $\pi : \mathbb{C}_K^\times \rightarrow E^{\text{an}}$ , da  $E^{\text{an}} \cong \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}}$  für  $q \in K^\times$  mit  $|q| < 1$ . Unser Ziel ist es nun ein Geradenbündel  $L$  über  $E^{\text{an}}$  explizit zu beschreiben (vergleiche [BG06, Example 9.5.24]). Dazu setzen wir, zur Vereinfachung der Notation,  $\tilde{q} := q^{1/2}$  und wählen den 2-Torsionspunkt  $P := \pi(-\tilde{q}) \in E^{\text{an}}$ . Dann ist  $P$  ein Divisor und es existiert ein eindeutig bestimmtes Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(P)$  mit Schnitt  $s_P$  so, dass  $\text{div}(s_P) = P$ . Weiter gilt  $\pi^*(L) = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K$  nach [FvdP04, Theorem 6.3.3] und  $s := \pi^*(s_P)$  ist ein globaler Schnitt von  $\pi^*(L)$ . Damit ist  $s$  gegeben durch eine Funktion  $f : \mathbb{C}_K^\times \rightarrow \mathbb{C}_K$ , das heißt es gilt  $s(\zeta) = (\zeta, f(\zeta))$  für  $\zeta \in \mathbb{C}_K^\times$ . In unserem Fall ist  $f$  die  $\Theta$ -Funktion, die gegeben ist durch

$$\Theta(\zeta, q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^{n^2} \zeta^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \tilde{q}^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{q}^{2n-1} \zeta) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{q}^{2n-1} \zeta^{-1}) . \quad (2.1)$$

Dabei ist die Umrechnung von der Summe in das Produkt in dem von uns benötigten nicht-archimedischen Fall formal analog zum komplexen Fall, der in [Chan85, Chapter V, §6, Theorem 6] zu finden ist. Da nun aber aus der Produktdarstellung sofort folgt, dass die Nullstellen  $\zeta$  in  $-\tilde{q}^{2\mathbb{Z}+1}$  liegen, induziert  $\Theta$  einen globalen Schnitt von  $L$  mit Divisor  $P$ . Somit gilt, bis auf Multiplikation mit einem Vielfachen, dass  $\Theta = f$ . Insgesamt haben wir

damit also die folgende Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^*(L) = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K & \longrightarrow & L \\
 \downarrow \text{triviales Geradenbündel} & & \downarrow s_P \\
 \mathbb{C}_K^\times & \xrightarrow{\pi} & E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}} \\
 \uparrow \zeta \mapsto (\zeta, \Theta(\zeta, q)) & & \uparrow
 \end{array}$$

Unser Ziel ist es nun, aus  $\pi^*(L) = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K$  das Geradenbündel  $L$  im Quotienten  $E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}}$  zu gewinnen. Dazu bemerken wir zunächst, dass  $s = \pi^*(s_P) = (\zeta, \Theta(\zeta, q))$  auf dem Quotienten „lebt“. Dies liefert uns den entscheidenden Hinweis, wie man die Faser  $\mathbb{C}_K$  über  $\zeta \in \mathbb{C}_K^\times$  mit der Faser über  $q\zeta$  identifizieren muss. Genauer heißt das, wir erhalten  $L = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K / \sim$ , wobei  $\sim$  gegeben ist durch die  $\mathbb{Z}$ -Operation

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K) \rightarrow \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K \quad \text{mit} \quad (k, (\zeta, v)) \mapsto (q^k \zeta, e_k(\zeta, q) \cdot v)$$

mit  $e_k(\zeta, q) \in O(\mathbb{C}_K^\times)^\times$ . Wir müssen also, um  $L$  beschreiben zu können, den Kozyklus  $e_k(\zeta, v)$  explizit bestimmen. Wegen

$$\Theta(q^k \zeta, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^{n^2+2kn} \zeta^n = \tilde{q}^{-k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^{(n+k)^2} \zeta^n = \tilde{q}^{-k^2} \zeta^{-k} \Theta(\zeta, q)$$

folgt

$$e_k(\zeta, q) = \tilde{q}^{-k^2} \zeta^{-k} \quad (2.2)$$

und wir setzen für  $\gamma = q^k$  jetzt  $Z_\gamma(\zeta) := e_k(\zeta, q)^{-1}$ . Nun hat der Kozyklus  $Z_\gamma(\zeta)$  nach [Gub07a, 6.5] die Form  $Z_\gamma(\zeta) = d_\gamma \cdot \sigma_\gamma(\zeta)$ , wobei  $\gamma \mapsto \sigma_\gamma$  ein Homomorphismus von  $q^{\mathbb{Z}}$  in die Charaktergruppe  $(\mathbb{C}_K^\times)^\vee = \{\zeta \mapsto \zeta^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  ist und  $d_\gamma \in \mathbb{C}_K^\times$  die Bedingung

$$d_{\gamma\delta} \cdot d_\gamma^{-1} \cdot d_\delta^{-1} = \sigma_\delta(\gamma) \quad (2.3)$$

für  $\gamma = q^k, \delta = q^l \in q^{\mathbb{Z}}$  erfüllt. Weiter gilt für  $d_\gamma = \tilde{q}^{k^2} \in \mathbb{C}_K^\times$  und  $\sigma_\gamma : \mathbb{C}_K^\times \rightarrow \mathbb{C}_K^\times$  mit  $\sigma_\gamma(\zeta) = \zeta^k$ , dass

$$d_{\gamma\delta} \cdot d_\gamma^{-1} \cdot d_\delta^{-1} = \tilde{q}^{(k+l)^2} \tilde{q}^{-k^2} \tilde{q}^{-l^2} = \tilde{q}^{2kl} = q^{kl} = (q^k)^l = \sigma_\delta(q^k).$$

Damit ist die Bedingung (2.3) erfüllt und wir erhalten mit der Bewertung  $v : \mathbb{C}_K^\times \rightarrow \mathbb{R}$  eine eindeutige symmetrische Bilinearform  $b$  auf  $\mathbb{Z}v(q)$ , die charakterisiert ist durch

$$b(v(\gamma), v(\delta)) = v(\sigma_\delta(\gamma)) = \frac{v(\gamma)v(\delta)}{v(q)}.$$

## 2. Grundlagen

Diese Bilinearform  $b$  ist genau dann positiv definit auf  $\mathbb{Z}v(q)$ , wenn  $L$  ampel ist (siehe [BL86, §2]). Weiter läßt sich  $b$  auf  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  wie folgt erweitern:

$$b(u_1, u_2) = \frac{u_1 \cdot u_2}{v(q)}.$$

Aufgrund der Konstruktion von  $Z_\gamma(\zeta)$  existiert für jedes  $\lambda := v(\gamma) \in \mathbb{Z}v(q)$  eine eindeutige Funktion  $z_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

$$z_\lambda(v(\zeta)) = v(Z_\gamma(\zeta))$$

für  $\zeta \in \mathbb{C}_K^\times$ . Diese Funktion  $z_\lambda$  ist affin und es gilt

$$z_\lambda(v(\zeta)) = \frac{k^2}{2} \cdot v(q) + k \cdot v(\zeta) = \frac{\lambda^2}{2 \cdot v(q)} + \frac{\lambda \cdot v(\zeta)}{v(q)} = z_\lambda(0) + b(v(\zeta), \lambda)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{Z}v(q)$  und alle  $\zeta \in \mathbb{C}_K^\times$ .

## 2.3. Das Quadrat einer Tate-Kurve

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Resultate für eine Tate-Kurve  $E$  auf das Quadrat  $E^2$  zu verallgemeinern. Wir wiederholen zunächst die benötigten Ergebnisse aus Abschnitt 2.2. Zur besseren Unterscheidung versehen wir alle Bezeichnungen aus der 1-dimensionalen Situation in diesem Abschnitt mit dem Index 1 und benutzen die dann freien Bezeichnungen  $L, s$  im 2-dimensionalen Fall. In Abschnitt 2.2 starteten wir mit der Tate-Kurve  $E$  und dem Geradenbündel  $L_1 = \mathcal{O}(P)$ , wobei  $P = \pi(-\tilde{q}) = \pi(-q^{1/2}) \in E^{\text{an}}$  ein 2-Torsionspunkt ist. Des weiteren haben wir dort einen kanonischen globalen Schnitt  $s_{P,1}$  von  $L_1$  gewählt, für den  $\text{div}(s_P) = P$  gilt und  $s_1 := \pi^*(s_P)$  ein globaler Schnitt von  $\pi^*(L_1)$  ist. Darauf aufbauend seien  $p_i : E \times E \rightarrow E$  die Projektionen auf die  $i$ -te Komponente ( $i = 1, 2$ ) des Quadrates  $E \times E$  der Tate-Kurve. Weiter sei  $\pi : \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \rightarrow E^{\text{an}} \times E^{\text{an}}$  die Quotientenabbildung, wobei nach Proposition 2.1.3  $E^{\text{an}} \cong \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}}$  gilt. Unter diesen Voraussetzungen existiert ein eindeutig bestimmtes Geradenbündel  $L := p_1^*(L_1) \otimes p_2^*(L_1)$  mit Schnitt  $s_D := p_1^*(s_P) \otimes p_2^*(s_P)$  von  $L$  zum Divisor  $D = P \times E + E \times P$ . Damit ist  $s := \pi^*(s_D)$  ein globaler Schnitt von  $\pi^*(L)$  und es gilt  $\pi^*(L) = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K$  nach [FvdP04, Theorem 6.3.3]. Damit ist  $s$  gegeben durch eine Funktion  $f : \mathbb{C}_K^\times \rightarrow \mathbb{C}_K$ , das heißt es gilt  $s(\zeta, \zeta') = (\zeta, \zeta', f(\zeta) \cdot f(\zeta'))$  für  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}_K^\times$ . Mit den gleichen Argument wie in Abschnitt 2.2 folgt auch hier, dass, bis auf Multiplikation mit einem Vielfachen,  $f$  identisch mit der  $\Theta$ -Funktion (siehe 2.1) ist.

Insgesamt haben wir damit die folgende Situation

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^*(L) = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K & \longrightarrow & L = p_1^*(L_1) \otimes p_2^*(L_1) \\
 \downarrow \text{triviales Geradenbündel} & & \downarrow s_D \\
 \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times & \xrightarrow{\pi} & E^{\text{an}} \times E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}_K^\times/q^{\mathbb{Z}} \\
 & & \uparrow s_D \\
 & & (\zeta, \zeta') \xrightarrow{s_D} (\zeta, \zeta', \Theta(\zeta, q)\Theta(\zeta', q))
 \end{array}$$

und unser Ziel ist es nun, aus  $\pi^*(L) = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K$  das Geradenbündel  $L$  im Quotienten  $E^{\text{an}} \times E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}_K^\times/q^{\mathbb{Z}}$  zu gewinnen. Dazu bemerken wir zunächst, dass  $s = \pi^*(s_D) = (\zeta, \zeta', \Theta(\zeta, q), \Theta(\zeta', q))$  auf dem Quotienten „lebt“. Dies liefert uns den entscheidenden Hinweis, wie man die Fasern  $\mathbb{C}_K$  über  $\zeta \in \mathbb{C}_K^*$  bzw.  $\zeta' \in \mathbb{C}_K^*$  mit denen über  $q\zeta$  bzw.  $q\zeta'$  identifizieren muß. Genauer heißt das, wir erhalten  $L = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K / \sim$ , wobei  $\sim$  gegeben ist durch die  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Operation

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times (\mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K) &\rightarrow \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K \\
 (k, k', (\zeta, \zeta', v)) &\mapsto (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', e_{k, k'}(\zeta, \zeta', q) \cdot v)
 \end{aligned}$$

mit  $e_{k, k'}(\zeta, \zeta', q) \in O(\mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times)^\times$ . Wir müssen also um  $L$  beschreiben zu können, den Kozyklus  $e_{k, k'}(\zeta, \zeta', q)$  explizit bestimmen. Dazu untersuchen wir zunächst die  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Operation für  $p_1^*(L_1)$ . Wir erhalten  $(\zeta, \zeta', v) \sim (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', e_k(\zeta, q) \cdot v)$ , wobei  $e_k(\zeta, q) = q^{-k^2} \zeta^{-k}$  (siehe 2.2) und die Faser von  $(\pi^*(p_1^*(L_1)))_{(\zeta, \zeta')}$  gleich der Faser von  $(\pi^*(L))_{(\zeta)}$  ist. Analog gilt für die  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Operation für  $p_2^*(L_1)$  mit  $e_{k'}(\zeta', q) = q^{-k'^2} \zeta'^{-k'}$  dann  $(\zeta, \zeta', v) \sim (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', e_{k'}(\zeta', q) \cdot v)$  und die Faser von  $(\pi^*(p_2^*(L_1)))_{(\zeta, \zeta')}$  gleich der Faser von  $(\pi^*(L))_{(\zeta')}$ . Auf  $L$  gilt damit

$$\begin{aligned}
 (\zeta, \zeta', v) &\sim (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', e_k(\zeta, q) \cdot v_1) \otimes (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', e_{k'}(\zeta', q) \cdot v_2) \\
 &= (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', e_k(\zeta, q) e_{k'}(\zeta', q) \cdot v) \\
 &= (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', \tilde{q}^{-k^2 - k'^2} \zeta^{-k} \zeta'^{-k'} \cdot v) ,
 \end{aligned}$$

wobei  $v = v_1 \cdot v_2$ . Wir erhalten also

$$e_{k, k'}(\zeta, \zeta', q)^{-1} = \tilde{q}^{-k^2 - k'^2} \zeta^{-k} \zeta'^{-k'}$$

und setzen für  $\gamma = q^k, \gamma' = q^{k'}$  jetzt  $Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta') := e_{k, k'}(\zeta, \zeta', q)^{-1}$ . Der Kozyklus  $Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta')$  hat nach [Gub07a, 6.5] die Form  $Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta') = d_{\gamma, \gamma'} \cdot \sigma_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta')$ , wobei  $(\gamma, \gamma') \mapsto \sigma_{\gamma, \gamma'}$  ein Homomorphismus von  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  in die Charaktergruppe  $(\mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times)^\vee = \{(\zeta, \zeta') \mapsto \zeta^k \cdot \zeta'^{k'} \mid k, k' \in \mathbb{Z}\}$  ist und  $d_{\gamma, \gamma'} \in \mathbb{C}_K^\times$  die Bedingung

$$d_{\gamma, \delta, \gamma', \delta'} \cdot d_{\gamma, \gamma'}^{-1} \cdot d_{\delta, \delta'}^{-1} = \sigma_{\delta, \delta'}(\gamma, \gamma') \quad (2.4)$$

## 2. Grundlagen

für  $\gamma = q^k, \gamma' = q^{k'}, \delta = q^l, \delta' = q^{l'} \in q^{\mathbb{Z}}$  erfüllt. Für  $d_{\gamma, \gamma'} = \tilde{q}^{k^2+k'^2} \in \mathbb{C}_K^\times$  und  $\sigma_{\gamma, \gamma'} : \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \rightarrow \mathbb{C}_K$  mit  $\sigma_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta') = \zeta^k \cdot \zeta'^{k'}$  gilt

$$d_{\gamma, \gamma, \delta', \delta'} \cdot d_{\gamma, \gamma'}^{-1} \cdot d_{\delta, \delta'}^{-1} = \tilde{q}^{(k+l)^2+(k'+l')^2} \tilde{q}^{-k^2-k'^2} \tilde{q}^{-l^2-l'^2} = q^{kl+k'l'} = (q^k)^l (q^{k'})^{l'} = \sigma_{\delta, \delta'}(\gamma, \gamma') .$$

Damit ist die Bedingung (2.3) erfüllt und wir erhalten mit der Bewertung  $v$  eine eindeutige symmetrische Bilinearform  $b$  auf  $\mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q)$ , die charakterisiert ist durch

$$b((v(\gamma), v(\gamma')), (v(\delta), v(\delta'))) = v(\sigma_{\delta, \delta'}(\gamma, \gamma')) = \frac{v(\gamma)v(\delta) + v(\gamma')v(\delta')}{v(q)} .$$

Diese Bilinearform  $b$  ist genau dann positiv definit auf  $\mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q)$ , wenn  $L$  ampel ist (siehe [BL86, §2]). Weiter läßt sich  $b$  auf  $((u_1, u_2), (u'_1, u'_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  wie folgt erweitern:

$$b((u_1, u_2), (u'_1, u'_2)) = \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2}{v(q)} .$$

Aufgrund der Konstruktion des Kozykels  $Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta')$ , existiert für jedes Element  $(\lambda, \lambda') := (v(\gamma), v(\gamma')) \in \mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q)$  eine eindeutig bestimmte Funktion  $z_{(\lambda, \lambda')} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

$$z_{(\lambda, \lambda')}(v(\zeta), v(\zeta')) = v(Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta'))$$

für  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}_K^\times$ . Diese Funktion  $z_{(\lambda, \lambda')}$  ist affin und es gilt

$$\begin{aligned} z_{(\lambda, \lambda')}(v(\zeta), v(\zeta')) &= \left( \frac{k^2}{2} + \frac{k'^2}{2} \right) v(q) + kv(\zeta) + k'v(\zeta') \\ &= \frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{2 \cdot v(q)} + \frac{\lambda \cdot v(\zeta) + \lambda' \cdot v(\zeta')}{v(q)} \\ &= z_{(\lambda, \lambda')}(0, 0) + b((v(\zeta), v(\zeta')), (\lambda, \lambda')) \end{aligned}$$

für alle  $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q)$  und alle  $(\zeta, \zeta') \in \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times$ .

## 2.4. Mumfords Konstruktion

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist zur Tate-Kurve  $E$  bzw. ihrem Quadrat  $E^2$  ein strikt semistabiles Modell zu konstruieren. Dabei benutzen wir zur Konstruktion die Methoden aus [Gub07a, Kapitel 6], die wir zunächst wiederholen und dann auf unsere Situation anwenden.

**2.4.1.** Gegeben sei wieder  $\mathbb{K} := \mathbb{C}_K$  für eine endliche Körpererweiterung  $K$  von  $\mathbb{Q}_p$  mit vollständigem (diskretem) Absolutbetrag  $|\cdot|$  und zugehörige Bewertung  $v(\cdot) := -\log|\cdot|$ . Weiter sei  $\Gamma := v(\mathbb{K}^\times)$  die Bewertungsgruppe und  $k$  der Restklassenkörper.



**Definition 2.4.2.** Für ein Schema  $\mathcal{Z}$  über  $\text{Spec}(\mathbb{K}^\circ)$  definieren wir

- (a) die *generische Faser*  $Z$  von  $\mathcal{Z}$  durch  $Z := \mathcal{Z} \times_{\text{Spec}(\mathbb{K}^\circ)} \text{Spec}(\mathbb{K})$ .
- (b) die *spezielle Faser*  $\mathcal{Z}_v$  von  $\mathcal{Z}$  durch  $\mathcal{Z}_v := \mathcal{Z} \times_{\text{Spec}(\mathbb{K}^\circ)} \text{Spec}(k)$ .

**Definition 2.4.3.** Gegeben sei eine (algebraische) Varietät  $Z$  über  $\mathbb{K}$ . Ein Modell  $\mathcal{Z}$  von  $Z$  ist eine flache Varietät über dem Bewertungsring  $\mathbb{K}^\circ$ , dessen generische Faser gleich  $Z$  ist.

**2.4.4.** Auf dem Torus  $\mathbb{G}_m^n$  benutzen wir nun die Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und betrachten die stetige Abbildung  $\text{val} : (\mathbb{G}_m^n(\mathbb{K}))^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x} \mapsto (v(x_1), \dots, v(x_n))$ . Weiter sei  $A$  eine total degenerierte abelsche Varietät über  $\mathbb{K}$ , das heißt  $A^{\text{an}}$  ist als analytische Gruppe isomorph zu  $(\mathbb{G}_m^n(\mathbb{K}))^{\text{an}}/M$  für eine diskrete Untergruppe  $M$  von  $\mathbb{G}_m^n(\mathbb{K})$ , die wiederum isomorph zu einem vollständigen Gitter  $\Lambda := \text{val}(M)$  in  $\mathbb{R}^n$  ist. Damit geht die stetige Abbildung  $\text{val}$  mit der Quotientenabbildung  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Lambda$  in eine stetige Abbildung  $\text{val} : A^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{R}^n/\Lambda$  über.

**Definition 2.4.5** ([Gub07a, 6.1]). (a) Ein Polytop  $\overline{\Delta}$  in  $\mathbb{R}^n/\Lambda$  ist gegeben durch ein Polytop  $\Delta$  aus  $\mathbb{R}^n$ , das sich bijektiv auf  $\overline{\Delta}$  abbilden läßt. Wir nennen  $\overline{\Delta}$   $\Gamma$ -rational, wenn  $\Delta$   $\Gamma$ -rational ist.

- (b) Eine ( $\Gamma$ -rationale) polytopale Menge in  $\mathbb{R}^n/\Lambda$  ist eine endliche Vereinigung von ( $\Gamma$ -rationalen) Polytopen aus  $\mathbb{R}^n/\Lambda$ .
- (c) Eine polytopale Zerlegung von  $\mathbb{R}^n/\Lambda$  ist eine endliche Familie von Polytopen in  $\mathbb{R}^n/\Lambda$ , die durch eine  $\Lambda$ -periodische polytopale Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  induziert wird. Es ist schnell zu prüfen, dass  $\mathbb{R}^n/\Lambda$  eine  $\Gamma$ -rationale polytopale Zerlegung hat, die periodisch bezüglich des Gitter  $\Gamma$  ist.

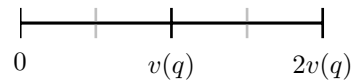
**2.4.6.** Nun läßt sich mit Mumfords Konstruktion (für Details siehe [Mum72]) zu einer polytopalen Zerlegung von  $\mathbb{R}^n/\Lambda$  ein algebraisches Modell  $\mathcal{B}$  über dem Bewertungsring konstruieren. Weil wir eine diskrete Bewertung benutzen, ist  $\mathcal{B}$  sogar eigentlich und mit dem formalen GAGA-Theorem von Grothendieck (siehe [Mum72, Abschnitt 3]) dann sogar algebraisch. Wir arbeiten ab jetzt algebraisch weiter. Insgesamt erhalten wir so ein eigentliches algebraisches Modell über dem Bewertungsring.

**Proposition 2.4.7** ([Gub07a, Proposition 6.3b]). Es existiert eine bijektive Zuordnung zwischen den Ecken  $u$  der polytopalen Zerlegung und den irreduziblen Komponenten  $Y$  der speziellen Faser des Modells  $\mathcal{B}$ .

## 2. Grundlagen

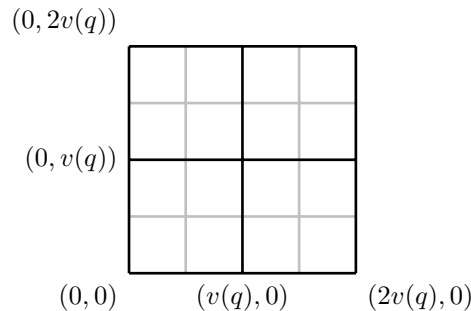
**2.4.8.** In unserer Situation ist die Bewertungsgruppe gleich  $\mathbb{Q}$ . Weiter verlangen wir von unseren Modellen, dass sie eine Unterteilung in kongruente Standardsimplexe besitzen. Genauer bedeutet das, dass für ein  $s \in \mathbb{C}_K$  mit  $0 < v(s) < 1$  jeder Simplex der Unterteilung modulo Koordinatenwechsel kongruent zu einem Standardsimplex  $\{\underline{u} \in \mathbb{R}^n \mid u_1 + \dots + u_n \leq v(s)\}$  ist. Aufgrund dieser Voraussetzungen folgt dann aus [Gub07a, Definition 2.10, Definition 6.2], dass unser Modell automatisch strikt semistabil ist. Wir wollen jetzt auf den 1- und 2-dimensionalen Fall genauer eingehen.

**2.4.9.** Im 1-dimensionalen Fall ist die Bewertungsgruppe  $\mathbb{Z}v(q)$  ein Gitter in  $\mathbb{R}$ . Dann erhalten wir durch

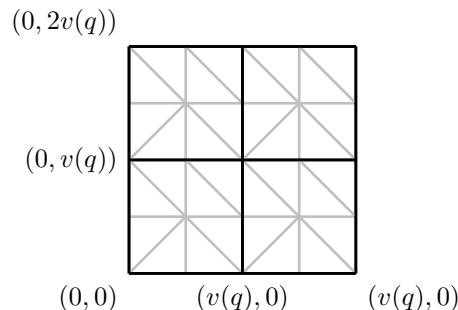


ein Modell  $\mathcal{B}$  von  $E$ , welches, da es sich um eine Zerlegung in kongruente Simplexe handelt, auch strikt semistabil ist.

**2.4.10.** Im 2-dimensionalen Fall ist die Bewertungsgruppe  $\mathbb{Z}(v(q), 0) \oplus \mathbb{Z}(0, v(q))$  ein Gitter in  $\mathbb{R}^2$  und wir erhalten durch



ein Modell von  $E^2$ . Dieses Modell ist aber nicht strikt semistabil. Dies erreichen wir nun, indem wir die Zerlegung in eine Triangulation aus kongruenten Simplexen verfeinern. Dieses Vorgehen ist nicht eindeutig. Zum Beispiel ist



eine mögliche Verfeinerung zu einem strikt semistabilen Modell von  $E^2$ , das wir wieder mit  $\mathcal{B}$  bezeichnen.

## 2.5. Modelle für das Geradenbündel

Wir verwenden in diesem Abschnitt ein strikt-semistabiles Mumford-Modell  $\mathcal{B}$  für das Quadrat  $E^2$  einer Tate-Kurve  $E$ , das wir in Abschnitt 2.4 beschrieben haben. Unser Ziel ist es nun für das auf  $E^2$  gegebene Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  (vergleiche Abschnitt 2.3) ein sehr amples Modell  $\mathcal{L}$  zu konstruieren. Das heißt wir suchen ein sehr amples Modell  $\mathcal{L}$  über  $\mathcal{B}$  so, dass  $L = \mathcal{L}|_{E^2}$  gilt. Dafür wenden wir zwei Resultate aus [Gub07a] auf unsere Situation an, um zunächst ein amples Modell zu erhalten, welches dann durch Übergang zu einer Potenz sehr ampel wird.

**Proposition 2.5.1** ([Gub07a, Proposition 6.6]). Gegeben sei eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

1. Für jeden Simplex  $\Delta$  des strikt semistabilen Modells  $\mathcal{B}$  existiert ein  $\underline{m}_\Delta \in \mathbb{Z}^2$  und ein  $c_\Delta \in \mathbb{Z}(v(q), 0)$  so, dass  $f\left(\begin{smallmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{smallmatrix}\right) = \underline{m}_\Delta \cdot \begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix} + c_\Delta$  mit  $v(\zeta), v(\zeta') \in \Delta$ .
2. Für  $\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda' \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}(v(q), 0) \times \mathbb{Z}(0, v(q))$  und  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}_K^\times$  gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix}\right) + z_{(\lambda, \lambda')} \begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix},$$

wobei nach 2.3

$$z_{(\lambda, \lambda')} \begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{2v(q)}}_{=z_{(\lambda, \lambda')}(0,0)} + \underbrace{\frac{\lambda}{v(q)}v(\zeta) + \frac{\lambda'}{v(q)}v(\zeta')}_{=b((v(\zeta), v(\zeta')), (\lambda, \lambda'))}.$$

Dann ist das Modell  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{B}$  mit  $L = \mathcal{L}|_{E \times E}$  und der Metrik  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  gegeben durch

$$-\log \pi^* \|1\|_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta' \end{pmatrix} := f \begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix},$$

wobei  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}_K^\times$ .

**Bemerkung 2.5.2.** In unserer Situation läßt sich aufgrund der Wahl des Geradenbündels  $L$  für die Funktion  $f$  im Allgemeinen nur  $\underline{m}_\Delta \in \mathbb{Q}^2$  und nicht  $\underline{m}_\Delta \in \mathbb{Z}^2$  erreichen, womit unser Modell nur virtuell existiert. Jedoch können wir  $L$  durch  $L^{\otimes m}$  ersetzen, wobei in unseren Beispielen  $m$  der Hauptnenner der Koeffizienten  $\underline{m}$  ist, damit das Modell „echt“ existiert. Für dieses neue Geradenbündel erhalten wir dann eine Funktion mit den zwei in Proposition 2.5.1 gewünschten Eigenschaften. Zur Vereinfachung der Notation und da sich alle späteren Rechnungen nur um einen Faktor verändern, bleiben wir beim alten

## 2. Grundlagen

Geradenbündel  $L$ . Das heißt unsere benutzten Funktionen werden rationale Koeffizienten haben und erfüllen (vergleiche 2. Eigenschaft der Proposition 2.5.1) für  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}_K^\times$

$$f\left(\begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} v(\zeta) \\ v(\zeta') \end{pmatrix}\right) + \frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{2v(q)} + \frac{\lambda v(\zeta)}{v(q)} + \frac{\lambda' v(\zeta')}{v(q)}. \quad (2.5)$$

Für den 1-dimensionalen Fall erhalten wir mit den Resultate aus Abschnitt 2.2 eine analoge Formel.

**Korollar 2.5.3** ([Gub07a, Korollar 6.7]). Das Geradenbündel  $\mathcal{L}$  ist ampel (und damit  $\mathcal{B}$  projektiv) genau dann wenn  $f$  strikt konvex ist.

*Beweis:* In [Gub07a, Korollar 6.7] wird gezeigt, dass die Einschränkung von  $\mathcal{L}$  auf die spezielle Faser von  $\mathcal{B}$  ampel ist. Weil  $\mathcal{B}$  algebraisch ist, folgt aus [EGA67, Corollaire 9.6.4], dass  $\mathcal{L}$  relativ ampel ist. Weiter ist die Basis als Spektrum eines Bewertungsringes affin und damit  $\mathcal{L}$  selber ampel.  $\square$

**Bemerkung 2.5.4.** Nicht über jeder Zerlegung in kongruente Simplexe, das heißt nicht über jedem strikt semistabilem Modell, läßt sich eine strikt konvexe Funktion  $f$  mit den zwei Eigenschaften aus Proposition 2.5.1 realisieren. In den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.3 werden wir verschiedene reguläre Triangulierungen untersuchen. Falls für diese Triangulierungen dann eine strikt konvexe Funktion existiert, geben wir in den Abschnitten 3.3 und 3.4 konkrete Beispiele für  $f$  an.

**Proposition 2.5.5.** Für ein amples Modell  $\mathcal{L}$  existiert ein  $m \in \mathbb{Z}$  so, dass  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  sehr ampel ist.

*Beweis:* Siehe [Hat77, Chapter II, Theorem 7.6].  $\square$

## 2.6. Konstruktion einer Kurve mit strikt semistabilen Modell

In diesem Abschnitt wollen wir erklären, wie wir eine Kurve  $X \subseteq E \times E$  mit projektivem, strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$  konstruieren können. Wie wir in Abschnitt 2.4 gesehen haben, liefert uns jede Zerlegung von  $E^{\text{an}} \times E^{\text{an}}$  in Simplexe ein strikt semistabiles Modell  $\mathcal{B}$ . Weiter erhalten wir durch jede auf  $\mathcal{B}$  stark polyedrische strikt konvexe Funktion  $f$  ein amples Geradenbündel  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{B}$  (siehe Abschnitt 2.5), welches ein Modell zum Geradenbündel  $L = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K / \sim$  ist (vergleiche Abschnitt 2.3). Es existiert also ein

$m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ , für das  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  sehr ampel ist. Das heißt es existiert eine Abbildung  $\mathcal{B} \xrightarrow{\text{abg.}} \mathbb{P}_{\mathbb{C}_K}^n$  so, dass  $\mathcal{L}^{\otimes m} = \mathcal{O}(1)|_{\mathcal{B}}$ . Dabei ist  $\mathcal{O}(1)$  ein Geradenbündel auf  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_K}^n$ , dessen globale Schnitte als Divisoren Hyperebenen haben. Genauer gilt für  $m \gg 0$  und jeden globalen Schnitt  $s$  von  $\mathcal{L}^{\otimes m}$ , dass  $\text{div}(s) = a_0x_0 + \dots + a_nx_n|_{\mathcal{B}}$  mit  $a_0, \dots, a_n \in \{a \in \mathbb{C}_K \mid v(a) \geq 0\}$ . Dann folgt mit dem Satz von Bertini (siehe [Hat77, II.8.18]) für eine generische Hyperebene  $H := a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ , dass  $X := H \cap \mathcal{B}$  eine glatte zusammenhängende Kurve mit projektivem, strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$  ist. Dabei ist zu beachten, dass wir den Satz von Bertini sowohl für die generische als auch für die spezielle Faser benutzen. Für Einzelheiten verweisen wir auf [Gub10, Example 7.4].

## 2.7. Das Skelett und die tropische Varietät

Das Ziel dieses Abschnittes ist, für eine Kurve  $X \subseteq E \times E$  mit projektivem, strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$  die tropische Varietät  $\text{Trop}(X)$  einzuführen. Dazu führen wir zunächst allgemein die Strata und das Skelett von  $E \times E$  und einer Kurve  $X$  ein. Für die allgemeine Theorie der Skelette sei der Leser auf [Ber04, §5] verwiesen. Danach definieren wir die tropische Varietät der Kurve  $X$  und geben ein Beispiel an. Abschließen werden wir den Abschnitt mit einer Bemerkung über den Zusammenhang zwischen der tropischen Varietät und dem Skelett.

**Definition 2.7.1.** Gegeben sei das Quadrat  $E \times E$  einer Tate-Kurve  $E$  mit strikt semistabilem Modell  $\mathcal{B}$  (vergleiche Abschnitt 2.4). Dann sind die irreduziblen Komponenten  $(Y_i)_{i \in I}$  der speziellen Faser  $\mathcal{B}_v$  des Modells  $\mathcal{B}$  glatt und für  $p \geq 1$  sei  $Y^{(p)} := \cup_{J \subset I, |J|=p} \cap_{j \in J} Y_j$ . Weiter ist  $Y^{(p)} \setminus Y^{(p+1)}$  glatt und die irreduziblen Komponenten nennen wir die Strata der speziellen Faser  $\mathcal{B}_v$ . Die Strata bilden eine Partition der speziellen Faser  $\mathcal{B}_v$ .

**Definition 2.7.2.** Das Skelett  $S(\mathcal{B})$  des strikt semistabilen Modells  $\mathcal{B}$  ist ein  $\Delta$ -Komplex, der gegeben ist durch die Vereinigung von kanonischen Simplexen  $\Delta_S$ . Dabei sind die kanonischen Simplexe  $\Delta_S$  durch die folgenden zwei Regeln bijektiv zu den Strata  $S$  der speziellen Faser  $\mathcal{B}_v$ .

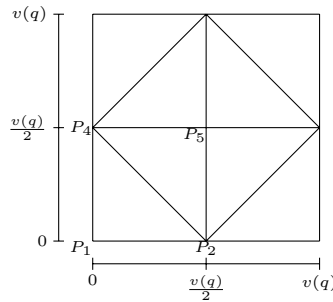
- (1) Es gilt  $\bar{S} \subset \bar{T}$  genau dann wenn  $\Delta_T$  eine abgeschlossene Seite von  $\Delta_S$  ist. Genauer ist jede abgeschlossene Seite von  $\Delta_S$  von dieser Form.
- (2)  $\Delta_R \cap \Delta_S$  ist die Vereinigung aller  $\Delta_T$  mit  $\bar{R} \cup \bar{S} \subset \bar{T}$ .

## 2. Grundlagen

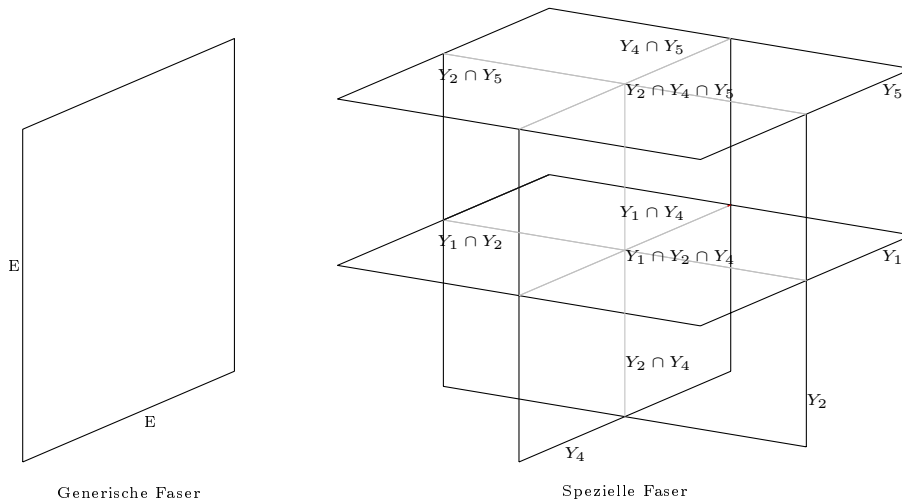
**Bemerkung 2.7.3.** Die vorigen zwei Definitionen sind analog für eine Kurve  $X \subseteq E \times E$  mit projektivem, strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$ , wie wir sie in Abschnitt 2.6 konstruiert haben.

**Definition 2.7.4.** Gegeben sei die Abbildung  $\text{val} : (\mathbb{C}_K^\times)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\underline{x} \mapsto (v(x_1), v(x_2))$ , das Gitter  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}} \subseteq (\mathbb{C}_K^\times)^2$  und sein Bild  $\Lambda := v(q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q)$ . Dies induziert eine stetige Abbildung  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}^2/\Lambda$ , die wir wieder mit  $\text{val}$  bezeichnen (vgl. Abschnitt 2.4). Weiter sei  $X \subseteq E \times E$  eine Kurve mit projektivem, strikt semistabilem Modell (siehe Abschnitt 2.6). Dann ist die tropische Varietät zu  $X$  gegeben durch  $\text{Trop}(X) = \overline{\text{val}(X)}$ .

**Beispiel 2.7.5.** Wir wählen das folgende strikt semistabile Modell  $\mathcal{B}$



von  $E \times E$ , das wir in Abschnitt 3.3.1 mit  $V1$  bezeichnen werden und deshalb die dort verwendeten Bezeichnungen der Eckpunkte hier schon benutzen. Nun entsprechen die vier Eckpunkte  $P_1, P_2, P_4, P_5$  aus dem Modell genau vier irreduziblen Komponenten  $Y_1, Y_2, Y_4, Y_5$  der speziellen Faser (siehe Proposition 2.4.7). Wir erhalten damit anschaulich



wobei die spezielle Faser nur lokal zu verstehen ist. Das heißt wir haben hier die Indexmenge  $I = \{1, 2, 4, 5\}$  und es ergeben sich die folgenden Strata der speziellen Faser  $\mathcal{B}_v$ :



## 2. Grundlagen

wobei die Multiplizitäten im Bild nicht angegeben sind. Im Gegensatz zum Skelett  $S(\mathcal{B})$  besteht das Skelett  $S(\mathcal{X})$  nur aus den Punkten und den Kanten. Die Dreiecke gehen verloren, da wir einen generischen Schnitt für die Konstruktion von  $X$  verwendet haben. Daraus erhalten wir nun die tropische Varietät

$$\text{Trop}(X) = \begin{array}{c} \square \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array}$$

indem wir die Multiplizitäten weglassen und die Anzahl der Kanten als Periode interpretieren. Die tropische Varietät ist also das 1-Skelett des Modells

$$\mathcal{B} = \begin{array}{c} \square \\ \diagup \quad \diagdown \\ \square \end{array}$$

## 2.8. Das kanonische Maß auf der Kurve

In diesem Abschnitt wollen wir das kanonische Maß einer Kurve  $X \subset E \times E$  mit projektivem, strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$  einführen und genauer darauf eingehen, wie es in unserer Situation zu berechnen ist. Dazu führen wir zuerst die von Chambert-Loir (siehe [Cham06]) eingeführten Maße ein. Wir folgen dabei dem Zugang in [Gub07a] und arbeiten deshalb über  $\mathbb{C}_K$  mit Modellen über dem Bewertungsring  $\mathbb{C}_K^\circ$ .

**Definition 2.8.1** ([Gub98, Abschnitt 7]). Gegeben sei ein Modell  $\mathcal{L}$  des Geradenbündels  $L$  über  $Z$ , das heißt  $\mathcal{L}$  ist ein Geradenbündel auf dem projektiven Modell  $\mathcal{X}$  einer projektiven Varietät  $Z$  mit  $L = \mathcal{L}|_Z$ . Dann definieren wir die zugehörige *Modellmetrik*  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  auf  $L$  wie folgt. Für jedes Element  $z_v$  in der speziellen Faser  $\mathcal{L}_v$  wählen wir eine Trivialisierung von  $\mathcal{L}$  in  $z_v$ , das heißt eine offene Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $z_v$  mit  $\mathcal{L}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ . Dann entspricht ein Schnitt  $s \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{L})$  einer regulären Funktion  $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$  und wir definieren durch

$$\|s(z)\|_{\mathcal{L}} := |\gamma(z)|_v$$

eine stetige Metrik auf  $L$ . Die Definition ist unabhängig von  $\mathcal{U}$  und der Wahl der Trivialisierung.

**Definition 2.8.2.** Wir nennen eine Metrik  $\|\cdot\|$  auf  $L$  *algebraisch*, wenn es ein  $n \geq 1$  gibt so, dass  $\|\cdot\|^{\otimes n}$  eine Modellmetrik von  $L^{\otimes n}$  ist.



**Bemerkung 2.8.3** ([Gub98, §7]). Algebraische Metriken sind stetig auf  $\mathcal{Z}^{\text{an}}$ .

**Definition 2.8.4.** Eine algebraische Metrik  $\|\cdot\|$  auf  $L$  heißt

- (a) *semipositiv*, wenn es ein  $n \geq 1$  und ein Modell  $\mathcal{L}$  von  $L^{\otimes n}$  gibt mit  $\|\cdot\|^{\otimes n} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  so, dass die Reduktion von  $\mathcal{L}$  auf die spezielle Faser  $\mathcal{L}_v$  nef (numerisch effektiv) ist. (Für mehr Details siehe [Gub08, 2.3].)
- (b) *semipositiv zulässig*, wenn sie ein gleichmäßiger Limes von semipositiven algebraischen Metriken ist. (Für mehr Details siehe [Gub10, Abschnitt 3].)

**Beispiel 2.8.5** ([BG06, §9.5]). Auf dem Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  (vergleiche Abschnitt 2.3) gibt es eine eindeutig bestimmte Metrik  $\|\cdot\|_{\text{kan}}$  so, dass

$$[m]^* \|\cdot\|_{\text{kan}} = \|\cdot\|_{\text{kan}}^{\otimes m^2} .$$

Wir nennen diese Metrik die *kanonische Metrik* von  $L$ . Eine Variante von Tates Grenzwertargument (siehe [BG06, Theorem 9.5.7]) liefert

$$\|\cdot\|_{\text{kan}} = \lim_{m \rightarrow \infty} ([m]^* \|\cdot\|)^{1/m^2} ,$$

wobei  $\|\cdot\|$  eine beliebige stetige Metrik auf  $L$  ist. Dies zeigt leicht, dass die kanonische Metrik eine semipositive zulässige Metrik ist.

**Theorem 2.8.6** ([Cham06]). Für eine  $d$ -dimensionale projektive Varietät  $Z$  und eine Familie von metrisierten Geradenbündeln  $\overline{L}_1 := (L_1, \|\cdot\|_1), \dots, \overline{L}_d := (L_d, \|\cdot\|_d)$  auf  $Z$ , wobei  $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_d$  semipositive zulässige Metriken sind, existiert ein eindeutiges positives reguläres Borelmaß  $c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d)$  auf  $Z^{\text{an}}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (a)  $c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d)$  ist multilinear und symmetrisch in  $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d$ .
- (b) Für einen Morphismus  $\varphi : Y \rightarrow Z$  von  $d$ -dimensionalen projektiven Varietäten gilt

$$\varphi_*(c_1(\varphi^* \overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\varphi^* \overline{L}_d)) = \deg(\varphi) c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d) .$$

- (c)  $c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d)$  hat das Totalmaß  $\deg_{L_1, \dots, L_d}(Z)$ .
- (d) Wenn  $\mathcal{Z}$  ein projektives Modell von  $Z$  mit reduzierter spezieller Faser ist und die Metriken von  $\overline{L}_j$  induziert werden durch ein Modell  $\mathcal{L}_j$  von  $L$  auf  $\mathcal{Z}$  für jedes  $j = 1, \dots, d$  (siehe Definition 2.8.1), dann gilt

$$c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d) = \sum_Y \deg_{(\mathcal{L}_1)_v, \dots, (\mathcal{L}_d)_v}(Y) \delta_{\zeta_Y} ,$$

## 2. Grundlagen

wobei  $Y$  über alle irreduziblen Komponenten von  $\mathcal{Z}_v$  läuft und  $\delta_{\zeta_Y}$  das Diracmaß im eindeutigen Punkt  $\zeta_Y \in Z^{\text{an}}$  ist, der in den generischen Punkt von  $Y$  reduziert. (Siehe dazu [Ber90, Proposition 2.4.4].)

- (e) Wenn wir die Menge der positiven regulären Borelmaße auf  $X^{\text{an}}$  mit der schwachen Topologie versehen und die Geradenbündel  $L_1, \dots, L_d$  auf  $X$  fest wählen, dann ist  $c_1(\overline{L}_1) \wedge \dots \wedge c_1(\overline{L}_d)$  bezüglich gleichmäßiger Konvergenz des Vektors  $(\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_d)$  von semipositiven zulässigen Metriken auf  $L_1, \dots, L_d$  stetig.

*Beweis:* Ein Beweis für die Existenz ist in unserer Notation in [Gub07a, §3] und für die Eindeutigkeit in [Gub10, §3] zu finden.  $\square$

**Definition 2.8.7.** In dem Fall, dass in Theorem 2.8.6  $\overline{L}_1 = \dots = \overline{L}_d = (L, \|\cdot\|)$  gilt, nennen wir  $c_1(L, \|\cdot\|)^{\wedge d}$  das *Chambert-Loir Maß* (bezügliche  $L$ ). Es ist analog zum  $d$ -fachen Wedge-Produkt einer ersten Chernform auf einer komplexen Mannigfaltigkeit.

**2.8.8.** Jetzt gehen wir wieder zurück zu unserer Ausgangssituation mit einer Kurve  $X \subseteq E \times E$  und dem Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  (siehe Abschnitt 2.6).

**Definition 2.8.9** ([Gub10, Theorem 6.7]). (a) Wir nennen  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2}$  das *kanonische Maß* auf  $E \times E$ . Es ist gleich dem Lebesguemaß mit der Normierung, dass  $\text{vol}(\Lambda) = \text{vol}(\mathbb{Z}(v(q), 0) \times \mathbb{Z}(0, v(q))) = \text{deg}_L(E \times E) = \text{deg}_L(E) \text{deg}_L(E) = 1 \cdot 1 = 1$  gilt.

- (b) Das kanonische Maß  $\mu$  auf einer Kurve  $X \subset E \times E$  ist definiert durch

$$\mu := c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}}|_X)^{\wedge \dim(X)} = c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 1} = c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \quad (2.6)$$

**Proposition 2.8.10** ([Gub10, Proposition 3.8(e)]). Mit den Voraussetzungen aus Definition 2.8.9 gilt

$$\text{deg}_L(X) = \int 1d\mu. \quad (2.7)$$

*Beweis:* Folgt direkt aus Theorem 2.8.6(d).  $\square$

**2.8.11.** Für beliebige Kurven  $X \subset E \times E$  ist die explizite Bestimmung der kanonischen Maße  $\mu(X)$  sehr schwierig. Aus diesem Grund haben wir in Abschnitt 2.6 mit Hilfe des Satzes von Bertini (siehe [Hat77, Chapter II, Theorem 8.18]) eine generische Kurve  $X \subset E \times E$  mit projektivem, strikt semistabilem Modell konstruiert. Für diesen Fall können wir die Ergebnisse aus [Gub10, Example 7.4] benutzen. Da das in der Konstruktion in Abschnitt

2.4 verwendete Modell  $\mathcal{B}$  multiplikative Reduktion hat, gilt in der Notation dieses Papers  $B_1 = 0$  und wir haben den Fall  $B_2 = E \times E$  zusammen mit dem strikt semistabilen Modell  $\mathcal{B}$ . Damit gilt nun

$$c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}}) = \sum_{\Delta \in S(\mathcal{X}), \dim(\Delta)=1} \lambda_\Delta \delta_\Delta, \quad (2.8)$$

wobei  $\delta_\Delta$  das euklidische Maß auf der Kante  $\Delta$  ist und wir  $\lambda_\Delta > 0$  als *kanonische Gewichte* bezeichnen. Die Summe läuft also über alle 12 Kanten aus dem Skelett  $S(\mathcal{X})$ , die wir aufgrund des Abschnitts 2.7 mit den Kanten aus unserem kombinatorischen Modell identifizieren können. Für eine konkrete Bestimmung des kanonischen Maßes werden wir mit Hilfe von [Gub10, Example 7.4] in (2.9) zeigen, dass  $\lambda_\Delta$  mit Hilfe von konvexer Geometrie ausgedrückt werden kann. Dazu wiederholen wir zunächst einige Definitionen aus [Gub07a, Appendix A], die wir benötigen werden, um eine Formel für die kanonischen Maße  $c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}})$  anzugeben.

**Definition 2.8.12.** Nach Konstruktion des Modells  $\mathcal{L}$  für das Geradenbündel  $L$  gibt es eine strikt konvexe stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass die 2-dimensionalen Simplexe des Skelettes  $S(\mathcal{X})$  die maximalen Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$  sind, für die  $f$  affin ist (siehe Abschnitt 2.5). Das heißt es existieren  $\underline{m}_\Delta \in \mathbb{Z}^2$  und  $c_\Delta \in \mathbb{Z}(v(q), 0)$  so, dass  $f(u) = \underline{m}_\Delta \cdot u + c_\Delta$  für  $u \in \Delta$ .

- (a) Für  $\sigma \in S(\mathcal{X})$  definieren wir die Mengen  $\text{star}(\sigma) := \{\Delta \in S(\mathcal{X}) \mid \sigma \subset \Delta\}$  und  $\text{star}_2(\sigma) := \{\Delta \in S(\mathcal{X}) \mid \sigma \subset \Delta, \dim(\Delta) = 2\}$ .
- (b) Für  $\sigma \in S(\mathcal{X})$  ist die konvexe Hülle von  $\{\underline{m}_\Delta \mid \Delta \in \text{star}(\sigma)\}$  ein Polytop, das wir mit  $\sigma^f$  bezeichnen und das *duale Polytop zu  $\sigma$  bezüglich  $f$*  nennen.

**Lemma 2.8.13.** Für eine Ecke  $u_0$  von  $\sigma \in S(\mathcal{X})$  gilt

$$\{u_0\}^f = \{w \in \mathbb{R}^n \mid u \in \Omega \in \text{Star}_n(u_0) \Rightarrow w(u - u_0) \leq m_\Omega(u - u_0)\} .$$

Damit gilt weiter

$$\sigma^f = \{u_0\}^f \cap (m_\Delta + \sigma^\perp)$$

und  $\dim(\sigma) + \dim(\sigma^f) = n$ . Dabei ist  $\Delta \in \text{star}_n(\sigma)$  beliebig und die Aussage unabhängig von der Wahl von  $u_0$ . (Für Details siehe [Oda88, A.3, Corollary A.19, Lemma 2.12])

**Bemerkung 2.8.14.** Die äquivalente Darstellung des dualen Polytopes  $\sigma^f$  erleichtert die späteren Rechnungen in Kapitel 3. Insbesondere wird das Lemma für die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den kanonischen Maßen und den tropischen Gewichten in Abschnitt 3.6 benötigt.

## 2. Grundlagen

**2.8.15.** Damit sind alle Vorarbeiten abgeschlossen. Jetzt gilt nach [Gub10, Example 7.4], wobei wir das dort benutzte Geradenbündel durch  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  ersetzen müssen (vgl. Abschnitt 2.6), die folgende Formel für die kanonischen Maße  $c_1(L|_X, \|\cdot\|_{\text{kan}})$  auf  $X$  bezüglich  $\mathcal{L}$  mit

$$\lambda_\Delta = m \cdot \frac{d!t! \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Delta^f) \operatorname{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{(d-r)!(t+r-n)! \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Z}^n \cap \Delta^\perp), \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Lambda_\Delta)} \quad (2.9)$$

wobei  $\Delta \in S(\mathcal{X})$  mit  $\dim(\Delta) = 1$ . Insgesamt ergibt sich die folgende Zuordnung:

Größe	Wert bei uns	Erklärung
$n$	2	$\dim(E \times E)$
$m$		Potenz von $\mathcal{L}$ so, daß $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sehr ampel ist (siehe Proposition 2.5.5).
$d$	1	Dimension von $X \subset E \times E$
$t$	1	Anzahl der zur Konstruktion von $X$ benutzten Hyperebenen (siehe Abschnitt 2.6)
$\Delta$		Simplex aus $S(\mathcal{X})$ , mit $\dim(\Delta) = 1$
$r$	1	Dimension des Simplex $\Delta$
$\Delta^\perp$		orthogonales Komplement von $\Delta$ in $\mathbb{R}^2$
$\Delta^f$		duales Polytop zu $\Delta$ bezüglich $f$ (siehe Definition 2.8.12)
$\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\cdot)$		euklidisches Volumen
$\mathbb{L}_\Delta$		Ist der lineare Raum des von $\Delta$ erzeugten affinen Raumes $\mathbb{A}_\Delta$
$\Lambda_\Delta$	$\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{L}_\Delta$	Ist ein Gitter
$(\Lambda_\Delta)^L$	$\{b(\cdot, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda_\Delta\} \subseteq (\mathbb{L}_\Delta)^*$	Ist ein vollständiges Gitter, das definiert wird durch die zu $L$ assoziierte Bilinearform $b$ (siehe Abschnitt 2.3).
$\operatorname{vol}_\Delta(\cdot)$		Volumen in $\mathbb{L}_\Delta$ mit der Normierung aus 2.8.17.

Wir erhalten damit im Fall der Kurve  $X$  dann

$$\lambda_\Delta = m \cdot \frac{\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) \operatorname{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)}. \quad (2.10)$$

**Bemerkung 2.8.16.** In unserer Situation läßt sich die in [Gub10, Example 7.4] gemachte Voraussetzung  $0 \leq t \leq \min(\dim(B_1), n)$  wegen  $\dim(B_1) = 0$  (siehe Abschnitt 2.8.11) und

$t = 1$  nicht erfüllen. Jedoch ist die obige Formel (2.9) hier trotzdem gültig und wird analog bewiesen.

**2.8.17.** Wir legen nun das Volumen auf  $\mathbb{L}_\Delta$  fest, indem wir verlangen, dass  $\text{vol}_\Delta(\Delta) = l^r \cdot \text{vol}_{\mathbb{R}^r}(S)$  gilt. Dabei ist  $S$  ein  $r$ -dimensionaler Standardsimplex von  $\mathbb{R}^r$  und  $\Delta$  kongruent zu  $l \cdot S$ . Dadurch ist auch das Volumen auf dem Dualraum  $\mathbb{L}_\Delta^*$  von  $\mathbb{L}_\Delta$  kanonisch festgelegt und wir bezeichnen es wieder mit  $\text{vol}_\Delta$ .

## 2.9. Grad der konstruierten Kurven

In diesem Abschnitt wollen wir den Grad  $\text{deg}_L(X)$  für unsere in Abschnitt 3.1 bis Abschnitt 3.5 behandelten ein- und zweidimensionalen Kurven berechnen. Diesen benötigen wir um unsere späteren Ergebnisse für die kanonischen Maße (siehe 2.8) zu überprüfen (vgl. Proposition (2.8.10)). Zunächst berechnen wir den Grad im 1-dimensionalen Fall. Da das Geradenbündel entscheidend in die Berechnung eingeht und wir im 2-dimensionalen zwei verschiedene Geradenbündel betrachten, ist es hier nötig eine Fallunterscheidung vorzunehmen.

**2.9.1.** Im 1-dimensionalen Fall haben wir das Geradenbündel  $O(P)$  zusammen mit der Standardbilinearform  $b(u, u') = u \cdot u'$  (vgl. Abschnitt 2.2). Wir wählen jetzt  $X = \text{div}(s) = P$  für einen globalen Schnitt  $s$  von  $O(P)$ . Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir direkt

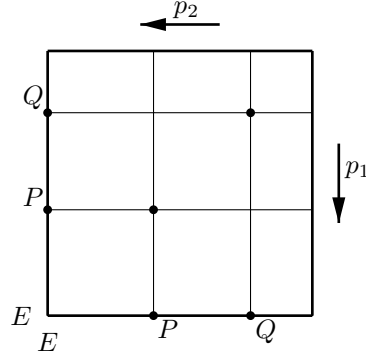
$$\text{deg}_L(X) = 1 . \tag{2.11}$$

**2.9.2.** Beim 2-dimensionalen Fall betrachten wir in den meisten Beispielen (siehe Abschnitte 3.2 bis 3.4) das Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  zusammen mit der Standardbilinearform  $b((u_1, u_2), (u'_1, u'_2)) = u_1 \cdot u'_1 + u_2 \cdot u'_2$ . Zunächst berechnen wir  $\text{deg}_L(E \times E)$  und erhalten mit Hilfe des obigem eindimensionalen Falls

$$L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P)) = O(P \times E) \otimes O(E \times P) = O(P \times E + E \times P) .$$

Insgesamt haben wir somit die folgende Situation

## 2. Grundlagen



wobei  $Q \neq P$  ein algebraisch äquivalenter Punkt zu  $P$  in  $E^{\text{an}}$  ist. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
 \deg_L(E \times E) &= \text{cl}(P \times E + E \times P) \cdot \text{cl}(P \times E + E \times P) \\
 &= \text{cl}(P \times E) \cdot \text{cl}(P \times E) + \text{cl}(P \times E) \cdot \text{cl}(E \times P) + \\
 &\quad + \text{cl}(E \times P) \cdot \text{cl}(P \times E) + \text{cl}(E \times P) \cdot \text{cl}(E \times P) \\
 &= \text{cl}(P \times E) \cdot \text{cl}(P \times E) + 2 + \text{cl}(E \times P) \cdot \text{cl}(E \times P) \\
 &= \text{cl}(P \times E) \cdot \text{cl}(Q \times E) + 2 + \text{cl}(E \times P) \cdot \text{cl}(E \times Q) \\
 &= 0 + 2 + 0 = 2.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wie in Abschnitt 2.6 wählen wir jetzt eine Kurve  $X \subseteq E \times E$  als den Divisor zu einem generischen Schnitt des Geradenbündels  $\mathcal{L}^{\otimes m}$ . Damit ist  $X$  linear äquivalent zum Divisor  $mD$  für  $D = P \times E + E \times P$  und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \deg_L(X) &= \text{cl}(P \times E + E \times P) \cdot (m \cdot \text{cl}(P \times E + E \times P)) \\
 &= m \cdot \text{cl}(P \times E + E \times P) \cdot \text{cl}(P \times E + E \times P) \\
 &= m \cdot \deg_L(E \times E) \\
 &\stackrel{(2.12)}{=} 2m
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

**2.9.3.** Als weiteres Beispiel betrachten wir in Abschnitt 3.5 noch das Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P))^{\otimes 2} \otimes p_2^*(O(P))$  zusammen mit der Bilinearform  $b((u_1, u_2), (u'_1, u'_2)) := 2 \cdot b(u_1, u'_1) + b(u_2, u'_2) = 2u_1u'_1 + u_2u'_2$ . Wieder wählen wir eine Kurve  $X \subseteq E \times E$  als den Divisor zu einem generischen Schnitt des Geradenbündels  $\mathcal{L}^{\otimes m}$ . Damit ist  $X$  linear äquivalent zum Divisor  $mD$  für  $D = 2(P \times E) + E \times P$  und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \deg_L(X) &= \text{cl}(2(P \times E) + E \times P) \cdot (m \cdot \text{cl}(2(P \times E) + E \times P)) \\
 &= m \cdot \text{cl}(2(P \times E) + E \times P) \cdot \text{cl}(2(P \times E) + E \times P) \\
 &\stackrel{\text{analog zu Gleichung (2.12)}}{=} 4m
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

# 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

Für dieses Kapitel sei  $K$  eine endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}_p$ .

## 3.1. 1-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße

Um den Zugang zur 2-dimensionalen Situation zu erleichtern, wollen wir zwei 1-dimensionale Beispiele betrachten. Dieses ist hilfreich, da durch die Wahl von  $X = E$  keine Hyperebene bei der Konstruktion von  $X$  auftaucht. Damit wissen wir aus der Theorie (siehe [Gub10, Corollary 7.3]), dass das kanonische Maß ein Vielfaches des Haarmaßes auf  $\mathbb{R}/v(q)\mathbb{Z}$  ist. Wir werden dieses Resultat hier nun mit Hilfe der in Abschnitt 2.8 für die kanonischen Maße angegebenen Gleichung (2.9) prüfen. Dazu wiederholen wir zunächst noch einmal die wichtigsten Grundlagen aus Abschnitt 2.2.

**3.1.1.** Sei  $E = \mathbb{C}_K^\times / q^\mathbb{Z}$  eine Tate elliptische Kurve und  $P = \pi(-\tilde{q}) = \pi(-q^{1/2})$  ein 2-Torsionspunkt. Zur Vereinfachung setzen wir in diesem Kapitel  $v(q) = 1$ . Nun wählen wir das ample Geradenbündel  $L = O(P)$  und einen kanonischen globalen Schnitt  $s_P$  von  $L$  mit  $\text{div}(s_P) = P$ . Damit ist  $s := \pi^*(s_P)$  ein globaler Schnitt von  $\pi^*(L)$  und es ergibt sich das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K & \longrightarrow & L = O(P) \\
 \downarrow \text{triviales Geradenbündel} & \uparrow \zeta \mapsto (\zeta, \Theta(\zeta, q)) & \downarrow s_P \\
 \mathbb{C}_K^\times & \xrightarrow{\pi} & E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times / q^\mathbb{Z}
 \end{array}$$

wobei die  $\Theta$ -Funktion definiert ist durch

$$\Theta(\zeta, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^{n^2} \zeta^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \tilde{q}^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{q}^{2n-1} \zeta) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{q}^{2n-1} \zeta^{-1}) .$$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

Offensichtlich liegen alle Nullstellen der  $\Theta$ -Funktion in  $-\tilde{q}^{2\mathbb{Z}+1}$ . Weiter gilt für das Geradenbündel  $O(P) = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K / \sim$ , wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  bezüglich der  $\mathbb{Z}$ -Operation

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K) \rightarrow \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K \text{ mit } (k, (\zeta, v)) \mapsto (q^k \zeta, e_k(\zeta, q) \cdot v)$$

gebildet wird. Dabei benutzen wir den Kozyklus  $e_k(\zeta, q) = \tilde{q}^{-k^2} \zeta^{-k}$  und wir setzen

$$Z_\gamma(\zeta) := e_k(\zeta, q)^{-1} = \tilde{q}^{k^2} \zeta^k$$

mit  $\gamma = q^k$ . Dann gibt es eine kanonische Zerlegung  $Z_\gamma(\zeta) = d_\gamma \sigma_\gamma(\zeta)$ , wobei  $d_\gamma = \tilde{q}^{k^2}$  gilt und die Abbildung  $M = q^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^\vee$  mit  $\gamma \mapsto \sigma_\gamma$  ein Homomorphismus ist. Bei letzterem gilt  $\sigma_\gamma(\zeta) = \zeta^k$ . Damit erhalten wir die Bilinearform  $b(u, u') = u \cdot u'$ , das heißt das Standardskalarprodukt. Nun wählen wir eine strikt konvexe Funktion  $f$ , die ein amples Modell  $\mathcal{L}$  von  $L$  liefert mit  $f = -\log \|1\|_{\mathcal{L}}$ . Weiter muß

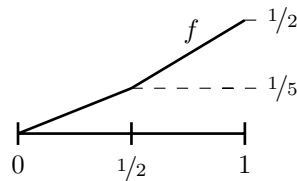
$$f(u + \lambda) = f(u) + z_\lambda(u)$$

für alle  $\lambda \in \Lambda = \text{val}(M)$  und alle  $u \in \mathbb{R}$  gelten. Dabei erhalten wir  $z_\lambda(u)$ , indem wir auf  $Z_\gamma(\zeta) = \tilde{q}^{k^2} \zeta^k$  die Bewertung anwenden, durch

$$z_\lambda(u) = \frac{\lambda^2}{2} + \lambda u = z_\lambda(0) + b(u, \lambda) .$$

Dabei haben wir benutzt, dass  $\lambda = v(\gamma) = kv(q) = k$ ,  $u = v(\zeta)$  gilt und wir in diesem Abschnitt  $v(q) = 1$  gesetzt haben. Insbesondere erhalten wir  $z_1(0) = 1/2 + 1 \cdot 0 = 1/2$ , also gilt  $f(1) = f(0) + 1/2$ . Als letztes legen wir noch eine Normierung fest, indem wir  $f(0) := 0$  setzen.

**3.1.2.** Für das erste Beispiel wählen wir die Funktion  $f$  wie folgt



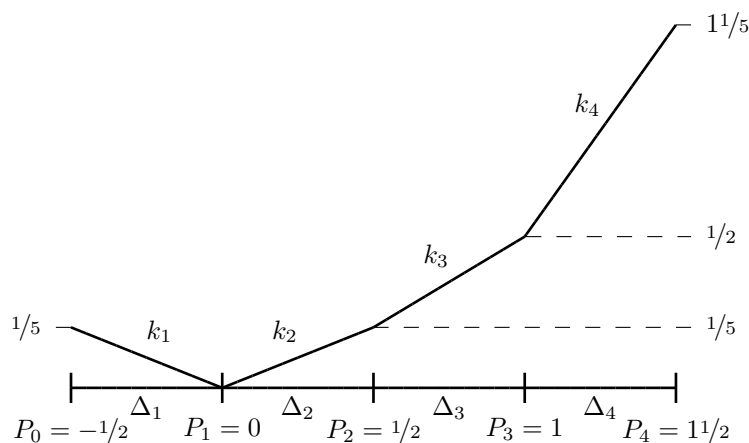
Aus 3.1.1 wissen wir, dass

$$f(u + \lambda) = f(u) + \frac{\lambda^2}{2} + \lambda u$$

für  $u \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in q^{\mathbb{Z}}$  gilt und damit erhalten wir das folgende Bild für  $f$ :



### 3.1. 1-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße



In diesem Bild legen wir zusätzlich noch die Bezeichnung für die Punkte  $P_i$ , die linearen Stücke  $k_i$  und die Simplexe  $\Delta_i$  fest.

**3.1.3.** Unser Ziel ist es nun, die kanonischen Maße  $\lambda_\Delta$  zu berechnen. Wie wir aus 2.8 Gleichung (2.9) wissen, gilt

$$\lambda_\Delta = m \cdot \frac{d!t! \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Delta^f) \operatorname{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{(d-r)!(t+r-n)! \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Z}^n \cap \Delta^\perp) \operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Lambda_\Delta)}$$

und in unserem Beispiel dann

Größe	Wert bei uns	Erklärung
$n$	1	$\dim(E)$
$m$	1	Potenz von $\mathcal{L}$ so, daß $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sehr ampel ist (siehe Proposition 2.5.5).
$d$	1	Dimension von $E$
$t$	0	Anzahl der zur Konstruktion der Kurve $E$ benutzten Hyperebenen
$\Delta$		Simplex aus $\mathcal{B}$ , mit $\dim(\Delta) = 1$
$r$	1	Dimension des Simplex $\Delta$
$\Delta^\perp$		orthogonales Komplement zu $\Delta$
$\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Z}^n \cap \Delta^\perp)$	1	Folgt hier direkt aus der Definition.
$\Delta^f$		duales Polytop zu $\Delta$ bezüglich $f$ (siehe Definition 2.8.12)
$\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Delta^f)$	s. 3.1.4 bzw. 3.1.8	euklidisches Volumen von $\Delta^f$
$\mathbb{L}_\Delta$		Ist der lineare Raum des von $\Delta$ erzeugten affinen Raumes $\mathbb{A}_\Delta$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

Größe	Wert bei uns	Erklärung
$\Lambda_\Delta$	$\mathbb{Z} \cap \mathbb{L}_\Delta = \mathbb{Z}$	Ist ein Gitter.
$\text{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Lambda_\Delta)$	1	euklidisches Volumen von $\Lambda_\Delta$
$(\Lambda_\Delta)^L$	$\{b(\cdot, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} \subseteq (\mathbb{L}_\Delta)^*$	Ist ein vollständiges Gitter, das definiert wird durch die zu $L$ assoziierte Bilinearform $b$ (siehe Abschnitt 3.1.1).
$\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)$	s. 3.1.5 bzw. 3.1.9	Volumen in $\mathbb{L}_\Delta$ mit der Normierung aus 2.8.17.

Damit erhalten wir

$$\lambda_\Delta = 1 \cdot \frac{1! \cdot 0! \cdot \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta^f) \cdot \text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{(1-1)! \cdot (0+1-1)! \cdot 1 \cdot 1} = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta^f) \text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L).$$

**3.1.4.** Zuerst wollen wir uns  $\text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta^f)$  zuwenden. Zunächst gilt nach Lemma 2.8.13 in unserer jetzigen Notation für  $i = 1, 2, 3$

$$\{P_i\}^f := \{w \in \mathbb{R} \mid u \in \Delta_j \in \{\Delta_i, \Delta_{i+1}\} \Rightarrow w \cdot (u - P_i) \leq s_j \cdot (u - P_i)\},$$

wobei  $s_j$  für  $(j = 1, 2, 3, 4)$  jeweils die Steigung der linearen Stücke  $k_j$  der Funktion  $f$  ist. In unserem Beispiel gilt

Kante $k_i$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
Steigung $s_i$	$-2/5$	$2/5$	$3/5$	$12/5$

Wir erhalten damit hier

$$\{P_1\}^f = \{0\}^f = [-2/5; 2/5], \quad \{P_2\}^f = \{1/2\}^f = [2/5; 3/5], \quad \{P_3\}^f = \{1\}^f = [3/5; 12/5].$$

Weiter ist das duale Polytop  $\Delta_k^f$  eines Simplexes  $\Delta_k \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$ , wieder nach Lemma 2.8.13, bestimmt durch

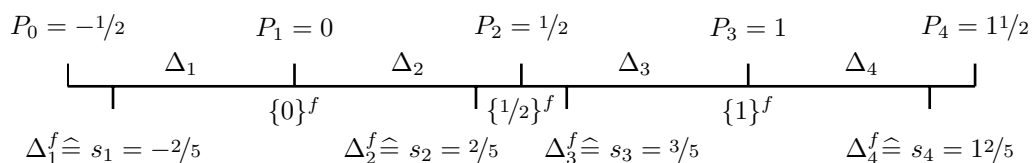
$$\Delta_k^f = \{P_i\}^f \cap \left( s_k + \underbrace{\Delta_k^\perp}_{\text{hier } 0} \right),$$

wobei  $i \in \{k-1, k\}$  frei wählbar ist. Damit erhalten wir

$$\Delta_1^f = \{-2/5\}, \quad \Delta_2^f = \{2/5\}, \quad \Delta_3^f = \{3/5\}, \quad \Delta_4^f = \{12/5\}.$$

Graphisch dargestellt haben wir

### 3.1. 1-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße



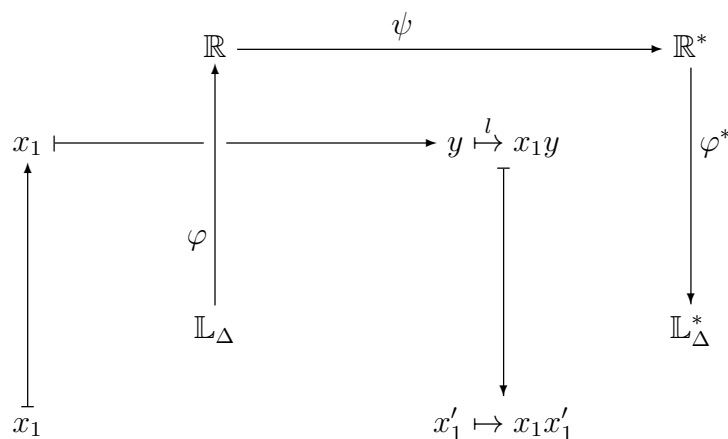
und es gilt insgesamt

$$\text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_1^f) = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_2^f) = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_3^f) = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_4^f) = 1 .$$

**3.1.5.** Zuletzt müssen wir noch  $\text{vol}_{\Delta}((\Lambda_{\Delta})^L)$  berechnen. Da die Rechnung aber für alle Simplexe  $\Delta_k \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$  gleich ist, führen wir sie hier nur für  $\Delta_2$  aus und bezeichnen diesen für die Rechnung mit  $\Delta$ . Wir erinnern uns (siehe Abschnitt 2.8), dass

$$(\Lambda_{\Delta})^L = \{b(\cdot, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{\Delta}\} \subseteq (\mathbb{L}_{\Delta})^* ,$$

wobei in diesem Beispiel  $\Lambda_{\Delta} = \mathbb{Z}$  gilt. Wir identifizieren  $(\Lambda_{\Delta})^L$  zunächst mit einer Teilmenge der reellen Zahlen und messen dann diese. Die Identifizierung geschieht wie folgt



Dabei erhalten wir die Abbildung  $\varphi^*$  durch  $\varphi^*(l(x'_1)) = l \circ \varphi(x'_1) = l(x'_1) = x_1 x'_1$ . Zu beachten ist bei der Identifizierung, dass wir  $\text{vol}_{\Delta}(\Delta) = 1/2$  verlangen (siehe 2.8.17). Dies geht entscheidend in die Abbildung  $\mathbb{L}_{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$  ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{\Delta})^L &= \{(x'_1, \lambda) \mapsto \lambda x'_1 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{L}_{\Delta}^* && \stackrel{\text{mit } \varphi^*}{\hat{=}} \{x'_1 \mapsto \lambda \cdot x'_1 \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^* \\
 &\stackrel{\text{mit } \psi}{\hat{=}} \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} && \stackrel{\text{mit } \varphi}{\hat{=}} \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{L}_{\Delta}
 \end{aligned}$$

und damit gilt für alle Simplexe  $\Delta \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$

$$\text{vol}_{\Delta}((\Lambda_{\Delta})^L) = 1 .$$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

**3.1.6.** Insgesamt ergeben sich für das kanonische Maß die Gewichte

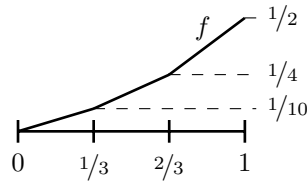
$$\lambda_{\Delta_1} = \lambda_{\Delta_2} = \lambda_{\Delta_3} = \lambda_{\Delta_4} = 1$$

und wir machen zum Abschluß dieses einfachen Einführungsbeispiels noch die Probe aus Proposition 2.8.10. Wir erhalten mit Gleichung (2.11) damit

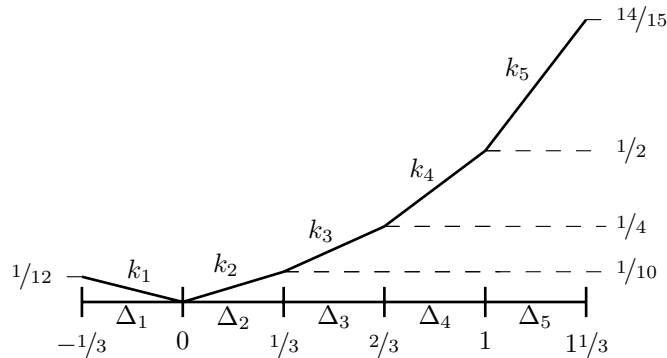
$$\int 1d\mu = \sum_{\Delta} \lambda_{\Delta} \int_{\Delta} dt = \lambda_{\Delta_2} \int_{\Delta_2} dt + \lambda_{\Delta_3} \int_{\Delta_3} dt = 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 1 \stackrel{L=O(P)}{=} \deg_L(X)$$

wie gewünscht.

**3.1.7.** Auch in unserem zweiten Beispiel setzen wir  $v(q) = 1$  und wählen hier die Funktion  $f$  wie folgt



Daraus erhalten wir, wieder mit  $f(u + \lambda) = f(u) + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 + \lambda \cdot u$  für  $u \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in q^{\mathbb{Z}}$ , das folgende Bild für  $f$



mit den analogen Bezeichnungen wie beim ersten Beispiel und die Steigungen:

Kante $k_i$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
Steigung $s_i$	$-1/12$	$1/10$	$9/20$	$3/4$	$13/10$

Weiter gilt auch hier wieder

$$\lambda_{\Delta} = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta^f) \text{vol}_{\Delta}((\Lambda_{\Delta})^L)$$

und wir müssen die beiden Volumina berechnen.

### 3.1. 1-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße

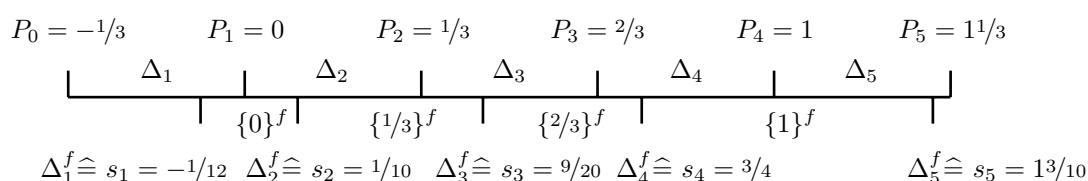
**3.1.8.** Zuerst wollen wir  $\text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta^f)$  betrachten und gehen analog zum ersten Beispiel vor. Dadurch erhalten wir zunächst

$$\{0\}^f = [-1/12; 1/10], \quad \{1/3\}^f = [1/10; 9/20], \quad \{2/3\}^f = [9/20; 3/4], \quad \{1\}^f = [3/4; 13/10]$$

und damit dann

$$\Delta_1^f = \{-1/12\}, \quad \Delta_2^f = \{1/10\}, \quad \Delta_3^f = \{9/20\}, \quad \Delta_4^f = \{3/4\}, \quad \Delta_5^f = \{13/10\}.$$

Graphisch dargestellt haben wir



Damit gilt dann wieder

$$\text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_1^f) = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_2^f) = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_3^f) = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_4^f) = \text{vol}_{\mathbb{R}}(\Delta_5^f) = 1.$$

**3.1.9.** Nun zu  $\text{vol}_{\Delta}((\Lambda_{\Delta})^L)$ . Auch hier ist die Rechnung für alle Simplexe  $\Delta_i$  gleich und, mit der Ausnahme, dass wir hier  $\text{vol}_{\Delta}(\Delta) = 1/3$  verlangen, analog zum vorigem Beispiel. Es gilt also wieder

$$\text{vol}_{\Delta}((\Lambda_{\Delta})^L) = 1$$

für alle Kanten  $\Delta \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5\}$ .

**3.1.10.** Insgesamt ergibt sich also auch hier

$$\lambda_{\Delta_1} = \lambda_{\Delta_2} = \lambda_{\Delta_3} = \lambda_{\Delta_4} = \lambda_{\Delta_5} = 1$$

und wir machen die analoge Probe (vgl. Proposition 2.8.10). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int 1d\mu &= \sum_{\Delta} \lambda_{\Delta} \int_{\Delta} dt = \lambda_{\Delta_2} \int_{\Delta_2} dt + \lambda_{\Delta_3} \int_{\Delta_3} dt + \lambda_{\Delta_4} \int_{\Delta_4} dt \\ &= 1 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 = 1 \stackrel{L=O(P)}{=} \text{deg}_L(X) \end{aligned}$$

wie erwartet.

## 3.2. 2-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße

Nach dem wir in Abschnitt 3.1 als Einstieg 1-dimensionale Beispiele erarbeitet haben, wollen wir uns jetzt der 2-dimensionalen Situation zuwenden. Dazu wiederholen wir zunächst den theoretischen Hintergrund, den wir in Kapitel 2, insbesondere in den Abschnitten 2.3 und 2.5 erarbeitet haben.

**3.2.1.** In unseren 1-dimensionalen Beispielen (siehe Abschnitt 3.1) starteten wir mit  $E = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}}$  und dem Geradenbündel  $O(P)$ , wobei  $P = \pi(-\tilde{q}) = \pi(-q^{1/2})$  ein 2-Torsionspunkt ist. Des Weiteren haben wir dort einen kanonischen globalen Schnitt  $s_{P,1}$  von  $O(P)$  gewählt, für den  $\text{div}(s_{P,1}) = P$  gilt. Mit der zugehörigen Standardbilinearform  $b(u, u') = u \cdot u'$  haben wir dann eine strikt konvexe Funktion  $f$  konstruiert, um ein amples Modell des Geradenbündels  $O(P)$  zu erhalten. Darauf aufbauend wollen wir nun das Produkt  $E \times E$  studieren. Wir haben also die folgende Situation

$$\begin{array}{ccc} & E \times E & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ E & & E \end{array}$$

Zur Vereinfachung wollen wir auch in diesem Abschnitt  $v(q) = 1$  setzen. Wir wählen das ample Geradenbündel  $L := p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  und den globalen Schnitt  $s_P := p_1^*(s_{P,1}) \otimes p_2^*(s_{P,1})$  mit  $\text{div}(s_P) = P \times E + E \times P$ . Damit ist  $s := \pi^*(s_P)$  ein globaler Schnitt von  $\pi^*(L)$  und wir erhalten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K & \longrightarrow & L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P)) \\ \downarrow \text{triviales Geradenbündel} & \uparrow (\zeta, \zeta') \mapsto (\zeta, \zeta', \Theta(\zeta)\Theta(\zeta')) & \downarrow s_P \\ \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times & \xrightarrow{\pi} & E^{\text{an}} \times E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

wobei die  $\Theta$ -Funktion definiert ist durch

$$\Theta(\zeta, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^{n^2} \zeta^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \tilde{q}^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{q}^{2n-1} \zeta) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \tilde{q}^{2n-1} \zeta^{-1}) .$$

Damit liegen alle Nullstellen in  $-\tilde{q}^{2\mathbb{Z}+1}$ . Weiter gilt  $L = \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K / \sim$ , wobei die

### 3.2. 2-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße

Äquivalenzrelation  $\sim$  bezüglich der  $\mathbb{Z}$ -Operation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times (\mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K) &\rightarrow \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K \\ (k, k', (\zeta, \zeta', v)) &\mapsto (q^k \zeta, q^{k'} \zeta', e_{k,k'}(\zeta, \zeta', q) \cdot v) \end{aligned}$$

gebildet wird. Dabei benutzen wir den Kozyklus  $e_{k,k'}(\zeta, \zeta', q) := \tilde{q}^{-k^2-k'^2} \zeta^{-k} \zeta'^{-k'}$  und wir setzen

$$Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta') := e_{k,k'}(\zeta, \zeta', q)^{-1} = \tilde{q}^{k^2+k'^2} \zeta^k \zeta'^{k'},$$

wobei  $\gamma = q^k$  und  $\gamma' = q^{k'}$ . Daraus erhalten wir dann die kanonische Zerlegung  $Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta') = d_{\gamma, \gamma'} \cdot \sigma_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta')$ , wobei  $d_{\gamma, \gamma'} = \tilde{q}^{k^2+k'^2}$  und  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times)^\vee$  mit  $(\gamma, \gamma') \mapsto \sigma_{\gamma, \gamma'}$  ein Homomorphismus ist. Bei letzterem gilt  $\sigma_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta') = \zeta^k \zeta'^{k'}$ . Damit erhalten wir (siehe Abschnitt 2.3) die Bilinearform  $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $(\underline{u}, \underline{u}') \mapsto u_1 \cdot u'_1 + u_2 \cdot u'_2$ , das heißt das Standardskalarprodukt. Nun wählen wir eine strikt konvexe Funktion  $f$ , die ein amples Modell  $\mathcal{L}$  von  $L$  liefert. Es gilt  $f = -\log \|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  und es muß für alle  $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda = \mathbb{Z}(v(q), 0) \times \mathbb{Z}(0, v(q))$  und alle  $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$

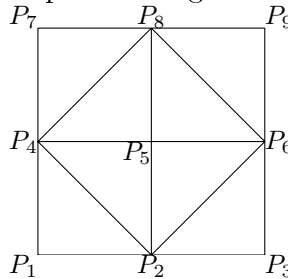
$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda' \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) + z_{(\lambda, \lambda')} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) \quad (3.1)$$

gelten. Dabei erhalten wir  $z_{\lambda, \lambda'}(\underline{u})$ , indem wir auf  $Z_{\gamma, \gamma'}(\zeta, \zeta') = \tilde{q}^{k^2+k'^2} \zeta^k \zeta'^{k'}$  die Bewertung anwenden, durch

$$z_{(\lambda, \lambda')} \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\frac{1}{2} (\lambda^2 + \lambda'^2)}_{=z_{(\lambda, \lambda')}(0)} + \underbrace{\lambda u_1 + \lambda' u_2}_{=b((u_1, u_2), (\lambda, \lambda'))}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass  $\lambda = v(\gamma) = kv(q) = 0$ ,  $\lambda' = v(\gamma') = k'v(q) = k'$ ,  $\underline{u} = v(\zeta)$ ,  $\underline{u}' = v(\zeta')$  gilt und wir in diesem Abschnitt  $v(q) = 1$  gesetzt haben. Insbesondere erhalten wir  $z_{(1,1)}(0) = 1/2 + 1 \cdot 0 = 1/2$ , also gilt  $f(1, 1) = f(0, 0) + 1/2$ . Als letztes legen wir noch eine Normierung fest, indem wir  $f(0, 0) := 0$  setzen.

**3.2.2.** Wir wollen nun für unser Beispiel die folgende Zerlegung



von  $E \times E$  betrachten. Diese Zerlegung bezeichnen wir mit  $V1$  (vergleiche Abschnitt 3.3.1). Für diese gegebene Zerlegung benutzen wir nun Abschnitt 2.6 um eine Kurve  $X \subseteq E \times E$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

mit einem projektiven, strikt semistabilen Modell  $\mathcal{X}$  zu konstruieren. Diese erhalten wir als generischen Hyperebenenschnitt von  $\mathcal{L}^{\otimes m}$ . Des Weiteren wollen wir für den Rest dieses Kapitels mit  $\Delta$  eine innere Kante in dieser Zerlegung bezeichnen. Unser Ziel ist es nun das kanonische Maß zu berechnen. Dazu bestimmen wir die in Gleichung (2.8) benutzten kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$  mit der Formel

$$\lambda_\Delta = m \cdot \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) \text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)} \quad (3.2)$$

aus Abschnitt 2.8, Gleichung (2.10). Dabei haben die Größen die folgende Bedeutung

Größe	Wert bei uns	Erklärung
$m$		Potenz von $\mathcal{L}$ so, daß $\mathcal{L}^{\otimes m}$ sehr ampel ist (siehe Proposition 2.5.5).
$\Delta$		Simplex aus $\mathcal{X}$ , mit $\dim(\Delta) = 1$
$\Delta^\perp$		orthogonales Komplement zu $\Delta$
$\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp)$	s. 3.2.3	euklidisches Volumen
$\Delta^f$		duales Polytop zu $\Delta$ bezüglich $f$ (siehe Definition 2.8.12)
$\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$	s. 3.2.6	euklidisches Volumen von $\Delta^f$
$\mathbb{L}_\Delta$		Ist der lineare Raum des von $\Delta$ erzeugten affinen Raumes $\mathbb{A}_\Delta$
$\Lambda_\Delta$	$\mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{L}_\Delta$	Ist ein Gitter.
$\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)$	s. 3.2.3	euklidisches Volumen von $\Lambda_\Delta$
$(\Lambda_\Delta)^L$	$\{b(\cdot, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda_\Delta\} \subseteq (\mathbb{L}_\Delta)^*$	Ist ein vollständiges Gitter das definiert wird durch die zu $L$ assoziierte Bilinearform $b$ (siehe Abschnitt 3.2.1).
$\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)$	s. 3.2.4	Volumen in $\mathbb{L}_\Delta$ mit der Normierung aus 2.8.17

Für die Berechnung der kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$  bestimmen wir nun zunächst die drei von  $f$  unabhängigen Volumina.

**3.2.3.** Als erstes bestimmen wir das euklidische Volumen von  $\Lambda_\Delta$ , das heißt den Wert  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)$ . Nach Definition von  $\Lambda_\Delta$  folgt für unser Beispiel  $\Lambda_\Delta = \mathbb{Z}^2 \cap \mathbb{L}_\Delta$  und wir erhalten  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta) = 1$  für alle horizontalen/vertikalen Kanten bzw.  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta) = \sqrt{2}$  für alle diagonalen Kanten. Das Volumen  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp)$  läßt sich genauso leicht berechnen. Wir erhalten  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) = 1$  für alle horizontalen/vertikalen Kanten und  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) = \sqrt{2}$  für



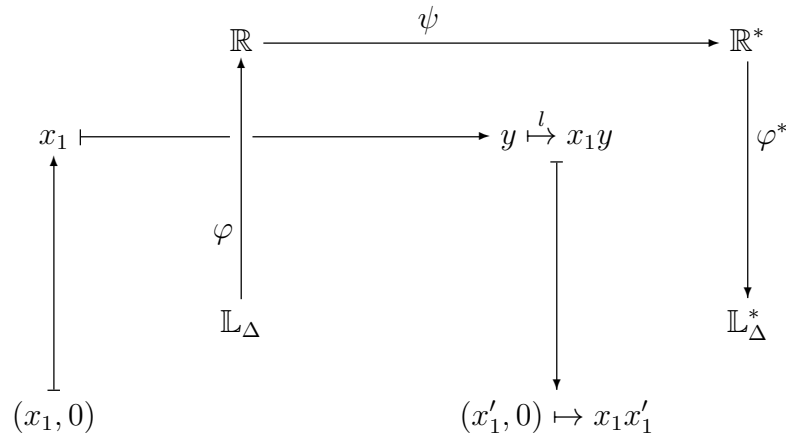
### 3.2. 2-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße

alle diagonalen Kanten. Damit vereinfacht sich die Gleichung (3.2) nun zu den folgenden zwei Fällen:

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta &= m \cdot \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) \text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) && \text{für } \Delta \text{ horizontal/vertikal} \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) \text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{2} && \text{für } \Delta \text{ diagonal} \end{aligned} \quad (3.3)$$

**3.2.4.** Als nächstes wenden wir uns  $\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)$  zu. Um nun das Volumen dieses Dualraumes messen zu können, ist es zweckmäßig diesen zunächst mit einer Menge aus den reellen Zahlen zu identifizieren und diese dann zu messen. Die Identifizierung ist abhängig von der Sorte der Kante  $\Delta$ . Genauer heißt dies, dass wir eine Unterscheidung zwischen horizontalen/vertikalen und diagonalen Kanten machen müssen.

1. Die horizontale/vertikale Kante: Wir wollen diesen Fall exemplarisch an der Kante  $\Delta := \overline{P_1 P_2}$  durchführen. Die Identifizierung geschieht hier wie folgt



Dabei erhalten wir die Abbildung  $\varphi^*$  durch  $\varphi^*(l(x'_1)) = l \circ \varphi((x'_1, 0)) = l(x'_1) = x_1 x'_1$ . Zusätzlich ist zu beachten, dass wir  $\text{vol}_\Delta(\Delta) = 1/2$  verlangen (siehe 2.8.17), was entscheidend in die Abbildung  $\mathbb{L}_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$  eingeht. Damit gilt

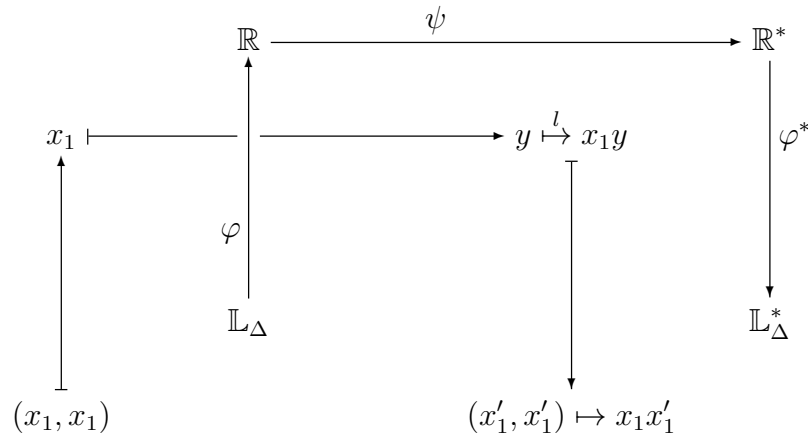
$$\begin{aligned} (\Lambda_\Delta)^L &= \{((x'_1, 0), (\lambda_1, \lambda_2)) \mapsto \lambda_1 x'_1 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta^* \\ &\stackrel{\text{mit } \varphi^*}{\cong} \{y \mapsto \lambda_1 \cdot y \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^* \\ &\stackrel{\text{mit } \psi}{\cong} \{\lambda_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\ &\stackrel{\text{mit } \varphi}{\cong} \{(\lambda_1, \lambda_1) \mid (\lambda_1, \lambda_1) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta \end{aligned}$$

und es folgt für alle horizontalen/vertikalen Kanten  $\Delta$

$$\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) = 1 .$$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

2. Die diagonale Kante: Auch diesen Fall führen wir exemplarisch an der Kante  $\Delta := \overline{P_4 P_8}$  durch. Hier ist die Identifizierung gegeben durch



Dabei ergibt sich die Abbildung  $\varphi^*$  durch  $\varphi^*(l(x'_1)) = l \circ \varphi((x'_1, x'_1)) = l(x'_1) = x_1 x'_1$  und wir verlangen wieder  $\text{vol}_\Delta(\Delta) = 1/2$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_\Delta)^L &= \{((x'_1, x'_1), (\lambda_1, \lambda_1)) \mapsto \lambda_1 x'_1 + \lambda_1 x'_1 = 2\lambda_1 x'_1 \mid (\lambda_1, \lambda_1) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta^* \\
 &\stackrel{\text{mit } \varphi^*}{\cong} \{y \mapsto 2\lambda_1 \cdot y \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^* \\
 &\stackrel{\text{mit } \psi}{\cong} \{2\lambda_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\
 &\stackrel{\text{mit } \varphi}{\cong} \{2(\lambda_1, \lambda_1) \mid (\lambda_1, \lambda_1) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta
 \end{aligned}$$

und wir erhalten für alle diagonalen Kanten  $\Delta$

$$\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) = 2.$$

**Fazit 3.2.5.** Mit diesen Vorarbeiten haben wir jetzt für die horizontalen/vertikalen Kanten  $\text{vol}((\Lambda_\Delta)^L) = 1 = 1 \cdot 1 = \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)$  und für die diagonalen Kanten  $\text{vol}((\Lambda_\Delta)^L) = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)$  erhalten. Insgesamt vereinfachen sich die beiden Gleichungen (3.3) damit zu

$$\lambda_\Delta = m \cdot \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) \tag{3.4}$$

für alle Kanten der Zerlegung.

**3.2.6.** Bleibt als letztes noch  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$  zu bestimmen. Für unser Beispiel wählen wir jetzt die Funktion  $f$  wie folgt

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	
Koordinaten	(0; 0)	(0, 5; 0)	(1; 0)	(0; 0, 5)	(0, 5; 0, 5)	→
$f(P_i)$	0	0, 19	0, 5	0, 19	0, 4	

### 3.2. 2-dimensionale Beispiele zur Berechnung kanonischer Maße

$$\longrightarrow \begin{array}{c|c|c|c} & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 \\ \hline & (1; 0, 5) & (0; 1) & (0, 5; 1) & (1; 1) \\ \hline & 0, 69 & 0, 5 & 0, 69 & 1 \end{array}$$

Mit dieser Wahl werden auch alle in Abschnitt 3.2.1 verlangten Eigenschaften der Funktion  $f$  erfüllt und es gilt die Formel (3.1) für die periodische Fortsetzung. Insbesondere ist durch diese Wahl der Funktionswerte, wie wir in Abschnitt 3.3 zeigen werden, die Funktion  $f$  auf der Zerlegung  $V1$  strikt konvex. Wir können nun jedem der 8 Simplexe  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) aus der Zerlegung  $V1$  eine Funktion  $f(\underline{u}) = \underline{m}_i \underline{u} + c_i$  zuordnen. Damit gilt dann  $\Delta^f = [\underline{m}_i, \underline{m}_j]$ , wobei  $i$  und  $j$  die Simplexe sind, die  $\Delta$  als Seitenkante enthalten. Damit gilt also  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) = |[\underline{m}_i, \underline{m}_j]|$ . Diese läßt sich jetzt mit Hilfe des Programms (siehe Anhang A) berechnen. Wir erhalten:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{Simplex } \Omega_i & P_1 P_2 P_4 & P_2 P_4 P_5 & P_2 P_5 P_6 & P_2 P_3 P_6 \\ \hline m_i & (0, 38; 0, 38) & (0, 42; 0, 42) & (0, 58; 0, 42) & (0, 62; 0, 38) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|c|c|c} & P_4 P_7 P_8 & P_4 P_5 P_8 & P_5 P_6 P_8 & P_6 P_8 P_9 \\ \hline & (0, 38; 0, 62) & (0, 42; 0, 58) & (0, 58; 0, 58) & (0, 62; 0, 62) \end{array}$$

und damit die folgenden Volumina

$$\begin{aligned} \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) &= \frac{4}{25} \quad \text{für } \Delta \in \{P_2 P_5, P_5 P_8, P_4 P_5, P_5 P_6\} \\ \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) &= \frac{\sqrt{2}}{25} \quad \text{für } \Delta \in \{P_2 P_4, P_2 P_6, P_4 P_8, P_6 P_8\} . \end{aligned}$$

**3.2.7.** Nun bleiben noch die Volumina  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$  für die Randkanten  $P_1 P_2, P_2 P_3, P_1 P_4, P_4 P_7$  der Zerlegung  $V1$  zu bestimmen. Dazu setzen wir zunächst die Funktion  $f$  mit der Formel (3.1) in die benachbarten Perioden fort. Mit Hilfe dieser Funktionswerte gehen wir dann analog zum vorigem Abschnitt vor. Wir bestimmen also zunächst alle noch benötigten Steigungsvektoren zu den an die Randkanten angrenzenden Simplexen und aus diesen dann die benötigten dualen Polytope. Alternativ können wir wieder das Programm (siehe Anhang A) benutzen, wobei wir jetzt auf die Struktur der nun für das Programm benötigten Zerlegung achten müssen. Auf beiden Wegen erhalten wir

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) = \frac{19}{25} \quad \text{für } \Delta \in \{P_1 P_2, P_2 P_3, P_1 P_4, P_4 P_7\} .$$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

**3.2.8.** Als letztes bleibt also noch das kanonisches Gewicht  $\lambda_\Delta$  zu bestimmen. Nun wissen wir aus Gleichung (3.4), dass  $\lambda_\Delta = m \cdot \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$  gilt. Damit folgt sofort

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{19}{25} && \text{für } \Delta \in \{P_1P_2, P_2P_3, P_1P_4, P_4P_7\} \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{4}{25} && \text{für } \Delta \in \{P_2P_5, P_5P_8, P_4P_5, P_5P_6\} \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{\sqrt{2}}{25} && \text{für } \Delta \in \{P_2P_4, P_2P_6, P_4P_8, P_6P_8\}, \end{aligned}$$

wie in Beispiel 1.1 angegeben.

**3.2.9.** Um nun dieses Beispiel abzuschließen, wollen wir mit diesen Ergebnissen noch die Probe aus Proposition 2.8.10 machen. Wir erhalten zusammen mit der Gleichung (2.13) aus Abschnitt 2.9 jetzt

$$\begin{aligned} \int 1d\mu &= \sum_{\Delta \in \diamond} \lambda_\Delta \int_\Delta dt + \sum_{\Delta \in \square} \lambda_\Delta \int_\Delta dt + \sum_{\Delta \in +} \lambda_\Delta \int_\Delta dt \\ &= \sum_{\Delta \in \diamond} m \cdot \frac{\sqrt{2}}{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{\Delta \in +} m \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} + \sum_{\Delta \in \square} m \cdot \frac{19}{25} \cdot \frac{1}{2} \\ &= m \cdot 4 \cdot \frac{1}{25} + m \cdot 4 \cdot \frac{2}{25} + m \cdot 4 \cdot \frac{19}{50} \\ &= 2m \\ &\stackrel{(2.13)}{=} \text{deg}_L(X) \end{aligned} \tag{3.5}$$

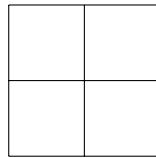
wie gewünscht.

## 3.3. Weitere Beispiele mit 9 Punkten

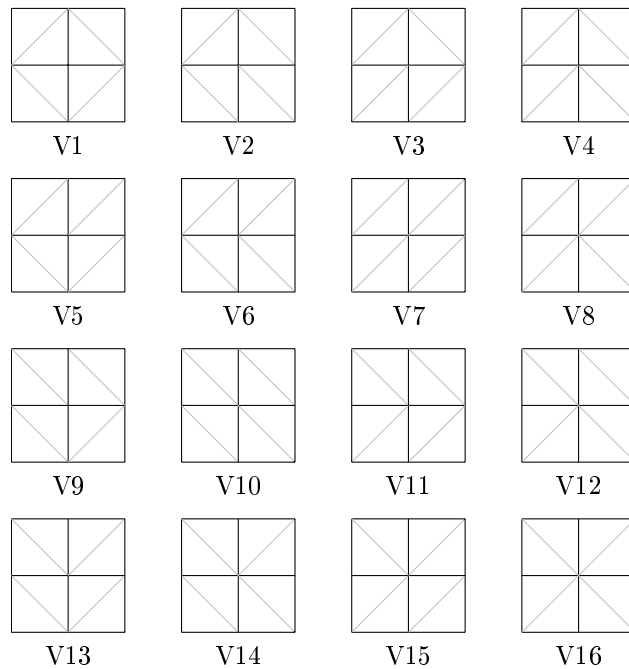
Nachdem wir in Abschnitt 3.2 ein ausführliches 2-dimensionales Beispiel gesehen haben, wollen wir in diesem Abschnitt die Zerlegungen mit 9 Punkten und 8 Standardsimplexen der Dimension 2 genauer untersuchen. Dazu überlegen wir uns zunächst alle möglichen Zerlegungen mit 9 Punkten und weisen nach, dass nur auf zwei dieser Zerlegungen die Konstruktion einer strikt konvexen Funktion  $f$  möglich ist. Anschließend gehen wir der Frage nach, welche Bedingungen die Funktion  $f$  konkret erfüllen muß, um auf einer der beiden möglichen Zerlegungen strikt konvex zu sein. Abschließend geben wir dann, ausgehend von den vorher hergeleiteten Bedingungen, für die zwei möglichen Zerlegungen jeweils ein symmetrisches und zwei unsymmetrische Beispiele an.

**Zerlegungen mit 9 Punkten:**

**3.3.1.** Aufgrund der Ausgangssituation (siehe Abschnitt 2.4) ist die folgende Grundzerlegung

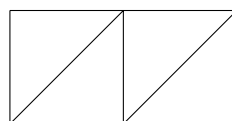


vorgegeben. Wir können somit nur die Zerlegung der Quadrate in Standardsimplexe wählen. Es gibt also die folgenden  $2^4 = 16$  Möglichkeiten



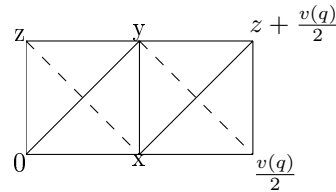
die wir mit  $V1$  bis  $V16$  bezeichnen.

**3.3.2.** Nun können wir zeigen, dass auf Zerlegungen, die mindestens zwei benachbarte Quadrate mit parallelen Diagonalen haben, keine wie in Proposition 2.5.1 verlangte Funktion existiert so, dass der Übergang über alle Kanten strikt konvex ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir aus Translations- und Symmetriegründen o.B.d.A. an, dass



### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

ein Teil der Zerlegung ist. Weiter sei nun  $f$  eine auf dieser Zerlegung definierte Funktion und wir normieren  $f$  so, dass der Funktionswert in der unteren linken Ecke 0 ist. Aufgrund der an  $f$  gestellten Periodizitätsbedingung (siehe Gleichung (2.5)) muß der Funktionswert der unteren rechten Ecke gleich  $\frac{v(q)}{2}$  sein und wir bezeichnen die anderen Funktionswerte wie folgt

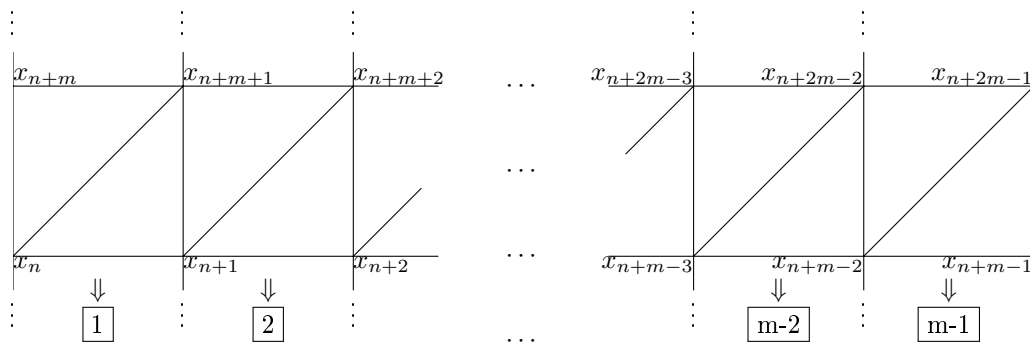


Damit der Übergang über eine Diagonale strikt konvex ist, muß der Funktionswert im Mittelpunkt der durchgezogenen Diagonalen jeweils unterhalb des Funktionswertes der gestrichelten Diagonalen liegen. Also gilt

$$\left. \begin{array}{l|l} \text{Linkes Quadrat} & \frac{x+z}{2} > \frac{y}{2} \quad \Leftrightarrow x+z > y \\ \text{rechtes Quadrat} & \frac{v(q)/2+y}{2} > \frac{z+x+v(q)/2}{2} \quad \Leftrightarrow y > x+z \end{array} \right\} \text{⚡}$$

Dies liefert uns einen Widerspruch. Somit existiert auf allen Zerlegungen, die zwei benachbarte Quadrate mit parallelen Diagonalen haben, das heißt auf den Zerlegungen V2 bis V15, keine wie in Proposition 2.5.1 verlangte strikt konvexe Funktion.

**3.3.3.** Allgemeiner läßt sich durch analoges Vorgehen sogar das Folgende zeigen. Alle Zerlegungen die eine Spalte oder Zeile enthalten, in der nur Diagonalen der gleichen Art vorkommen, ermöglichen keine wie in Proposition 2.5.1 verlangte strikt konvexe Funktion. O.B.d.A. haben wir jetzt also die folgende Situation



Weil jetzt aber der Übergang über jeder der diagonalen Kanten strikt konvex sein muß, ergeben sich hier jeweils die folgenden Ungleichungen für die entsprechenden Funktionswerte:



### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

die die Funktionswerte von  $f$  erfüllen müssen, damit  $f$  auf  $V1$  eine strikt konvexe Funktion ist. Für  $V16$  bezeichnen wir die Funktionswerte von  $f$  analog und erhalten als allgemeine Bedingung für die Funktionswerte einer auf  $V16$  strikt konvexen Funktion

$$x_1, x_2, x_3 > 0, \quad x_1 \neq x_3 \neq x_2, \quad x_3 < x_1 + x_2, \quad x_1 < v(q)/4, \quad x_2 < v(q)/4$$

#### Beispiele für die Zerlegung $V1$ :

**3.3.5.** Als erstes Beispiel wollen wir nochmals die Ergebnisse aus Kapitel 3.2 zusammenfassen. Dort haben wir die folgenden symmetrisch verteilten Werte für die Funktion  $f$  gewählt bzw. berechnet

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2, P_4$	$P_3, P_7$	$P_5$	$P_6, P_8$	$P_9$
Funktionswert $f(P_i)$	0	0, 19	0, 5	0, 4	0, 69	1

die auch die Ungleichungen aus Abschnitt 3.3.4 erfüllen. Mit Hilfe des Programms (siehe Anhang A) ergeben sich dann die kanonischen Maße

diagonale Kanten	$\lambda_\Delta = m \cdot \sqrt{2}/25$
äußere Kanten	$\lambda_\Delta = m \cdot 19/25$
innere horizontale/vertikale Kanten	$\lambda_\Delta = m \cdot 4/5$

**3.3.6.** Wir wollen nun auf der Zerlegung  $V1$  zwei unsymmetrische Beispiele konstruieren. Dazu setzen wir  $v(q) = 1$ , normieren  $f$  wieder durch  $f(P_1) := 0$  und wählen die Werte der Funktion  $f$  in  $P_2, P_4$  und  $P_5$ . Dabei sind die Bedingungen aus Abschnitt 3.3.4 einzuhalten, damit die Funktion  $f$  strikt konvex auf  $V1$  ist. Alle anderen Funktionswerte von  $f$  bestimmen wir dann über die Formel für die periodische Fortsetzung von  $f$  (siehe Gleichung (2.5)). Für unsere unsymmetrischen Beispiele wählen bzw. berechnen wir die folgenden Werte für die Funktion  $f$

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
$f(P_i)$ im 1.Beispiel	0	0, 01	0, 5	0, 2	0, 22	0, 7	0, 5	0, 51	1
$f(P_i)$ im 2.Beispiel	0	0, 2	0, 5	0, 1	0, 33	0, 6	0, 5	0, 7	1

und erhalten mit Hilfe des Programms (siehe Abschnitt A) jeweils die folgenden kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$



$\Delta$	$\overline{P_1P_2}$	$\overline{P_1P_4}$	$\overline{P_2P_3}$	$\overline{P_2P_4}$	$\overline{P_2P_5}$	$\overline{P_2P_6}$	$\overline{P_3P_6}$		
$m^{-1} \cdot \lambda_\Delta$ im 1.Beispiel	4/5	1/25	4/5	$\sqrt{2}/50$	23/25	$\sqrt{2}/50$	1/25	$\longrightarrow$	
$m^{-1} \cdot \lambda_\Delta$ im 2.Beispiel	2/5	4/5	2/5	$3\sqrt{2}/50$	2/25	$3\sqrt{2}/50$	4/5		
	$\overline{P_4P_5}$	$\overline{P_4P_7}$	$\overline{P_4P_8}$	$\overline{P_5P_6}$	$\overline{P_5P_8}$	$\overline{P_6P_8}$	$\overline{P_6P_9}$	$\overline{P_7P_8}$	$\overline{P_8P_9}$
$\longrightarrow$	4/25	1/25	$\sqrt{2}/50$	4/25	23/25	$\sqrt{2}/50$	1/25	4/5	4/5
	12/25	4/5	$3\sqrt{2}/50$	12/25	2/25	$3\sqrt{2}/50$	4/5	2/5	2/5

**3.3.7.** Für alle drei Beispiele gilt

$$\int 1d\mu = 2m \stackrel{(2.13)}{=} \deg_L(X)$$

**Beispiele für die Zerlegung V16:**

**3.3.8.** Durch das zu Abschnitt 3.3.5 analoge Vorgehen lassen sich auch leicht Beispiele für die Zerlegung V16 konstruieren. Wie schon in Abschnitt 3.2 setzen wir  $v(q) = 1$  und normieren  $f$  durch  $f(P_1) := 0$ . Für symmetrische Beispiele muß nun  $f(P_2) = f(P_4)$  gelten. Deshalb wählen wir hier nur die Werte der Funktion  $f$  in  $P_2$  und  $P_5$ . Für unsymmetrische Beispiele müssen wir noch  $f(P_4) \neq f(P_2)$  wählen. Anschließend bestimmen wir alle anderen Werte über die Formel für die periodische Fortsetzung von  $f$  (siehe Gleichung (2.5)). Dabei ist bei der Wahl der Funktionswerte darauf zu achten, dass die in Abschnitt 3.3.4 hergeleiteten Bedingungen eingehalten werden, damit die Funktion  $f$  strikt konvex auf der Zerlegung ist.

**3.3.9.** Wieder wählen wir für unser 1. Beispiel eine symmetrische und für das 2. und 3. Beispiel eine unsymmetrische Funktion  $f$  wie folgt

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
$f(P_i)$ im 1.Beispiel	0	0, 2	0, 5	0, 2	0, 39	0, 7	0, 5	0, 7	1
$f(P_i)$ im 2.Beispiel	0	0, 02	0, 5	0, 2	0, 21	0, 7	0, 5	0, 52	1
$f(P_i)$ im 3.Beispiel	0	0, 1	0, 5	0, 2	0, 25	0, 7	0, 5	0, 6	1

Durch Anwenden des Programms (siehe Anhang A) erhalten wir dann

$\Delta$	$\overline{P_1P_2}$	$\overline{P_1P_4}$	$\overline{P_1P_5}$	$\overline{P_2P_3}$	$\overline{P_2P_5}$	$\overline{P_3P_5}$	$\overline{P_3P_6}$	$\overline{P_4P_5}$	
$m^{-1} \cdot \lambda_\Delta$ im 1.Beispiel	19/25	19/25	$\sqrt{2}/50$	19/25	1/5	$\sqrt{2}/50$	19/25	1/5	$\longrightarrow$
$m^{-1} \cdot \lambda_\Delta$ im 2.Beispiel	19/25	1/25	$\sqrt{2}/50$	19/25	23/25	$\sqrt{2}/50$	1/25	1/5	
$m^{-1} \cdot \lambda_\Delta$ im 3.Beispiel	3/5	1/5	$\sqrt{2}/10$	3/5	3/5	$\sqrt{2}/10$	1/5	1/5	

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

$$\rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \overline{P_4P_7} & \overline{P_5P_6} & \overline{P_5P_7} & \overline{P_5P_8} & \overline{P_5P_9} & \overline{P_6P_9} & \overline{P_7P_8} & \overline{P_8P_9} \\ \hline 19/25 & 1/5 & \sqrt{2}/50 & 1/5 & \sqrt{2}/50 & 19/25 & 19/25 & 19/25 \\ \hline 1/25 & 1/5 & \sqrt{2}/50 & 23/25 & \sqrt{2}/50 & 1/25 & 19/25 & 19/25 \\ \hline 1/5 & 1/5 & \sqrt{2}/10 & 3/5 & \sqrt{2}/10 & 1/5 & 3/5 & 3/5 \end{array}$$

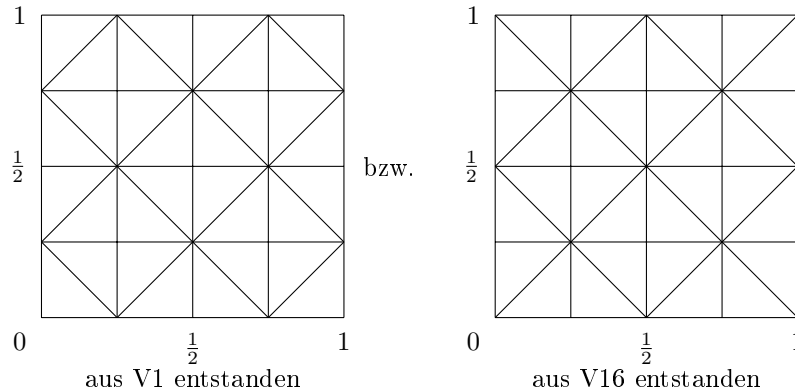
**3.3.10.** Auch in allen Beispielen zur Zerlegung V16 gilt wieder

$$\int 1d\mu = 2m \stackrel{(2.13)}{=} \deg_L(X)$$

## 3.4. Beispiele mit 25 Punkten

**Ein auf V1 bzw. V16 basierendes Beispiel:**

**3.4.1.** Die Beispiele dieses Abschnittes sind aus denen zu den Zerlegungen V1 bzw. V16 (siehe Abschnitt 3.3.5 bzw. 3.3.9) konstruiert. Das heißt auch hier gilt  $v(q) = 1$ . Zu Beginn der Konstruktion setzen wir zunächst die 9 Punkte der Zerlegungen V1 bzw. V16 gemäß der Periode auf 25 Punkte fort. Anschließend skalieren wir die so entstandene Zerlegung so um, dass  $0, 1/2, 1/2, 1$  wieder die Ecken sind. Wir erhalten damit



Gleiches führen wir für die Funktion  $f$  durch, die damit wieder die Periodizitätsbedingung (siehe Gleichung (2.5)) erfüllt. Bei dieser Wahl der Zerlegung und der Funktion erhalten wir dann mit Hilfe des Programms (siehe Anhang A) jeweils die folgenden kanonischen Gewichte:

	V1	V16
diagonale Kanten	$\lambda_\Delta = m \cdot \sqrt{2}/50$	$\lambda_\Delta = m \cdot \sqrt{2}/100$

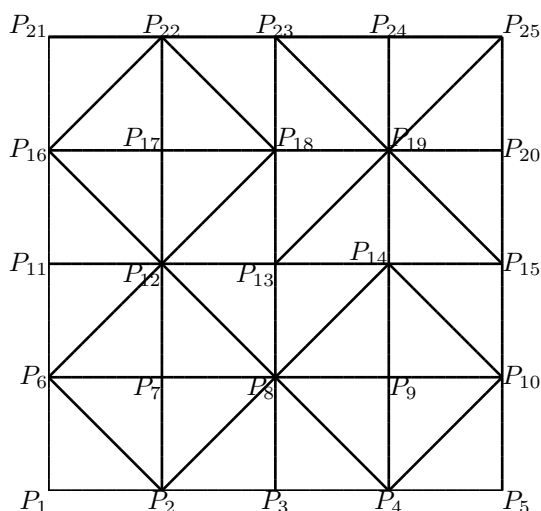
äußerer Rand, mittlere innere horizontale bzw. vertikale Kanten	$\lambda_{\Delta} = m \cdot 19/50$	$\lambda_{\Delta} = m \cdot 1/10$
restliche horizontale bzw. vertikale Kanten	$\lambda_{\Delta} = m \cdot 2/50$	$\lambda_{\Delta} = m \cdot 19/50$

wobei in beiden Fällen wieder

$$\int 1d\mu = 2m \stackrel{(2.13)}{=} \deg_L(X)$$

gilt.

**3.4.2.** Wir wollen nun ein etwas komplizierteres Beispiel konstruieren. Dazu starten wir mit unserem aus V1 entstandenen 25 Punkte Beispiel aus Abschnitt 3.4.1. Als Änderung ersetzen wir die V1 Zerlegung des oberen rechten 9 Punkte Blocks durch die Zerlegung V16 und erhalten damit



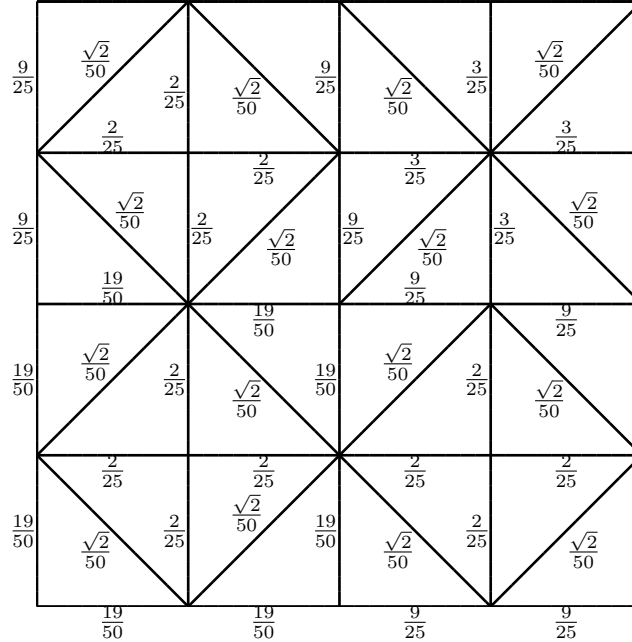
als neue Zerlegung. Mit dem Programm (siehe Anhang A) folgt, dass die Funktion aus Abschnitt 3.4.1 auf dieser Zerlegung nicht strikt konvex ist. Genauer sind die Übergänge über alle mit  $P_{19}$  verbundenen diagonalen Kanten nicht strikt konvex. Dies erreichen wir nun, indem wir  $f(P_{19}) := 0,59$  setzen. Wir wählen bzw. berechnen die Funktionswerte mit Gleichung (2.5) hier damit wie folgt

Punkt	$P_1$	$P_2 = P_6$	$P_3 = P_{11}$	$P_4 = P_{16}$		
Funktionswert von $f$	0	0,0475	0,125	0,2975	→	
	→					
	$P_5 = P_{21}$	$P_7$	$P_8 = P_{12}$	$P_9 = P_{17}$	$P_{10} = P_{22}$	$P_{13}$
	0,5	0,1	0,1725	0,35	0,5475	0,25
	→					

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

$$\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline P_{14} = P_{18} & P_{15} = P_{23} & P_{19} & P_{20} = P_{24} & P_{25} \\ \hline 0,4225 & 0,625 & 0,59 & 0,7975 & 1 \\ \hline \end{array}$$

aus denen wir, mit dem Programm, die folgenden kanonischen Gewichte bestimmen:



wobei alle Ergebnisse noch mit  $m$  zu multiplizieren sind. Zum Abschluß dieses Beispiels überprüfen wir unsere Ergebnisse wieder mit der Theorie (vergleiche Proposition 2.8.10). Dazu definieren wir die folgenden fünf Kantenmengen

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{\text{alle diagonalen Kanten}\} \\ K_2 &:= \{\text{alle Kanten auf den Strecken } \overline{P_1P_3}, \overline{P_{11}P_{13}}, \overline{P_1P_{11}} \text{ und } \overline{P_3P_{13}}\} \\ K_3 &:= \{\text{alle Kanten auf den Strecken } \overline{P_3P_5}, \overline{P_{11}P_{21}}, \overline{P_{13}P_{15}} \text{ und } \overline{P_{13}P_{23}}\} \\ K_4 &:= \{\text{alle Kanten auf den Strecken } \overline{P_2P_{22}}, \overline{P_4P_{14}}, \overline{P_6P_{10}} \text{ und } \overline{P_{16}P_{18}}\} \\ K_5 &:= \{\text{alle Kanten auf den Strecken } \overline{P_{14}P_{24}} \text{ und } \overline{P_{18}P_{20}}\} \end{aligned}$$

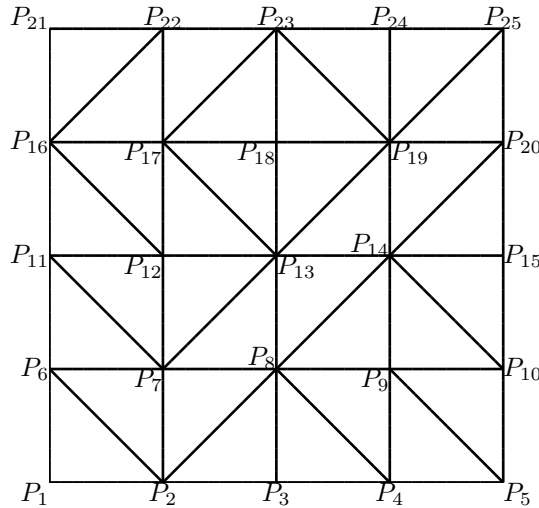
passend zu den fünf verschiedenen kanonischen Gewichten auf den Kanten. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int 1d\mu &= \sum_{\Delta \in K_1} \lambda_{\Delta} \int_{\Delta} dt + \sum_{\Delta \in K_2} \lambda_{\Delta} \int_{\Delta} dt + \sum_{\Delta \in K_3} \lambda_{\Delta} \int_{\Delta} dt + \\ &\quad + \sum_{\Delta \in K_4} \lambda_{\Delta} \int_{\Delta} dt + \sum_{\Delta \in K_5} \lambda_{\Delta} \int_{\Delta} dt \\ &= \sum_{\Delta \in K_1} m \cdot \frac{\sqrt{2}}{50} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \sum_{\Delta \in K_2} m \cdot \frac{19}{50} \cdot \frac{1}{4} + \sum_{\Delta \in K_3} m \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\Delta \in K_4} m \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{4} + \sum_{\Delta \in K_5} m \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{4} \\
 & = 2m \\
 & \stackrel{(2.13)}{=} \deg_L(X)
 \end{aligned}$$

wie gewünscht.

**3.4.3.** In allen bisherigen Beispielen dieses Abschnittes und des Abschnittes 3.3 haben wir uns zunächst eine Funktion  $f$  konstruiert, die auf dem Fundamentalebene strikt konvex ist. Bei der anschließenden Überprüfung der Übergänge in die nächste Periode sind dann keine Probleme aufgetreten. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Wir wählen die folgende Zerlegung



wobei die Wahl rein willkürlich erfolgt ist. Für die Konstruktion einer auf dieser Zerlegung strikt konvexen Funktion benutzen wir Mathematica 6.0. Dazu übersetzen wir jeden strikt konvexen Übergang über eine Kante in eine Ungleichung. Sei dazu  $f(P_i) := x_i$  und wir normieren  $f$  durch  $x_1 := 0$ . Weil sich nun die Punkte  $P_5, P_{10}, P_{15}, P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}$  und  $P_{25}$  aufgrund der Periodizität (siehe (2.5)) von  $f$  berechnen lassen, bleiben 15 frei wählbare Funktionswerte übrig. Durch eine leichte geometrische Überlegung folgt, dass wir, um auf dieser Zerlegung eine für uns passende strikt konvexe Funktion zu erhalten,  $x_2, x_3, x_4, x_6 > 0$  fordern müssen. Weiter stellen wir analog zum letzten Abschnitt für jeden strikt konvexen Übergang über eine Kante eine Ungleichung auf. Diese 40 Ungleichungen geben wir nun wie folgt in Mathematica 6.0 ein

```

FindInstance[{x7 > x2 + x6, x2 + x8 < x3 + x7, x3 + x9 > x4 + x8, x4 + x6 > x9, x6 + x12 >
x7 + x11, x7 + x13 < x8 + x12, x8 + x14 < x9 + x13, x9 + x11 > x6 + x14, x11 + x17 >
x12 + x16, x12 + x18 > x13 + x17, x13 + x19 < x14 + x18, x14 + x16 < x11 + x19, x16 + x2 <

```

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

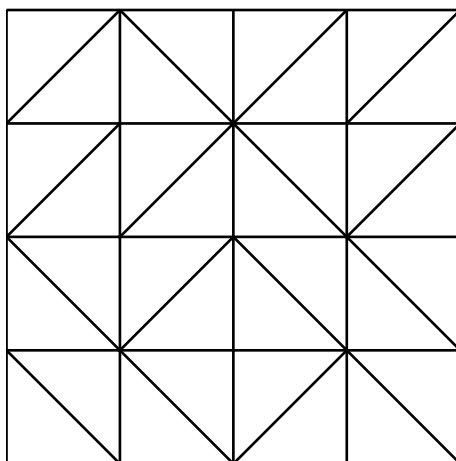
$x_{17}, x_{17} + x_3 < x_{18} + x_2, x_{18} + x_4 > x_{19} + x_3, x_{19} < x_{16} + x_4, x_2 + x_{11} > x_6 + x_7, x_7 + x_{16} >$   
 $x_{11} + x_{12}, x_2 + 0.5 + x_{12} > 2x_{17}, x_2 + x_{13} > x_7 + x_8, x_{17} + x_7 > 2x_{12}, x_3 + 0.5 + x_{13} >$   
 $2x_{18}, x_{14} + x_4 > 2x_9, x_8 + x_{19} > x_{13} + x_{14}, x_3 + 0.5 + x_{13} > 2x_{18}, x_{14} > x_9 + x_6, x_{16} + x_6 >$   
 $2x_{11}, 0.5 + x_{14} > x_{19} + x_{16}, x_6 + x_8 > 2x_7, x_2 + x_4 > 2x_3, 0.5 + x_8 > x_4 + x_9, x_{13} + x_{11} >$   
 $2x_{12}, x_7 + x_{14} > x_8 + x_{13}, x_6 + 0.5 + x_8 > 2x_9, x_{13} + x_{16} > x_{12} + x_{17}, x_{17} + x_{19} > 2x_{18}, x_{13} +$   
 $x_{16} + 0.5 > x_{14} + x_{19}, x_{16} + x_3 > x_{17} + x_2, x_{19} + x_{17} > 2x_{18}, x_3 + 0.5 > 2x_4, x_2 > 0, x_3 >$   
 $0, x_4 > 0, x_6 > 0\}, \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}\}]$

und erhalten als Ausgabe eine mögliche Wahl für die 15 Funktionswerte, die uns dann innerhalb unserer Zerlegung eine strikt konvexe Funktion liefern. Nach der Berechnung der periodischen Punkte durch die Gleichung (2.5) erhalten wir die Funktion  $f$  durch

	Punkt		$P_1$		$P_2$		$P_3$		$P_4$		$P_5$		→			
	Funktionswert $f(P_i)$		0		0,0104167		0,113542		0,305306		0,5					
→		$P_6$		$P_7$		$P_8$		$P_9$		$P_{10}$		$P_{11}$	→			
		0,00460612		0,0156738		0,11435		0,30644		0,50460612		0,0986871				
→		$P_{12}$		$P_{13}$		$P_{14}$		$P_{15}$		$P_{16}$		$P_{17}$	→			
		0,113921		0,212489		0,394379		0,5986871		0,213601		0,270502				
→		$P_{18}$		$P_{19}$		$P_{20}$		$P_{21}$		$P_{22}$		$P_{23}$		$P_{24}$		$P_{25}$
		0,37379		0,518745		0,713601		0,5		0,5104167		0,613542		0,805306		1

Mit der Berechnung weiterer periodischer Punkte von  $f$  können wir mit dem Programm auch die Übergänge zur nächsten Periode auf strikte Konvexität überprüfen. Dabei stellt sich heraus, dass drei Kantenübergänge dies nicht erfüllen. Wir haben somit durch die „try and error Methode“ eine Funktion  $f$  gefunden, die im Fundamentalbereich strikt konvex ist, aber dies nicht an allen Übergängen erfüllt. Dies heißt aber nicht, dass es für unsere benutzte Zerlegung keine Funktion gibt, die überall strikt konvex ist.

**3.4.4.** Abschließend wollen wir mit Hilfe der in Abschnitt 3.4.3 beschriebenen Methode ein komplizierteres Beispiel konstruieren. Wir wählen dazu die folgende Zerlegung



An dieser Stelle ist nicht klar, ob sich über dieser Zerlegung überhaupt eine strikt konvexe Funktion  $f$  realisieren läßt. Nun gehen wir analog zu Abschnitt 3.4.3 vor und stellen die 40 Ungleichungen auf, die die strikte Konvexität an den inneren Kanten repräsentieren. Dieses Mal wollen wir gleich den strikt konvexen Übergang zur nächsten Periode mit testen und stellen dazu noch die 8 Ungleichungen auf, die die strikte Konvexität an den Übergängen (nach oben und nach rechts) darstellen. Zum Schluß normieren wir wieder durch  $f(P_1) = x_1 := 0$  und erhalten damit insgesamt die folgende Befehlssequenz für Mathematica 6.0

```
FindInstance[{ $x_7 > x_2 + x_6$ ,  $x_2 + x_8 > x_3 + x_7$ ,  $x_4 + x_8 > x_3 + x_9$ ,  $x_4 + x_6 > x_9$ ,  $x_6 + x_{12} > x_7 + x_{11}$ ,  $x_8 + x_{12} > x_7 + x_{13}$ ,  $x_8 + x_{14} > x_9 + x_{13}$ ,  $x_9 + x_{11} > x_6 + x_{14}$ ,  $x_{12} + x_{16} > x_{11} + x_{17}$ ,  $x_{13} + x_{17} > x_{12} + x_{18}$ ,  $x_{13} + x_{19} > x_{14} + x_{18}$ ,  $x_{11} + x_{19} > x_{14} + x_{16}$ ,  $x_{17} > x_{16} + x_2$ ,  $x_{17} + x_3 > x_{18} + x_2$ ,  $x_{19} + x_3 > x_{18} + x_4$ ,  $x_{16} + x_4 > x_{19}$ ,  $x_{16} - 0.25 + x_6 > 0$ ,  $x_{18} - 0.25 + x_7 > x_2 + x_3$ ,  $x_{18} - 0.25 + x_9 > x_3 + x_4$ ,  $x_{19} - 0.25 + x_9 > 2x_4$ ,  $x_{16} + x_6 > 0.25$ ,  $x_{18} + x_7 > x_2 + x_3 + 0.25$ ,  $x_{18} + x_9 > x_3 + x_4 + 0.25$ ,  $x_{19} + x_9 > 2x_4 + 0.75$ ,  $x_2 + x_{11} > x_6 + x_7$ ,  $x_3 + x_{13} > 2x_8$ ,  $x_3 + x_{13} > 2x_8$ ,  $x_{14} > x_9 + x_6$ ,  $x_7 + x_{17} > 2x_{12}$ ,  $x_7 + x_{18} > x_{12} + x_{13}$ ,  $x_9 + x_{18} > x_{13} + x_{14}$ ,  $x_6 + x_{16} > 2x_{11}$ ,  $x_{11} + x_2 + 0.5 > x_{16} + x_{17}$ ,  $x_{12} + x_2 + 0.5 > 2x_{17}$ ,  $x_{14} + x_4 + 0.5 > 2x_{19}$ ,  $x_{14} + 1 > x_{19} + x_{16} + 0.5$ ,  $x_3 + x_6 > x_2 + x_7$ ,  $x_7 + x_9 > 2x_8$ ,  $x_3 + 0.5 > 2x_4$ ,  $x_{11} + x_{13} > 2x_{12}$ ,  $x_7 + x_9 > 2x_8$ ,  $x_6 + 0.5 + x_{13} > x_9 + x_{14}$ ,  $x_{11} + x_{18} > x_{12} + x_{17}$ ,  $x_{12} + x_{14} > 2x_{13}$ ,  $x_{18} + x_{16} + 0.5 > 2x_{19}$ ,  $x_{16} + x_{18} > 2x_{17}$ ,  $x_2 + x_4 > 2x_3$ ,  $x_{18} + 0.5 > x_{19} + x_4$ ,  $x_2 + x_9 - 0.25 > x_6$ ,  $x_7 + x_{14} - 0.25 > x_6 + x_{11}$ ,  $x_{17} + x_{14} - 0.25 > x_{11} + x_{16}$ ,  $x_{19} - 0.25 + x_2 > x_{16}$ ,  $x_9 + x_2 + 0.75 > x_6 + 1$ ,  $x_{14} + x_7 + 0.75 > x_6 + x_{11} + 1$ ,  $x_{14} + x_{17} + 0.75 > x_{11} + x_{16} + 1$ ,  $x_{19} + x_2 + 1.25 > x_{16} + 1.5$ ,  $x_2 > 0$ }, { $x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}$ }]
```

Als Ausgabe ergibt sich die folgende mögliche Wahl für die 15 Funktionswerte von  $f$

Punkt	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_6$	
Funktionswert $f(P_i)$	0,0016276	0,0967773	0,282357	0,0279846	→

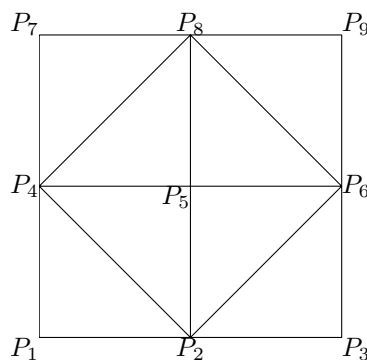
### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

$$\begin{array}{cccccc} \longrightarrow & \left| \begin{array}{c} P_7 \\ 0,0499247 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_8 \\ 0,148924 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_9 \\ 0,308417 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_{11} \\ 0,109998 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_{12} \\ 0,15225 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_{13} \\ 0,204919 \end{array} \right| & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & \left| \begin{array}{c} P_{14} \\ 0,382589 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_{16} \\ 0,257928 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_{17} \\ 0,275181 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_{18} \\ 0,322642 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} P_{19} \\ 0,53703 \end{array} \right| \end{array}$$

Im Gegensatz zum vorigen Beispiel (siehe Abschnitt 3.4.3) haben wir dieses Mal auch die Übergänge in die nächste Periode auf strikte Konvexität überprüft. Damit lassen sich in dieser Situation direkt mit dem Programm (siehe Anhang A) die kanonischen Gewichte schnell berechnen. Aufgrund der unschönen Ergebnisse überlassen wir es hier jedoch dem Leser die Rechnungen selbst auszuführen.

## 3.5. Ein Beispiel mit einer anderen Bilinearform

In diesem Abschnitt wollen wir nun ein Beispiel konstruieren, indem als Bilinearform nicht das Standardskalarprodukt benutzt wird. Basieren soll dieses Beispiel auf der Zerlegung  $V_1$  (siehe Abschnitt 3.3.1):



**3.5.1.** In unserem 1-dimensionalen Beispiel (siehe Abschnitt 3.1) starteten wir mit  $E = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}}$  und dem Geradenbündel  $O(P)$ , wobei  $P = -q^{1/2}$ . Mit der Standardbilinearform  $b_1(u, u') := u \cdot u'$  haben wir dann in 3.1.2 eine strikt konvexe Funktion  $f_1$  konstruiert. Analog sind wir in unserem 2-dimensionalen Beispiel (siehe Abschnitt 3.2) vorgegangen. Wir starteten dort mit  $E \times E$  und betrachteten  $p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$ . Auch hier haben wir mit der Standardbilinearform  $b_2(\underline{u}, \underline{u}') := u_1 \cdot u'_1 + u_2 \cdot u'_2$  eine strikt konvexe Funktion  $f_2$  konstruiert. Dabei haben wir ausgenutzt, dass wegen der Wahl des Geradenbündels  $b_2(\underline{u}, \underline{u}') = b_1(u_1, u'_1) + b_1(u_2, u'_2)$  gilt. Für unser neues Beispiel müssen wir also, um eine neue Bilinearform zu erhalten, das Geradenbündel variieren.

**Notation 3.5.1.** In diesem Abschnitt versehen wir alle Größen, die aus dem 1- bzw. 2-dimensionalen Beispiel stammen, mit dem Index 1 bzw. 2. Die dadurch freien Bezeichnungen  $L$ ,  $f$  und  $b$  benutzen wir dann für das Beispiel in diesem Abschnitt.



### 3.5. Ein Beispiel mit einer anderen Bilinearform

**3.5.2.** Wir wählen als Geradenbündel  $L := p_1^*(O(P))^{\otimes 2} \otimes p_2^*(O(P))$ . Dann können wir, mit Hilfe der Bilinearform  $b_1$ , eine zu  $L$  passende Bilinearform

$$b(\underline{u}, \underline{u}') := 2 \cdot b_1(u_1, u'_1) + b_1(u_2, u'_2) = 2u_1u'_1 + u_2u'_2 \quad (3.6)$$

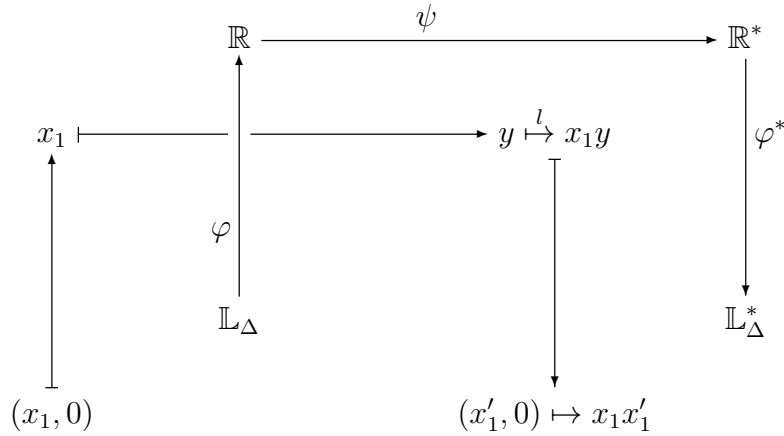
konstruieren. Um nun die kanonischen Gewichte

$$\lambda_\Delta = m \cdot \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) \text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)} \cdot \quad (3.7)$$

(vergleiche Abschnitt 2.8) zu bestimmen, untersuchen wir zunächst alle von  $f$  unabhängigen Größen. Anschließend wählen wir in den 3.5.5 und 3.5.7 zwei strikt konvexe Funktionen  $f$ , für die wir die kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$  konkret berechnen.

**3.5.3.** Als erstes bestimmen wir  $\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)$  und gehen dazu analog zu 3.2.4 vor. Das heißt wir identifizieren den Dualraum  $(\Lambda_\Delta)^L$  zunächst mit einer Menge aus den reellen Zahlen und messen dann deren Volumen. Wie bei den vorigen Beispielen (vergleiche Abschnitt 3.2.4), ist die Identifizierung abhängig von der Art der Kante  $\Delta$ . In dieser Situation müssen wir, da  $b$  nicht symmetrisch ist, drei Arten von Kanten unterscheiden, nämlich die horizontalen, die vertikalen und die diagonalen Kanten. Jeden dieser Fälle führen wir exemplarisch an einer Kante  $\Delta$  durch.

1. *Die horizontale Kante:* Für diesen Fall wählen wir als Beispiel die Kante  $\Delta := \overline{P_1P_2}$ . Dann geschieht die Identifizierung durch das folgende Diagramm:



Dabei gilt  $\varphi^*(l(x'_1)) = l \circ \varphi((x'_1, 0)) = l(x'_1) = x_1x'_1$  und damit

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_\Delta)^L &= \{((x'_1, 0), (\lambda_1, \lambda_2)) \mapsto 2x'_1\lambda_1 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta^* \\
 &\stackrel{\text{mit } \varphi^*}{\cong} \{y \mapsto 2\lambda_1 \cdot y \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^* \\
 &\stackrel{\text{mit } \psi}{\cong} \{2\lambda_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\
 &\stackrel{\text{mit } \varphi}{\cong} \{2(\lambda_1, \lambda_1) \mid (\lambda_1, \lambda_1) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta
 \end{aligned}$$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

Weil nun  $\text{vol}_\Delta(\Delta) = 1/2$  (siehe 2.8.17) folgt für alle horizontalen Kanten  $\Delta$

$$\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) = 2 .$$

2. *Die vertikale Kante:* Für diesen Fall wählen wir als Beispiel die Kante  $\Delta := \overline{P_1P_4}$ . Dann geschieht die Identifizierung durch

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{L}_\Delta & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^* & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathbb{L}_\Delta^* \\ (0, x_1) & \mapsto & x_1 & \mapsto & (y \mapsto x_1 y) & \mapsto & ((0, x'_1) \mapsto x_1 x'_1) \end{array}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} (\Lambda_\Delta)^L &= \{((0, x'_1), (\lambda_1, \lambda_2)) \xrightarrow{b} x'_1 \lambda_1 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta^* \\ &\stackrel{\text{mit } \varphi^*}{\cong} \{y \mapsto \lambda_1 \cdot y \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^* \\ &\stackrel{\text{mit } \psi}{\cong} \{\lambda_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\ &\stackrel{\text{mit } \varphi}{\cong} \{(\lambda_1, \lambda_1) \mid (\lambda_1, \lambda_1) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta \end{aligned}$$

Damit gilt  $\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) = 1$  für alle vertikalen Kanten  $\Delta$ .

3. *Die diagonale Kante:* Hier betrachten wir die Kante  $\Delta := \overline{P_2P_6}$  und es gilt

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{L}_\Delta & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^* & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathbb{L}_\Delta^* \\ (x_1, x_1) & \mapsto & x_1 & \mapsto & (y \mapsto x_1 y) & \mapsto & ((x'_1, x'_1) \mapsto x_1 x'_1) \end{array}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} (\Lambda_\Delta)^L &= \{((x'_1, x'_1), (\lambda_1, \lambda_2)) \xrightarrow{b} 2x'_1 \lambda_1 + x'_1 \lambda_1 = 3x'_1 \lambda_1 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta^* \\ &\stackrel{\varphi^*}{\cong} \{y \mapsto 3\lambda_1 \cdot y \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^* \\ &\stackrel{\psi}{\cong} \{3\lambda_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \\ &\stackrel{\varphi}{\cong} \{3(\lambda_1, \lambda_1) \mid (\lambda_1, \lambda_1) \in \Lambda_\Delta\} \subset \mathbb{L}_\Delta \end{aligned}$$

und damit  $\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) = 3$  für alle diagonalen Kanten  $\Delta$ .

**3.5.4.** Im zweiten Schritt bestimmen wir  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp)$  und  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)$ . Da die Berechnung für beide Größen unabhängig von der zugrunde liegenden Bilinearform ist, können wir das Resultat aus Abschnitt 3.2.3 übernehmen und erhalten

$$\begin{aligned} \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) &= \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta) = 1 && \Delta \text{ horizontalen/vertikalen Kante} \\ \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) &= \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta) = \sqrt{2} && \Delta \text{ diagonalen Kante.} \end{aligned}$$

### 3.5. Ein Beispiel mit einer anderen Bilinearform

Bleibt als letztes  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$  zu bestimmen. Dies wollen wir für zwei verschiedene Funktionen  $f$  durchführen.

**3.5.5.** Für unser erstes Beispiel erinnern wir zunächst daran, dass  $b(\underline{u}, \underline{u}') = b_2(\underline{u}, \underline{u}') + b_1(u_1, u_1')$  (siehe Abschnitt 3.5.2) gilt. Da wir in den Kapiteln 3.1 und 3.2 die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  über die jeweilige Bilinearform konstruiert hatten, setzen wir hier

$$f(\underline{u}) := f_2(\underline{u}) + f_1(u_1) .$$

Wir müssen jetzt noch überprüfen, dass diese Funktion  $f$  strikt konvex auf der Zerlegung  $V_1$  ist. Zunächst haben wir in Abschnitt 3.1,

Punkt $P_i$	0	1/2	1
$f_1(P_i)$	0	1/5	1/2

gewählt und es galt  $f_1(u + \lambda) = f_1(u) + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 + \lambda \cdot u$  für  $u \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{Z}$  um die periodischen Punkte zu berechnen. Weiter haben wir in Abschnitt 3.2,

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2, P_4$	$P_3, P_7$	$P_5$	$P_6, P_8$	$P_9$
$f_2(P_i)$	0	0, 19	0, 5	0, 4	0, 69	1

zusammen mit der Formel  $f_2(\underline{u} + \underline{\lambda}) = f_2(\underline{u}) + \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$  für  $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$  und  $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^2$  betrachtet. Damit ergeben sich die folgenden Werte für die Funktion  $f$

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
$f(P_i)$	0	0, 39	1	0, 19	0, 6	1, 19	0, 5	0, 89	1, 5

und aufgrund der Wahl der Bilinearform (siehe (3.5.2)) folgt analog zu Abschnitt 2.3

$$f(\underline{u} + \underline{\lambda}) = f(\underline{u}) + \frac{(2\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{2} + 2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \quad (3.8)$$

für  $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$  und  $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^2$ . Nun sind unsere Ausgangsfunktionen  $f_1$  und  $f_2$  strikt konvex und damit auch die Funktion  $f = f_1 + f_2$ . Damit erfüllt  $f$  alle nötigen Voraussetzungen und mit dem Programm (siehe Anhang A) können wir  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$  für jede Kante  $\Delta$  bestimmen. Wir erhalten

Kante $\Delta$	$\overline{P_1 P_2}$	$\overline{P_1 P_4}$	$\overline{P_2 P_3}$	$\overline{P_2 P_4}$	$\overline{P_2 P_5}$	$\overline{P_2 P_6}$	$\overline{P_3 P_6}$	$\overline{P_4 P_5}$	→
$\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)$	19/25	39/25	19/25	$\sqrt{2}/25$	9/25	$\sqrt{2}/25$	39/25	4/25	
									→
	$\overline{P_4 P_7}$	$\overline{P_4 P_8}$	$\overline{P_5 P_6}$	$\overline{P_5 P_8}$	$\overline{P_6 P_8}$	$\overline{P_6 P_9}$	$\overline{P_7 P_8}$	$\overline{P_8 P_9}$	
	39/25	$\sqrt{2}/25$	4/25	9/25	$\sqrt{2}/25$	39/25	19/25	19/25	

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

**3.5.6.** Aufgrund der verschiedenen Zwischenergebnisse ist es für die Bestimmung der kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$  zweckmäßig, die Kanten in fünf Mengen aufzuteilen. Wir setzen

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{\overline{P_2P_4}, \overline{P_2P_6}, \overline{P_4P_8}, \overline{P_6P_8}\} & K_2 &:= \{\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}\} & K_3 &:= \{\overline{P_1P_4}, \overline{P_4P_7}\} \\ K_4 &:= \{\overline{P_2P_5}, \overline{P_5P_8}\} & K_5 &:= \{\overline{P_4P_5}, \overline{P_5P_6}\} \end{aligned}$$

und erhalten damit aus Gleichung (3.7)

$$\begin{aligned} \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{\sqrt{2}/25 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = m \cdot \frac{3\sqrt{2}}{50} && \text{für } \Delta \in K_1 \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{19/25 \cdot 2}{1 \cdot 1} = m \cdot \frac{38}{25} && \text{für } \Delta \in K_2 \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{39/25 \cdot 1}{1 \cdot 1} = m \cdot \frac{39}{25} && \text{für } \Delta \in K_3 \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{9/25 \cdot 1}{1 \cdot 1} = m \cdot \frac{9}{25} && \text{für } \Delta \in K_4 \\ \lambda_\Delta &= m \cdot \frac{4/25 \cdot 2}{1 \cdot 1} = m \cdot \frac{8}{25} && \text{für } \Delta \in K_5 \end{aligned}$$

Zum Abschluß dieses Beispiels wollen wir unsere Ergebnisse mit Hilfe von Proposition 2.8.10 noch überprüfen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int 1d\mu &= \sum_{\Delta} \lambda_\Delta \int_{\Delta} dt \\ &= \sum_{\Delta \in K_1} m \cdot \frac{3\sqrt{2}}{50} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{\Delta \in K_2} m \cdot \frac{38}{25} \cdot \frac{1}{2} + \sum_{\Delta \in K_3} m \cdot \frac{39}{25} \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad + \sum_{\Delta \in K_4} m \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{2} + \sum_{\Delta \in K_5} m \cdot \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{2} \\ &= m \cdot \left( 4 \cdot \frac{3}{50} + 2 \cdot \frac{19}{25} + 2 \cdot \frac{39}{50} + 2 \cdot \frac{9}{50} + 2 \cdot \frac{4}{25} \right) \\ &= 4m \\ &\stackrel{(2.14)}{=} \deg_L(X) \end{aligned}$$

wie gewünscht.

**3.5.7.** Als zweites Beispiel übernehmen wir die Funktion

Punkt $P_i$	$P_1$	$P_2, P_4$	$P_5$
$f_2(P_i)$	0	0, 19	0, 4

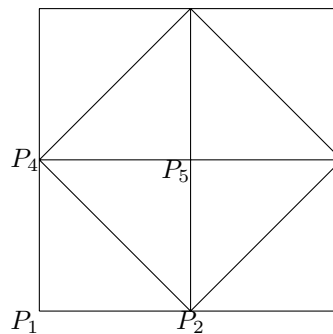
aus Abschnitt 3.2. Das heißt wir setzen  $f := f_2$  und müssen die periodischen Punkte nun mit der Gleichung (3.8) neu berechnen. Wir erhalten



## 3.6. Zusammenhang zwischen den kanonischen und den tropischen Gewichten

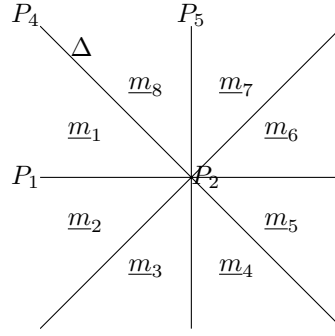
Ziel dieses Abschnittes ist es, den Zusammenhang zwischen dem kanonischen Gewicht  $\lambda_\Delta$  und dem tropischen Gewicht  $c_\Delta$  einer Kante  $\Delta \in S(\mathcal{X})$  zu untersuchen. Dazu führen wir zunächst die tropischen Gewichte  $c_\Delta$  ein und untersuchen detailliert ihre Berechnung. Anschließend gehen wir auf den genauen Zusammenhang zu unseren kanonischen Gewichten  $\lambda_\Delta$  ein, womit wir Satz 1.2 beweisen. Zum Abschluß werden wir das Ergebnis durch zwei Beispiele mit Zahlen füllen.

**3.6.1.** Für diesen Abschnitt ist unsere Ausgangssituation das Quadrat  $E \times E$  einer Tate-Kurve  $E$  und wir benutzen die Bezeichnungen und Ergebnisse aus Kapitel 2. Weiter wählen wir die Zerlegung  $V1$  mit den folgenden Bezeichnungen



fest und wir bezeichnen für  $i = 1, 2, 4, 5$  mit  $Y_i$  die irreduzible Komponente der speziellen Faser, die zu  $P_i$  gehört (siehe Abschnitt 2.4.7). Nach Abschnitt 2.5 liefert uns nun jede auf der Zerlegung  $V1$  strikt konvexe und stückweis affine Funktion  $f$  ein amples Modell  $\mathcal{L}$  für das Geradenbündel  $L$  auf  $E \times E$ . Durch Übergang zu einer Potenz  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  wird dieses Modell sehr ampel (siehe Proposition 2.5.5). Damit erhalten wir eine Kurve  $X \subseteq E \times E$  mit projektivem, strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$  als generischen Hyperebenenschnitt von  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  (siehe Abschnitt 2.6). Mit Abschnitt 2.7 ist die tropische Varietät  $\text{Trop}(X)$  der Kurve  $X$  das 1-Skelett der Zerlegung  $V1$ . Zur Vereinfachung der Notation wählen wir ab jetzt die Kante zwischen  $P_2$  und  $P_4$  fest und bezeichnen sie mit  $\Delta$ . Weiter bezeichnen wir die Steigungsvektoren der maximalen Standardsimplexe von  $V1$ , die gleichzeitig die Steigungen der affinen Teile von  $f$  sind, wie folgt:

### 3.6. Zusammenhang zwischen den kanonischen und den tropischen Gewichten



Nach Definition 2.8.12(a) gilt zunächst  $\text{star}_n(P_2) := \{\Omega \in S(\mathcal{X}) \mid u_0 \subset \Omega, \dim(\Omega) = n\}$ , wobei  $u_0$  eine beliebige Ecke von  $\sigma$  und  $n = 2$  ist. Wir wählen jetzt  $u_0 = P_2$  fest. Dann erhalten wir nach Lemma 2.8.13

$$\{P_2\}^f = \{w \in \mathbb{R}^n \mid u \in \Omega \in \text{Star}_n(P_2) \Rightarrow w(u - P_2) \leq m_\Omega(u - P_2)\}.$$

und damit das zu  $\sigma$  bezüglich  $f$  duale Polytop  $\sigma^f$  durch

$$\Delta^f = \{P_2\}^f \cap (m_\Upsilon + \Delta^\perp),$$

wobei hier  $\Upsilon \in \text{star}_n(\Delta)$  beliebig ist. Da in diesem Abschnitt das  $\Delta$  aus Definition 2.8.12 bzw. Lemma 2.8.13 schon als Kante  $\overline{P_2P_4}$  vergeben ist, wählen wir hier stattdessen  $\Upsilon$ . Damit ergeben sich jetzt die folgenden Zuordnungen

hier	in Definition 2.8.12 bzw. Lemma 2.8.13
2	$n$
$\Delta$ Kante $\overline{P_2P_4}$	$\sigma$
$P_2$ Ecke von $\Delta$	$u_0$
$f$	$f$
$\Upsilon \in \{\Upsilon_{P_1P_2P_3}, \Upsilon_{P_2P_4P_5}\}$ , wobei $\Upsilon_{P_1P_2P_4} :=$ Dreieck gebildet aus $P_1, P_2, P_4$	$\Delta \in \text{Star}_n(\sigma)$
beliebiges Dreieck in der Zerlegung $V_1$	$\Omega$
$m_\Upsilon = m_1$ oder $m_\Upsilon = m_8$	$m_\Delta$
$m_\Omega \in \{m_1, \dots, m_8\}$	$m_\Omega$

Damit erhalten wir in unserer Situation nun

$$\Delta^f = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w, \cdot \rangle \leq \langle m_i, \cdot \rangle \text{ auf } \Omega_i - P_2 \text{ für } i = 1, \dots, 8\} \cap (m_\Delta + \Delta^\perp), \quad (3.9)$$

wobei  $\Omega_i$  für  $i = 1, \dots, 8$  das zum Steigungsvektor  $m_i$  gehörende Dreieck der Simplexzerle-

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

gung  $V1$  ist. Für alle anderen Kanten der Zerlegung  $V1$  gilt dann ein analoges Resultat.

**3.6.2.** Andererseits können wir analog zu [Kat09, Definition 6.10] für jede Kante  $\Delta \in S(\mathcal{X})$  das tropische Gewicht  $c_\Delta$  definieren, wobei  $c_\Delta$  die Gleichgewichtsbedingung der tropischen Geometrie (siehe [Kat09, Theorem 8.14]) in jedem Punkt  $P_i$  für  $i = 1, \dots, 4$  erfüllt. Dann gilt nach [Kat09, Proposition 9.4]

$$\begin{aligned}
c_\Delta &= \deg(\mathcal{X} \cdot_{\mathcal{B}} V(\Delta)) && \text{Schnittprodukt in } \mathcal{B} \\
&= \deg((H \cdot_{\mathbb{P}^N} \mathcal{B}) \cdot_{\mathcal{B}} V(\Delta)) && \text{1. Schnittprodukt in } \mathbb{P}^N, \text{ 2. in } \mathcal{B} \\
&\stackrel{V(\Delta) \subset \mathcal{B}}{=} \deg(\text{div}(s) \cdot_{\mathbb{P}^N} V(\Delta)) && \text{Schnittprodukt in } \mathbb{P}^N \\
&= \deg_H(V(\Delta)) .
\end{aligned}$$

Dabei ist  $V(\Delta)$  eine irreduzible Komponente der Kurve  $Y_2 \cap Y_3$  und  $H$  die Hyperebene in  $\mathbb{P}^N$ , die zur Konstruktion von  $X$  benutzt wurde (siehe Abschnitt 2.6). Nun ist  $V(\Delta)$  aber eine torische Varietät (siehe [Gub07a, Proposition 4.4]) und nach [Ful93, section 5.3, Corollary S.112] gilt  $\deg_D(V(\Delta)) = \dim(V(\Delta))! \cdot \text{vol}_{\text{Fulton}}(P_\Delta)$ . Dabei ist  $P_\Delta$  das zu  $\Delta$  gehörende Fulton-Polytop bezüglich der Funktion  $m \cdot f$  auf der Simplexzerlegung  $V1$ . (Für die Definition von  $P_\Delta$  siehe Abschnitt 3.6.3). Da in unserem Fall  $\dim(V(\Delta)) = 1$  und  $D = H$  gilt, folgt

$$c_\Delta = \text{vol}_{\text{Fulton}}(P_\Delta) . \quad (3.10)$$

Wir müssen also, um die tropischen Gewichte  $c_\Delta$  zu berechnen, das Fulton-Polytop  $P_\Delta$  bestimmen und sein Volumen mit der in [Ful93] vorgegebenen Normierung bestimmen.

**3.6.3.** Kommen wir nun zum Fulton-Polytop  $P_\Delta$ . Dieses ist in [Ful93, p. 111] wie folgt definiert

$$P_\sigma := P \cap (\sigma^\perp + u(\sigma)) ,$$

wobei jetzt die folgende Zuordnung gilt:

hier	in [Ful93, p. 111]
$-m \cdot m_1$ oder $-m \cdot m_8$	$u(\sigma)$
Kante $\Delta$	$\sigma$

Dabei weisen wir hier besonders darauf hin, dass  $s$  ein globaler Schnitt des sehr amplen Geradenbündels  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  war (siehe Abschnitt 2.6). Damit betrachten wir die Funktion  $m \cdot f$  und nicht  $f$ . Weiter gilt nach [Ful93, p. 110]  $P = P_D$ , wobei

$$P_D := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \langle u, \cdot \rangle \geq \langle u(\sigma), \cdot \rangle \ \forall \sigma \in \text{Star}_2(P_2) - P_2\}$$

nach [Ful93, p. 66, 68] und die folgenden Zuordnungen gelten:



### 3.6. Zusammenhang zwischen den kanonischen und den tropischen Gewichten

hier	in [Ful93, p. 66, 68, 110]
Dreieck $\Omega \in \text{Star}_2(P_2)$	$\sigma$
$-m \cdot m_\Omega$ , wobei $m_\Omega$ der Steigungsvektor von $f _\Omega$ ist.	$u(\sigma)$

Damit erhalten wir nun

$$P_\Delta = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \langle u, \cdot \rangle \geq \langle -m \cdot m_\Omega, \cdot \rangle \forall \Omega \in \text{Star}_2(P_2)\} \cap (\Delta^\perp - m \cdot m_1). \quad (3.11)$$

**3.6.4.** Unser Ziel ist es die tropischen Maße  $c_\Delta$  mit den kanonischen Gewichten  $\lambda_\Delta$  zu vergleichen. Dazu stellen wir zunächst einen einfachen Zusammenhang zwischen  $P_\Delta$  und  $\Delta^f$  her. Weil nach Gleichung (3.9)

$$\begin{aligned} \Delta^f &= \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w, \cdot \rangle \leq \langle m_i, \cdot \rangle \text{ auf } \Omega_i - P_2 \text{ für } i = 1, \dots, 8\} \cap (m_1 + \Delta^\perp) \\ &= \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w, \cdot \rangle \leq \langle m_\Omega, \cdot \rangle \forall \Omega - P_2 \in \text{Star}_2(P_2) - P_2\} \cap (m_1 + \Delta^\perp) \end{aligned}$$

und nach Gleichung (3.11)

$$\begin{aligned} P_\Delta &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \langle u, \cdot \rangle \geq \langle -m \cdot m_\Omega, \cdot \rangle \forall \Omega - P_2 \in \text{Star}_2(P_2) - P_2\} \cap (\Delta^\perp - m \cdot m_1) \\ &= -(\{u \in \mathbb{R}^2 \mid \langle u, \cdot \rangle \leq \langle m \cdot m_\Omega, \cdot \rangle \forall \Omega - P_2 \in \text{Star}_2(P_2) - P_2\} \cap (m \cdot m_1 + \Delta^\perp)) , \end{aligned}$$

folgt sofort

$$-P_\Delta = m \cdot \Delta^f .$$

Hierbei ist nicht das mengentheoretische Minus gemeint, sondern  $\Omega \in \text{Star}_2(P_2) - P_2 \Rightarrow \Omega + P_2 \in \text{Star}_2(P_2)$ . Weil nach [Ful93, section 5.3]  $\text{vol}_{\text{Fulton}}(\cdot)$  so normiert ist, dass das Volumen des Fundamentalbereichs des Gitters  $\Delta^\perp \cap \mathbb{Z}^2$  gleich 1 ist, folgt zusammen mit Gleichung (3.10) dann

$$\begin{aligned} c_\Delta &= \text{vol}_{\text{Fulton}}(P_\Delta) \\ &= \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(m \cdot \Delta^f)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\text{Fundamentalbereich von } \Delta^\perp \cap \mathbb{Z}^2)} \\ &= m^{\dim(\Delta^f)} \cdot \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^\perp \cap \mathbb{Z}^2)} \\ &= m \cdot \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^\perp \cap \mathbb{Z}^2)} . \end{aligned}$$

Andererseits wissen wir aus Abschnitt 2.8, Gleichung (2.10), dass für die kanonischen Gewichte

$$\lambda_\Delta = m \cdot \frac{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Delta^f) \text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp) \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)}$$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

gilt. Wir erhalten also als Zusammenhang zwischen den kanonischen und den tropischen Gewichten

$$\lambda_\Delta = c_\Delta \cdot \frac{\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L)}{\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta)}. \quad (3.12)$$

**3.6.5.** Wir wollen nun das Ergebnis aus Gleichung (3.12) mit Zahlen füllen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass bei allen von uns betrachteten Simplexzerlegungen,  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta) = 1 = \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp)$  für die horizontalen/vertikalen und  $\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_\Delta) = \sqrt{2} = \text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^\perp)$  für die diagonalen Kanten gilt. Bei den Beispielen, bei denen die benutzte Bilinearform  $b$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  ist (siehe Abschnitte 3.1 bis 3.4), haben wir weiter  $\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) = 1$  für die horizontalen/vertikalen und  $\text{vol}_\Delta((\Lambda_\Delta)^L) = 2$  für die diagonalen Kanten. Es gilt also

$$\lambda_\Delta = c_\Delta$$

für die horizontalen/vertikalen und

$$\lambda_\Delta = \sqrt{2} \cdot c_\Delta$$

für die diagonalen Kanten. Somit gibt es bei diesen Beispielen keinen globalen Faktor, der das tropische Gewicht  $c_\Delta$  in das kanonisches Gewicht  $\lambda_\Delta$  umrechnet. So einen Faktor gibt es hier nur lokal für jede Kante, da die „Lage“ der Kante entscheidend in den Faktor eingeht. Nun könnte es sich hierbei nur um ein Normierungsproblem handeln, was für diese Beispiele auch der Fall ist. Denn wir wissen, nach Abschnitt 2.8, Gleichung (2.8), dass

$$\mu = \sum_{\Delta} \lambda_\Delta \delta_\Delta^{(\mathbb{R}^2)}$$

gilt. Hierbei wird das Maß relativ zum  $\mathbb{R}^2$  gebildet, was wir mit dem Exponenten  $(\mathbb{R}^2)$  andeuten wollen. Das heißt also, dass im  $\mathbb{R}^2$  die Kante von  $(0, 0)$  nach  $(1/2, 1/2)$  die Länge  $\sqrt{2}/2$  hat. Nun ist aber eine in der Kombinatorik sehr oft benutzte Normierung so gewählt, dass die Kante von  $(0, 0)$  nach  $(1/2, 1/2)$  die Länge  $1/2$  hat. Dieses wollen wir hier nun entsprechend mit  $\delta_\Delta^{(\text{komb})}$  bezeichnen. Wir können somit aus

$$\mu = \sum_{\Delta} \lambda_\Delta \delta_\Delta^{(\mathbb{R}^2)} = \sum_{\Delta} \lambda_\Delta^{(\text{komb})} \delta_\Delta^{(\text{komb})}$$

herleiten, dass

$$\lambda_\Delta^{(\text{komb})} = \lambda_\Delta \quad (3.13)$$

für die horizontalen/vertikalen und

$$\lambda_\Delta^{(\text{komb})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda_\Delta \quad (3.14)$$

### 3.6. Zusammenhang zwischen den kanonischen und den tropischen Gewichten

für die diagonalen Kanten gilt. Damit erhalten wir also für alle Beispiele, bei denen die benutzte Bilinearform  $b$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  ist, dass die kanonischen und die tropischen Gewichte identisch sind. Das heißt es gilt

$$\lambda_{\Delta}^{(\text{komb})} = c_{\Delta}$$

für alle Kanten der Simplexzerlegung.

**3.6.6.** Bleibt die Frage, ob es sich in allen Fällen nur um ein Normierungsproblem handelt. Um nun ein Beispiel zu erhalten, bei dem dies nicht so ist, liegt es also nahe ein Beispiel zu konstruieren, bei dem  $\text{vol}_{\Delta}((\Lambda_{\Delta})^L)$  für horizontale und vertikale Kanten einen unterschiedlichen Wert annimmt. Dies läuft aber darauf hinaus, ein Beispiel zu konstruieren, bei dem eine Bilinearform  $b$  benutzt wird, die nicht das Standardskalarprodukt ist. Dieses haben wir in 3.5 getan und dort in Abschnitt 3.5.5 für die erste der beiden betrachteten Funktionen die folgenden Ergebnisse erhalten.

Kante $\Delta$	$\overline{P_1P_2}$	$\overline{P_1P_4}$	$\overline{P_2P_3}$	$\overline{P_2P_4}$	$\overline{P_2P_5}$	$\overline{P_2P_6}$	$\overline{P_3P_6}$	$\overline{P_4P_5}$	
$\text{vol}(\Delta^f)$	$19/25$	$39/25$	$19/25$	$\sqrt{2}/25$	$9/25$	$\sqrt{2}/25$	$39/25$	$4/25$	
$\text{vol}_{\Delta}((\Lambda_{\Delta})^L)$	2	1	2	3	1	3	1	2	
$\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}^2 \cap \Delta^{\perp})$	1	1	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	1	→
$\text{vol}_{\mathbb{R}^2}(\Lambda_{\Delta})$	1	1	1	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	1	1	
$m^{-1} \cdot \lambda_{\Delta}$	$38/25$	$39/25$	$38/25$	$3\sqrt{2}/50$	$9/25$	$3\sqrt{2}/50$	$39/25$	$8/25$	

	$\overline{P_4P_7}$	$\overline{P_4P_8}$	$\overline{P_5P_6}$	$\overline{P_5P_8}$	$\overline{P_6P_8}$	$\overline{P_6P_9}$	$\overline{P_7P_8}$	$\overline{P_8P_9}$
→	$39/25$	$\sqrt{2}/25$	$4/25$	$9/25$	$\sqrt{2}/25$	$39/25$	$19/25$	$19/25$
	1	3	2	1	3	1	2	2
	1	$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	1	1	1
	1	$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	1	1	1
	$39/25$	$3\sqrt{2}/50$	$8/25$	$9/25$	$3\sqrt{2}/50$	$39/25$	$38/25$	$38/25$

Damit ergeben sich für den Zusammenhang zwischen den kanonischen Gewichten  $\lambda_{\Delta}$  und den tropischen Gewichten  $c_{\Delta}$  die folgenden drei Fälle:

$$\lambda_{\Delta} = 2 \cdot c_{\Delta} \quad \text{für alle horizontalen,} \quad (3.15)$$

$$\lambda_{\Delta} = c_{\Delta} \quad \text{für alle vertikalen und} \quad (3.16)$$

$$\lambda_{\Delta} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot c_{\Delta} \quad \text{für alle diagonalen Kanten.} \quad (3.17)$$

### 3. Explizite Beispiele kanonischer Maße

Somit existiert auch bei diesem Beispiel kein globaler Faktor, der das tropische Gewicht  $c_\Delta$  in das kanonische Gewicht  $\lambda_\Delta$  umrechnet. So einen Faktor gibt es wieder nur lokal für jede Kante, da die „Lage“ der Kante entscheidend in den Faktor eingeht. Da nun aber der in 3.6.5 hergeleitete Zusammenhang zwischen dem kanonischen Gewicht bezüglich unserer Normierung und dem bezüglich der kombinatorischen Normierung unabhängig von der gewählten Bilinearform ist, ergibt sich hier

$$\begin{array}{lll} \lambda_\Delta^{(\text{komb})} \stackrel{(3.13)}{=} \lambda_\Delta & \stackrel{(3.15)}{=} 2 \cdot c_\Delta & \text{für alle horizontalen,} \\ \lambda_\Delta^{(\text{komb})} \stackrel{(3.13)}{=} \lambda_\Delta & \stackrel{(3.16)}{=} c_\Delta & \text{für alle vertikalen und} \\ \lambda_\Delta^{(\text{komb})} \stackrel{(3.14)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lambda_\Delta & \stackrel{(3.17)}{=} \frac{3}{2} \cdot c_\Delta & \text{für alle diagonalen Kanten.} \end{array}$$

Damit kann es sich dieses Mal nicht nur um ein Normierungsproblem handeln.

**Fazit 3.6.7.** Wir haben also gezeigt, dass unsere kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$  nicht bis auf Normierung identisch sind mit den tropischen Gewichten  $c_\Delta$ . Die kanonischen Gewichte  $\lambda_\Delta$  bilden also eine neue Invariante. Dies beweist Satz 1.2 und beantwortet eine von Bernd Sturmfels aufgeworfene Frage.

# 4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen

## 4.1. Ausgangslage

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Zahlkörper  $K$  mit dem Ring der ganzen Zahlen  $\mathcal{O}_K$ .

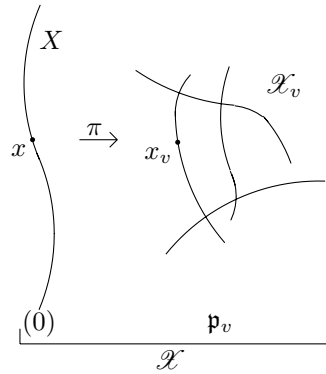
**Definition 4.1.1.** Eine arithmetische Varietät  $\mathcal{X}$  ist

- ein projektives flaches Schema über  $\mathcal{O}_K$ ,
- regulär und
- ihre generische Faser  $X := \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$  ist geometrisch irreduzibel.

Eine arithmetische Fläche  $\mathcal{X}$  über  $\mathcal{O}_K$  ist eine arithmetische Varietät, bei der zusätzlich noch  $\dim(X) = 1$  gilt.

**Definition 4.1.2.** Ab jetzt sei  $\mathcal{X}$  eine arithmetische Fläche und wir betrachten ein Geradenbündel  $L$  auf  $X$ . Nun nehmen wir an, dass es einen invertierbaren  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -Modul  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{X}$  gibt, so dass  $\mathcal{L}|_X$  die Schnittgarbe von  $L$  ist (siehe [Hat77, Übung II.5.18]). Dann induziert  $\mathcal{L}$  für jedes  $v \in M_K$ ,  $v \nmid \infty$  eine Metrik  $\|\cdot\|_{\mathcal{L},v}$  auf  $L$ . Diese Metrik haben wir in 2.8.1 als Modellmetrik auf  $L$  bezeichnet. Dabei erhalten wir die Metrik wie folgt. Wir wählen  $x \in X$  und es sei  $x_v$  die Reduktion von  $x$  modulo dem Primideal  $\mathfrak{p}_v$  zu  $v$ . Das heißt  $x_v \in \mathcal{X}_v := \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_v) =$  spezielle Faser von  $\mathcal{X}$  über  $\mathfrak{p}_v$ . Wir haben damit die folgende Situation

#### 4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen



Weiter wählen wir eine Trivialisierung von  $\mathcal{L}$  in  $x_v$ , das heißt eine offene Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $x_v$  mit  $\mathcal{L}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ . Dann entspricht ein Schnitt  $s \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{L})$  einer regulären Funktion  $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$  und wir definieren durch

$$\|s(x)\|_{\mathcal{L},v} := |\gamma(x)|_v \quad (4.1)$$

eine Metrik auf  $L$ . Nach [Gub98, Abschnitt 7] ist die Metrik stetig und die Definition unabhängig von  $\mathcal{U}$  und der Wahl der Trivialisierung.

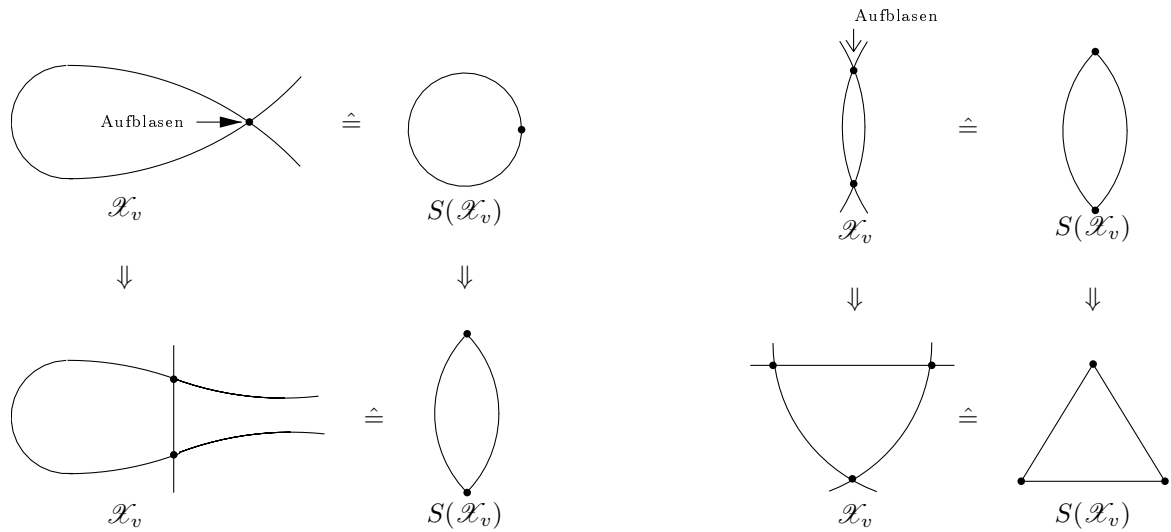
**4.1.3.** Unser Ziel ist es nun ein nicht-archimedisches Analogon der Poincaré-Lelong Gleichung zu finden. Dazu erinnern wir an die komplexe Poincaré-Lelong Gleichung

$$dd^c g = c_1(L, \|\cdot\|) - \delta_D . \quad (4.2)$$

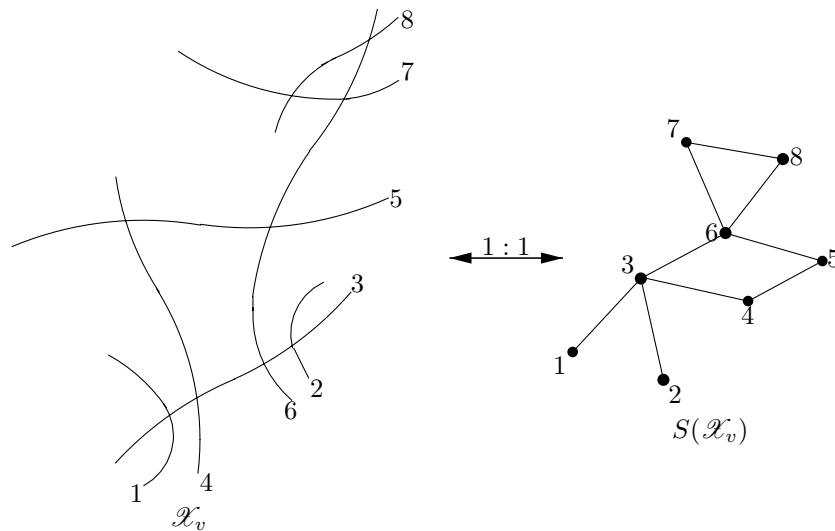
Hierbei ist  $g$  ein Greenscher Strom,  $c_1(L, \|\cdot\|)$  die erste Chernform von  $(L, \|\cdot\|)$  und  $\delta_D$  der Diracstrom. Für die genauen Definitionen und die Details siehe [GH78, Kapitel 1.1, Abschnitt 3 und Kapitel 3.2, Abschnitt 1]. In der nicht-archimedischen Situation spielt für einen meromorphen Schnitt  $s$  von  $L$  die Funktion  $g = g_D := -\log \|s\|_{\mathcal{L},v}$  die Rolle eines Greenschen Stroms für den Divisor  $D := \text{div}(s)$  auf  $X$ . Weiter ist die erste Chernform aus [Cham06] bekannt (siehe nächsten Absatz). Wir brauchen nun noch einen neuen Differentialoperator, der den Operator  $dd^c$  ersetzt.

**4.1.4.** Ab jetzt wählen wir  $v \in M_K$ ,  $v \nmid \infty$  fest und setzen  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathcal{L},v}$  bzw.  $|\cdot| := |\cdot|_v$ . Bei uns findet die Analysis auf dem Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$  statt. Wir erinnern zuerst an die nötigen Grundlagen. Das Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$  ist eine kompakte Teilmenge des Berkovichraums  $X_v^{\text{an}}$  und es gibt eine stetige Retraktionsabbildung  $\text{val} : X_v^{\text{an}} \rightarrow S(\mathcal{X}_v)$  (siehe [Ber04, §4 und §5]). Weiter ist das Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$  gleich dem Reduktionsgraphen von  $\mathcal{X}_v$  und durch Verfeinerung können wir o.B.d.A. annehmen, dass es weder Schleifen noch Doppelkanten in  $S(\mathcal{X}_v)$  enthält. Falls dies der Fall wäre, gehen wir zu einer Verfeinerung über, bei der wir in

einem Doppelpunkt aufblasen und wieder die vorigen Bezeichnungen benutzen. Anschaulich bedeutet dies für eine Schlaufe (linkes Bild) bzw. für eine Doppelkante (rechtes Bild)



Wir haben also nach eventueller Verfeinerung beispielsweise die folgende 1:1 Zuordnung zwischen den irreduziblen Komponenten  $Y$  von  $\mathcal{X}_v$  und den Ecken  $u_Y \in X_v^{\text{an}}$  des Skelettes  $S(\mathcal{X}_v)$ :



**4.1.5.** Nach Chambert-Loir (siehe [Cham06]) ist  $c_1(L, \|\cdot\|)$  ein Maß auf dem Berkovichraum  $X_v^{\text{an}}$ . Sei  $\zeta_Y$  der generische Punkt der irreduziblen Komponente  $Y$  von  $\mathcal{X}_v$ . Dann gibt es genau einen Punkt  $u_Y$  von  $X_v^{\text{an}}$  mit Reduktion  $\zeta_Y$  modulo  $\mathfrak{p}_v$  (siehe [Ber90, Proposition 2.4.4]) und es gilt mit Proposition 2.8.6(d)

$$c_1(L, \|\cdot\|) = \sum_Y \deg_{\mathcal{L}}(Y) \delta_{u_Y} . \tag{4.3}$$

#### 4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen

Dabei läuft  $Y$  über alle irreduziblen Komponenten von  $\mathcal{X}_v$  und  $\delta_{u_Y}$  ist das Dirac Maß auf  $X_v^{\text{an}}$  in  $u_Y$ . Damit gilt, mit 4.1.4, bei uns

$$c_1(L, \|\cdot\|) = \text{gewichtete Summe der Diracs in den Ecken von } S(\mathcal{X}_v),$$

wobei das Gewicht in einer Ecke  $u_Y$ , die zu der irreduziblen Komponente  $Y$  von  $\mathcal{X}_v$  gehört, gleich  $\deg_{\mathcal{Z}}(Y)$  ist (siehe Gleichung (4.3)).

**4.1.6.** Bleibt als letztes noch ein Analogon für den  $dd^c$ -Operator zu finden. Als ersten Versuch nehmen wir den Laplace-Operator aus [BR07, Chapter 1.2], der dort wie folgt definiert ist.

**Definition 4.1.7.** Ein metrisierter Graph  $\Gamma$  ist ein kompakter, zusammenhängender metrischer Raum mit der folgenden Eigenschaft. Für alle  $p \in \Gamma$  existiert ein Radius  $r_p > 0$  so, dass der Punkt  $p$  eine Umgebung  $V_p(r_p)$  hat, die für ein  $n_p \in \mathbb{N}$  isometrisch ist zu der mit der Wegmetrik versehenen sternförmigen Menge  $\{z \in \mathbb{C} \mid z = te^{k \cdot 2\pi i/n_p} \text{ für } 0 \leq t < r_p \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}$ . Weiter definieren wir den Zhang-Raum  $\text{Zh}(\Gamma) := \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig, stückweise } C^2 \text{ und } f''(x) \in L^1(\Gamma)\}$  (nach [Zha93, section 2]). Dabei sagen wir  $f$  ist stückweise  $C^2$ , wenn es eine endliche Menge von Punkten  $X_f \subset \Gamma$  gibt so, dass  $\Gamma \setminus X_f$  eine endliche Vereinigung von offenen Intervallen und die Einschränkung von  $f$  auf diese Intervalle  $C^2$  ist. Mit diesen Vorarbeiten definieren wir für  $f \in \text{Zh}(\Gamma)$  den Laplace-Operator  $\Delta(f)$  von  $f$  als das komplexe Borel-Maß auf  $\Gamma$ , das gegeben ist durch

$$\Delta(f) = \underbrace{-f''(x)dx}_{\text{stetiger Maßteil}} - \underbrace{\sum_{p \in X_f} \left( \underbrace{\sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(p)} \underbrace{d_{\vec{v}}f(p)}_{\text{gerichtete Ableitung}}}_{\text{Steigungsteil}} \right)}_{\text{diskreter Maßteil}} \delta_p. \quad (4.4)$$

Dabei ist  $\text{Vec}(p)$  die Menge der von  $p$  ausgehenden formalen Einheitsvektoren und wir setzen für  $x = p + t\vec{v} \in \Gamma \setminus X_f$  dann  $f''(x) = \frac{d^2}{dt^2} f(p + t\vec{v})$ .

**4.1.8.** Diese Definition läßt sich jetzt direkt auf unsere Situation übertragen. Bei uns ist der metrisierte Graph das Skelett, das alle in der Definition geforderten Eigenschaften erfüllt. Das heißt es gilt  $\Gamma = S(\mathcal{X}_v)$  und wir werden in den nächsten Abschnitten sehen, dass wir das folgende nicht-archimedische Analogon der Poincaré-Lelong Gleichung

$$- \underbrace{\Delta}_{\text{nach (4.4)}} g = \underbrace{c_1(L, \|\cdot\|)}_{\text{nach (4.3)}} - \delta_{\text{val}(D)} \quad (4.5)$$

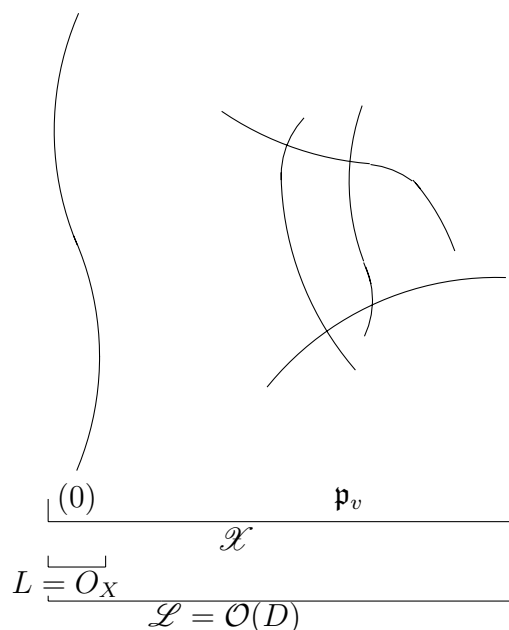
erhalten. Dies wird dann auch den Satz 1.3 beweisen.



**Bemerkung 4.1.9.** In [BR10] wird für den Fall  $X = \mathbb{P}^1$  der Laplace Operator auf  $X_v^{\text{an}}$  definiert. Für den allgemeinen Fall siehe [Thu05].

## 4.2. Die Poincaré-Lelong Gleichung für $L = \mathcal{O}_X$

**4.2.1.** Unser Ziel ist es nun, die Poincaré-Lelong Gleichung für  $L = \mathcal{O}_X$  und  $s = 1$  mit der Definition des Laplace-Operators (siehe 4.1.7) zu überprüfen. Der Fall  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  wäre zu trivial, da dann  $g_D = c_1(L, \|\cdot\|) = \delta_{\text{val}(D)} \equiv 0$  gilt. Wir haben hier also die folgende Situation:



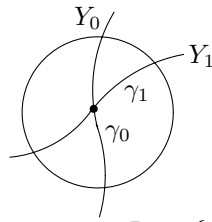
wobei  $D = \sum_Y m_Y Y$  ein vertikaler Divisor ist. Insbesondere spielen nur die Komponenten von  $D$ , die über  $\mathfrak{p}_v$  liegen, eine Rolle für den Reduktionsgraphen bezüglich  $\mathfrak{p}_v$ . Das heißt wir können alles andere ausblenden und aufgrund der Linearität o.B.d.A. annehmen, dass  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(V)$  für eine irreduzible Komponente  $V$  von  $\mathcal{X}_v$  ist.

**4.2.2.** Wir setzen zunächst

$$f := -\log \|1\|$$

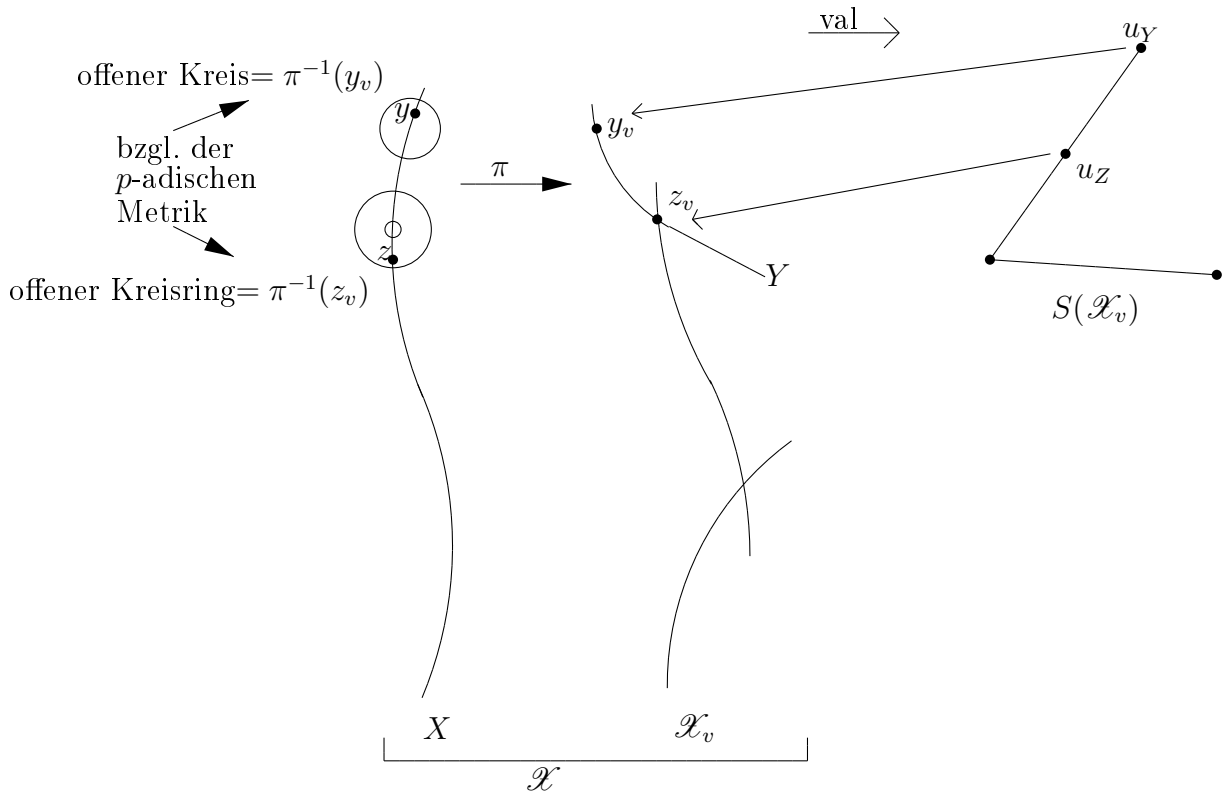
und fordern, dass das Modell  $\mathcal{X}$  strikt semistabil ist. Da sich letzteres nach einer endlichen Körpererweiterung von  $K$  immer erreichen läßt (siehe [BLR90, Theorem 9.2.7]), arbeiten wir zur Vereinfachung der Notation weiter über  $K$ . Wie man in [Gub07a] und [Gub10] sehen kann, können wir analytisch aber auch über  $\mathbb{C}_K$  arbeiten. Hier ergibt sich jetzt in  $\mathcal{X}_v$  lokal die folgende Situation

#### 4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen



$p_v = (\rho)$  im Bewertungsring  $R_v = \{\alpha \in K \mid |\alpha|_v \leq 1\}$

und wir erhalten  $\gamma_0 \gamma_1 = \rho$ , wobei  $\rho$  der uniforme Parameter ist. Damit hat die dem Doppelpunkt entsprechende Kante im Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$  die Länge  $v(\rho)$  und wir können  $f$  auf dem Skelett interpretieren. Wir haben also, wobei  $\pi$  die Reduktion auf die spezielle Faser ist, die Situation



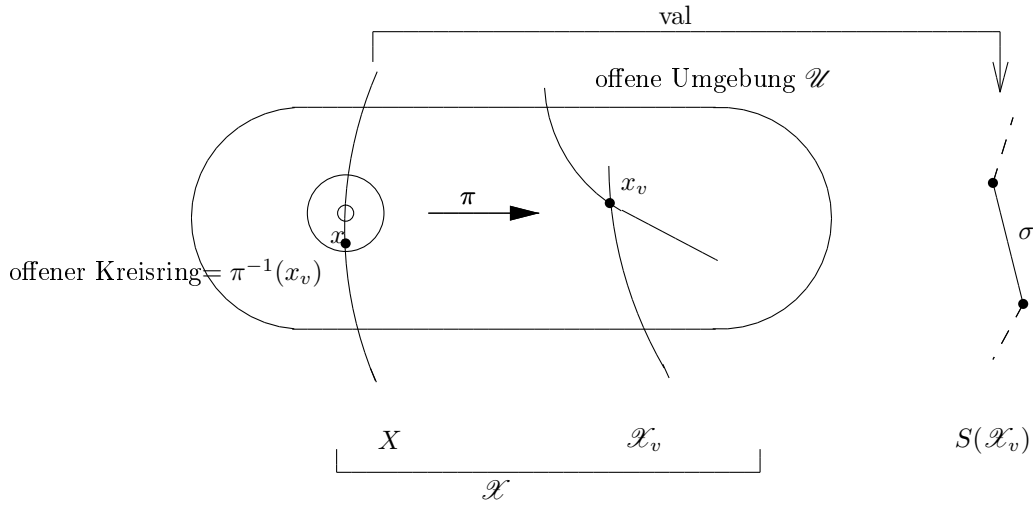
und setzen  $g(u_Y) := f(y)$  für irgendein  $y \in \pi^{-1}(y_v)$ , wobei  $y_v \in Y$  kein Doppelpunkt sein darf. Wir erhalten also  $f = g \circ \text{val}$ . Dies ist unabhängig von der Wahl von  $y_v$  und  $y$ , da nach der Multiplizitätenformel (siehe [Gu03, Proposition 7.4])

$$m_Y = f(y) = -\log \|1(y)\|_{\mathcal{O}(V)}$$

gilt. Nun ist  $g$  stetig und auf den Kanten des Skelettes  $S(\mathcal{X}_v)$  affin. Um letzteres einzusehen, wählen wir eine Kante  $\sigma \in S(\mathcal{X}_v)$  fest. Dann entspricht  $\sigma$  einem Doppelpunkt  $x_v$  der

4.2. Die Poincaré-Lelong Gleichung für  $\mathbf{L} = \mathbf{O}_X$

speziellen Faser  $\mathcal{X}_v$  und wir wählen eine Trivialisierung von  $\mathcal{L}$  in  $x_v$ . Lokal ergibt sich die folgende Situation



wobei der offene Kreisring  $\pi^{-1}(x_v)$  gegeben ist durch  $\{\zeta \in \mathbb{C}_K^\times \mid |\rho| < |\zeta| < 1\}$ . Aufgrund der Wahl der Trivialisierung entspricht der 1-Schnitt einer regulären Funktion  $\gamma \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ , die auf der generischen Faser invertierbar ist, und wir erhalten (vergleiche (4.1))

$$f = -\log \|1(y)\|_{\mathcal{L}} = -\log |\gamma(y)|_v$$

für alle  $y \in U$  mit  $y_v \in \mathcal{U}_v$ , wobei  $U$  die generische Faser von  $\mathcal{U}$  ist. Da die Trivialisierung im Doppelpunkt  $x_v$  gewählt wurde, läßt sich  $\gamma$  auf  $\pi^{-1}(x_v)$  als Laurentreihe darstellen. Weil  $\gamma$  in  $\pi^{-1}(x_v)$  keine Nullstelle hat, folgt mit Lemma [BGR84, 9.7.1/1], dass die Laurentreihe von  $\gamma$  auf  $\pi^{-1}(x_v)$  einen dominanten Term hat. Also gilt

$$|\gamma(y)|_v = |a_n y^n|_v \tag{4.6}$$

für einen Summanden aus der Laurentdarstellung von  $\gamma$ . Nun gilt

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(x_v) & \xrightarrow{\text{val}} & \sigma \\ \downarrow f = -\log |\gamma|_v & \searrow \exists g & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

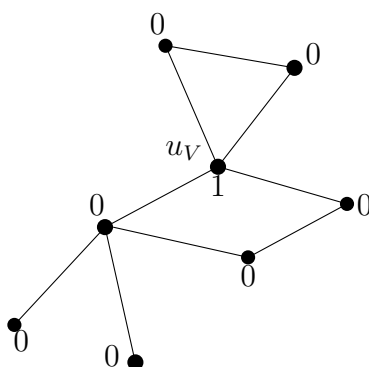
wobei die Existenz von  $g$  aus (4.6) folgt, da  $g$  nur abhängig ist von  $|y|$ . Wir erhalten  $g(u) = n \cdot u + v(a_n)$  und damit ist  $g$  affin.

#### 4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen

**4.2.3.** Damit haben wir gezeigt, dass  $g$  auf  $S(\mathcal{X}_v)$  durch die Funktionswerte

$$g(u_Y) = \delta_{VY} = \begin{cases} 1 & Y = V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in den Eckpunkten  $u_Y$  von  $S(\mathcal{X}_v)$  eindeutig bestimmt ist. Hierbei läuft  $Y$  über alle irreduziblen Komponenten von  $\mathcal{X}_v$ . Es ergibt sich dann exemplarisch das folgende Bild zu  $g$ :



wobei die Kanten alle Länge  $v(\rho)$  haben und der Funktionswert für  $g$  in jeder Ecke von  $S(\mathcal{X}_v)$  angegeben ist.

**4.2.4.** Als letzte Vorbereitung, bevor wir die Poincaré-Lelong Gleichung überprüfen, wollen wir uns noch die Schnittzahl von  $V$  mit einer beliebigen irreduziblen Komponente  $Y$  von  $\mathcal{X}_v$  ansehen. Zunächst gilt  $\deg_{\mathcal{O}(V)}(Y) = V.Y$  für alle irreduziblen Komponenten  $Y$  von  $\mathcal{X}_v$ . Weiter gilt  $V.Y = 1$ , falls  $Y$  benachbart ist zu  $V$ . Dieses erhalten wir nach 4.1.4, weil wir o.B.d.A. annehmen dürfen, dass es keine Doppelkanten in  $S(\mathcal{X}_v)$  gibt. Des Weiteren gilt  $V.Y = 0$ , falls  $Y$  und  $V$  sich nicht schneiden. Bleibt also noch  $V.V$  zu untersuchen. Da wir  $\rho$  als Funktion auf  $\mathcal{X}$  ansehen können, erhalten wir den Divisor  $\text{div}(\rho) = \sum_Y Y$  und damit

$$\begin{aligned} V.V &= (V - \text{div}(\rho)).V \quad (\text{da } \rho \text{ rationale Funktion}) \\ &= \left( V - \sum_Y Y \right).V = - \sum_{Y \neq V} Y.V \\ &= - \sum_{Y \text{ benachbart zu } V} \underbrace{Y.V}_{=1} = - \text{Anzahl der zu } V \text{ benachbarten Kanten} \\ &=: -\text{Valenz}(u_V) \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir also

$$\begin{aligned} V.Y &= 1 && \text{für } Y \neq V, Y \text{ benachbart zu } V \\ V.Y &= 0 && \text{für } Y \neq V, Y \text{ nicht benachbart zu } V \\ V.V &= -\text{Valenz}(u_V) \end{aligned}$$

**4.2.5.** Kommen wir nun zum Überprüfen der nicht-archimedischen Poincaré-Lelong Gleichung (siehe (4.5)):

$$\begin{aligned} \Delta g &\stackrel{(4.5)}{=} \underbrace{-g'' dx}_{= 0 \text{ weil } g \text{ stückweise linear}} - \sum_{p \in S(\mathcal{X}_v)} \left( \sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(p)} d_{\vec{v}} g(p) \right) \delta_p \\ &= - \sum_Y \left( \sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(u_Y)} d_{\vec{v}} g(u_Y) \right) \delta_{u_Y} \end{aligned}$$

wobei eine Ecke  $u_Y$  im Skelett  $S(\mathcal{X}_v)$  einer irreduziblen Komponente  $Y$  in  $\mathcal{X}_v$  entspricht. Es folgt

$$\Delta g = - \left( \sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(u_V)} d_{\vec{v}} g(u_V) \right) \delta_{u_V} - \sum_{Y \text{ benachbart zu } V} \left( \sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(u_Y)} d_{\vec{v}} g(u_Y) \right) \delta_{u_Y}$$

da in der inneren Summe nur  $u_V$  und die zu  $u_V$  benachbarten Ecken  $u_Y$  des Skelettes einen Beitrag ungleich Null liefern. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Delta g &= - \underbrace{\left( \sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(u_Y)} (-1) \right)}_{= \#\text{benachbart} = \text{Valenz}(u_Y)} \delta_{u_V} - \sum_{Y \text{ benachbart zu } V} 1 \cdot \delta_{u_Y} \end{aligned}$$

da im zweiten Summanden für die innere Summe nur der von  $u_Y$  zu  $u_V$  zeigende Vektor einen Beitrag ungleich Null liefert, der nach Konstruktion von  $g$  immer  $d_{\vec{v}} g(u_Y) = 1$  liefert. Also gilt

$$\begin{aligned} \Delta g &= \text{Valenz}(u_V) \cdot \delta_{u_V} - \sum_{Y \text{ benachbart zu } V} \delta_{u_Y} = -V.V \cdot \delta_{u_V} - \sum_{Y \neq V} Y.V \cdot \delta_{u_Y} \\ &= - \sum_Y Y.V \cdot \delta_{u_Y} = - \sum_Y \deg_{\mathcal{L}}(Y) \cdot \delta_{u_Y} \\ &\stackrel{(4.3)}{=} -c_1(L, \|\cdot\|) \end{aligned}$$

Weil in dieser Situation  $D = \text{div}(1) = 0$  auf  $X$  und damit auch auf  $S(\mathcal{X}_v)$  gilt, folgt

$$-\Delta g = c_1(L, \|\cdot\|) - \delta_0 .$$

#### 4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen

**4.2.6.** Damit lautet die nicht-archimedische Version der Poincaré-Lelong Gleichung in dieser Situation nun:

$$-\Delta g = c_1(L, \|\cdot\|)$$

### 4.3. Allgemeiner Fall

**4.3.1.** Sei nun  $X$  eine Kurve über  $K$  mit strikt semistabilem Modell  $\mathcal{X}$  über dem Bewertungsring. Weiter sei  $L = O(D)$  ein Geradenbündel auf  $X$  mit Modell  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\mathcal{D})$  auf  $\mathcal{X}$ . Dabei ist  $D$  beziehungsweise  $\mathcal{D}$  der zum Geradenbündel  $L$  beziehungsweise  $\mathcal{L}$  gehörende Divisor. Weiter gehört zum Divisor  $\mathcal{D}$  ein Schnitt  $s$  von  $\mathcal{L}$  mit  $\mathcal{D} = \text{div}(s)$  und wir setzen  $g := -\log \|s\|$ . Unser Ziel ist es die Poincaré-Lelong Gleichung

$$-\Delta(-\log \|s\|) = \Delta(\log \|s\|) = c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}) - \delta_{\text{val}(D)}$$

auf  $S(\mathcal{X}_v)$  zu zeigen.

**4.3.2.** Sei nun  $\bar{D}$  der horizontale Teil des Divisors  $\mathcal{D}$ , das heißt der Abschluß von  $D$ , und  $V$  der vertikale Teil. Es gilt also  $\mathcal{D} = \bar{D} + V$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \Delta(\log \|s\|) &= \Delta(\log \|s\|_{\mathcal{L}}) = \Delta(\log \|s\|_{\mathcal{O}(\mathcal{D})}) = \Delta(\log \|s\|_{\mathcal{O}(\bar{D}) \otimes \mathcal{O}(V)}) \\ &= \Delta(\log \|s\|_{\mathcal{O}(\bar{D})} + \log \|s\|_{\mathcal{O}(V)}) \\ &= \Delta(\log \|s\|_{\mathcal{O}(\bar{D})}) + \Delta(\log \|s\|_{\mathcal{O}(V)}) \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden gilt nun nach 4.2

$$\Delta(\log \|s\|_{\mathcal{O}(V)}) = c_1(\mathcal{O}(V), \|\cdot\|_{\mathcal{O}(V)}) ,$$

da  $\mathcal{O}(V)$  ein Geradenbündel mit generischer Faser gleich  $O_X$  ist. Wir werden später in diesem Abschnitt zeigen, dass für den ersten Summanden

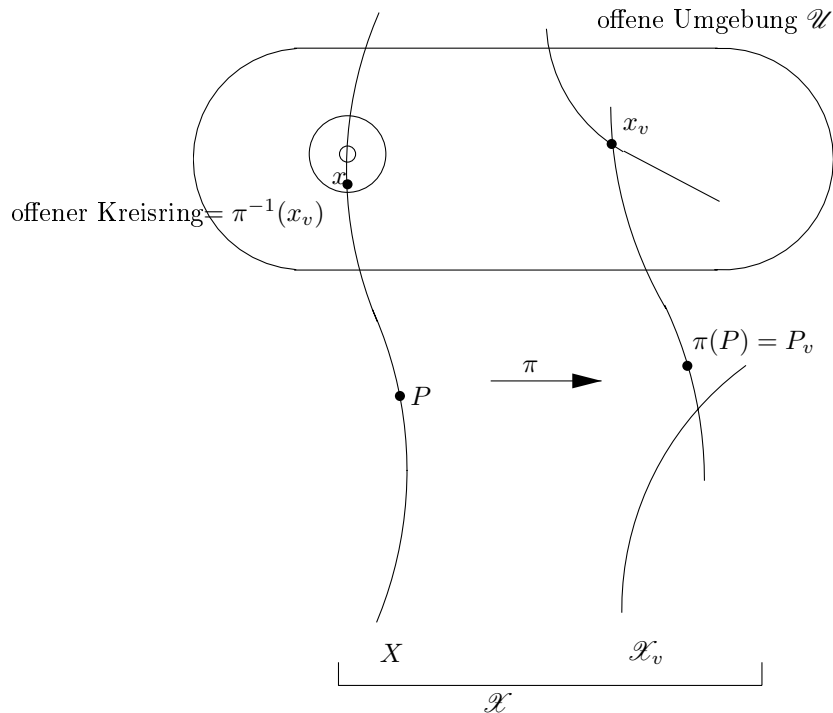
$$\Delta(\log \|s\|_{\mathcal{O}(\bar{D})}) = c_1(\mathcal{O}(\bar{D}), \|\cdot\|_{\mathcal{O}(\bar{D})}) - \delta_{\text{val}(D)}$$

gilt. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \Delta(\log \|s\|) &= c_1(\mathcal{O}(\bar{D}), \|\cdot\|_{\mathcal{O}(\bar{D})}) - \delta_{\text{val}(D)} + c_1(\mathcal{O}(V), \|\cdot\|_{\mathcal{O}(V)}) \\ &= c_1\left(\underbrace{\mathcal{O}(\bar{D}) \otimes \mathcal{O}(V)}_{=\mathcal{L}}, \underbrace{\|\cdot\|_{\mathcal{O}(\bar{D})} \|\cdot\|_{\mathcal{O}(V)}}_{=\|\cdot\|}\right) - \delta_{\text{val}(D)} = c_1(\mathcal{L}, \|\cdot\|) - \delta_{\text{val}(D)} \end{aligned}$$

wie gewünscht. Sei also von nun an  $\mathcal{D}$  ein rein horizontaler Divisor und wir nehmen aufgrund der Linearität o.B.d.A. an, dass  $\mathcal{D} = \overline{P}$  für ein  $P \in X(\mathbb{C}_K^\times)$ . Es gilt also  $\mathcal{L} = O(\overline{P})$  und damit  $\text{div}(s) = D = P$ . Unser Ziel ist  $-\log \|s\|$  auf dem Skelett  $S(\mathcal{X})$  zu bestimmen.

**4.3.3.** Sei im ersten Fall  $\pi(P)$  ein glatter Punkt und  $x_v$  ein beliebiger Doppelpunkt in  $\mathcal{X}_v$ . Dann können wir  $\pi^{-1}(x_v)$  mit dem Kreisring  $\{\zeta \in \mathbb{C}_K^\times \mid |\rho| < |\zeta| < 1\}$  identifizieren, wobei  $\rho$  von der Gleichung  $x \cdot y = \rho$  des Doppelpunktes kommt. Damit erhalten wir durch  $-\log |\zeta|$  eine Parametrisierung auf dem Intervall  $[0, v(\rho)]$ . Weiter wählen wir eine Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $x_v$  mit  $P \notin \mathcal{U}$ , das heißt wir haben die folgende Situation



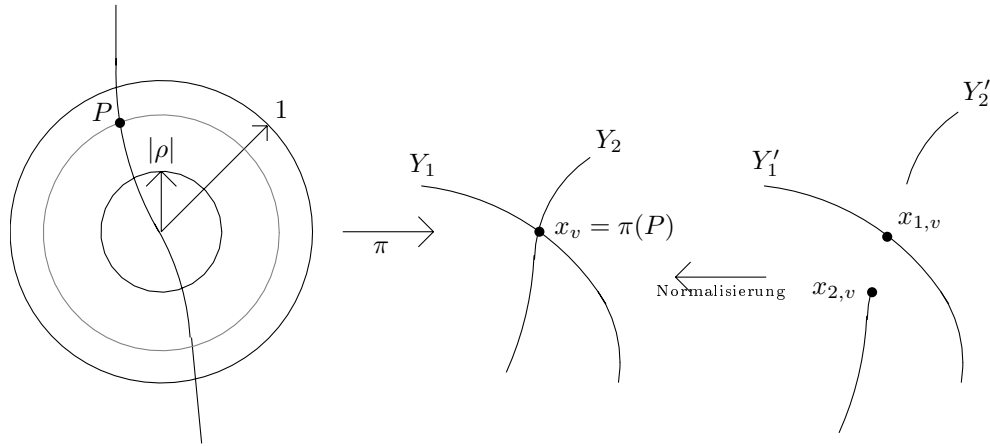
Damit hat  $s|_{\mathcal{U}} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{L})$  keine Nullstellen und wir erhalten eine Trivialisierung von  $\mathcal{L}|_{\mathcal{U}}$  bei der  $s|_{\mathcal{U}}$  der regulären Funktion  $\gamma = 1$  entspricht. Es folgt

$$-\log \|s(y)\| = -\log |\gamma(y)|_v = 0$$

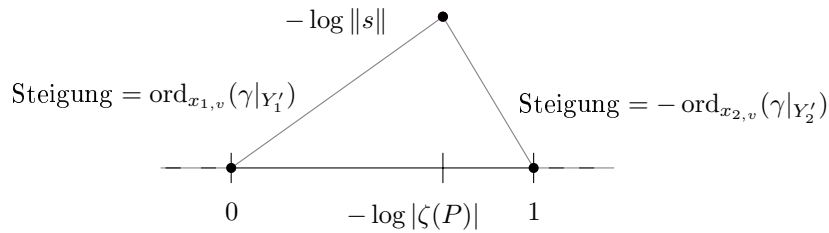
für  $y \in U$  mit Reduktion in  $\mathcal{U}_v$ . Insbesondere gilt dann  $-\log \|s(y)\| = 0$  für alle  $y \in \pi^{-1}(x_v)$ , was der untersuchten Skelettkante entspricht.

**4.3.4.** Im zweiten Fall sei nun  $\pi(P)$  ein Doppelpunkt und  $x_v$  irgendein Doppelpunkt in  $\mathcal{X}_v$ . Für den Fall, dass  $x_v \neq \pi(P)$ , haben wir um  $x_v$  lokal die gleiche Situation wie in 4.3.3 und wir erhalten wieder  $-\log \|s(y)\| = 0$  auf der zu  $x_v$  gehörenden Skelettkante. Sei also nun  $x_v = \pi(P)$ . Das heißt wir haben lokal die folgende Situation

#### 4. Arithmetisches Schnittprodukt für arithmetische Flächen



Nun gehen wir analog zu 4.2.2 vor und wenden das Lemma [BGR84, 9.7.1/1] jeweils auf die beiden Kreise  $K_1 := \{\zeta \in \mathbb{C}_K^\times \mid |\rho| < |\zeta| < |P|\}$  und  $K_2 := \{\zeta \in \mathbb{C}_K^\times \mid |P| < |\zeta| < 1\}$  an. Damit besteht  $-\log \|s\|$  auf der zu  $\pi(P)$  gehörenden Skelettkante aus zwei affinen Teilen. Weiter ist  $-\log \|s\|$  nach obigem und nach 4.3.3 auf allen anderen Skelettkanten und in allen Ecken des Skelettes identisch 0. Wir müssen also noch  $-\log \|s\|$  auf der zu  $\pi(P)$  gehörenden Skelettkante bestimmen. Wir wählen dazu eine Trivialisierung  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{L}$  in  $\pi(P) = x_v$ . Dann entspricht  $s|_{\mathcal{U}}$  einer regulären Funktion  $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$  und durch Verknüpfung mit obiger Normalisierung ist  $\gamma|_{Y'_i}$  auch eine reguläre Funktion in einer Umgebung von  $x_{i,v}$ . Dann gilt nach [BL85, Lemma 2.4], dass  $|\gamma(\zeta)| = |\zeta|^{\text{ord}_{x_{1,v}}(\gamma|_{Y'_1})}$  für  $\zeta \in K_2$  nahe bei 1 und  $|\gamma(\zeta)| = |\zeta|^{-\text{ord}_{x_{2,v}}(\gamma|_{Y'_2})}$  für  $\zeta \in K_1$  nahe bei  $|\rho|$ . Damit ergibt sich, nach eventueller Ummummerierung der Koordinaten, die folgende Situation



**4.3.5.** Nachdem wir alle Fälle für  $\pi(P)$  bearbeitet haben, wollen wir uns nun der ersten Chernform und anschließend der Poincaré-Lelong Gleichung zuwenden. Zur Erinnerung, es gilt

$$c_1(L, \|\cdot\|) = \sum_Y \text{deg}_{\mathcal{L}}(Y) \cdot \delta_{u_Y} .$$

Im ersten Fall, das heißt für  $\pi(P)$  glatt, erhalten wir direkt

$$\text{deg}_{\mathcal{L}}(Y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi(P) \in Y \\ 0 & \text{falls } \pi(P) \notin Y \end{cases}$$



und damit gilt  $c_1(L, \|\cdot\|) = \delta_{u_Y}$  für die irreduzible Komponente  $Y$  von  $\mathcal{X}_v$ , die  $\pi(P)$  enthält. Für diesen Fall haben wir gesehen, dass  $-\log \|s\| \equiv 0$  auf  $S(\mathcal{X}_v)$ . Weil nach Konstruktion  $\text{val}(P) = u_Y$  gilt, erhalten wir

$$0 = \Delta \log \|s\| = c_1(L, \|\cdot\|) - \delta_{\text{val}(P)} = \delta_{u_Y} - \delta_{\text{val}(P)} = 0$$

wie gewünscht. Im zweiten Fall, das heißt  $\pi(P)$  ist ein Doppelpunkt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{L}}(Y_1) &= \deg_{\mathcal{L}}(Y'_1) = \text{ord}_{x_{1,v}}(\gamma|_{Y'_1}) \\ \deg_{\mathcal{L}}(Y_2) &= \deg_{\mathcal{L}}(Y'_2) = \text{ord}_{x_{2,v}}(\gamma|_{Y'_2}) \\ \deg_{\mathcal{L}}(Y) &= 0 \text{ für } Y \neq Y_1, Y_2 \end{aligned}$$

und damit gilt  $c_1(L, \|\cdot\|) = \text{ord}_{x_{1,v}}(\gamma|_{Y'_1})\delta_0 + \text{ord}_{x_{2,v}}(\gamma|_{Y'_2})\delta_1$ . Weiter erhalten wir aus dem Graphen von  $-\log \|s\|$  in 4.3.4, dass

$$\begin{aligned} -\Delta(-\log \|s\|) &= \Delta \log \|s\| \\ &= \text{ord}_{x_{1,v}}(\gamma|_{Y'_1}) \cdot \delta_0 + (-\text{ord}_{x_{1,v}}(\gamma|_{Y'_1}) - \text{ord}_{x_{2,v}}(\gamma|_{Y'_2})) \cdot \delta_{\text{val}(P)} + \text{ord}_{x_{2,v}}(\gamma|_{Y'_2}) \cdot \delta_1 . \end{aligned}$$

Da nun nach [BL85, Proposition 3.1]

$$\text{ord}_{x_{1,v}}(\gamma|_{Y'_1}) + \text{ord}_{x_{2,v}}(\gamma|_{Y'_2}) = \deg \underbrace{\text{div}(\gamma|_{\pi^{-1}(x_v)})}_P = 1$$

gilt, folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \Delta \log \|s\| &= \text{ord}_{x_{1,v}}(\gamma|_{Y'_1}) \cdot \delta_0 + \text{ord}_{x_{2,v}}(\gamma|_{Y'_2}) \cdot \delta_1 - \delta_{\text{val}(P)} \\ &= c_1(L, \|\cdot\|) - \delta_{\text{val}(D)} \end{aligned}$$

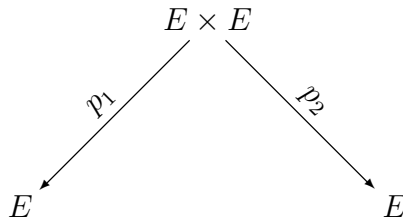
wie gewünscht.



# 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

## 5.1. Die Ausgangslage

**5.1.1.** Gegeben sei eine Tate elliptische Kurve  $E$  mit  $E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}}$ ,  $q \in \mathbb{C}_K^\times$ . Dazu wählen wir das Geradenbündel  $O(P)$ , wobei der 2-Torsionspunkt  $P = -q^{1/2}$  fest gewählt ist. Des Weiteren wählen wir einen kanonischen globalen Schnitt  $s_1$  von  $O(P)$  so, dass  $\text{div}(s_1) = P$  gilt. Darauf aufbauend wollen wir nun das Produkt  $E \times E$  der Tate elliptischen Kurve  $E$  betrachten. Wir haben also die folgende Situation



Unter diesen Voraussetzungen wählen wir das ample Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$ . Wir erhalten durch  $s := p_1^*(s_1) \otimes p_2^*(s_1)$  einen globalen Schnitt von  $L$  mit  $\text{div}(s) = P \times E + E \times P$ . Mit diesen Voraussetzungen ergibt sich das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K & \longrightarrow & L = p_1^*O(P) \otimes p_2^*O(P) \\
 \downarrow \text{triviales Geradenbündel} & & \downarrow s \\
 \mathbb{C}_K^\times \times \mathbb{C}_K^\times & \xrightarrow{p} & E^{\text{an}} \times E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}} \\
 \uparrow (\zeta, \zeta') \mapsto (\zeta, \zeta', \Theta(\zeta)\Theta(\zeta')) & & \uparrow
 \end{array}$$

Für Details und konkrete Beispiele siehe Kapitel 2 und 3. Zum Schluß wollen wir zur Vereinfachung der Notation noch  $M := q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  und  $\Lambda := \text{val}(M) = (\mathbb{Z}v(q)) \times (\mathbb{Z}v(q))$  setzen. Dabei erinnern wir hier an die Bewertungsabbildung  $\text{val} : (\mathbb{C}_K^\times)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die definiert ist durch  $\underline{x} \mapsto (v(x_1), \dots, v(x_n))$ .

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

**5.1.2.** Unser Ziel ist es nun für den 2-dimensionalen Fall die erste Chernform  $c_1(L, \|\cdot\|)$  auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  für spezielle Metriken zu definieren. Zunächst ist im komplexen Fall die erste Chernform  $c_1(L, \|\cdot\|)$  eine Differentialform vom Grad  $(1, 1)$ , die der Poincaré-Lelong Gleichung

$$dd^c \log \|s\|^{-2} = c_1(L, \|\cdot\|) - \delta_{\text{div}(s)}$$

genügt. Im nicht-archimedischen Fall ist so eine Entsprechung unbekannt. Wir wissen dort nur, was das Chambert-Loir Maß  $c_1(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2}$  ist. Dies liefert uns aber für mögliche Kandidaten einen guten Test, indem wir das Quadrat der Kandidaten ausrechnen und mit dem bekannten Chambert-Loir Maß vergleichen.

## 5.2. Die erste Chernform für eine Modellmetrik

In der tropischen Geometrie (siehe [AR10, 3.3]) konstruiert man zu einer stetigen stückweise linearen Funktion  $\varphi$  einen tropischen Zyklus  $\text{Trop}(\varphi)$ , genauer einen tropischen Divisor in  $\mathbb{R}^n$ , als gewichtete Summe von  $n - 1$  dimensionalen Polyedern. Da im tropischen Fall alle Definitionen „lokal“ sind, läßt sich diese Konstruktion auf unsere Situation  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  übertragen, auch wenn es sich nicht um einen Spezialfall von der in [AR10, Kapitel 3] betrachteten Situation handelt. Damit können wir dann, für die vorgegebene Zerlegung  $V1$  von  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ , eine erste Chernform  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  definieren, wobei die Metrik  $\|\cdot\|$  zum Modell  $\mathcal{L}$  von  $L$ , durch eine auf  $V1$  stetige und stückweise lineare Funktion  $f$  bestimmt ist (siehe Abschnitt 2.5).

**Definition 5.2.1.** Wir werden das im Hinblick auf später ein bisschen allgemeiner machen. Zunächst sei  $V^{(k-1)}$  die Menge aller  $k - 1$  dimensionalen Polytope von  $V1$ . Dann definieren wir für einen  $k$  dimensionalen tropischen Zyklus  $C = \sum_{\Delta \in V^{(k)}} \omega(\Delta)[\Delta]$  das Schnittprodukt durch

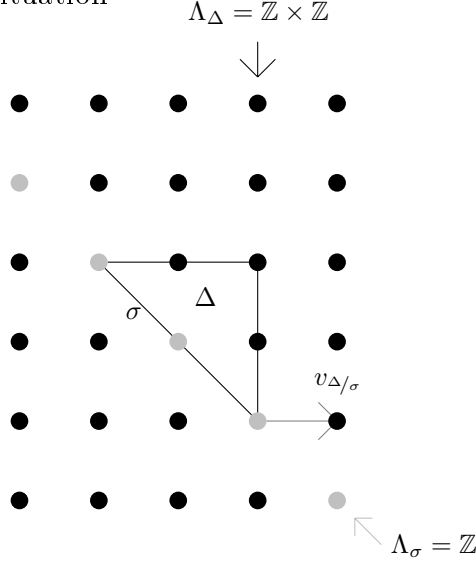
$$f.C := \sum_{\sigma \in V^{(k-1)}} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma)[\sigma]$$

als tropischen Zyklus der Dimension  $k - 1$ . Dabei ist  $\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma) \in \mathbb{R}$  und  $k = 1, 2$ .

**5.2.2.** Nun wollen wir näher darauf eingehen, wie die Gewichte  $\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma)$  definiert werden. Gegeben sei  $\Delta \in V^{(k)}$  und  $\sigma$  sei eine Fläche von  $\Delta$  der Kodimension 1. Dann bezeichnen wir mit  $V_\Delta$  bzw.  $V_\sigma$  den kleinsten affinen Unterraum von  $\mathbb{R}^2$  der  $\Delta$  bzw.  $\sigma$  enthält. Wir wählen nun einen neuen Ursprung  $0_{V_\Delta} = 0_{V_\sigma}$  von  $V_\Delta$  und  $V_\sigma$  in (einer Ecke von)  $\sigma$ . Im Folgenden benutzen wir immer diese Vektorraumstruktur in  $V_\Delta$  und  $V_\sigma$ . Des Weiteren setzen wir

5.2. Die erste Chernform für eine Modellmetrik

$\Lambda_\Delta := \mathbb{Z}^2 \cap V_\Delta$  bzw.  $\Lambda_\sigma := \mathbb{Z}^2 \cap V_\sigma$  und stellen fest, dass  $\Lambda_\Delta$  frei vom Rang  $\dim(\Delta)$  und  $\Lambda_\sigma$  frei vom Rang  $\dim(\sigma) = \dim(\Delta) - 1$  ist. Mit dem Elementarteilersatz (siehe [Bos01, Kapitel 2, Abschnitt 9, Theorem 2]) folgt, da  $\Lambda_\sigma$  saturiert ist, also der Elementarteiler gleich 1 ist, dass  $\Lambda_\Delta/\Lambda_\sigma \cong \mathbb{Z}$ . Weil  $\dim(\Delta) - 1 = \dim(\sigma)$ , existiert eine Funktion  $g \in V_\Delta^*$  mit  $g(\sigma) = 0$ ,  $g(\Delta) \geq 0$  und  $g(\Delta) \neq 0$ . Nun wählen wir einen Repräsentanten  $v_{\Delta/\sigma}$  der erzeugenden Klasse von  $\Lambda_\Delta/\Lambda_\sigma$  mit  $g(v_{\Delta/\sigma}) > 0$ . Das heißt  $v_{\Delta/\sigma}$  zeigt „in Richtung“ von  $\Delta$ . Für  $k = 2$  ergibt sich beispielhaft die folgende Situation



Wir definieren  $f_\Delta := (f - f(0_{V_\Delta}))|_\Delta$  und setzen  $f_\Delta$  linear zu einer Funktion auf  $V_\Delta$  fort, die wir wieder mit  $f_\Delta$  bezeichnen. Analog definieren wir  $f_\sigma$  und es gilt dann  $f_\sigma = f_\Delta|_{V_\sigma}$ . Nach diesen Vorarbeiten definieren wir nun  $\omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma)$  wie folgt

$$\omega_{f,C}^{\text{AR}} : V^{(k-1)} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sigma \mapsto \left( \sum_{\substack{\Delta \in V^{(k)} \\ \sigma < \Delta}} f_\Delta(\omega(\Delta) \cdot v_{\Delta/\sigma}) \right) - f_\sigma \left( \sum_{\substack{\Delta \in V^{(k)} \\ \sigma < \Delta}} \omega(\Delta) \cdot v_{\Delta/\sigma} \right).$$

Zu beachten ist dabei, dass  $\sum_\Delta \omega(\Delta) \cdot v_{\Delta/\sigma} \in \Lambda_\sigma \subseteq \Lambda_\Delta$ , aber  $v_{\Delta/\sigma} \notin V_\sigma$ .

**Definition 5.2.3.** Für den tropischen Zyklus  $C = \mathbb{R}^2/\Lambda$  mit allen Gewichten 1, das heißt es gilt  $\omega(\Delta) = 1$  für alle  $\Delta \in V^{(2)}$ , definieren wir die erste Chernform als tropischen Zyklus durch

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) := \text{Trop}(f) := f.C = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma) \cdot [\sigma].$$

Dabei gilt

$$\omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma) = \sum_{\Delta \in V^{(2)}, \sigma < \Delta} f_\Delta(v_{\Delta/\sigma}) - f_\sigma \left( \sum_{\Delta \in V^{(2)}, \sigma < \Delta} v_{\Delta/\sigma} \right).$$

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

Wir werden im Folgenden diesen tropischen Zyklus oft als Strom auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  interpretieren, der in der üblichen Weise auf den 1-Formen von  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  operiert (siehe Bemerkung 5.3.4).

### 5.3. Der Chambert-Loir Test

Unser Ziel ist es einen Test herzuleiten, mit dem wir die Definition der ersten Chernform überprüfen können. Dazu betrachten wir zunächst mit  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  den Fall mit einer Modellmetrik, indem wir erklären, wie der tropische Selbstschnitt  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2}$  berechnet wird. Der Test prüft dann, ob der Selbstschnitt mit dem Chambert-Loir Maß übereinstimmt. Als zweites betrachten wir den rein kanonischen Fall. Hier ist bisher nur das Chambert-Loir Maß  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2}$  bekannt. Davon ausgehend definieren wir die erste Chernform  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})$  und Rechenregeln für das Wedge-Produkt so, dass  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2}$  mit dem Chambert-Loir Maß übereinstimmt. Anschließend wollen wir uns noch mit der Frage beschäftigen, wie der tropische Selbstschnitt zu bestimmen ist, wenn die erste Chernform sowohl aus einem von einer Modellmetrik stammenden (das heißt diskreten) als auch aus einem von der kanonischen Metrik stammenden (das heißt stetigen) Teil besteht. Die erste Chernform ist also eine Summe aus 1-Formen und gewichteten Kanten. Zum Abschluß des Abschnittes werden wir auch in dieser Situation einen Test herleiten um unsere Definition der ersten Chernform zu überprüfen.

**Definition 5.3.1.** Für eine stetige stückweise lineare Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  und einen  $k$ -dimensionalen tropischen Zyklus  $C = \sum_{\Delta \in V^{(k)}} \omega(\Delta)[\Delta]$  haben wir das tropische Schnittprodukt  $f.C = \sum_{\Delta \in V^{(k)}} \omega_f(\Delta)[\Delta]$  in 5.2.1 definiert. Jetzt definieren wir den tropischen Selbstschnitt mit Hilfe des tropischen Schnittprodukts (siehe 5.2.1) durch

$$(f.C)^2 := f.(f.C) := f|_{f.C}.(f.C) .$$

Für den tropischen Zyklus  $C = \mathbb{R}^2/\Lambda = \sum_{\Delta \in V^{(2)}} [\Delta]$  mit allen Gewichten  $\omega(\Delta) = 1$  haben wir in 5.2.3 die erste Chernform

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = f.C = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma) \cdot [\sigma]$$

erhalten. Wir setzten  $C_f := c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  und erhalten mit der obigen Definition

$$(C_f)^{\wedge 2} := c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} := f|_{C_f}.C_f .$$

In diesem Fall ist der tropische Selbstschnitt also einen Ausdruck der Form

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} = \sum_{\sigma \in V^{(0)}} \omega_{f.C_f}^{\text{AR}}(\sigma)[\sigma] ,$$

wobei die Gewichte  $\omega_{f.C_f}^{\text{AR}}(\sigma)$  gegeben sind durch

$$\omega_{f.C_f}^{\text{AR}}(\sigma) = \left( \sum_{\Delta \in V^{(1)}, \sigma < \Delta} f_{\Delta}(\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\Delta) \cdot v_{\Delta/\sigma}) \right) - f_{\sigma} \left( \sum_{\Delta \in V^{(1)}, \sigma < \Delta} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\Delta) \cdot v_{\Delta/\sigma} \right) .$$

Zu beachten ist dabei, dass für die Berechnung des tropischen Selbstschnitts dieses Mal der tropische Zyklus  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  als Ausgangswert gegeben ist. Das heißt es müssen bei der Rechnung des tropischen Schnittprodukts die Gewichte von  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  beachtet werden.

**Bemerkung 5.3.2.** Mit der obigen Definition des tropischen Selbstschnitts bekommen wir jetzt auch Regeln um das Wedge-Produkt der ersten Chernform mit sich selbst bestimmen zu können. Damit erhalten wir nun den angekündigten Test für unsere erste Chernform, indem wir dieses Ergebnis mit dem aus der Literatur bekannten Chambert-Loir-Maß vergleichen. Es soll also

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2}$$

gelten, was wir den Chambert-Loir Test nennen. In Abschnitt 5.5 wird dieser Test für unsere Zerlegung  $V1$  im 2-dimensionalen Fall bewiesen.

**5.3.3.** Bisher haben wir uns im Zusammenhang zur ersten Chernform immer nur mit einer Modellmetrik beschäftigt. Unser Ziel ist es nun auch eine erste Chernform  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})$  für die kanonische Metrik  $\|\cdot\|_{\text{kan}}$  zu definieren, die wie bei der Modellmetrik einen Chambert-Loir-Test erfüllt. Das heißt hier, dass

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2} = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2}$$

gelten soll, wobei  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2}$  das Chambert-Loir Maß ist. Nach [Gub10, Corollary 7.3] gilt

$$c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2} = \frac{2}{v(q)^2} (dx \wedge dy) .$$

In Analogie zum komplexen Fall machen wir jetzt den Ansatz  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) = adx + bdy$  und bestimmen  $a, b \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2/(v(q)\mathbb{Z})^2)$  so, dass der Chambert-Loir-Test erfüllt wird. Dazu müssen wir zunächst die Regeln für das Wedge-Produkt festlegen. Auch hier gehen wir analog zum komplexen Fall vor. Dort hat man  $(1, 1)$ -Formen, für die das Wedge-Produkt kommutiert und deren Wedge-Quadrat Null ergibt. Wir definieren also die Rechenregeln für unser neues Wedge-Produkt wie folgt:

- $(vdx) \wedge (wdy) = vw(dx \wedge dy)$  mit  $v, w \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ .

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

- $dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy$
- $dx \wedge dy = dy \wedge dx$

Die 2.Rechenregel stimmt im komplexen Fall nur für reine  $(1, 1)$ -Formen. Weil die Regel aber nur im Fall der ersten Chernform  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})$  benötigt wird, ist dies für unsere Anwendung ausreichend. Im Allgemeinen sollte man die Superformen von Lagerberg (siehe [Lag12]) benutzen, wie dies in [CD12] gemacht wird.

Damit können wir unseren obigen Ansatz fortsetzen und  $a, b$  entsprechend bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2} &= (adx + bdy)^{\wedge 2} \\
 &= a^2 \underbrace{\left( \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} \right)} + ab(dx \wedge dy) + ab \underbrace{\left( \underbrace{dy \wedge dx}_{=dx \wedge dy} \right)} + b^2 \underbrace{\left( \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} \right)} \\
 &= 2ab(dx \wedge dy) \\
 &\stackrel{\text{CL-Test}}{=} \frac{2}{v(q)^2} (dx \wedge dy)
 \end{aligned}$$

Die einfachste Wahl ist somit  $a = v(q)^{-1} = b$ . Wir definieren deshalb

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) := \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)} .$$

Aufgrund der Konstruktion erfüllt diese Definition den Chambert-Loir-Test.

**Bemerkung 5.3.4.** Wir haben in Definition 5.2.3 die erste Chernform bezüglich einer Modellmetrik zur Zerlegung  $V1$  als tropischen Zyklus der Dimension 1 definiert, was einer gewichteten Kantensumme auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  entspricht. Nun haben wir die erste Chernform bezüglich der kanonischen Metrik als Differentialform auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  definiert. Um das unter ein Dach zu bringen, können wir beide Definitionen als Ströme auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  interpretieren, die auf den 1-Formen von  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  in der üblichen Weise operieren. Dabei wird die Kante  $\sigma$  mit dem Dirac-Strom  $\delta_\sigma$  identifiziert.

**5.3.5.** Jetzt wollen wir die Frage studieren, was passiert, wenn in der ersten Chernform auch gemischte Terme auftreten. Das heißt wir untersuchen den Fall, in dem sowohl die von der kanonischen Metrik bekannten 1-Formen als auch die von einer Modellmetrik bekannte gewichtete Kantensumme in der ersten Chernform auftauchen. Die einfachste Möglichkeit dies zu untersuchen, ist die folgende Definition

$$c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|) := c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) + c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) .$$



Mit unseren Ergebnissen aus 5.3.3 und 5.2.3 bedeutet das

$$c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|) = \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)} + \sum_{\tau \in V^{(0)}} \omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(\tau)[\tau],$$

wobei  $C = \mathbb{R}^2/\Lambda$ . Damit gilt formal

$$\begin{aligned} c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} &= (c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) + c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|))^{\wedge 2} \\ &= c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2} + c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} \\ &\quad + c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) + c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich, dass  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  bzw.  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})$  eine gewichtete Summe von Ausdrücken der Form  $dx \wedge [\sigma_i]$  bzw.  $[\sigma_i] \wedge dx$  ist. Deshalb müssen wir unsere Definition des Wedge-Produkts entsprechend erweitern.

**Definition 5.3.6.** Wir setzen

$$dx \wedge [\sigma] := dx|_{\sigma} =: [\sigma] \wedge dx \quad \text{und} \quad dy \wedge [\sigma] := dy|_{\sigma} =: [\sigma] \wedge dy$$

für ein  $\sigma \in V^{(1)}$  was dem euklidischen Maß von  $\sigma$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung entspricht. Es gilt somit, dass  $dx|_{\sigma}$  und  $dy|_{\sigma}$  je nach Lage der Kante  $\sigma \in V^{(1)}$  die Masse  $\frac{v(q)}{2}$  oder 0 hat. Zu beachten ist hier, dass wir Kommutativität verlangen. Normalerweise wäre das Wedge-Produkt jedoch antikommutativ graduiert. Bei uns verhalten sich  $dx$  und  $dy$  also wie 2-Formen. Durch diese Definition bleiben auch alle vorigen Rechenregeln weiterhin erhalten. Damit gilt in der Zerlegung  $V1$  zum Beispiel  $dx|_{[\sigma]} = dy|_{[\sigma]}$  für  $\sigma = \overline{P_2 P_6}$ .

**5.3.7.** Mit dieser Definition erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} &= c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2} + c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} \\ &\quad + 2 \cdot c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|). \end{aligned}$$

Um nun auch in dieser Situation den Chambert-Loir Test machen zu können, brauchen wir ein Vergleichsergebnis. Nun gilt nach Chambert-Loir

$$c_1(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2} + c_1(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} + 2 \cdot c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|).$$

Da das Wedge-Produkt im Sinne von Chambert-Loir nur topdimensional definiert ist, ist  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|)$  formal zu verstehen. Es handelt sich jedoch um ein Maß, welches wir mit Methoden aus der algebraischer Geometrie im nächsten Abschnitt bestimmen. Zunächst

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

haben wir jetzt ein Vergleichsergebnis gefunden. Das heißt für den Chambert-Loir Test ist in diesem Fall

$$c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2}$$

zu prüfen.

**5.3.8.** Bisher haben wir schon  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2} = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^{\wedge 2}$  gezeigt (siehe 5.3.3) und in 5.5 werden wir noch  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2}$  sehen. Um dann zu zeigen, dass  $c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2}$  gilt, reicht es also

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|)$$

zu zeigen.

**5.3.9.** Wie schon angekündigt wollen wir jetzt  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|)$  bestimmen. Dazu sei  $\mathcal{X}$  das Modell einer projektiven Varietät  $X$  mit  $d := \dim(X)$ . Weiter seien  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d$  Modelle der Geradenbündel  $L_1, \dots, L_d$  auf  $X$ . Dann gilt nach [Gub10, Proposition 3.8 (e)]

$$c_1(L_1, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_1}) \wedge \dots \wedge c_1(L_d, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_d}) := \sum_{Y \in \text{irr}(\mathcal{X}_v)} \deg_{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d}(Y) \delta_{\xi_Y}.$$

Zu beachten ist, dass die Aussage so nur für Modelle mit reduzierter spezieller Faser gilt, was aber bei uns der Fall ist. Dabei ist  $\xi_Y \in X^{\text{an}}$  mit Reduktion  $\pi(\xi_Y) = \zeta_Y$  eindeutig und  $\text{irr}(\mathcal{X}_v)$  die Menge der irreduziblen Komponenten der speziellen Faser  $\mathcal{X}_v$  ist. Unser Ziel ist es  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|)$  zu bestimmen. Deshalb sei nun  $X = E^2$ ,  $d = \dim(E^2) = 2$  und es gilt mit einer Variante von Tates Grenzwertargument (siehe [BG06, Beweis von Theorem 9.5.4])

$$c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^{-2} \cdot c_1(\underbrace{[m]^*L}_{=L^{\otimes m^2}}, [m]^*\|\cdot\|) \wedge c_1(L, \|\cdot\|) \right).$$

Zusammen mit dem vorigem Ergebnis für  $L_1 = L^{\otimes m^2}$  und  $L_2 = L$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^{-2} \cdot c_1([m]^*L, [m]^*\|\cdot\|) \wedge c_1(L, \|\cdot\|) \right) \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^{-2} \cdot \sum_{Y \in \text{irr}(\mathcal{X}_v^{(m)})} \deg_{[m]^*\mathcal{L}, \mathcal{L}}(Y) \delta_{\xi_Y} \right). \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass in den meisten Fällen  $\mathcal{L}_m := [m]^*\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^{\otimes m^2}$  ist. Nun gilt  $\deg_{\mathcal{L}_m}(Y) = \deg_{\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_m}(Y)$ , wegen der Linearität in jeder Komponente, und

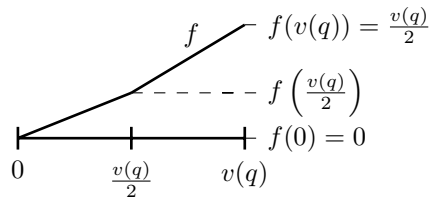
$$\deg_{\mathcal{L}_m, \mathcal{L}}(Y) = \frac{1}{2} (\deg_{\mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}}(Y) - \deg_{\mathcal{L}_m}(Y) - \deg_{\mathcal{L}}(Y))$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^{-2} \cdot \sum_{Y \in \text{irr}(\mathcal{X}_v^{(m)})} \text{deg}_{\mathcal{L}_m, \mathcal{L}}(Y) \delta_{\xi_Y} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^{-2} \cdot \sum_{Y \in \text{irr}(\mathcal{X}_v^{(m)})} \frac{1}{2} \cdot [\text{deg}_{\mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}}(Y) - \text{deg}_{\mathcal{L}_m}(Y) - \text{deg}_{\mathcal{L}}(Y)] \cdot \delta_{\xi_Y} \right). \end{aligned}$$

## 5.4. Der Test für eine Modellmetrik im 1-dimensionalen Fall

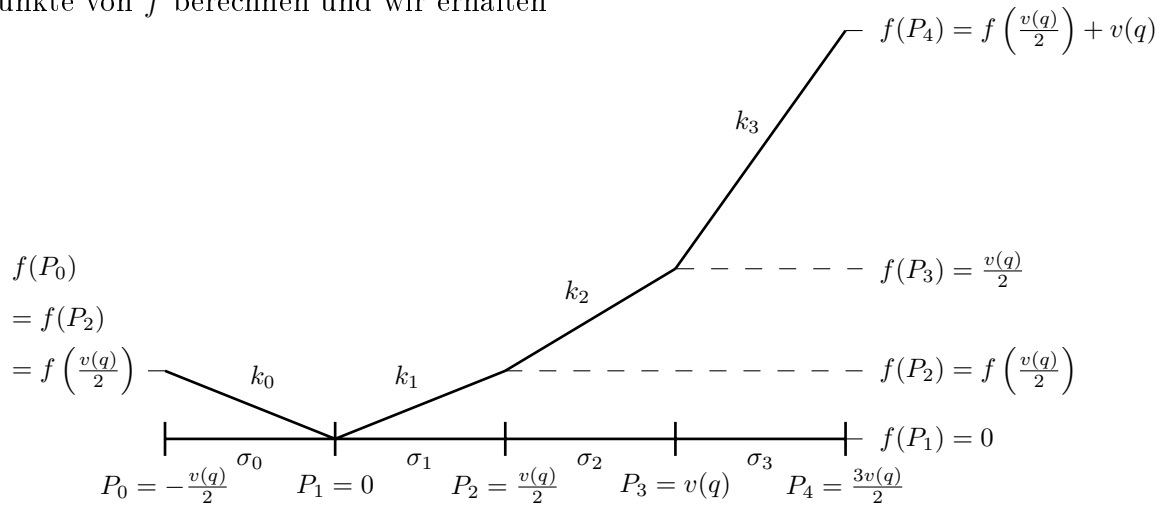
O.B.d.A.  $v(q) > 0$ . Wir verallgemeinern unsere eindimensionalen Beispiele aus Abschnitt 3.1 für beliebige Funktionen  $f$ , berechnen die zugehörige erste Chernform und vergleichen diese dann mit dem Chambert-Loir-Maß. Als einzige Voraussetzung für die Funktion  $f$  stellen wir die Normierungsbedingung  $f(0) = 0$ . Wir haben die folgende Ausgangssituation



Des Weiteren wissen wir aus Abschnitt 2.5 Gleichung (2.5), dass

$$f(u + \lambda) = f(u) + \frac{\lambda^2}{2v(q)} + \frac{\lambda u}{v(q)}$$

für alle  $\lambda \in \Lambda = \text{val}(q^{\mathbb{Z}}) = v(q)\mathbb{Z}$  und alle  $u \in \mathbb{R}$  gilt. Damit lassen sich nun alle weiteren Punkte von  $f$  berechnen und wir erhalten



## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

wobei die Gewichte  $\omega(\sigma)$  für alle Kanten  $\sigma$  gleich 1 sind. Um nun die erste Chernform zu bestimmen, benutzen wir die Konstruktion aus Abschnitt 5.2. Wir müssen also als erstes die Vektoren  $v_{\sigma/\tau}$  für alle Kanten  $\sigma$  mit den jeweils zugehörigen Punkten  $\tau$  berechnen. Zunächst gilt  $\Lambda_\sigma = V_\sigma \cap \mathbb{Z} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  für alle Kanten  $\sigma$  und wir suchen eine Funktion  $g \in V_\sigma^* = \{g : V_\sigma \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ linear}\}$ , die die folgenden drei Eigenschaften hat:

- $g(\tau) = 0$
- $g(\sigma) \geq 0$
- $g(\sigma) \neq 0$

In der Konstruktion in 5.2.2 wird vorausgesetzt, dass der Punkt  $\tau$  in 0 liegt. Deshalb müssen wir, je nach Wahl von  $\sigma$  und  $\tau$ , eine Translation vornehmen. Beispielhaft führen wir die Berechnung von  $v_{\sigma/\tau}$  für  $\sigma = \sigma_1 = \overline{P_1 P_2}$  und  $\tau = P_1$  durch. In diesem Fall müssen wir eine Translation um  $-P_2$  vornehmen und wir erhalten  $P_1^* := P_1 - P_2 = -\frac{v(q)}{2}$ ,  $P_2^* := P_2 - P_2 = 0$ . Auf diese neuen Punkte wenden wir nun die Konstruktion an und wählen  $g$  durch

$$g(P_1^*) = g\left(-\frac{v(q)}{2}\right) := 1 \quad \text{und} \quad g(P_2^*) = g(0) := 0 .$$

Klar ist, dass dieses  $g$  die obigen drei Eigenschaften erfüllt. Wir brauchen nun einen Repräsentanten  $v_{\sigma/\tau}$  des erzeugenden Elementes  $[v_{\sigma/\tau}]$  von  $\Lambda_\sigma/\Lambda_\tau = \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}$  für den  $g(v_{\sigma/\tau}) > 0$  gilt. Die möglichen Erzeuger von  $\mathbb{Z}$  sind 1 und  $-1$ . Es bleibt somit zu prüfen, welchen Wert diese Erzeuger unter  $g$  haben. Es gilt  $g(1) = \frac{2}{v(q)} > 0$  und  $g(-1) = -\frac{2}{v(q)} < 0$ . Damit ist  $v_{\sigma/\tau} := 1$  der gesuchte Repräsentant. Insgesamt erhalten wir für alle Kanten und Punkte im Fundamentalbereich  $[0, v(q)]$

$v_{\sigma_0/P_1}$	$v_{\sigma_1/P_1}$	$v_{\sigma_1/P_2}$	$v_{\sigma_2/P_2}$
1	-1	1	-1

Damit läßt sich nun  $\omega_f^{\text{AR}}(\tau)$  für alle Punkte  $\tau$  bestimmen. Nach der Konstruktion in 5.2.2 gilt dann

1.Fall:  $\tau = P_1$ . Hier ist keine Translation nötig, da  $f(P_1) = 0$ . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \omega_{f,C}^{\text{AR}}(P_1) &= (f_{\sigma_0}(\omega(\sigma_0)v_{\sigma_0/P_1}) + f_{\sigma_1}(\omega(\sigma_1)v_{\sigma_1/P_1})) \\ &\quad - f_{P_1}(\omega(\sigma_0)v_{\sigma_0/P_1} + \omega(\sigma_1)v_{\sigma_1/P_1}) \\ &= f_{\sigma_0}(-1) + f_{\sigma_1}(1) - f_{P_1}(0) \\ &= \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) . \end{aligned}$$

2.Fall:  $\tau = P_2$ . Hier ist eine Translation um  $-f(P_2)$  durchzuführen und wir erhalten dann:

$$\omega_{f,C}^{\text{AR}}(P_2) = 1 - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) &= \omega_{f,C}^{\text{AR}}(P_1) \cdot [P_1] + \omega_{f,C}^{\text{AR}}(P_2) \cdot [P_2] \\ &= \left( \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) \right) \cdot [P_1] + \left( 1 - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) \right) \cdot [P_2] . \end{aligned}$$

Aus [Gub10, Proposition 3.8(e)], wissen wir, dass  $\omega_{f,C}^{\text{AR}}(P_1) + \omega_{f,C}^{\text{AR}}(P_2) = \deg_{\mathcal{L}}(X)$  gelten muß, was hier auch der Fall ist. Zum Abschluß wollen wir unser Ergebnis mit dem Chambert-Loir Maß vergleichen. Dazu berechnen wir letzteres analog zu Abschnitt 4.1. Zunächst liefert uns die Funktion  $f$  ein Modell  $\mathcal{L}$  von  $L$  auf  $\mathcal{X}$  und eine Metrik  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  (siehe Abschnitt 2.5). Damit erhalten wir

$$c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}) = \omega_f(P_1)\delta_{P_1} + \omega_f(P_2)\delta_{P_2} = \deg_{\mathcal{L}}(Y_1)\delta_{P_1} + \deg_{\mathcal{L}}(Y_2)\delta_{P_2} ,$$

wobei  $Y_1$  bzw.  $Y_2$  die irreduziblen Komponenten von  $\mathcal{X}_v$  zu  $P_1$  bzw.  $P_2$  sind. Mit [BL85, Proposition 3.1] folgt, dass  $\deg_{\mathcal{L}}(Y_i) =$  „Steigungsdifferenz von  $f$  in  $P_i$ “ für  $i = 1, 2$  gilt. Nun ergeben sich für die „Kanten“  $k_i$  der Funktion  $f$  die Steigungen wie folgt:

Kante		$k_0$		$k_1$		$k_2$	
Steigung		$-\frac{2}{v(q)} \cdot f(P_2)$		$\frac{2}{v(q)} \cdot f(P_2)$		$1 - \frac{2}{v(q)} \cdot f(P_2)$	

Wir erhalten also

$$c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}) = \left( \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) \right) \cdot [P_1] + \left( 1 - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) \right) \cdot [P_2]$$

und es gilt

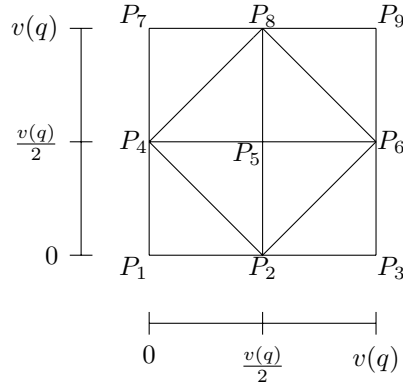
$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$$

wie gewünscht.

## 5.5. Der Test für eine Modellmetrik

Hier wollen wir die erste Chernform  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)$  in einem 2-dimensionalen Beispiel ausrechnen und anschließend  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^2$  mit dem Chambert-Loir-Maß vergleichen. Dazu verallgemeinern wir unser Beispiel aus Abschnitt 3.2 auf beliebige Funktionen  $f$  und  $v(q) > 0$ . Wir haben also die folgende Ausgangslage

5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve



wobei wir das Dreieck, das durch die Punkte  $P_i, P_j, P_k$  bestimmt wird, mit  $\Delta_{ijk}$  und die Kante zwischen  $P_i, P_j$  mit  $\sigma_{ij}$  bezeichnen. Auf dieser Zerlegung sei eine Funktion  $f$ , die linear auf den Dreiecken ist, gegeben durch

Punkt	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_5$
Koordinaten	$(0, 0)$	$\left(\frac{v(q)}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{v(q)}{2}\right)$	$\left(\frac{v(q)}{2}, \frac{v(q)}{2}\right)$
Funktionswert von $f$	$0$	$f(P_2)$	$f(P_4)$	$f(P_5)$

Dabei sind die Gewichte  $\omega(\Delta)$  für alle Dreiecke  $\Delta$  gleich 1. Genauer heißt das, dass wir den tropischen Zyklus  $C := \sum_{\Delta \in V(2)} 1 \cdot [\Delta]$  gegeben haben. Des Weiteren wissen wir aus Abschnitt 2.5 Gleichung (2.5), dass

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2v(q)} + \frac{\lambda_1 u_1}{v(q)} + \frac{\lambda_2 u_2}{v(q)},$$

wobei  $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$  und  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda = \text{val}(q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}) = v(q)\mathbb{Z} \times v(q)\mathbb{Z}$ . Damit lassen sich alle weiteren Punkte von  $f$  berechnen und wir erhalten noch

Punkt	$P_3$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$
Koordinaten	$(v(q), 0)$	$\left(v(q), \frac{v(q)}{2}\right)$	$(0, v(q))$	$\left(\frac{v(q)}{2}, v(q)\right)$	$(v(q), v(q))$
Funktionswert von $f$	$\frac{v(q)}{2}$	$f(P_4) + \frac{v(q)}{2}$	$\frac{v(q)}{2}$	$f(P_2) + \frac{v(q)}{2}$	$v(q)$

Um nun die erste Chernform zu berechnen, benutzen wir wieder unsere Konstruktion aus Abschnitt 5.2. Dazu bestimmen wir als erstes die Vektoren  $v_{\Delta/\sigma}$  für alle Dreiecke  $\Delta$  und alle zugehörigen Kanten  $\sigma$ . Nun gilt  $\Lambda_{\Delta} = V_{\Delta} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{R}^2 \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  für alle Dreiecke  $\Delta_{ijk}$  und wir suchen eine Funktion  $g \in V_{\Delta}^* = \{g : V_{\Delta} \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ linear}\}$ , die die folgenden drei Eigenschaften hat:

- $g(\tau) = 0$
- $g(\sigma) \geq 0$
- $g(\sigma) \neq 0$

In der Konstruktion in 5.2.2 wird vorausgesetzt, dass die Kante  $\sigma$  den Punkt  $(0, 0)$  als Eckpunkt hat. Deshalb müssen wir, je nach Wahl von  $\Delta$  und  $\sigma$  eine Translation vornehmen,

um die Konstruktion anwenden zu können. Beispielhaft führen wir die Berechnung von  $v_{\Delta/\sigma}$  für  $\Delta = \Delta_{124}$  und  $\sigma = \sigma_{24}$  durch. In diesem Fall ist eine mögliche Translation die Verschiebung um  $-P_2$ . Wir erhalten damit  $P_1^* := P_1 - P_2 = (-v(q)/2, 0)$ ,  $P_2^* := P_2 - P_2 = (0, 0)$  und  $P_4^* = P_4 - P_2 = (-v(q)/2, v(q)/2)$ . Auf diese neuen Punkte wollen wir nun die Konstruktion anwenden und wählen  $g$  durch

$$g(P_1^*) = g\left(-\frac{v(q)}{2}, 0\right) := 1, \quad g(P_2^*) = g(0, 0) := 0, \quad g(P_4^*) = g\left(-\frac{v(q)}{2}, \frac{v(q)}{2}\right) := 0.$$

Dieses  $g$  hat die obigen drei Eigenschaften und wir brauchen einen Repräsentanten  $v_{\Delta/\sigma}$  des erzeugenden Elementes  $[v_{\Delta/\sigma}]$  von  $\Lambda_{\Delta}/\Lambda_{\sigma}$  mit  $g(v_{\Delta/\sigma}) > 0$ . Hier ist nun  $\Lambda_{\Delta}/\Lambda_{\sigma} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / (V_{\tau} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / (\{(-z, z) | z \in \mathbb{R}\} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \{(-z, z) | z \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$  und wir erhalten den zugehörigen Isomorphismus  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \{(-z, z) | z \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  durch  $[(x, y)] \mapsto x + y$ . Diese Abbildung ist wohldefiniert und die Umkehrabbildung  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \{(-z, z) | z \in \mathbb{Z}\}$  ist gegeben durch  $z \mapsto [(z, 0)]$ . Nun sind die möglichen Erzeuger von  $\mathbb{Z}$  die Elemente 1 und  $-1$ . Daraus erhalten wir dann mit dem obigem Isomorphismus die Elemente  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$  als Repräsentanten der möglichen Erzeuger von  $\Lambda_{\Delta}/\Lambda_{\sigma}$ . Weil nun  $g(1, 0) = -2/v(q) < 0$  und  $g(-1, 0) = 2/v(q) > 0$  gilt, ist  $v_{\Delta/\sigma} := (-1, 0)$  der gesuchte Repräsentant. Insgesamt erhalten wir

$\sigma$	$\sigma_{12}$		$\sigma_{23}$		$\sigma_{14}$		$\sigma_{24}$		
$\Delta$	$\Delta_{124}$	$\Delta_{12(-4)}$	$\Delta_{236}$	$\Delta_{23(-6)}$	$\Delta_{14(-2)}$	$\Delta_{124}$	$\Delta_{245}$	$\Delta_{124}$	$\longrightarrow$
$v_{\delta/\sigma}$	$(0, 1)$	$(0, -1)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	
$\longrightarrow$	$\sigma_{25}$		$\sigma_{26}$		$\sigma_{45}$		$\sigma_{56}$		$\longrightarrow$
	$\Delta_{245}$	$\Delta_{256}$	$\Delta_{236}$	$\Delta_{256}$	$\Delta_{245}$	$\Delta_{458}$	$\Delta_{256}$	$\Delta_{568}$	
	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$	$(0, 1)$	$(0, -1)$	$(0, 1)$	
$\longrightarrow$	$\sigma_{47}$		$\sigma_{48}$		$\sigma_{58}$		$\sigma_{68}$		
	$\Delta_{47(-8)}$	$\Delta_{478}$	$\Delta_{478}$	$\Delta_{458}$	$\Delta_{458}$	$\Delta_{568}$	$\Delta_{568}$	$\Delta_{689}$	
	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	$(-1, 0)$	$(1, 0)$	

Damit können wir nun für alle Kanten  $\sigma$  die Gewichte  $\omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma)$  bestimmen (Für die Definition siehe 5.2.2). Beispielhaft gilt für  $\sigma = \sigma_{24}$  und zugehörigem  $\Delta \in \{\Delta_{124}, \Delta_{245}\}$ :

$$\begin{aligned} \omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma_{24}) &= f_{\Delta_{124}}(\omega(\Delta_{124})v_{\Delta_{124}/\sigma_{24}}) + f_{\Delta_{245}}(\omega(\Delta_{245})v_{\Delta_{245}/\sigma_{24}}) \\ &\quad - f_{\sigma_{24}}\left(\omega(\Delta_{124})v_{\Delta_{124}/\sigma_{24}} + \omega(\Delta_{245})v_{\Delta_{245}/\sigma_{24}}\right) \\ &= f_{\Delta_{124}}(-1, 0) + f_{\Delta_{245}}(1, 0) - f_{\sigma_{24}}((-1, 0) + (1, 0)) \end{aligned}$$

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

1.Fall,  $\Delta_{124}$ : Hier liegt keiner der Eckpunkte  $P_2, P_4$  der Kante  $\sigma_{24}$  in  $(0, 0)$ . Wir wählen deshalb die Translation um  $-P_2$ . Es ergibt sich  $P_1^* := P_1 - P_2 = (-v(q)/2, 0)$ ,  $P_2^* := P_2 - P_2 = (0, 0)$  und  $P_4^* := P_4 - P_2 = (-v(q)/2, v(q)/2)$  mit  $f(P_1^*) = -f(P_2)$ ,  $f(P_2^*) = 0$  und  $f(P_4^*) = f(P_4) - f(P_2)$ . Die durch diese drei Punkte definierte lineare Funktion ist  $f_{\Delta_{124}}$  und wir erhalten

$$f_{\Delta_{124}}(v_{\Delta_{124}/\sigma_{24}}) = f_{\Delta_{124}}(-1, 0) = -\frac{2}{v(q)} \cdot f(P_2) .$$

2.Fall,  $\Delta_{245}$ : Auch hier ist die Kante  $\sigma_{24}$  zu betrachten. Deshalb können wir die Translation von oben benutzen und erhalten noch  $P_5^* := P_5 - P_2 = (0/v(q)/2)$  mit  $f(P_5^*) = f(P_5) - f(P_2)$ . Die durch  $P_2^*, P_4^*, P_5^*$  definierte lineare Funktion ist  $f_{\Delta_{245}}$  und wir erhalten

$$f_{\Delta_{245}}(v_{\Delta_{245}/\sigma_{24}}) = f_{\Delta_{245}}(1, 0) = \frac{2}{v(q)} (f(P_5) - f(P_4)) .$$

3.Fall: Aufgrund der Konstruktion (siehe 5.2.2) gilt  $f_{\sigma_{24}}(0, 0) = 0$ . Damit folgt  $\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{24}) = 2f(P_5)/v(q) - 2f(P_4)/v(q) - 2f(P_2)/v(q)$  und durch analoges Vorgehen insgesamt

$\sigma$	$\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma)$
$\sigma_{12}, \sigma_{23}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_4)$
$\sigma_{14}, \sigma_{47}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2)$
$\sigma_{24}, \sigma_{48}, \sigma_{26}, \sigma_{68}$	$\frac{2}{v(q)} \cdot f(P_5) - \frac{2}{v(q)} \cdot f(P_4) - \frac{2}{v(q)} \cdot f(P_2)$
$\sigma_{25}, \sigma_{58}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_4) - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_5) + 1$
$\sigma_{45}, \sigma_{56}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_5) + 1$

Mit den obigen Zahlen erhalten wir somit die erste Chernform

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = \sum_{\sigma \in \text{Fundamentalebene}} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma) \cdot [\sigma] .$$

Unser Ziel ist es jetzt noch

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} = (f.C)^{\wedge 2} = f.(f.C) = f|_{f.C}.(f.C)$$

zu berechnen um einen Vergleich mit dem Chambert-Loir Maß machen zu können. Dazu müssen wir die obige Rechnung erneut durchführen. Wir bestimmen also die Vektoren  $v_{\sigma/\tau}$ , für alle Kanten  $\sigma$  und alle zugehörigen Punkte  $\tau$ . Es gilt  $\Lambda_{\sigma} = V_{\sigma} \cap (\mathbb{Z} \times \{0\}) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cap (\mathbb{Z} \times \{0\})$  und wir müssen eine Funktion  $g \in V_{\sigma}^* = \{g : \Lambda_{\sigma} \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ linear}\}$  finden, die die folgenden drei Eigenschaften erfüllt



- $g(\tau) = 0$
- $g(\sigma) \geq 0$
- $g(\sigma) \neq 0$

Beispielhaft führen wir dies für  $\sigma = \sigma_{24}$  und  $\tau = P_2$  vor. Nun liegt der Punkt  $\tau = P_2$  nicht in  $(0, 0)$ . Deshalb müssen wir eine Translation um  $-P_2$  machen, um die Konstruktion anwenden zu können. Wir erhalten damit  $P_2^* := P_2 - P_2 = (0, 0)$  und  $P_4^* := P_4 - P_2 = (-v(q)/2, v(q)/2)$ . Auf diese neuen Punkte wenden wir nun die Konstruktion an und wählen  $g$  durch

$$g(P_2^*) = g(0, 0) := 0 \quad \text{und} \quad g(P_4^*) = g\left(-\frac{v(q)}{2}, \frac{v(q)}{2}\right) := 0.$$

Klar ist, dass dieses  $g$  die obigen drei Eigenschaften erfüllt. Wir brauchen nun ein erzeugendes Element  $v_{\sigma/\tau}$  von  $\Lambda_\sigma/\Lambda_\tau = \{(-z, z) | z \in \mathbb{Z}\} / (V_\tau \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) = \{(-z, z) | z \in \mathbb{Z}\} / ((\{0\} \times \{0\}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$  mit  $g(v_{\sigma/\tau}) > 0$ . Die möglichen Erzeuger sind  $(1, -1)$  und  $(-1, 1)$ . Weil nun  $g(1, -1) = -2/v(q) < 0$  und  $g(-1, 1) = 2/v(q) > 0$  gilt, ist  $v_{\sigma/\tau} := (-1, 1)$  der gesuchte Repräsentant. Durch analoges Vorgehen ergeben sich insgesamt die folgenden Werte

$\tau$	$P_1$				$P_5$				
$\sigma$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{14}$	$\sigma_{1(-2)}$	$\sigma_{1(-4)}$	$\sigma_{45}$	$\sigma_{25}$	$\sigma_{56}$	$\sigma_{58}$	→
$v_{\sigma/\tau}$	(1, 0)	(0, 1)	(-1, 0)	(0, -1)	(-1, 0)	(0, -1)	(1, 0)	(0, 1)	

→	$P_2$								
	$\sigma_{12}$	$\sigma_{2(-4)}$	$\sigma_{2(-5)}$	$\sigma_{2(-6)}$	$\sigma_{23}$	$\sigma_{26}$	$\sigma_{25}$	$\sigma_{24}$	→
	(-1, 0)	(-1, -1)	(0, -1)	(1, -1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(-1, 1)	

→	$P_4$								
	$\sigma_{4(-5)}$	$\sigma_{4(-2)}$	$\sigma_{14}$	$\sigma_{24}$	$\sigma_{45}$	$\sigma_{48}$	$\sigma_{47}$	$\sigma_{4(-8)}$	
	(-1, 0)	(-1, -1)	(0, -1)	(1, -1)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 1)	(-1, 1)	

Dabei bezeichnet  $\sigma_{i(-j)}$  die Verbindungskante zwischen  $P_i$  und dem Punkt, der spiegel-symmetrisch zu  $P_j$  ist mit Zentrum  $P_i$ . Damit können wir nun für alle Punkte  $\tau$  das Gewicht  $\omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(\tau)$  bestimmen (siehe Definition in 5.2.2). Beispielhaft gilt für  $\tau = P_1$  und

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

$\sigma \in \{\sigma_{12}, \sigma_{14}, \sigma_{1(-2)}, \sigma_{1(-1)}\}$ :

$$\begin{aligned} \omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(P_1) &= f_{\sigma_{12}}(\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{12}) \cdot v_{\sigma_{12}/P_1}) + f_{\sigma_{14}}(\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{14}) \cdot v_{\sigma_{14}/P_1}) \\ &\quad + f_{\sigma_{1(-2)}}(\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{1(-2)}) \cdot v_{\sigma_{1(-2)}/P_1}) + f_{\sigma_{1(-4)}}(\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{1(-4)}) \cdot v_{\sigma_{1(-4)}/P_1}) \\ &\quad - f_{P_1} \left( \sum_{\sigma \in \{\sigma_{12}, \sigma_{14}, \sigma_{1(-2)}, \sigma_{1(-4)}\}} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma) \cdot v_{\sigma/P_1} \right) \\ &= \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2) \cdot f(P_4), \end{aligned}$$

wobei wir analog zur vorigen Rechnung vorgehen und die Ergebnisse aus den Tabellen 1 und 2 benutzen. Insgesamt erhalten wir

$\tau$	$\omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(\tau)$
$P_1$	$\frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2) \cdot f(P_4)$
$P_2$	$\frac{16}{v(q)^2} \cdot f(P_2)^2 - \frac{16}{v(q)^2} \cdot f(P_4)^2 - \frac{16}{v(q)^2} \cdot f(P_5)^2 - \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2)f(P_4) + \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_4)f(P_5) + \frac{8}{v(q)} \cdot f(P_5) - \frac{8}{v(q)} \cdot f(P_2)$
$P_4$	$\frac{16}{v(q)^2} \cdot f(P_4)^2 - \frac{16}{v(q)^2} \cdot f(P_2)^2 - \frac{16}{v(q)^2} \cdot f(P_5)^2 - \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2)f(P_4) + \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2)f(P_5) + \frac{8}{v(q)} \cdot f(P_5) - \frac{8}{v(q)} \cdot f(P_4)$
$P_5$	$\frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_5)^2 + \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2) \cdot f(P_4) - \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2)f(P_5) - \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_4)f(P_5) - \frac{16}{v(q)} \cdot f(P_5) + \frac{8}{v(q)} \cdot f(P_2) + \frac{8}{v(q)} \cdot f(P_4) + 2$

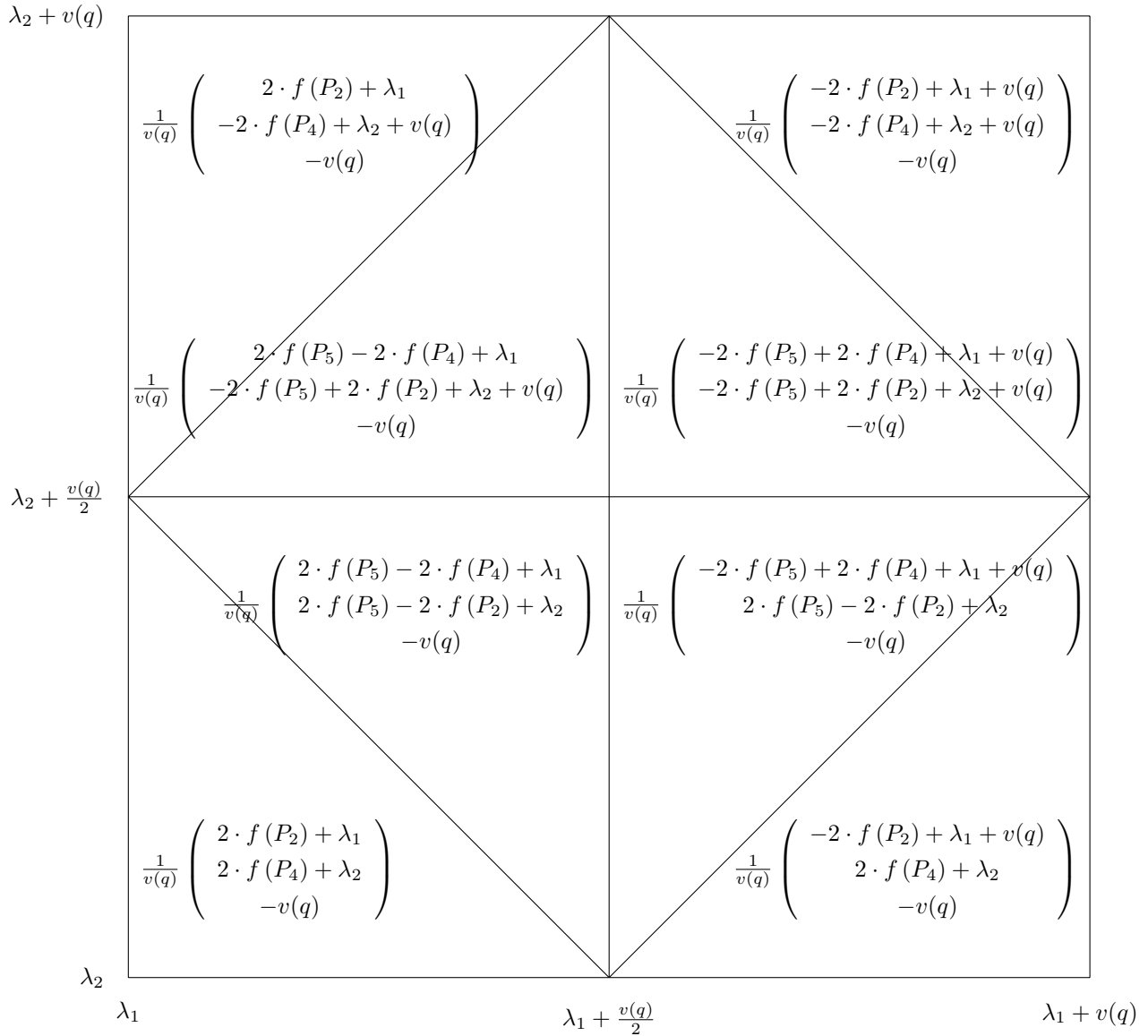
und damit

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} = \sum_{P \in V^{(0)}} \omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(P) \cdot [P].$$

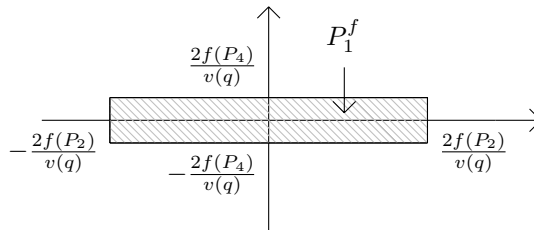
Aus [Gub10, Proposition 3.8(e)] wissen wir, dass  $\sum_{P \in V^{(0)}} \omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(P) = \deg_{\mathcal{L}}(X)$  gelten muß, was hier auch der Fall ist. Zum Abschluß wollen wir zum Vergleich noch das Chambert-Loir Maß  $c_1(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} = \sum_{P \in V^{(0)}} \omega_f(P)[P]$  berechnen. Dazu gehen wir wie in Abschnitt 3.6 vor. Es gilt

$$\omega_f(P) = \deg_H(Y) = k! \cdot \text{vol}_{\text{Fulton}}(P^f).$$

Dabei ist  $Y$  die zum Punkt  $P$  gehörende irreduzible Komponente und das Volumen von Fulton wie in 3.6.4 normiert. Weiter gilt nun, da unsere Punkte 0-dimensional sind, dass  $k = 2$  ist. Bleibt also nur das Fulton-Volumen des jeweiligen dualen Polytops  $P^f$  (siehe Definition 2.8.12) zu bestimmen. Dazu berechnen wir die Steigungsvektoren für alle durch die Dreiecke gegebenen Ebenen und erhalten für  $\lambda_1, \lambda_2 \in v(q)\mathbb{Z}$  die folgenden Werte



Als Beispiel untersuchen wir das duale Polytop  $P_1^f$  und erhalten dafür das folgende Bild:



Damit gilt nun

$$\omega_f(P_1) = k! \cdot \text{vol}_{\text{Fulton}}(P_1^f) = 2! \cdot \frac{4f(P_2)}{v(q)} \cdot \frac{4f(P_4)}{v(q)} = \frac{32}{v(q)^2} \cdot f(P_2) \cdot f(P_4) ,$$

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

also  $\omega_f(P_1) = \omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(P_1)$ . Analoges Vorgehen liefert  $\omega_f(P) = \omega_{f.(f.C)}^{\text{AR}}(P)$  für alle Punkte  $P \in \{P_1, P_2, P_4, P_5\}$  und damit ist Satz 1.4 bewiesen. Das heißt es gilt  $c_1(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|)^{\wedge 2}$ .

## 5.6. Der Chambert-Loir Test im gemischten Fall

**Satz 5.6.1** (Chambert-Loir Test). Für eine nicht notwendigerweise symmetrische Funktion  $f$  auf der Zerlegung  $V1$  gilt

$$c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} .$$

Nach Abschnitt 5.3 reicht es dafür

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|)$$

zu zeigen.

**Die AR-Seite:**

**5.6.2.** Dieses ist der einfachere Teil. Wir wissen bereits aus 5.3.3 und 5.5, dass

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) = \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)} \quad \text{und} \quad c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma)[\sigma]$$

mit

$\tau$	$\omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma)$
$\sigma_{12}, \sigma_{23}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2)$
$\sigma_{14}, \sigma_{47}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_4)$
$\sigma_{24}, \sigma_{48}, \sigma_{26}, \sigma_{68}$	$\frac{2}{v(q)} \cdot f(P_5) - \frac{2}{v(q)} \cdot f(P_4) - \frac{2}{v(q)} \cdot f(P_2)$
$\sigma_{25}, \sigma_{58}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_4) - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_5) + 1$
$\sigma_{45}, \sigma_{56}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_5) + 1$

Dieses benutzen wir zusammen mit der Definition aus 5.3.5 und den Wedge-Regeln aus 5.3.6 und erhalten

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = \left( \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)} \right) \wedge \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma)[\sigma]$$

$$\begin{aligned}
 &= v(q)^{-1} \cdot \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma) \cdot (dx|_{\sigma} + dy|_{\sigma}) \\
 &= v(q)^{-1} \cdot \left[ \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{12}) \cdot dx|_{\sigma_{12}} + \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{23}) \cdot dx|_{\sigma_{23}} + \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{14}) \cdot dy|_{\sigma_{14}} \right. \\
 &\quad + 2 \cdot \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{24}) \cdot \underbrace{dx|_{\sigma_{24}}}_{=dy|_{\sigma_{24}}} + \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{25}) \cdot dy|_{\sigma_{25}} + 2 \cdot \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{26}) \cdot \underbrace{dx|_{\sigma_{26}}}_{=dy|_{\sigma_{26}}} \\
 &\quad + \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{45}) \cdot dx|_{\sigma_{45}} + \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{47}) \cdot dy|_{\sigma_{47}} + 2 \cdot \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{48}) \cdot \underbrace{dx|_{\sigma_{48}}}_{=dy|_{\sigma_{48}}} \\
 &\quad \left. + \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{56}) \cdot dx|_{\sigma_{56}} + \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{58}) \cdot dy|_{\sigma_{58}} + 2 \cdot \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma_{68}) \cdot \underbrace{dx|_{\sigma_{68}}}_{=dy|_{\sigma_{68}}} \right]
 \end{aligned}$$

Dabei geht im letzten Schritt und in die angegebenen Identifikationen die Struktur der Zerlegung  $V1$  ein.

### Die Chambert-Loir-Seite:

**5.6.3.** Unser Ziel ist es  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|)$  zu berechnen. Dabei handelt es sich um eine gewichtete Summe von Kanten aus der Zerlegung  $V1$ . Zunächst legen wir die folgenden Bezeichnungen fest:

- Gegeben sei die Zerlegung  $V1$  zusammen mit der Funktion  $f(u)$
- Die durch eine zentrische Streckung mit dem Faktor  $m^{-1}$  und dem Streckzentrum  $(0,0)$  aus der Zerlegung  $V1$  entstandene Zerlegung nennen wir  $m$ -Zerlegung. Damit erhalten wir dann als Funktion auf der  $m$ -Zerlegung  $f^{(m)}(u) := f(m \cdot u)$ .
- Mit Summenzerlegung (bzw.  $m+$ -Zerlegung) bezeichnen wir den Durchschnitt der Zerlegung  $V1$  mit der  $m$ -Zerlegung und wir erhalten auf der Summenzerlegung die Funktion  $f^{(m+)}(u) := f^{(m)}(u) + f(u)$ .

Nun gilt nach [Ful93, section 5.3, corollary page 114]

$$\begin{aligned}
 \deg_{\mathcal{L}}(Y) &= 2! \cdot \text{vol}(P^f), \text{ wobei } \mathcal{X}_v^{(1)} = \mathcal{X}_v \ni Y \hat{=} P \\
 \deg_{\mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}}(Y) &= 2! \cdot \text{vol}(P^{f^{(m)}}), \text{ wobei } \mathcal{X}_v^{(m)} \ni Y \hat{=} P \\
 \deg_{\mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}}(Y) &= 2! \cdot \text{vol}(P^{f^{(m+)}}), \text{ wobei } \mathcal{X}_v^{(m+)} \ni Y \hat{=} P.
 \end{aligned}$$

Hierbei ist  $P$  jeweils die zur irreduziblen Komponente  $Y$  der speziellen Faser  $\mathcal{X}_v$ ,  $\mathcal{X}_v^{(m)}$  bzw.  $\mathcal{X}_v^{(m+)}$  gehörende Ecke des Reduktionsgraphen und  $P^f$ ,  $P^{f^{(m)}}$  bzw.  $P^{f^{(m+)}}$  jeweils das

5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

zu  $P$  durch  $f$ ,  $f^{(m)}$  bzw.  $f^{(m+)}$  gegebene duale Polytop (siehe Definition 2.8.12). Zusammen mit unserem Ergebnis

$$\begin{aligned} & c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^{-2} \cdot \sum_{Y \in \text{irr}(\mathcal{X}_v^{(m)})} \frac{1}{2} \cdot [\text{deg}_{[m]^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}}(Y) - \text{deg}_{[m]^* \mathcal{L}}(Y) - \text{deg}_{\mathcal{L}}(Y)] \cdot \delta_{\xi_Y} \right) \end{aligned}$$

aus 5.3.9 ergibt sich für unsere Situation nun

$$\begin{aligned} & c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^{-2} \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{P \in \sigma} [\text{vol}(P^{f^{(m+)}}) - \text{vol}(P^{f^{(m)}}) - \text{vol}(P^f)] \cdot \delta_{\xi_P} \right) \right) \end{aligned}$$

Zu beachten ist dabei, dass die Volumina nur dann ungleich 0 sind, wenn  $P$  eine Ecke der jeweiligen Zerlegung ist. Für unsere Rechnungen setzen wir für jede Ecke der Summenzerlegung

$$\omega_{f^{(m+)}}(P) := m^{-2} \cdot \left( \text{vol}(P^{f^{(m+)}}) - \text{vol}(P^{f^{(m)}}) - \text{vol}(P^f) \right). \quad (5.1)$$

und nennen dies das Gewicht des Punktes  $P$ . Dies ist ausreichend, da falls  $P$  keine Ecke der Summenzerlegung ist,  $\omega_{f^{(m+)}}(P) = 0$  gilt. Wir werden beweisen, dass

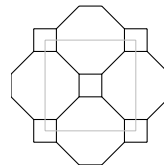
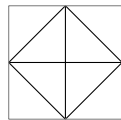
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{P \in \sigma} \omega_{f^{(m+)}}(P) \cdot \delta_{\xi_P} \right\} = \omega_f(\sigma) \cdot \mu_\sigma \quad (5.2)$$

gilt als schwacher Limes von Maßen. Dabei wird  $\omega_f(\sigma) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  Kantengewicht genannt und  $\mu_\sigma$  ist das Kantenmaß von  $\sigma$  mit der Normierung so, dass die Gesamtmasse der Kante  $\sigma$  gleich 1 ist. Zum Beispiel entspricht für  $\sigma = \sigma_{24}$  das Kantenmaß  $\mu_\sigma$  dem Maß mit dem Integral  $\int f d\mu_\sigma := \frac{\sqrt{2}}{v(q)} \int_\sigma f dt$ , wobei  $dt$  das euklidische Längenmaß der Kante  $\sigma$  ist und  $f \in C(\mathbb{R}^2/\Lambda)$ . Wir erhalten insgesamt

$$c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|) = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_f(\sigma) \cdot \mu_\sigma.$$

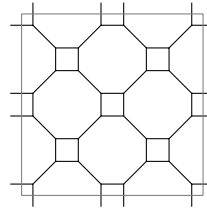
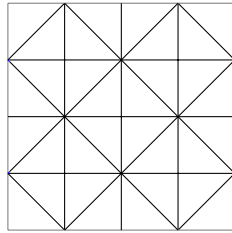
**5.6.4.** Bevor wir den Beweis für einige Kanten der Zerlegung  $V1$  durchführen, schauen wir uns die  $m$ -Zerlegung und die Summenzerlegung genauer an. Für die  $m$ -Zerlegung und ihr zugehöriges duale Bild erhalten wir:

- $m=1$ :

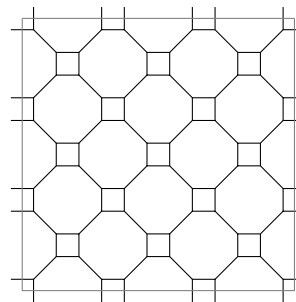
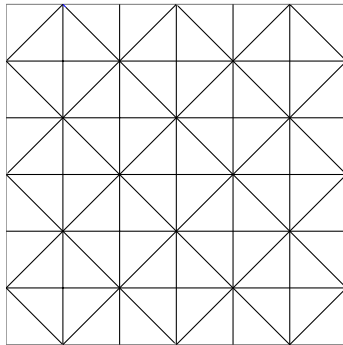


## 5.6. Der Chambert-Loir Test im gemischten Fall

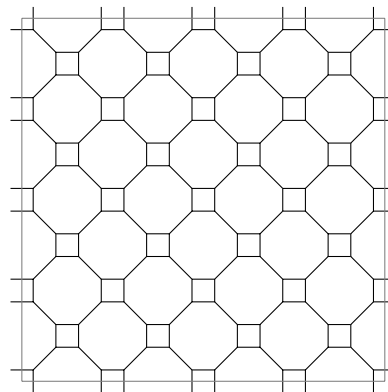
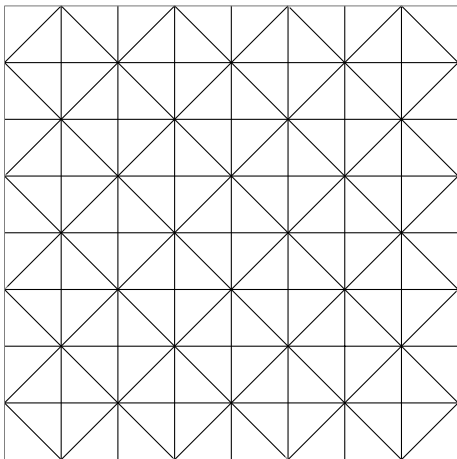
- $m=2$ :



- $m=3$ :



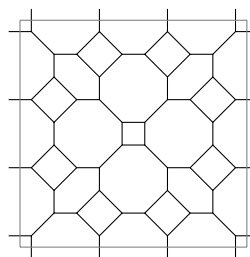
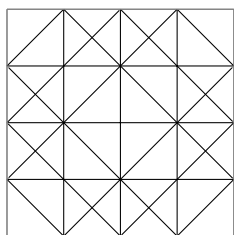
- $m=4$ :



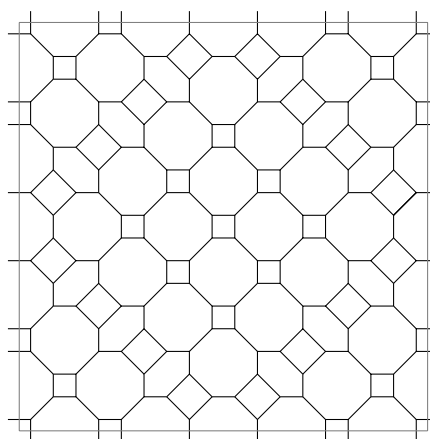
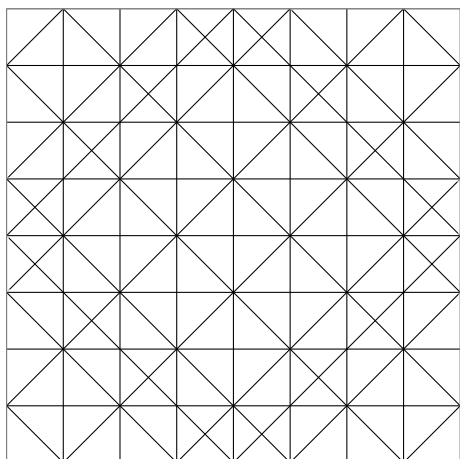
Dabei ist der Fundamentalbereich  $[0, v(q)]^2$  jeweils grau dargestellt, da der Maßstab variiert. Für ungerades  $m$  ist das Bild der Summenzerlegung identisch mit dem der  $m$ -Zerlegung. Bei den jeweiligen dualen Bildern ist jedoch nur die kombinatorische Struktur die gleiche, da auf den Zerlegungen mit unterschiedlichen Funktionen gearbeitet wird. Für gerades  $m$  erhalten wir:

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

- $m=2$ :



- $m=4$ :

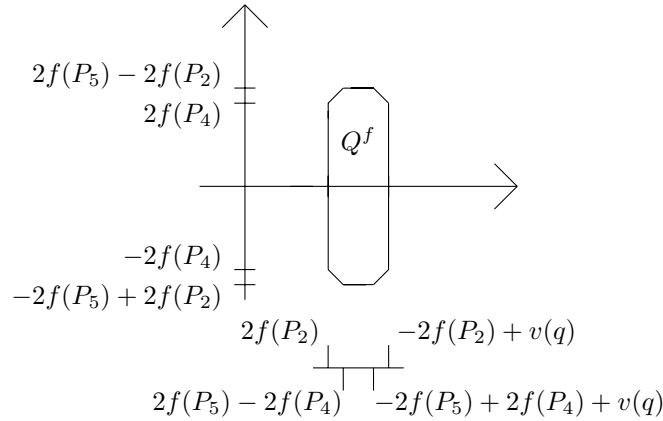


**5.6.5.** Als erstes wollen wir die Punktgewichte  $\omega_{f^{(m+)}}(P)$  der Kante  $\sigma_{12}$  aus der Zerlegung  $V1$  bestimmen (siehe Gleichung (5.1)). Dazu betrachten wir zunächst den Punkt  $P_1 = (0, 0)$ , bei dem es sich um das Streckzentrum handelt. Weil  $P_1$  eine Ecke in allen drei Zerlegungen ist, sind auch alle Volumina der zugehörigen dualen Polytope ungleich Null und mit den Ergebnissen aus dem Abschnitt 5.5 folgt

$$\begin{aligned}
 \omega_{f^{(m+)}}(P_1) &= m^{-2} \cdot \left( \text{vol} \left( P_1^{f^{(m+)}} \right) - \text{vol} \left( P_1^{f^{(m)}} \right) - \text{vol} \left( P_1^f \right) \right) \\
 &= m^{-2} \cdot \left( (m+1)^2 \cdot \text{vol} \left( P_1^f \right) - m^2 \cdot \text{vol} \left( P_1^f \right) - \text{vol} \left( P_1^f \right) \right) \\
 &= \frac{2}{m} \cdot \text{vol} \left( P_1^f \right) \\
 &= \frac{32f(P_2)f(P_4)}{m \cdot v(q)^2} .
 \end{aligned}$$

**5.6.6.** Jetzt müssen wir weitere Punkte der Kante  $\sigma_{12}$  untersuchen. Wir wählen dazu den in der  $m$ -Zerlegung auf der positiven  $x$ -Achse zu  $(0, 0)$  benachbarten Punkt und bezeichnen diesen mit  $Q$ . Es gilt also  $Q = (v(q)/2m, 0)$ . In der Zerlegung  $V1$  ist dies der Punkt  $P_2$ , für den wir das folgende duale Bild





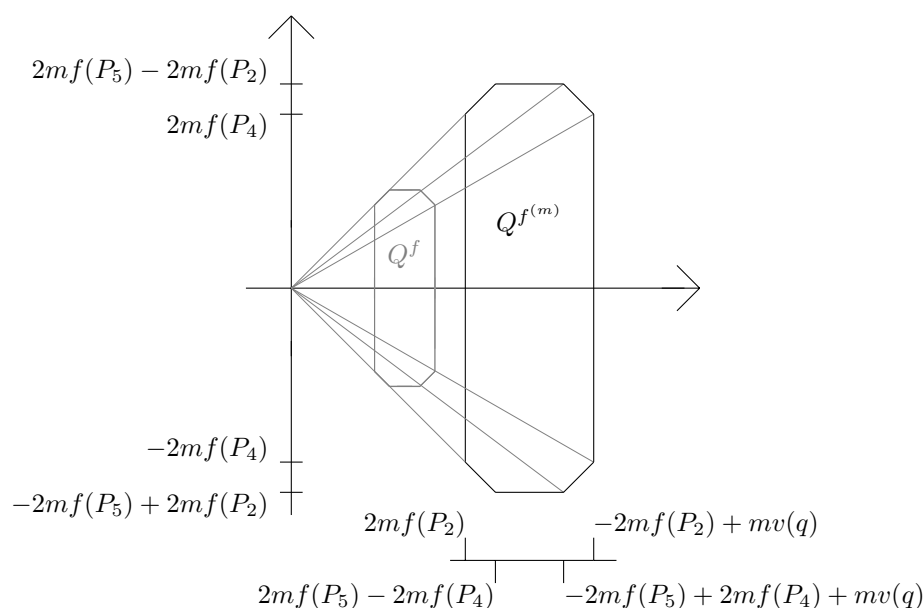
erhalten, wobei wir zur Bestimmung des Polytops  $Q^f = P_2^f$  die allgemeinen Steigungsvektoren aus Abbildung 1 in Abschnitt 5.5 benutzt haben. Das Volumen dieses Polytops bestimmen wir nun, indem wir zunächst das Volumen des kleinsten Rechtecks bestimmen, das unser Polytop  $Q^f$  enthält, und anschließend die zu viel berechneten Flächen subtrahieren. Dabei beginnen wir mit der oberen rechten Ecke und gehen im mathematisch positiven Sinn weiter vor. Wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(Q^f) &= [(-2f(P_2) + v(q)) - (2f(P_2))]_x \cdot [(2f(P_5) - 2f(P_2)) - (-2f(P_5) + 2f(P_2))]_y \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot [(-2f(P_2) + v(q)) - (-2f(P_5) + 2f(P_4) + v(q))]_x \\
 &\quad \cdot [(2f(P_5) - 2f(P_2)) - (2f(P_4))]_y \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot [(-2f(P_2) + v(q)) - (-2f(P_5) + 2f(P_4) + v(q))]_x \\
 &\quad \cdot [(-2f(P_4)) - (-2f(P_5) + 2f(P_2))]_y \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot [(2f(P_5) - 2f(P_4)) - (2f(P_2))]_x \\
 &\quad \cdot [(-2f(P_4)) - (-2f(P_5) + 2f(P_2))]_y \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot [(2f(P_5) - 2f(P_4)) - (2f(P_2))]_x \\
 &\quad \cdot [(2f(P_5) - 2f(P_2)) - (-2f(P_5) + 2f(P_2))]_y \\
 &= (-4f(P_2) + v(q)) \cdot (4f(P_5) - 4f(P_2)) - 2 \cdot (2f(P_5) - 2f(P_2) - 2f(P_4))^2 \\
 &= \frac{8f(P_2)^2}{v(q)^2} - \frac{8f(P_4)^2}{v(q)^2} - \frac{8f(P_5)^2}{v(q)^2} - \frac{16f(P_2)f(P_4)}{v(q)^2} \\
 &\quad + \frac{16f(P_4)f(P_5)}{v(q)^2} + \frac{4f(P_5)}{v(q)} - \frac{4f(P_2)}{v(q)}.
 \end{aligned}$$

Dabei bedeutet der Index  $x$  bzw.  $y$ , dass es sich jeweils um die Länge der Kante in  $x$  bzw.  $y$  handelt. Für den Übergang zur  $m$ -Zerlegung sei nun  $m > 1$ . Diese Bedingung ist jedoch

### 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

keine Einschränkung, weil uns der Limes  $m \rightarrow \infty$  interessiert. Den Fall  $m = 1$ , bei dem  $Q$  in der  $m$ -Zerlegung der rechte Randpunkte der Kante  $\sigma_{12}$  ist, untersuchen wir später. Hier ist  $Q$  also ein innerer Punkt der Kante  $\sigma_{12}$ . Da es sich beim Übergang zur  $m$ -Zerlegung um eine Streckung mit Streckzentrum  $(0, 0)$  und den Faktor  $m^{(-1)}$  handelt, ergibt sich das Polytop  $Q^{f^{(m)}}$  durch das folgende duale Bild

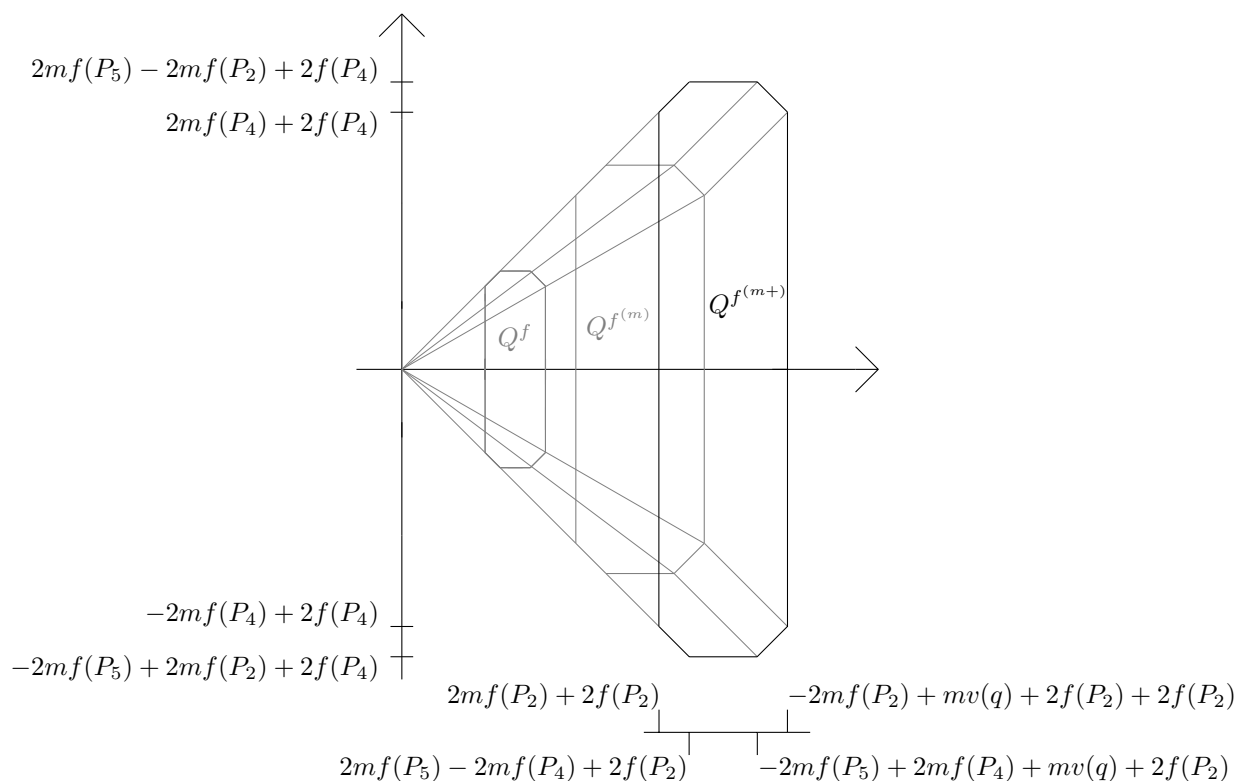


und es gilt offensichtlich

$$\text{vol} \left( Q^{f^{(m)}} \right) = m^2 \cdot \text{vol} \left( Q^f \right) .$$

Auch für die Summenzerlegung sei  $m > 1$ . Hier ist die Bestimmung des Volumens des zugehörigen Polytops  $Q^{f^{(m+)}}$  etwas komplizierter. Jedoch lässt sich  $Q^{f^{(m+)}}$  aus  $Q^{f^{(m)}}$  konstruieren. Dazu müssen wir zu den Eckpunkten von  $Q^{f^{(m)}}$  jeweils den Steigungsvektor des Simplexes der Zerlegung  $V1$ , in dem der Eckpunkt liegt, addieren. Durch dieses Vorgehen erhalten wir das Polytop  $Q^{f^{(m+)}}$  jetzt durch das duale Bild

### 5.6. Der Chambert-Loir Test im gemischten Fall

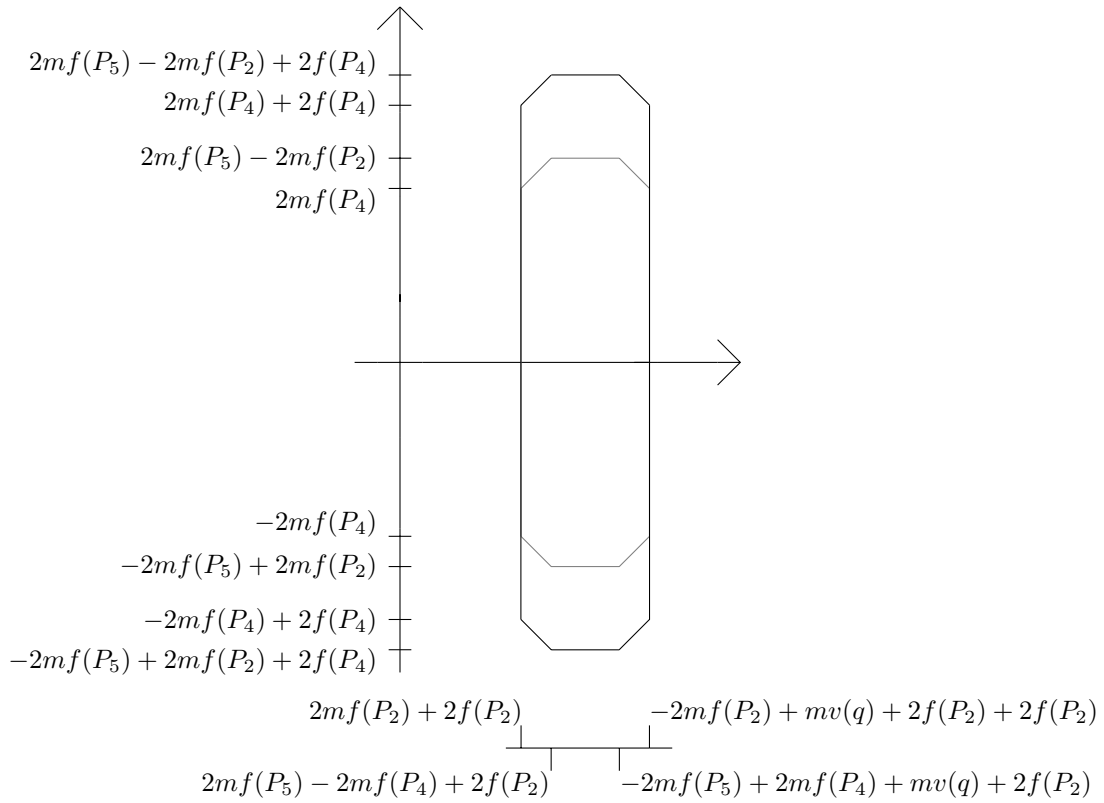


und durch eine zur Bestimmung von  $\text{vol}(Q^f)$  analoge Rechnung nun

$$\text{vol}(Q^{f^{(m+)}}) = m^2 \cdot \text{vol}(Q^f) + \frac{m}{v(q)^2} \cdot (4v(q)f(P_4) - 16f(P_2)f(P_4)) .$$

Bevor wir nun das Punktgewicht  $\omega_{f^{(m+)}}(Q)$  bestimmen, wollen wir noch kurz auf den Zusammenhang der Volumina von  $Q^{f^{(m)}}$  und  $Q^{f^{(m+)}}$  eingehen. Wenn wir das erste Polytop ins zweite einbetten, erhalten wir

5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve



Wir stellen also fest, dass die Ausdehnung in  $y$ -Richtung nicht von  $m$  abhängt. Damit ist das durch den Übergang von  $Q^{f^{(m)}}$  zu  $Q^{f^{(m+)}}$  hinzukommende Volumen von der Größenordnung  $O(m)$ , was sich schon im Ergebnis für  $\text{vol}(Q^{f^{(m+)}})$  widerspiegelt. Insgesamt erhalten wir für den auf der positiven  $x$ -Achse zu  $(0, 0)$  benachbarten Punkt  $Q$  nun das Gewicht

$$\begin{aligned} \omega_{f^{(m+)}}(Q) &= m^{-2} \cdot \left( \text{vol}(Q^{f^{(m+)}}) - \text{vol}(Q^{f^{(m)}}) - \text{vol}(Q^f) \right) \\ &= m^{-2} \cdot \left( m^2 \cdot \text{vol}(Q^f) + \frac{m}{v(q)^2} \cdot (4v(q)f(P_4) - 16f(P_2)f(P_4)) - m^2 \cdot \text{vol}(Q^f) - 0 \right) \\ &= \frac{4v(q)f(P_4) - 16f(P_2)f(P_4)}{m \cdot v(q)^2}. \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, dass  $Q$  eine Ecke der Summen- und der  $m$ -Zerlegung ist, jedoch keine der Zerlegung  $V1$ . Deshalb gilt  $\text{vol}(Q^{f^{(m)}}) \neq 0 = \text{vol}(Q^f)$ .

**5.6.7.** Jetzt wollen wir den nächsten Punkt rechts von dem vorigen untersuchen, den wir mit  $R$  bezeichnen. Das heißt wir gehen von  $(0, 0)$  in der Summenzerlegung zwei Ecken in positive  $x$ -Achsen-Richtung. Dabei soll jetzt  $m \geq 3$  gelten. Im Fall  $m = 2$  ist  $R$  in der Summen- und der  $m$ -Zerlegung identisch mit dem Randpunkt  $P_2$ , den wir später untersuchen. Wieder ist die Bedingung  $m \geq 3$  keine Einschränkung, weil uns der Limes  $m \rightarrow \infty$

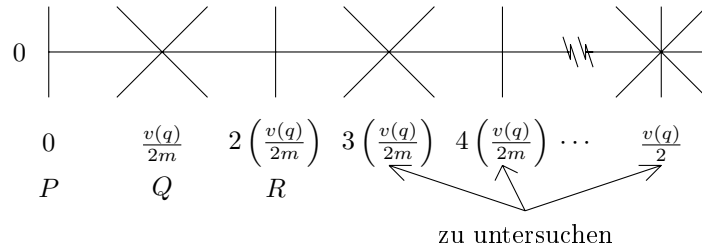
interessiert. Wir erhalten analog zu vorher

$$\begin{aligned} \text{vol}(R^f) &= \frac{16f(P_2)f(P_4)}{v(q)^2} \\ \text{vol}(R^{f^{(m)}}) &= m^2 \cdot \text{vol}(R^f) \\ \text{vol}(R^{f^{(m+)}}) &= (m^2 + m) \cdot \text{vol}(R^f) , \end{aligned}$$

wobei auch hier  $\text{vol}(R^{f^{(m+)}}) - \text{vol}(R^{f^{(m)}}) = O(m)$  gilt. Damit erhalten wir als Punktgewicht nun

$$\begin{aligned} \omega_{f^{(m+)}}(R) &= m^{-2} \cdot \left( \text{vol}(R^{f^{(m+)}}) - \text{vol}(R^{f^{(m)}}) - \text{vol}(R^f) \right) \\ &= m^{-2} \cdot \left( (m^2 + m) \cdot \text{vol}(R^f) - m^2 \cdot \text{vol}(R^f) - \text{vol}(R^f) \right) \\ &= \frac{\text{vol}(R^f)}{m} \\ &= \frac{16f(P_2)f(P_4)}{m \cdot v(q)^2} . \end{aligned}$$

**5.6.8.** Es stellt sich jetzt die Frage, wie das jeweilige Gewicht für die zu  $(0,0)$  nächsten rechten Nachbarn aussieht. Dazu wählen wir  $m$  immer so groß so, dass die zu untersuchende Ecke in der Summenzerlegung innerhalb der Kante  $\sigma_{12}$  liegt. Wir haben die folgende Situation



wobei wir die Ecken  $P, Q$  und  $R$  schon untersucht haben. Wir wollen uns dazu zunächst den Ecken  $(2n \left(\frac{v(q)}{2m}\right), 0)$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $n < m/2$  zuwenden, da bei diesen im dualen Bild nur 4 Simplexe beteiligt sind. Diese Ecken nennen wir „Kreuzpunkte“. Schnell wird klar, dass die Kreuzpunkte sich alle gleich verhalten. Da wir mit der Ecke  $R$  (siehe oben) schon einen Kreuzpunkt berechnet haben, bezeichnen wir jetzt alle Kreuzpunkte mit  $R$  und erhalten

$$\omega_{f^{(m+)}}(R) = \frac{16f(P_2)f(P_4)}{m \cdot v(q)^2} .$$

Jetzt wollen wir die anderen Ecken untersuchen, das heißt die Ecken, an die im dualen Bild 8 Simplexe anschließen. Diese Ecken sind  $((2n - 1) \left(\frac{v(q)}{2m}\right), 0)$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $n \leq m/2$

5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

und wir nennen sie „Sternpunkte“. Auch die Sternpunkte verhalten sich alle gleich und wir haben mit  $Q$  (siehe oben) schon einen von ihnen untersucht. Deshalb bezeichnen wir alle Sternpunkte mit  $Q$  und erhalten

$$\omega_{f^{(m+)}}(Q) = \frac{4v(q)f(P_4) - 16f(P_2)f(P_4)}{m \cdot v(q)^2}.$$

**5.6.9.** Zum Schluß müssen wir noch untersuchen, was in der Ecke  $P_2 = (v(q)/2, 0)$  passiert. Hier ist zu beachten, dass  $P_2$  in der Summenzerlegung je nach Parität von  $m$  von unterschiedlicher „Bauart“ ist. Analog zu vorher erhalten wir hier

$$\begin{aligned} \text{vol}(P_2^f) &= \text{vol}(Q^f) \\ \text{vol}(P_2^{f^{(m)}}) &= m^2 \cdot \begin{cases} \text{vol}(R^f) & \text{für } m \equiv_2 0 \\ \text{vol}(Q^f) & \text{für } m \equiv_2 1 \end{cases} \\ \text{vol}(P_2^{f^{(m+)}}) &= \begin{cases} \frac{m}{v(q)^2} (-16f(P_2)^2 + 16f(P_2)f(P_5) - 16f(P_2)f(P_4) + 4v(q)f(P_4)) \\ 0 \end{cases} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} +m^2 \text{vol}(R^f) + \text{vol}(Q^f) \quad \text{für } m \equiv_2 0 \\ +(m+1)^2 \text{vol}(Q^f) \quad \text{für } m \equiv_2 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned} \omega_{f^{(m+)}}(P_2) &= m^{-2} \cdot \left( \text{vol}(P_2^{f^{(m+)}}) - \text{vol}(P_2^{f^{(m)}}) - \text{vol}(P_2^f) \right) \\ &= \frac{2}{m \cdot v(q)^2} \cdot \begin{cases} -8f(P_2)^2 + 8f(P_2)f(P_5) - 8f(P_2)f(P_4) + 2v(q)f(P_4) & \text{für } m \equiv_2 0 \\ v(q)^2 \cdot \text{vol}(Q^f) & \text{für } m \equiv_2 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**5.6.10.** Mit diesen Zwischenergebnissen lässt sich jetzt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{P \in \sigma} \omega_{f^{(m+)}}(P) \cdot \delta_{\xi_P} \right\} = \omega_f(\sigma) \cdot \mu_\sigma$$

zeigen für ein  $\omega_f(\sigma) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Zunächst ist klar, dass der Träger eines möglicherweise vorkommenden Limes auf der rechten Seite in der Kante  $\sigma_{12}$  enthalten ist. Zuerst werden wir zeigen, dass die Gesamtmasse der Kante  $\sigma_{12}$  auf der linken Seite konvergiert. Dazu bestimmen wir durch einfaches Abzählen die Anzahl der Punkte der jeweiligen Art auf der Kante  $\sigma_{12}$ . Es gibt  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ -viele Kreuzpunkte und  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ -viele Sternpunkte. Dabei ist  $\lfloor \cdot \rfloor$  die untere Gaußklammer. Dann gibt es noch die zwei Randpunkte, wobei der Linke, das heißt  $P_1 = (0, 0)$ , für jedes  $m$  gleich ist und der Rechte, das heißt  $P_2 = (v(q)/2, 0)$  zwei verschiedene

„Bauarten“ hat. Für gerades  $m$  ist er ein Kreuzpunkt und für ungerades  $m$  ein Sternpunkt. Damit ergibt sich nun als Grenzwert für  $m \rightarrow \infty$  der Gesamtmassen  $\mu_m(\sigma_{12})$ :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{P^{(m+)} \in \sigma_{12}} \omega_{f^{(m+)}}(P^{(m+)}) \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \omega_{f^{(m+)}}(P_1) + \left[ \frac{m-1}{2} \right] \cdot \omega_{f^{(m+)}}(R) + \left[ \frac{m}{2} \right] \cdot \omega_{f^{(m+)}}(Q) + \omega_{f^{(m+)}}(P_2) \right\} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\left[ \frac{m-1}{2} \right] \cdot \frac{16f(P_2)f(P_4)}{m \cdot v(q)^2}}_{\text{„Kreuzpunkte“}} + \underbrace{\frac{32f(P_2)f(P_4)}{mv(q)^2}}_{\text{linker Randpunkt}} + \underbrace{\left[ \frac{m}{2} \right] \cdot \frac{4v(q)f(P_4) - 16f(P_2)f(P_4)}{m \cdot v(q)^2}}_{\text{„Sternpunkte“}} \right. \\
 & \quad \left. + \underbrace{\frac{2}{m \cdot v(q)^2} \cdot \begin{cases} -8f(P_2)^2 + 8f(P_2)f(P_5) - 8f(P_2)f(P_4) + 2v(q)f(P_4) & \text{für } m \equiv_2 0 \\ v(q)^2 \cdot \text{vol}(Q^f) & \text{für } m \equiv_2 1 \end{cases}}_{\text{rechter Randpunkt}} \right\} \\
 &= \frac{2f(P_4)}{v(q)}.
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.6.11.** Für alle Punkte  $P$  der Kante  $\sigma_{12}$  gilt, dass das Gewicht  $\omega_{f^{(m+)}}(P)$ , sofern es ungleich 0 ist (siehe (5.1)), den Faktor  $1/m$  enthält. Damit tragen, aufgrund der Grenzwertbildung  $m \rightarrow \infty$ , die zwei Randpunkte der Kante  $\sigma_{12}$ , das sind auch alle Ecken der Kante  $\sigma_{12}$  in der Zerlegung  $V1$ , nichts zum Kantengewicht  $\omega_f(\sigma_{12})$  bei. Es lässt sich leicht überprüfen, dass dies für alle Ecken der Zerlegung  $V1$  gilt. Genauer heißt dies, dass einzelne Punkte einer Kante für den Grenzwert keine Rolle spielen.

**5.6.12.** Allgemeiner gilt mit derselben Rechnung für ein Intervall  $I \in \sigma_{12}$ , dass

$$\mu_m(I) = \frac{2f(P_4)}{v(q)} \cdot \frac{l(I)}{l(\sigma_{12})},$$

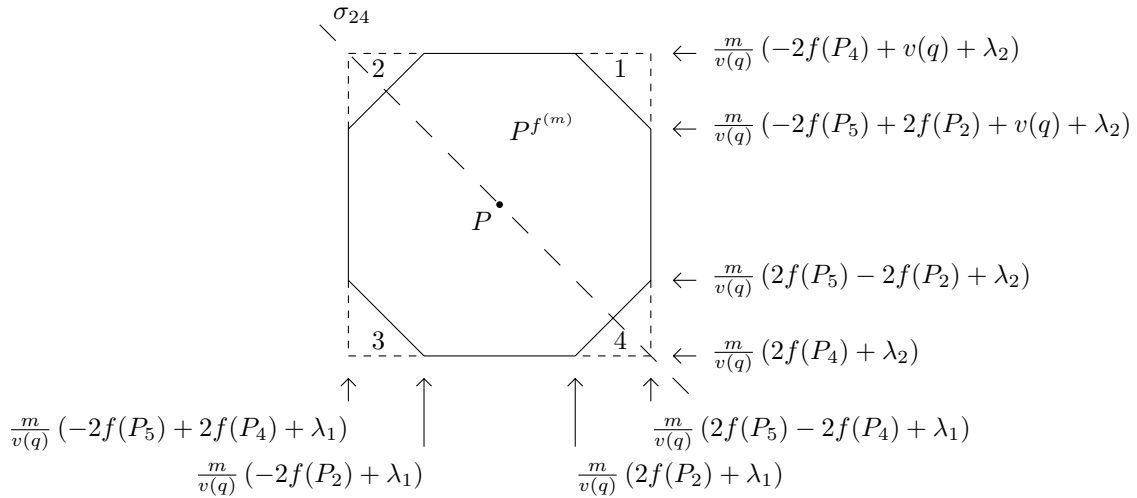
wobei  $l$  die Länge eines Intervalls bezeichnet. Also folgt die Behauptung (5.2) mit

$$\omega_f(\sigma_{12}) = \frac{2f(P_4)}{v(q)}.$$

**5.6.13.** Als nächstes wollen wir  $\omega_f(\sigma_{24})$  bestimmen, das heißt die Gesamtmasse der Kante  $\sigma_{24}$  untersuchen. Dabei haben wir nun das Problem, dass das duale Bild der Zerlegung zu  $f^{(m+)}$  und damit das zu untersuchende Polytop von  $m$  abhängig ist (siehe obige duale Bilder). Wir müssen also eine Fallunterscheidung in der Parität von  $m$  machen. Da wir uns

## 5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

nur für den Grenzwert  $m \rightarrow \infty$  interessieren und wir wissen, dass der Grenzwert existiert (siehe 5.6.8 und 5.6.11), reicht es einen der Fälle zu untersuchen. Wir wählen den Fall  $m$  ungerade, da es in diesem Fall nur eine Art von dualen Polytopen gibt. Somit entfällt hier eine zu den inneren Punkten der Kante  $\sigma_{12}$  analoge Fallunterscheidung. Wir brauchen hier jedoch eine Fallunterscheidung bezüglich der Position des untersuchten Punktes. Diese ist nötig, da aufgrund der Periodizitätsbedingung (siehe Abschnitt 2.5 Gleichung (2.5)) in der Summenzerlegung alle „ungeraden rechten Nachbarn“ von  $P_4$  mit  $P_2$  zusammenhängen und alle „geraden rechten Nachbarn“ von  $P_4$  mit  $P_4$ . Wir wollen uns nun die  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ -vielen „geraden Nachbarn“  $P$  von  $P_4$  ansehen. Hier ergibt sich als Bild für das Polytop  $P^{f^{(m)}}$



wobei  $\lambda_1, \lambda_2 \in v(q)\mathbb{Z}$ . Wir berechnen  $\text{vol}(P^{f^{(m)}})$  analog zum Volumen von  $Q^{f^{(m)}}$  bei der Kante  $\sigma_{12}$ . Zur Vereinfachung der Notation setzen wir  $T := 2f(P_5) - 2f(P_2) - 2f(P_4)$  und erhalten

$$\text{vol}(\text{großes Rechteck}) = \frac{m^2}{v(q)} (4f(P_5) - 4f(P_4)) (-4f(P_4) + v(q))$$

$$\text{vol}(\text{Dreieck 1}) = \text{vol}(\text{Dreieck 2}) = \text{vol}(\text{Dreieck 3}) = \text{vol}(\text{Dreieck 4}) = \frac{m^2 T^2}{2v(q)}$$

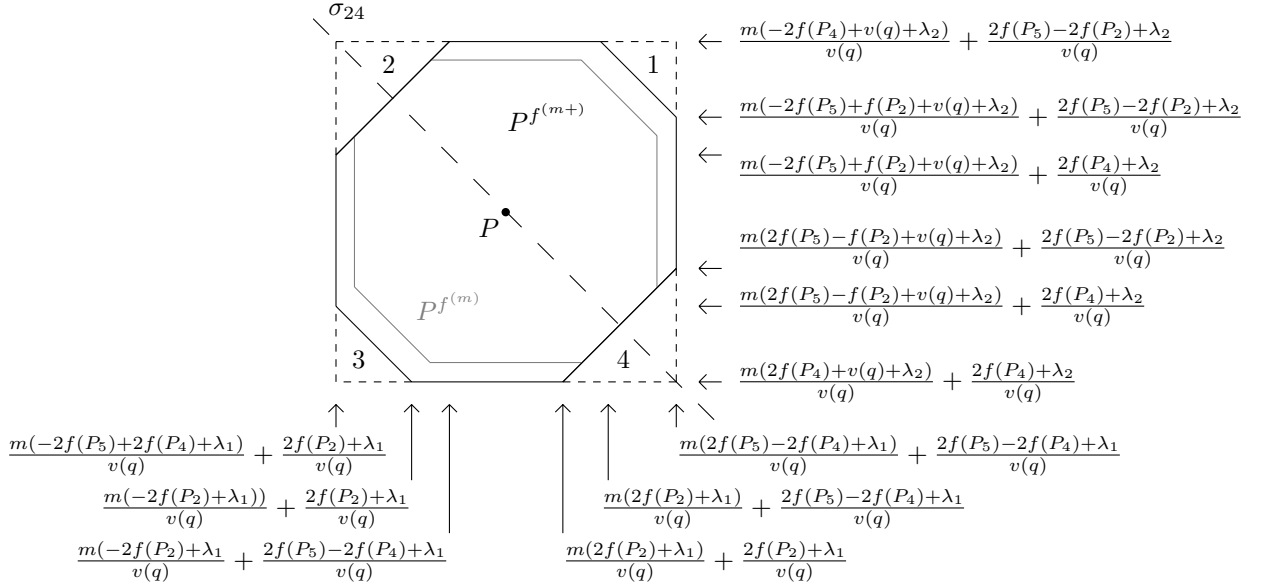
und damit

$$\begin{aligned} \text{vol}(P^{f^{(m)}}) &= \frac{m^2}{v(q)^2} \{-4f(P_4) + v(q)\} \{4f(P_5) - 4f(P_4)\} - \frac{2T^2 m^2}{v(q)^2} \\ &= m^2 \text{vol}(P^f) \\ &= m^2 \text{vol}(P_4^f) . \end{aligned}$$

Nun brauchen wir noch  $\text{vol}(P^{f^{(m+)}})$ . Dafür haben wir das folgende Polytop



5.6. Der Chambert-Loir Test im gemischten Fall



mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in v(q)\mathbb{Z}$  und erhalten wieder mit  $T := 2f(P_5) - 2f(P_2) - 2f(P_4)$

$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{gro\u00dfes Rechteck}) &= \frac{1}{v(q)} (4mf(P_5) - 4mf(P_4) + T) (-4mf(P_4) + v(q)m + T) \\ \text{vol}(\text{Dreieck 1}) = \text{vol}(\text{Dreieck 3}) &= \frac{m^2 T^2}{2v(q)} \\ \text{vol}(\text{Dreieck 2}) = \text{vol}(\text{Dreieck 4}) &= \frac{(m+1)^2 T^2}{2v(q)} \end{aligned}$$

und damit

$$\text{vol}\left(P^{f(m+)}\right) = m^2 \cdot \text{vol}\left(P_4^f\right) + \frac{mT(v(q) - 4f(P_4) + 4f(P_2))}{v(q)^2}.$$

Wie bei der Kante  $\sigma_{12}$  gilt auch hier  $\text{vol}\left(P^{f(m+)}\right) - \text{vol}\left(P^{f(m)}\right) = O(m)$ . F\u00fcr die  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ -vielen „ungeraden Nachbarn“  $Q$  von  $P_4$  erhalten wir durch analoges Vorgehen jeweils:

$$\begin{aligned} \text{vol}\left(Q^{f(m)}\right) &= \frac{m^2}{v(q)^2} \{-4f(P_2) + v(q)\} \{4f(P_5) - 4f(P_2)\} \\ &\quad - \frac{2m^2}{v(q)^2} \{2f(P_5) - 2f(P_2) - 2f(P_4)\}^2 \\ &= m^2 \text{vol}\left(Q^f\right) \\ &= m^2 \text{vol}\left(P_2^f\right) \end{aligned}$$

5. Die erste Chernform auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

$$\begin{aligned} \text{vol} \left( Q^{f^{(m+)}} \right) &= m^2 \cdot \text{vol} \left( P_2^f \right) \\ &\quad + \frac{m}{v(q)^2} \cdot \{2f(P_5) - 2f(P_2) - 2f(P_4)\} \cdot \{v(q) - 4 \cdot f(P_2) + 4 \cdot f(P_4)\} \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 5.6.11, brauchen wir die zwei Randpunkte nicht weiter zu betrachten. Wir erhalten:

$$\omega_f(\sigma_{24}) = \frac{2f(P_5) - 2f(P_2) - 2f(P_4)}{v(q)} .$$

und es gilt  $\text{vol} \left( Q^{f^{(m+)}} \right) - \text{vol} \left( Q^{f^{(m)}} \right) = O(m)$ .

**Bemerkung 5.6.14.** Allgemein läßt sich leicht zeigen, dass für alle Ecken  $P$  der Summenzerlegung (unabhängig von der Kante)

$$\text{vol} \left( P^{f^{(m+)}} \right) - \text{vol} \left( P^{f^{(m)}} \right) = O(m)$$

gilt. Da für alle Ecken der Zerlegung  $V1$  das Volumen unabhängig von  $m$  ist, gilt somit auch

$$\omega_{f^{(m+)}}(P) = O(m^{-1}) .$$

Daraus folgt nun, dass der Grenzwert in Gleichung (5.2) immer existiert, da auf jeder Kante der Zerlegung  $V1$  die Anzahl der auf ihr liegenden Ecken der  $m$ -Zerlegung von der Größe  $O(m)$  ist.

**5.6.15.** Als letztes Beispiel wollen wir noch  $\omega_f(\sigma_{25})$  bestimmen. Wir untersuchen also eine innere Kante des Fundamentalbereichs  $[0, v(q)]^2$ , bei der wieder drei Fälle zu unterscheiden sind:

1. Kreuzpunkte: Dieser Fall kommt  $\lceil \frac{m-1}{2} \rceil$ -mal vor und es gilt

$$\text{vol} \left( P^{f^{(m)}} \right) = m^2 \cdot \text{vol} \left( P_5^f \right) ,$$

$$\text{vol} \left( P^{f^{(m+)}} \right) = (m^2 + m) \cdot \text{vol} \left( P_5^f \right)$$

2. Sternpunkte: Dieser Fall kommt  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ -mal vor und es gilt

$$\text{vol} \left( P^{f^{(m)}} \right) = m^2 \cdot \text{vol} \left( P_2^f \right) ,$$

$$\text{vol} \left( P^{f^{(m+)}} \right) = m^2 \text{vol} \left( P_5^f \right) + m \cdot \frac{(4f(P_4) - 4f(P_5) + v(q)) \cdot (4f(P_5) - 4f(P_2))}{v(q)^2}$$

3. Randpunkte: Diese brauchen wir wegen der obigen Bemerkung nicht weiter zu betrachten.

Damit ergibt sich nun

$$\omega_f(\sigma_{25}) = \frac{2f(P_4) - 2f(P_5)}{v(q)} + \frac{1}{2}.$$

**5.6.16.** Für alle anderen Kanten der Zerlegung  $V_1$  gehen wir analog vor und erhalten  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|) = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_f(\sigma) \mu_\sigma$  mit

Kante $\sigma$	$\omega_f(\sigma)$
$\sigma_{12}, \sigma_{23}$	$\frac{2f(P_4)}{v(q)}$
$\sigma_{24}, \sigma_{26}, \sigma_{48}, \sigma_{68}$	$\frac{2f(P_5) - 2f(P_2) - 2f(P_4)}{v(q)}$
$\sigma_{25}, \sigma_{58}$	$\frac{2f(P_4) - 2f(P_5)}{v(q)} + \frac{1}{2}$
$\sigma_{14}, \sigma_{47}$	$\frac{2f(P_2)}{v(q)}$
$\sigma_{45}, \sigma_{56}$	$\frac{2f(P_2) - 2f(P_5)}{v(q)} + \frac{1}{2}$

**Fazit 5.6.17.** Bleibt abschließend noch der Vergleich der Ergebnisse. Dazu stellen wir zunächst fest, dass mit 5.3.6

$$\mu_\sigma = \frac{2}{v(q)} (dx \wedge [\sigma] + dy \wedge [\sigma]) = \frac{2}{v(q)} (dx|_\sigma + dy|_\sigma)$$

für alle  $\sigma \in V^{(1)}$  gilt. Genauer bedeutet das, dass hier

- $\mu_\sigma = \frac{2}{v(q)} \cdot dx|_\sigma$  für  $\sigma \in \{\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{45}, \sigma_{56}\}$ ,
- $\mu_\sigma = \frac{2}{v(q)} \cdot dy|_\sigma$  für  $\sigma \in \{\sigma_{14}, \sigma_{47}, \sigma_{25}, \sigma_{58}\}$  und
- $\mu_\sigma = v(q)^{(-1)} (dx|_\sigma + dy|_\sigma)$  für  $\sigma \in \{\sigma_{24}, \sigma_{26}, \sigma_{48}, \sigma_{68}\}$

gilt. Wir erhalten also

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) \wedge c_1(L, \|\cdot\|),$$

das heißt

- $\omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma) = 2 \cdot \omega_f(\sigma)$  für  $\sigma \in \{\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{45}, \sigma_{56}, \sigma_{14}, \sigma_{47}, \sigma_{25}, \sigma_{58}\}$  und
- $\omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma) = \omega_f(\sigma)$  für  $\sigma \in \{\sigma_{24}, \sigma_{26}, \sigma_{48}, \sigma_{68}\}$ .

Insgesamt gilt damit

$$c_1^{\text{AR}}(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2} = c_1(L^{\otimes 2}, \|\cdot\|_{\text{kan}} \otimes \|\cdot\|)^{\wedge 2}$$

wie gewünscht.



# 6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

Unser Ziel ist es, im 2-dimensionalen Fall ein Analogon für die  $dd^c$ -Gleichung (Poincaré-Lelong Gleichung) zu finden. Dazu müssen wir zunächst einen geeigneten „Differentialoperator“  $\square$  definieren, der den bisherigen Differentialoperator  $dd^c$  ersetzt. Das heißt der neue Differentialoperator  $\square$  muß die folgenden Eigenschaften haben:

1.  $\square$  ist definiert auf den stetigen, stückweise glatten Funktionen  $g$  auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ .
2.  $\square g$  ist ein Strom auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ .

Wir betrachten nun  $g = -\log \|s_D\|$  für den globalen Schnitt  $s_D$  aus Abschnitt 2.3. Dann gilt

$$h := \pi^*(g) = -\log (|\Theta| \cdot p^*\|1\|) = -\log (|\Theta|) - \log (p^*\|1\|) \quad (6.1)$$

mit der Notation aus Abschnitt 2.3. Damit wird  $\square g$  nach 1) und 2) auch ein Strom auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  sein. Wir verlangen weiter, dass

3. der Differentialoperator die Poincaré-Lelong Gleichung

$$\square g = c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) - \delta_{\text{Trop}(\text{div}(s))} \quad (6.2)$$

erfüllt. Wir werden  $\square$  so definieren, dass 3. sowohl für die Modellmetriken als auch für die kanonische Metrik auf  $L$  gilt.

## 6.1. Der Differentialoperator $\square$ im 1-dimensionalen Fall

**6.1.1.** Wir wollen zuerst den Differentialoperator  $\square$  im 1-dimensionalen am Beispiel der Tate-Kurve zusammen mit einer Modellmetrik  $\|\cdot\|$  bestimmen. Hier gilt  $g = -\log \|s_P\|$

6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

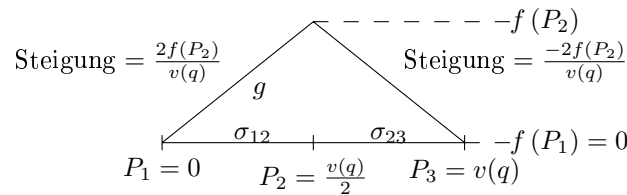
und die Metrik wird durch eine Funktion  $f$  gegeben (siehe Abschnitt 2.5). Das heißt es gilt  $-\log(p^*\|1\|) := f$  und nach Gleichung (6.1) ist die Funktion  $h$  damit gegeben durch

$$h = \pi^*(g) = -\log(|\Theta|) + f .$$

Weil nun

$$-\log|\Theta(\zeta)| = \begin{cases} 0 & |q|^{1/2} \leq \zeta \leq 1 \\ -\log|q^{1/2}\zeta^{-1}| & |q|^{1/2} \geq \zeta \geq |q| \end{cases} \triangleq \begin{cases} 0 & 0 \leq u, u' \leq v(q)/2 \\ v(q)/2 - u & v(q)/2 \leq u \leq v(q) \end{cases}$$

mit  $\zeta \in \mathbb{C}_K^\times$  bzw.  $u := v(\zeta) = -\log(\zeta)$  gilt, ist  $g$  bestimmt durch:



Weiter gilt nach Abschnitt 5.4 jetzt  $c_1(O(P), \|\cdot\|) = \left(\frac{4}{v(q)}f(P_2)\right)[P_1] + \left(1 - \frac{4}{v(q)}f(P_2)\right)[P_2]$  und  $\delta_{\text{Trop}(\text{div}(s_1))} = 1 \cdot [P_2]$ . Damit müssen wir, da die Poincaré-Lelong Gleichung (siehe (6.2)) gelten soll, einen Differentialoperator  $\square$  konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} \square g &= c_1(O(P), \|\cdot\|) - \delta_{\text{Trop}(\text{div}(s_1))} \\ &= \left(\frac{4}{v(q)}f(P_2)\right)[P_1] + \left(1 - \frac{4}{v(q)}f(P_2)\right)[P_2] - 1 \cdot [P_2] \\ &= \left(\frac{4}{v(q)}f(P_2)\right)[P_1] + \left(-\frac{4}{v(q)}f(P_2)\right)[P_2] \end{aligned}$$

gilt.

**Definition 6.1.2.** Wir definieren für  $g \in \text{Zh}(S(\mathcal{X}_v)) = \{f : S(\mathcal{X}_v) \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig, stückweise } C^2 \text{ und } f''(x) \in L^1(S(\mathcal{X}_v))\}$  unseren Differentialoperator  $\square$  durch

$$\square g := -\Delta(g) ,$$

wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator aus Definition 4.1.7 ist.

**Bemerkung 6.1.3.** In Kapitel 4 haben wir allgemein gesehen, dass der Operator  $\square$  für arithmetische Flächen mit beliebigen Schnitten und beliebigen Modellmetriken, die Poincaré-Lelong Gleichung erfüllt.

**6.1.4.** Weil in dieser Situation  $g \in \text{Zh}(S(\mathcal{X}_v))$  gilt, folgt zunächst  $g''(x)dx = 0$ , da  $g$  stückweise linear ist. Des Weiteren gilt  $X_f = \{P_1, P_2\}$ , sowie  $\text{Vec}(P_1) = \{\sigma_{1(-2)}, \sigma_{12}\}$  und  $\text{Vec}(P_2) = \{\sigma_{21}, \sigma_{23}\}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \square(g) &= -\Delta(g) \\ &= \left[ \underbrace{\left( \frac{2}{v(q)} f(P_2) + \frac{2}{v(q)} f(P_2) \right)}_{=\sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(P_1)} d_{\vec{v}} f(P_1)} [P_1] + \underbrace{\left( -\frac{2}{v(q)} f(P_2) + \left( -\frac{2}{v(q)} g(P_2) \right) \right)}_{=\sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(P_2)} d_{\vec{v}} f(P_2)} [P_2] \right] \\ &= \left( \frac{4}{v(q)} g(P_2) \right) [P_1] - \left( \frac{4}{v(q)} f(P_2) \right) [P_2] \end{aligned}$$

wie gewünscht.

**6.1.5.** Abschließen wollen wir die 1-dimensionale Betrachtung mit dem Fall der kanonischen Metrik. Hier gilt  $g = -\log \|s_P\|_{\text{kan}}$  und damit

$$h = \pi^*(g) = -\log |\Theta| - \log (p^* \|1\|_{\text{kan}}) .$$

Analog zu den Modellmetriken

$$-\log |\Theta(u)| = \begin{cases} 0 & 0 \leq u, u' \leq v(q)/2 \\ v(q)/2 - u & v(q)/2 \leq u \leq v(q) \end{cases} .$$

Weiter gilt nach [BG06, chapter 9.5, equation (9.24)], dass

$$-\log (p^* \|1\|_{\text{kan}}(\zeta)) = -\log \left( |\zeta|^{\frac{\log |\zeta|}{2 \log |q|}} \right)$$

für  $\zeta \in \mathbb{C}_K^\times$ . Bei uns gilt nun  $u = v(\zeta) = -\log |\zeta|$  und wir erhalten dann

$$-\log (p^* \|1\|_{\text{kan}}(u)) = \frac{u^2}{2v(q)} .$$

Damit ergibt sich die Funktion  $g$  wie folgt

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{2v(q)} & 0 \leq u \leq v(q)/2 \\ \frac{v(q)}{2} - u + \frac{u^2}{2v(q)} & v(q)/2 \leq u \leq v(q) \end{cases} .$$

Hier gilt  $c_1(O(P), \|\cdot\|_{\text{kan}}) = \frac{dx}{v(q)}$  und wieder  $\delta_{\text{Trop}(\text{div}(s_1))} = 1 \cdot [P_2]$ . Damit müssen wir also einen Differentialoperator  $\square$  konstruieren, so dass die Poincaré-Lelong Gleichung

$$\square g = c_1(O(P), \|\cdot\|_{\text{kan}}) - \delta_{\text{Trop}(\text{div}(s_1))} = \frac{dx}{v(q)} - 1 \cdot [P_2]$$

## 6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

gilt. Wir überprüfen nun ob der Differentialoperator, den wir für die Modellmetriken definiert haben, auch hier das gewünscht Resultat liefert. Es gilt wieder  $X_f = \{P_1, P_2\}$ ,  $\text{Vec}(P_1) = \{\sigma_{1(-2)}, \sigma_{12}\}$ ,  $\text{Vec}(P_2) = \{\sigma_{21}, \sigma_{23}\}$  und wir erhalten mit  $d_{\vec{v}}g = \text{grad}(g) \cdot \vec{v}$  dann

$$\begin{aligned} \square g &= - \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x) dx - \sum_{p \in X_f} \left( \sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(p)} d_{\vec{v}}g \right) \delta_p \right] \\ &= \frac{dx}{v(q)} + \underbrace{\left( (-1) \cdot \frac{u}{v(q)} + 1 \cdot \frac{u}{v(q)} \right)}_{=\sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(P_1)} d_{\vec{v}}g(P_1)} \delta_{P_1} + \underbrace{\left( 1 \cdot \frac{u}{v(q)} + (-1) \cdot \left( -1 + \frac{u}{v(q)} \right) \right)}_{=\sum_{\vec{v} \in \text{Vec}(P_2)} d_{\vec{v}}g(P_2)} \delta_{P_2} \\ &= \underbrace{\frac{dx}{v(q)}}_{=c_1(O(P), \|\cdot\|_{\text{kan}})} - \underbrace{1 \cdot [P_2]}_{=\delta_{\text{Trop}(\text{div}(s_1))}} . \end{aligned}$$

wie gewünscht.

**Fazit 6.1.6.** Unsere Definition 6.1.2 des Differentialoperators  $\square$  ist sowohl im Fall der Modellmetriken als auch im Fall der kanonischen Metrik richtig.

## 6.2. Der Differentialoperator $\square$ für Modellmetriken

**6.2.1.** Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit dem Fall einer Modellmetrik beschäftigen. Das heißt, unsere Metrik ist durch eine stückweise lineare Funktion  $f$  gegeben. Genauer heißt das, es gilt  $-\log(p^*\|1\|) := f$ . Dabei ist die Funktion  $f$  auf der Zerlegung  $V1$  von  $\Lambda = v(q)\mathbb{Z} \times v(q)\mathbb{Z}$  nach Abschnitt 2.5 gegeben durch

Punkt	$P_1$	$P_2$	$P_4$	$P_5$
Koordinaten	$(0, 0)$	$(v(q)/2, 0)$	$(0, v(q)/2)$	$(v(q)/2, v(q)/2)$
$f(P_i)$	0	$f(P_2)$	$f(P_4)$	$f(P_5)$

Alle anderen Werte von  $f$  lassen sich aufgrund der Linearität und mit der Periodizitätsbedingung (Abschnitt 2.5 Gleichung (2.5)) leicht berechnen. Da die Funktion  $h$  nach Gleichung (6.1) gegeben ist durch  $h = \pi^*(g) = -\log(|\Theta|) + f$ , bleibt jetzt noch die Funktion  $\Theta$  zu bestimmen. Dazu benutzen wir die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.3 und gehen analog zum 1-dimensionalen Fall (siehe 6.1) vor. Zunächst gilt

$$\Theta(\zeta, \zeta') = \Theta(\zeta) \cdot \Theta(\zeta')$$

für  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}_K^\times$ . Dabei ist für  $\tilde{q} = q^{1/2}$  die Theta-Funktion definiert durch

$$\Theta(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}^{n^2} \zeta^n .$$



Wir erhalten somit

$$-\log |\Theta(\zeta, \zeta')| = -\log |\Theta(\zeta)| - \log |\Theta(\zeta')| .$$

Wählt man  $\zeta, \zeta'$  aus dem Skelett  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  von  $(E^{\text{an}})^2$  und setzt  $u := v(\zeta) = -\log |\zeta|$ ,  $u' := v(\zeta') = -\log |\zeta'|$ , dann gilt

$$-\log |\Theta(\zeta, \zeta')| = \begin{cases} 0 & 0 \leq u, u' \leq v(q)/2 \\ v(q)/2 - u' & 0 \leq u \leq v(q)/2 \leq u' \leq v(q) \\ v(q)/2 - u & 0 \leq u' \leq v(q)/2 \leq u \leq v(q) \\ v(q) - u - u' & v(q)/2 \leq u, u' \leq v(q) . \end{cases} \quad (6.3)$$

Damit können wir die Funktion  $g$  berechnen. Diese ist wieder stückweise linear und wird bestimmt durch

Punkt	$P_1, P_3, P_7, P_9$	$P_2, P_8$	$P_4, P_6$	$P_5$
$g(P_i)$	0	$f(P_2)$	$f(P_4)$	$f(P_5)$

**6.2.2.** Nun wissen wir aus Abschnitt 5.5, dass

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|) = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma)[\sigma]$$

mit

$\tau$	$\omega_{f,C}^{\text{AR}}(\sigma)$
$\sigma_{12}, \sigma_{23}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2)$
$\sigma_{14}, \sigma_{47}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_4)$
$\sigma_{24}, \sigma_{48}, \sigma_{26}, \sigma_{68}$	$\frac{2}{v(q)} \cdot f(P_5) - \frac{2}{v(q)} \cdot f(P_4) - \frac{2}{v(q)} \cdot f(P_2)$
$\sigma_{25}, \sigma_{58}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_4) - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_5) + 1$
$\sigma_{45}, \sigma_{56}$	$\frac{4}{v(q)} \cdot f(P_2) - \frac{4}{v(q)} \cdot f(P_5) + 1$

und

$$\delta_{\text{Trop}(\text{div}(s))} = 1 \cdot [\sigma_{45}] + 1 \cdot [\sigma_{56}] + 1 \cdot [\sigma_{25}] + 1 \cdot [\sigma_{58}]$$

gilt. Wir müssen also einen Differentialoperator  $\square$  konstruieren, so dass für die Funktion  $g$  die Poincaré-Lelong Gleichung (siehe (6.2))

$$\square g = c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}) - \delta_{\text{Trop}(\text{div}(s))} = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \omega_g^{\text{AR}}(\sigma)[\sigma]$$

## 6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

erfüllt ist, wobei

$$\begin{aligned}\omega_g^{\text{AR}}(\sigma) &= \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma) - 1 && \text{für } \sigma \in \{\sigma_{24}, \sigma_{48}, \sigma_{26}, \sigma_{68}\} \\ \omega_g^{\text{AR}}(\sigma) &= \omega_{f.C}^{\text{AR}}(\sigma) && \text{für alle anderen Kanten.}\end{aligned}$$

**Definition 6.2.3.** Für den ersten Versuch benutzen wir einen an den Laplace-Operator aus dem 1-dimensionalen Fall (siehe Definition 6.1.2) angelehnten Differentialoperator. Wir setzen

$$\square g := \underbrace{\sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right)}_{\text{Summe von Diracströmen}} \delta_\sigma,$$

wobei  $g$  eine auf einer vorgegebenen Simplexzerlegung  $V$  vom Skelett  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  (zum Beispiel  $V1$ ) stückweise lineare Funktion,  $V^{(1)}$  die Menge der Kanten der Zerlegung  $V$  und  $v_{\Delta/\sigma}$  der (primitive) Normalenvektor eines Dreiecks  $\Delta \in V^{(2)}$  bezüglich der Kante  $\sigma \in V^{(1)}$  ist.

**Bemerkung 6.2.4.** 1. Die Wahl der partiellen Ableitung in Richtung des (primitiven) Normalenvektors ist motiviert durch unsere Definition der ersten Chernform in Abschnitt 5.2.

2. Bei unseren Funktionen  $g$  brauchen wir keinen „stetigen Maßteil“. Dieser wäre sowieso immer gleich 0, weil  $g$  stückweise linear ist. Genauer heißt das, unsere Funktion  $g$  hat lokal immer die Bauart  $g(x, y) = m_1x + m_2y + c$  mit  $m_1, m_2, c \in \mathbb{R}$ .

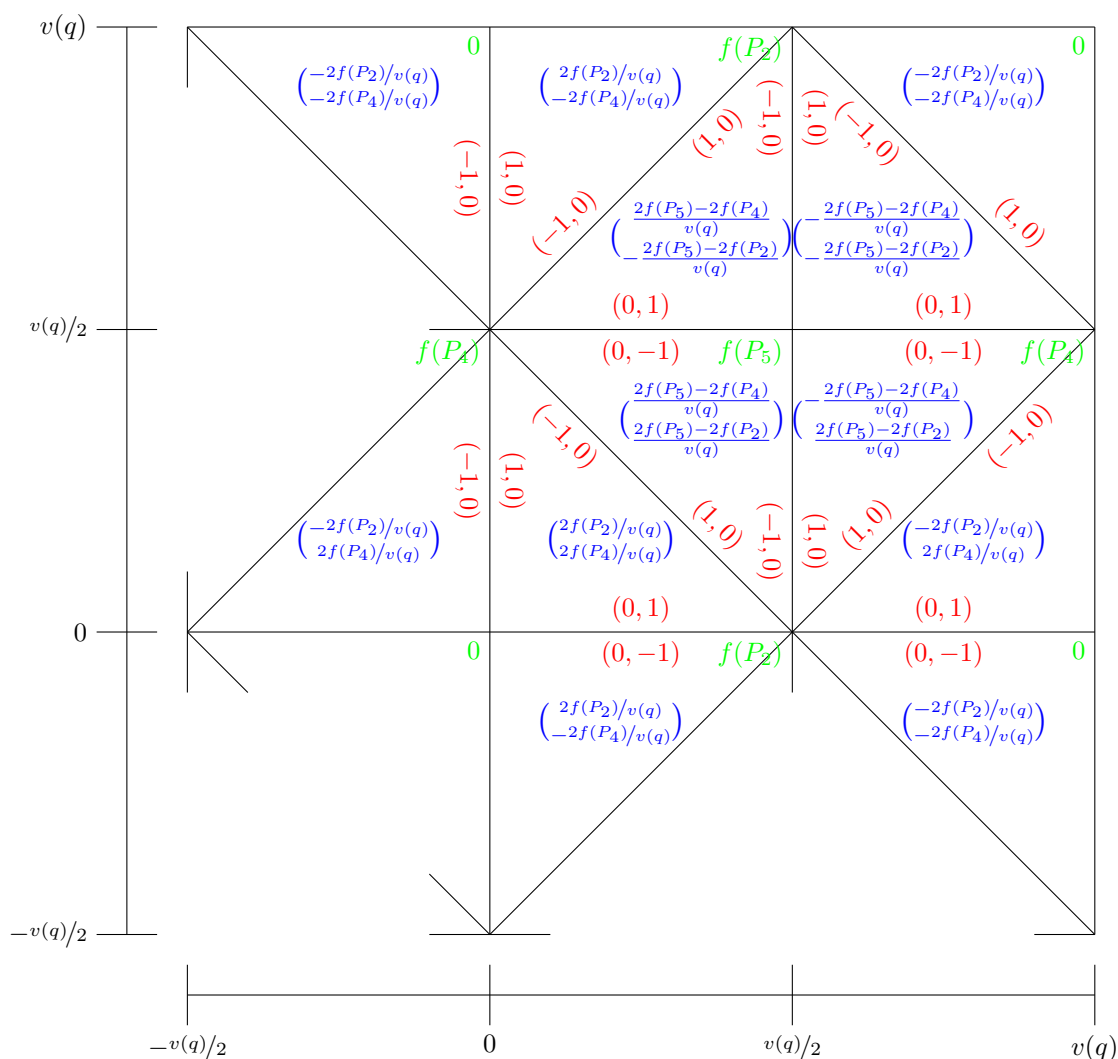
**6.2.5.** Wir wollen nun unsere Definition des Differentialoperators  $\square$  überprüfen. Dazu bestimmen wir zunächst analog zum Abschnitt 5.5 die (primitiven) Normalenvektoren der Zerlegung  $V1$  und die Steigungsvektoren für die linearen Stücke von  $g$ . Wir erhalten die Ergebnisse aus Abbildung 6.1, wobei an den Ecken der Zerlegung jeweils der Funktionswert (grün) von  $g$  angegeben und  $g$  auf den Dreiecken (das heißt Elementen von  $V^{(2)}$ ) linear ist. Des Weiteren ist innerhalb jedes Dreiecks jeweils der Steigungsvektor (blau) von  $g$  und an jeder Kante der entsprechende Vektor  $v_{\Delta/\sigma}$  (rot) angegeben. Letzterer ist unabhängig von  $v(g)$ . Wir müssen nun also

$$\square g = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g_\Delta}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_\sigma$$

berechnen. Dabei bezeichnet  $g_\Delta$  jeweils die lineare Fortsetzung der Funktion  $g|_\Delta$  und es gilt

$$\frac{\partial g_\Delta}{\partial v_{\Delta/\sigma}} = \text{grad}(g_\Delta) \cdot v_{\Delta/\sigma}.$$

Damit folgt dann beispielhaft für die Kante  $\sigma = \sigma_{24}$ :


 Abbildung 6.1.: Steigungsvektoren und Normalenvektoren  $v_{\Delta/\sigma}$  der Funktion  $g$ 

- Für  $\Delta = \Delta_{124}$  erhalten wir die Funktion  $g_{\Delta}(x, y) = \frac{2f(P_2)}{v(q)}x + \frac{2f(P_4)}{v(q)}y$  und den (primitiven) Normalenvektor  $v_{\Delta/\sigma} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Damit ergibt sich

$$\frac{\partial g_{\Delta}}{\partial v_{\Delta/\sigma}} = -\frac{2f(P_2)}{v(q)}.$$

- Für  $\Delta = \Delta_{245}$  erhalten wir die Funktion  $g_{\Delta}(x, y) = \frac{2f(P_5)-2f(P_4)}{v(q)}x + \frac{2f(P_5)-2f(P_2)}{v(q)}y + c$  mit  $c = -f(P_5) + f(P_2) + f(P_4)$  und den (primitiven) Normalenvektor  $v_{\Delta/\sigma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Damit ergibt sich

$$\frac{\partial g_{\Delta}}{\partial v_{\Delta/\sigma}} = \frac{2f(P_5) - 2f(P_4)}{v(q)}.$$

## 6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

Zusammen erhalten wir als Summanden in  $\square g$  für die Kante  $\sigma_{24}$  damit

$$\frac{2f(P_5) - 2f(P_4) - 2f(P_2)}{v(q)} \cdot \delta_{\sigma_{24}} .$$

Alle anderen Fälle gehen analog und wir erhalten das in 6.2.2 gewünschte Resultat.

**Bemerkung 6.2.6.** Im Falle einer Modellmetrike ist die Definition 6.2.3 des Differentialoperators analog zu der 1-dimensionalen Situation (siehe 6.1.2).

## 6.3. Der Differentialoperator $\square$ für die kanonische Metrik

Das Ziel dieses Abschnittes ist es unseren bisherigen Differentialoperator  $\square$  so zu erweitern, dass er auch für stetige stückweise glatte Funktionen definiert ist. Das heißt wir wollen einen neuen Differentialoperator, den wir wieder mit  $\square$  bezeichnen, finden, der einen „stetigen Maßteil“ hat. Im Fall der kanonischen Metrik wollen wir dann überprüfen, ob die mit diesem Differentialoperator aus der Poincaré-Lelong Gleichung (siehe (6.2)) bestimmte erste Chernform mit unserem Ergebnis 5.3.3 übereinstimmt.

**6.3.1.** Wir machen nun den folgenden Ansatz: Für die Produktsituation  $X = E \times E$  und dem mit der Produktmetrik versehenen Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  wollen wir den stetigen Teil des Differentialoperators aus der 1-dimensionalen Situation (siehe 6.1) herleiten. Dazu versehen wir, zur besseren Unterscheidung, alle Größen aus dem 1-dimensionalen Fall mit dem Index 1. Im 1-dimensionalen haben wir für eine stetige und stückweise glatte Funktion  $g_1$  auf  $\mathbb{R}/v(q)\mathbb{Z}$  den stetigen Teil des Differentialoperator  $\square_1$  definiert durch  $g_1'' dx$ . Da nach Bemerkung 6.2.6 der diskrete Teil mit der Definition aus dem 2-dimensionalen übereinstimmt, erhalten wir zusammen

$$\square_1 g_1 = \underbrace{g_1'' dx}_{\text{stetiges Maß}} + \underbrace{\sum_{\sigma \in V^{(0)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g_1}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right)}_{\text{diskretes Maß}} \delta_{\sigma} .$$

Nun wollen wir daraus die 2-dimensionalen Situation mit Pullback herleiten. Wir nehmen dazu das Geradenbündel  $p_1^*(O(P))$  mit der Pullbackmetrik  $\|\cdot\|_{\text{pullb.}} = p_1^* \|\cdot\|_1$ . Intuitiv setzen wir als ersten Versuch

$$\square = p_1\text{-Pullback von } \square_1 .$$

### 6.3. Der Differentialoperator $\square$ für die kanonische Metrik

Damit ergibt sich nun für  $g(x, y) = g_1(x)$ , dass

$$\begin{aligned} \square g(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_1(x) dx + \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g_1}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_\sigma \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_1(x) dx + \sum_{\sigma \text{ horizontale Kante}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma} \in \left\{ \binom{0}{1}, \binom{0}{-1} \right\}} \frac{\partial g_1}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_\sigma . \end{aligned}$$

Analog gehen wir bezüglich der zweiten Projektion vor. Jetzt bleibt also noch die gemischte Situation zu betrachten. Hier haben wir das Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  mit der Produktmetrik  $\|\cdot\|_{\text{prod.}} = p_1^*\|\cdot\|_1 \otimes p_2^*\|\cdot\|_1$ . Dabei bleibt  $V^{(1)} = S(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_1^2$  unverändert und wir setzen

$$\square = p_1\text{-Pullback von } \square_1 + p_2\text{-Pullback von } \square_1 .$$

Das heißt wir bilden die Summe der beiden vorigen Fälle. Das führt uns auf die folgende Definition.

**Definition 6.3.2.** Für  $g(x, y)$  stetig und stückweise glatt auf der Zerlegung  $V$  von  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  definieren wir den Differentialoperator  $\square$  durch

$$\square g(x, y) := \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) dy + \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_\sigma .$$

Analog zur Bemerkung 5.3.4 soll das als Strom auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  interpretiert werden.

**Bemerkung 6.3.3.** 1. Die Herleitung des Differentialoperators  $\square$  gibt uns keine Auskunft über gemischte Ableitungen. Das wird für die Anwendung auf die kanonische Metrik jedoch genügen. Die Definition für beliebige stetige und stückweise glatte Funktionen müsste mit dem Lagerberg-Formalismus (siehe [Lag12] und [CD12]) geschehen.

2. Bei der Definition des Differentialoperators spielen die Diagonalen der Zerlegung keine Rolle, da  $g$  linear auf jedem Quadrat ist und sich damit die Vektoren  $v_{\Delta/\sigma}$  der Diagonalen jeweils paarweise aufheben.

**6.3.4.** Zum Abschluß wollen wir die Definition des Differentialoperators  $\square$  im Fall der kanonischen Metrik testen. Dazu überprüfen wir, ob der Differentialoperator zusammen mit der ersten Chernform aus 5.3.3 die Poincaré-Lelong Gleichung (siehe (6.2)) erfüllt. Wir haben also das Produkt  $E \times E$  der Tate-Kurve  $E$  und das Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes$

## 6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

$p_2^*(O(P))$  mit der kanonischen Metrik  $\|\cdot\|_{\text{kan}}$ . Dabei gilt  $\|\cdot\|_{\text{kan}} = p_1^*\|\cdot\|_{\text{kan},1} \otimes p_2^*\|\cdot\|_{\text{kan},1}$ , wobei das Geradenbündel  $O(P)$  mit der kanonischen Metrik  $\|\cdot\|_{\text{kan},1}$  zur Tate-Kurve  $E$  gehört und  $p_i$  für  $i = 1, 2$  die Projektionen auf die  $i$ -te Komponente sind. Nun gilt nach Gleichung (6.1)

$$h = \pi^*(g) = -\log |\Theta| - \log (p^*\|1\|_{\text{kan}}) .$$

Für  $\zeta, \zeta'$  aus dem Skelett  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  in  $(E^{\text{an}})^2$  setzen wir  $u := v(\zeta) = -\log |\zeta|$ ,  $u' := v(\zeta') = -\log |\zeta'|$ . Damit können wir den ersten Summanden

$$-\log |\Theta(\zeta, \zeta')| = \begin{cases} 0 & 0 \leq u, u' \leq v(q)/2 \\ v(q)/2 - u' & 0 \leq u \leq v(q)/2 \leq u' \leq v(q) \\ v(q)/2 - u & 0 \leq u' \leq v(q)/2 \leq u \leq v(q) \\ v(q) - u - u' & v(q)/2 \leq u, u' \leq v(q) \end{cases}$$

aus dem stückweise linearen Fall (siehe 6.2.1) übernehmen und müssen nur noch den zweiten Summanden  $-\log (p^*\|1\|_{\text{kan}})$  bestimmen. In [BG06, chapter 9.5, equation (9.24)] wird die Gleichheit

$$-\log (p^*\|1\|_{\text{kan}}(\zeta, \zeta')) = -\log \left( |\zeta \cdot \zeta'|^{\frac{\log |\zeta \cdot \zeta'|}{2 \log |q|}} \right)$$

für  $(\zeta, \zeta') \in (\mathbb{C}_K^*)^2$  bewiesen. Für  $\zeta, \zeta'$  aus dem Skelett  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  und  $u := v(\zeta) = -\log |\zeta|$ ,  $u' := v(\zeta') = -\log |\zeta'|$  gilt nun

$$-\log (p^*\|1\|_{\text{kan}}(\zeta, \zeta')) = \frac{(\log |\zeta \cdot \zeta'|)^2}{2v(q)} = \frac{u^2 + (u')^2}{2v(q)} .$$

Damit ergibt sich unsere Funktion  $g$  nun wie folgt

$$g(u, u') = \begin{cases} \frac{u^2 + (u')^2}{2v(q)} & 0 \leq u, u' \leq v(q)/2 \\ \frac{v(q)}{2} - u' + \frac{u^2 + (u')^2}{2v(q)} & 0 \leq u \leq v(q)/2 \leq u' \leq v(q) \\ \frac{v(q)}{2} - u + \frac{u^2 + (u')^2}{2v(q)} & 0 \leq u' \leq v(q)/2 \leq u \leq v(q) \\ v(q) - u - u' + \frac{u^2 + (u')^2}{2v(q)} & v(q)/2 \leq u, u' \leq v(q) \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \square g &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) dy + \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_{\sigma} \\ &= \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)} + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{12}} \\ &\quad + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{23}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{14}} \\
 & + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{25}} \\
 & + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ -1 + u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{45}} \\
 & + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + u/v(q) \\ -1 + u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + u/v(q) \\ u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{56}} \\
 & + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ -1 + u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ -1 + u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{47}} \\
 & + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + u/v(q) \\ -1 + u'/v(q) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u/v(q) \\ -1 + u'/v(q) \end{pmatrix} \right] \delta_{\sigma_{58}} \\
 & = \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)} - (1 \cdot [\sigma_{25}] + 1 \cdot [\sigma_{45}] + 1 \cdot [\sigma_{56}] + 1 \cdot [\sigma_{58}]) .
 \end{aligned}$$

Da  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) = \frac{dx}{v(q)} + \frac{dy}{v(q)}$  und  $\delta_{\text{Trop}(\text{div}(s))} = 1 \cdot [\sigma_{25}] + 1 \cdot [\sigma_{45}] + 1 \cdot [\sigma_{56}] + 1 \cdot [\sigma_{58}]$  nach 5.3.3 gilt, erfüllt der neue Differentialoperator  $\square$  die Poincaré-Lelong Gleichung (siehe (6.2)) wie gewünscht. Damit haben wir den Satz 1.6 auch für die kanonische Metrik gezeigt.

## 6.4. Das 3-dimensionale Beispiel

Analog zur 2-dimensionalen Situation im Spezialfall  $v(q) = 1$  setzen wir

$$\begin{aligned}
 \square g(x_1, x_2, x_3) & := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} g(x_1, x_2, x_3) dx_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} g(x_1, x_2, x_3) dx_3 \\
 & + \sum_{\sigma \in V^{(2)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_{\sigma}
 \end{aligned}$$

für  $g(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)$ , wobei  $g_1, g_2, g_3$  stetige, stückweise glatte Funktionen bezüglich einer Simplexzerlegung  $V$  des Skelettes  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$  von  $(E^{\text{an}})^3$  sind. Dann definieren wir die erste Chernform durch

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) := \square_{\text{AR}} g + \delta_{\text{Trop}(\text{div}(s))}$$

mit  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P)) \otimes p_3^*(O(P))$ ,  $\|\cdot\|_{\text{kan}} = p_1^*\|\cdot\|_{\text{kan},1} \otimes p_2^*\|\cdot\|_{\text{kan},1} \otimes p_3^*\|\cdot\|_{\text{kan},1}$  und  $s := p_1^*(s_1) \otimes p_2^*(s_1) \otimes p_3^*(s_1)$ . Dabei gehört das Geradenbündel  $O(P)$  mit der kanonischen Metrik  $\|\cdot\|_{\text{kan},1}$  zur Tate-Kurve  $E$ ,  $p_i$  für  $i = 1, 2, 3$  sind die Projektionen auf die  $i$ -te Komponente und  $s_P$  ist ein Schnitt mit  $\text{div}(s_P) = P$ . Nach Konstruktion erfüllt damit die

## 6. Die Poincaré-Lelong-Gleichung auf dem Quadrat einer Tate-Kurve

erste Chernform die Poincaré-Lelong-Gleichung. Durch eine zum 2-dimensionalen analoge Rechnung erhalten wir mit diesen Definitionen

$$c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}}) = 1dx_1 + 1dx_2 + 1dx_3 .$$

Nun wollen wir überprüfen, ob die Definition der ersten Chernform sinnvoll ist, indem wir  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^3$  berechnen und mit dem aus der Literatur bekannten Chambert-Loir-Maß  $c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^3$  vergleichen. Es gilt

$$\begin{aligned} c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^3 &= (1dx_1 + 1dx_2 + 1dx_3)^2 \wedge (1dx_1 + 1dx_2 + 1dx_3) \\ &= (2(dx_1 \wedge dx_2) + 2(dx_1 \wedge dx_3) + 2(dx_2 \wedge dx_3)) \wedge (1dx_1 + 1dx_2 + 1dx_3) \\ &= 6(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \end{aligned}$$

wobei wir wieder unsere neuen Rechenregeln (siehe Definition 5.3.6) benutzen. Des Weiteren gilt nach [Gub07a, Corollary 7.3]

$$\begin{aligned} c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^3 &= \text{Haar-Maß auf } \mathbb{R}^3/\Lambda \text{ „Gesamtmasse = Grad“} \\ &= 6(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) , \end{aligned}$$

da hier  $\text{Grad}(E^3) = 6$ . Es folgt  $c_1^{\text{AR}}(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^3 = c_1(L, \|\cdot\|_{\text{kan}})^3$ . Also haben wir auch im 3-dimensionalen eine sinnvolle Definition der ersten Chernform.



# 7. Greensche Ströme

## 7.1. Interpretation von $\square$ auf Strömen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob sich der Differentialoperator  $\square$ , den wir in Kapitel 6 bestimmt haben, auch auf Ströme anwenden lässt. Wir haben wieder die folgende Ausgangssituation. Gegeben sei eine Tate elliptische Kurve  $E$  mit  $E^{\text{an}} = \mathbb{C}_K^\times / q^{\mathbb{Z}}$ ,  $q \in \mathbb{C}_K^\times$  und dem Geradenbündel  $O(P)$ , wobei der 2-Torsionspunkt  $P = -q^{1/2}$  fest gewählt ist. Des Weiteren wählen wir einen kanonischen globalen Schnitt  $s_P$  von  $O(P)$  so, dass  $\text{div}(s_P) = P$  gilt. Darauf aufbauend betrachten wir nun das Produkt  $E \times E$  der Tate elliptischen Kurve  $E$  mit den Projektionen  $p_i$  auf die  $i$ -te Komponente. Zu diesem betrachten wir dann ein strikt semistabiles Modell  $\mathcal{B}$ , indem wir die Zerlegung  $V1$  fest wählen. Weiter betrachten wir das ample Geradenbündel  $L = p_1^*(O(P)) \otimes p_2^*(O(P))$  und erhalten durch  $s := p_1^*(s_P) \otimes p_2^*(s_P)$  einen globalen Schnitt von  $L$  mit  $\text{div}(s) = P \times E + E \times P$ . Für Details siehe Kapitel 2.

**7.1.1.** Für eine stetige und stückweise glatte Funktion  $g(x, y)$  auf der Zerlegung  $V1$  haben wir in 6.3.2 den Differentialoperator  $\square$  definiert durch

$$\square g(x, y) = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) dy}_{\text{„stetiger Teil“}} + \underbrace{\sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_\sigma}_{\text{„diskreter Teil“}},$$

wobei  $V^{(1)}$  die Menge der 1-dimensionalen Polytope von  $V1$  bezeichnet.

**7.1.2.** Weiter sei nun mit  $\eta := a(x, y) dx + b(x, y) dy$  eine 1-Form auf  $\text{Trop}(E^2)$  gegeben. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \square \eta &:= \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y) dy \wedge dx + \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) dx \wedge dy \\ &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) \right] dx \wedge dy, \end{aligned}$$

## 7. Greensche Ströme

wobei wir  $dx$  und  $dy$  formal analog zu 2-Formen behandeln. Das heißt auch hier gelten wieder unsere Rechenregeln für das Wedge-Produkt (siehe 5.3.3), insbesondere gilt also  $dx \wedge dy = dy \wedge dx$ . Damit können wir  $\square g$  auch im Sinne der reellwertigen Ströme auf  $\text{Trop}(E^2)$  verstehen. Zuerst einmal erinnern wir daran, dass der Strom  $[g]$  zu  $g$  definiert ist als lineares Funktional auf den 1-Formen, gegeben durch die Paarung

$$\langle [g], \alpha \rangle := \int_{\text{Trop}(E^2)} g \cdot \alpha ,$$

wobei  $\alpha$  eine 2-Form auf  $\text{Trop}(E^2)$  ist. Die Ableitung im Sinne der Ströme ist dann definiert durch die Paarung

$$\langle \square [g], \eta \rangle := \langle [g], \square \eta \rangle = \int_{\text{Trop}(E^2)} g \square \eta .$$

Das positive Vorzeichen ist durch die Analogie mit  $dd^c$  bedingt. Andererseits haben wir den Strom  $\square g$  auf  $\text{Trop}(E^2)$  definiert durch die Paarung

$$\langle \square g, \eta \rangle = \int_{\text{Trop}(E^2)} \eta \square g .$$

Unser nächster Satz besagt, dass  $\square g = \square [g]$  gilt, was die Natürlichkeit der Definition des Differentialoperators zeigt.

**Satz 7.1.3.** Für eine 1-Form  $\eta$  auf  $\text{Trop}(E^2)$  gilt

$$\langle \square g, \eta \rangle = \langle g, \square \eta \rangle ,$$

wobei  $g$  auf  $\text{Trop}(E^2)$  entweder eine glatte oder eine stetige, stückweise lineare Funktion ist. Im letzteren Fall verlangen wir genauer, dass  $g$  linear auf den Simplex von  $V_1$  ist.

*Beweis:* Der Beweis für eine auf  $\text{Trop}(E^2)$  glatte Funktion  $g$  ist in Abschnitt 7.2 und der für eine auf  $\text{Trop}(E^2)$  stetige, stückweise lineare Funktion  $g$  ist in Abschnitt 7.3 zu finden.  $\square$

**7.1.4.** Nun wollen wir den vorigen Satz auf unsere Situation anwenden. Wir wählen also ein Geradenbündel  $L$  mit der kanonischen Metrik oder mit einer Modellmetrik zu einer stetigen und stückweise linearen Funktion wie in Proposition 2.5.1. Dann ist die Einschränkung von  $g := -\log \|s_D\|$  auf  $\text{Trop}(E^2) = \mathbb{R}^2/\Lambda = \mathbb{R}/v(q)\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/v(q)\mathbb{Z}$ , wobei  $s_D$  der obige Schnitt zum Divisor  $D = P \times E + E \times P$  ist, eine periodische Funktion.

1.  $g$  ist im Falle der kanonischen Metrik eine glatte Funktion und es gilt

$$\square g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy ,$$

weil der diskrete Teil von  $\square$  gleich 0 ist (siehe Abschnitt 6.3).

2.  $g$  ist im Falle einer Modellmetrik eine stetige, stückweise lineare Funktion und es gilt

$$\square g = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_{\sigma},$$

weil der stetige Teil von  $\square$  identisch 0 (siehe Abschnitt 6.2).

## 7.2. Der glatte Fall

Ähnlich wie schon bei der Bestimmung des Differentialoperators  $\square$  (siehe Kapitel 6) ist auch hier wieder der glatte Fall der einfachere. Gegeben ist nun eine glatte Funktion  $g$  auf  $\text{Trop}(E^2)$  und eine beliebige 1-Form  $\eta = a(x, y) dx + b(x, y) dy$  auf  $\text{Trop}(E^2)$ . Damit können wir jetzt den Satz 7.1.3 durch Einsetzen direkt beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \square g, \eta \rangle &= \int_{\text{Trop}(E^2)} \eta \square g \\ &= \int_{\text{Trop}(E^2)} (a(x, y) dx + b(x, y) dy) \wedge \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy + \underbrace{0}_{\text{„diskreter Teil“}} \right) \\ &= \int_{\text{Trop}(E^2)} a(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dx \wedge dy + b(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \underbrace{dx \wedge dy}_{=dy \wedge dx} + \underbrace{0}_{dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0} \\ &= \int_{\text{Trop}(E^2)} a(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dx \wedge dy + \int_{\text{Trop}(E^2)} b(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx \wedge dy \\ &= \int_0^{v(q)} \underbrace{\left( \int_0^{v(q)} a(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} dy \right)}_{\text{partielle Integration nach y}} dx + \int_0^{v(q)} \underbrace{\left( \int_0^{v(q)} b(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx \right)}_{\text{partielle Integration nach x}} dy \\ &= \int_0^{v(q)} \left( \underbrace{\left[ a(x, y) \frac{\partial g}{\partial y} \right]_0^{v(q)}}_{=0 \text{ wegen der Periode}} - \int_0^{v(q)} \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) dx \\ &\quad + \int_0^{v(q)} \left( \underbrace{\left[ b(x, y) \frac{\partial g}{\partial x} \right]_0^{v(q)}}_{=0 \text{ wegen der Periode}} - \int_0^{v(q)} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \frac{\partial g}{\partial x} dx \right) dy \\ &= - \int_0^{v(q)} \underbrace{\left( \int_0^{v(q)} \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \frac{\partial g}{\partial y} dy \right)}_{\text{partielle Integration nach y}} dx - \int_0^{v(q)} \underbrace{\left( \int_0^{v(q)} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \frac{\partial g}{\partial x} dx \right)}_{\text{partielle Integration nach x}} dy \end{aligned}$$

## 7. Greensche Ströme

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{v(q)} \left( \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \cdot g \right]_0^{v(q)}}_{=0 \text{ wegen der Periode}} - \int_0^{v(q)} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y) \cdot g \, dy \right) dx \\
&\quad - \int_0^{v(q)} \left( \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \cdot g \right]_0^{v(q)}}_{=0 \text{ wegen der Periode}} - \int_0^{v(q)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) \cdot g \, dx \right) dy \\
&= \int_0^{v(q)} \left( \int_0^{v(q)} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y) \cdot g \, dy \right) dx + \int_0^{v(q)} \left( \int_0^{v(q)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) \cdot g \, dx \right) dy \\
&= \int_{\text{Trop}(E^2)} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y) \cdot g \underbrace{dy \wedge dx}_{=dx \wedge dy} + \int_{\text{Trop}(E^2)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) \cdot g \, dx \wedge dy \\
&= \int_{\text{Trop}(E^2)} g \left( \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) \right] dx \wedge dy \right) \\
&= \int_{\text{Trop}(E^2)} g \, \square \eta \\
&= \langle g, \square \eta \rangle ,
\end{aligned}$$

womit wir den Satz 7.1.3 für auf  $\text{Trop}(E^2)$  glatte Funktionen bewiesen haben.

### 7.3. Der stetige, stückweise lineare Fall

Wie beim glatten Fall ist die 1-Form auf  $\text{Trop}(E^2)$  gegeben durch  $\eta = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ . Jedoch ist dieses Mal  $g$  eine stetige, stückweise lineare Funktion auf  $\text{Trop}(E^2)$ . Genauer ist  $g$  linear auf den Simplex von  $V1$ . Das bedeutet, dass  $\square g$  nur aus dem diskreten Teil besteht, was den Beweis des Satzes 7.1.3 sehr viel schwieriger macht. Aus diesem Grund setzen wir in beide Seiten des Satzes 7.1.3 ein und versuchen uns durch Umformungen in der „Mitte“ zu treffen. Dabei wird es nötig sein, eine Identität zwischen den Summanden, die von den diagonalen Kanten der Zerlegung  $V1$  beeinflusst werden, herzuleiten.

**7.3.1.** Wir beginnen zunächst die „Linke Seite“ von Satz 7.1.3 umzuformen. Durch Einset-

zen der Definitionen von  $\eta$  und des Differentialoperators  $\square$  erhalten wir

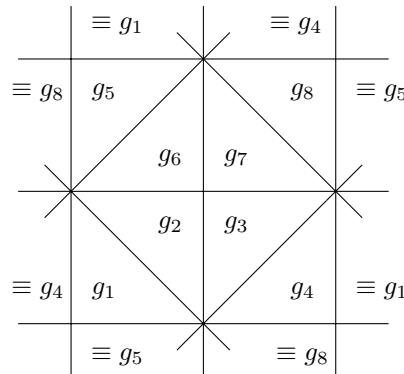
$$\begin{aligned} \langle \square g, \eta \rangle &= \int_{\text{Trop}(E^2)} \eta \square g \\ &= \int_{\text{Trop}(E^2)} (a(x, y) dx + b(x, y) dy) \wedge \left( \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \left( \sum_{v_{\Delta/\sigma}} \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} \right) \delta_{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Nun gilt  $V^{(1)} \subset \text{Trop}(E^2)$  und es gibt zu jeder fest gewählten Kante  $\sigma \in V^{(1)}$  genau zwei Simplexe  $\Delta \in V^{(2)}$  mit  $\sigma \subset \Delta$ . Diese beiden Simplexe bezeichnen wir mit  $\Delta^+$  und  $\Delta^-$ . Das heißt die Summe über  $v_{\Delta/\sigma}$  hat jeweils nur zwei Summanden. Damit folgt

$$(7.1) = \sum_{\sigma \in V^{(1)}} \int_{\sigma} \left( a(x, y) dx \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta^+/\sigma}} + a(x, y) dx \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta^-/\sigma}} + b(x, y) dy \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta^+/\sigma}} + b(x, y) dy \frac{\partial g}{\partial v_{\Delta^-/\sigma}} \right). \quad (7.2)$$

**Bemerkung 7.3.2.** Für die weiteren Umformungen legen wir zunächst ein paar Bezeichnungen fest und wiederholen einige früheren Resultate.

- I) Nach Voraussetzung ist  $g$  linear auf jedem Simplex  $\Delta \in V^{(2)}$  und der Übergang zum nächsten Simplex ist stetig. Aus diesem Grund führen wir nun die folgenden Bezeichnungen für die linearen Teile von  $g$  ein



wobei wir die Periodizität von  $g$  ausnutzen.

- II) Wie wir später sehen werden, ist es zweckmäßig die Differentiale  $dx$  bzw.  $dy$  in das Oberflächenmaß  $dS$  einer Kante  $\sigma$  umzurechnen. Dadurch ergibt sich die folgende Zuordnung:

$\sigma$	$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{45}, \sigma_{56}$	$\sigma_{14}, \sigma_{47}, \sigma_{25}, \sigma_{58}$	$\sigma_{24}$	$\sigma_{26}$	$\sigma_{48}$	$\sigma_{68}$
$dx _{\sigma}$	$dS$	$0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} dS$	$\frac{\sqrt{2}}{2} dS$	$\frac{\sqrt{2}}{2} dS$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} dS$
$dy _{\sigma}$	$0$	$dS$	$\frac{\sqrt{2}}{2} dS$	$\frac{\sqrt{2}}{2} dS$	$\frac{\sqrt{2}}{2} dS$	$\frac{\sqrt{2}}{2} dS$

## 7. Greensche Ströme

wobei  $\sigma_{ij}$  die Kante zwischen den Punkten  $P_i$  und  $P_j$  des strikt semistabilen Modells  $\mathcal{B}$  bezeichnen (vgl. Bezeichnungen in Abschnitt 5.5).

III) Zuletzt gilt mit  $v_{\Delta/\sigma} = \begin{pmatrix} (v_{\Delta/\sigma})_1 \\ (v_{\Delta/\sigma})_2 \end{pmatrix}$  nach Definition

$$\frac{\partial g}{\partial v_{\Delta/\sigma}} = \text{grad}(g) \cdot v_{\Delta/\sigma} = \frac{\partial g}{\partial x} (v_{\Delta/\sigma})_1 + \frac{\partial g}{\partial y} (v_{\Delta/\sigma})_2 ,$$

wobei wir die Vektoren  $v_{\Delta/\sigma}$  in Abschnitt 5.5 berechnet haben.

**7.3.3.** Mit I. – III. aus der vorigen Bemerkung können wir die Umformung jetzt fortsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
(7.2) = & + \int_{\sigma_{12}} + \frac{\partial g_1}{\partial y} a(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{12}} - \frac{\partial g_5}{\partial y} a(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{23}} + \frac{\partial g_4}{\partial y} a(x, y) \, dS \\
& + \int_{\sigma_{23}} - \frac{\partial g_8}{\partial y} a(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{14}} + \frac{\partial g_1}{\partial x} b(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{14}} - \frac{\partial g_4}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} - \frac{\partial g_2}{\partial x} a(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} + \frac{\partial g_1}{\partial x} a(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} + \frac{\partial g_2}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} - \frac{\partial g_1}{\partial x} b(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{25}} + \frac{\partial g_3}{\partial x} b(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{25}} - \frac{\partial g_2}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} - \frac{\partial g_3}{\partial x} a(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} + \frac{\partial g_4}{\partial x} a(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} - \frac{\partial g_3}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} + \frac{\partial g_4}{\partial x} b(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{45}} + \frac{\partial g_6}{\partial y} a(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{45}} - \frac{\partial g_2}{\partial y} a(x, y) \, dS \\
& + \int_{\sigma_{56}} + \frac{\partial g_7}{\partial y} a(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{56}} - \frac{\partial g_3}{\partial y} a(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{47}} + \frac{\partial g_5}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& + \int_{\sigma_{47}} - \frac{\partial g_8}{\partial x} b(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} - \frac{\partial g_5}{\partial x} a(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} + \frac{\partial g_6}{\partial x} a(x, y) \, dS \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} - \frac{\partial g_5}{\partial x} b(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} + \frac{\partial g_6}{\partial x} b(x, y) \, dS + \int_{\sigma_{58}} + \frac{\partial g_7}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& + \int_{\sigma_{58}} - \frac{\partial g_6}{\partial x} b(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} - \frac{\partial g_8}{\partial x} a(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} + \frac{\partial g_7}{\partial x} a(x, y) \, dS \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} + \frac{\partial g_8}{\partial x} b(x, y) \, dS + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} - \frac{\partial g_7}{\partial x} b(x, y) \, dS . \tag{7.3}
\end{aligned}$$

**7.3.4.** Im nächsten Schritt beginnen wir nun die „Rechte Seite“ des Satzes 7.1.3 umzuformen. Auch hier setzen wir zunächst die Definitionen von  $\eta$  und des Differentialoperators  $\square$  ein und erhalten

$$\langle g, \square \eta \rangle = \int_{\text{Trop}(E^2)} g \square \eta$$

$$= \sum_{\Delta \in \text{Trop}(E^2)} \int_{\Delta} g \left( \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) \right] dx \wedge dy \right). \quad (7.4)$$

Für die weitere Umformung benutzen wir die folgende mehrdimensionale partielle Integration.

**Satz 7.3.5** (Mehrdimensionale partielle Integration). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  kompakt mit abschnittsweise glatten Rand  $\partial\Omega$ . Der Rand sei orientiert durch ein äußeres Normalen-Einheitsfeld  $\vec{n}$ . Sei ferner  $\vec{v}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von  $\Omega$  und  $\varphi$  ein stetig differenzierbares Skalarfeld auf  $\Omega$ . Dann gilt mit  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ :

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(\vec{v}) dV = \int_{\partial\Omega} \varphi \vec{v} d\vec{S} - \int_{\Omega} \vec{v} \operatorname{grad}(\varphi) dV.$$

**7.3.6.** Angewendet auf unsere Situation ergeben sich die folgenden Zuordnungen der Bezeichnungen:

Satz 7.3.5	Bei uns	Erklärung
$\Omega$	$\Delta$	Element aus $V^{(2)}$
$\varphi$	$g$	stetig und stückweise linear, d.h. $f _{\Delta}$ ist linear für alle $\Delta \in V^{(2)}$ .
$\vec{v}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \end{pmatrix}$	„kommt von $\eta$ “
$\partial\Omega$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	Kanten von $\Delta$ , positiv orientiert
$\vec{n}$		Normale bzgl. $\Delta$ , nach außen orientiert
$dS$		Oberflächenmaß
$d\vec{S} = \vec{n} dS$		orientiertes Oberflächenmaß
$dV$	$dx \wedge dy$	Volumenmaß $\equiv$ Lebesguemaß (bzgl. $\Delta$ )
$\operatorname{div}(\vec{v})$	$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 b(x, y) + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 a(x, y)$	
$\operatorname{grad}(\varphi)$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g \\ \frac{\partial}{\partial y} g \end{pmatrix}$	

Damit erhalten wir nun

$$(7.4) = \sum_{\Delta} \int_{\Delta} g \cdot \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

7. Greensche Ströme

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{m.p.I.}}{=} \underbrace{\sum_{\Delta} \int_{\partial\Delta} g \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \end{pmatrix} d\vec{S}}_{=0} - \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g \\ \frac{\partial}{\partial y} g \end{pmatrix} dx \wedge dy \\ & = - \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \frac{\partial}{\partial x} g \, dx \wedge dy - \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \frac{\partial}{\partial y} g \, dx \wedge dy . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Dabei verschwindet der erste Summand nach der mehrdimensionalen partiellen Integration, weil  $g \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} b(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} a(x, y) \end{pmatrix}$  stetig ist und die Normalenvektoren von  $d\vec{S}$  in der Summe immer als entgegengesetztes Paar vorhanden sind. Nun wenden wir erneut die mehrdimensionale partielle Integration an. Diesmal erhalten wir jeweils die folgenden Zuordnungen der Bezeichnungen:

Satz 7.3.5	Erster Summand von (7.5)	Zweiter Summand von (7.5)
$\Omega$	$\Delta$	
$\varphi$	$\frac{\partial}{\partial x} g$	$\frac{\partial}{\partial y} g$
$\vec{v}$	$\begin{pmatrix} b(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ a(x, y) \end{pmatrix}$
$\partial\Omega$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ mit Orientierung (Kanten von $\Delta$ )	
$\vec{n}$	Normale bzgl $\Delta$ , nach außen orientiert	
$dS$	Oberflächenmaß	
$d\vec{S} = \vec{n} \, dS$	orientiertes Oberflächenmaß	
$dV$	$dx \wedge dy$	
$\text{div}(\vec{v})$	$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 b(x, y) + 0$	$0 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 a(x, y)$
$\text{grad}(\varphi)$	$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 g \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g \end{pmatrix}$

Somit folgt

$$\begin{aligned} (7.5) & = - \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} g \cdot \text{div} \begin{pmatrix} b(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy \\ & \stackrel{\text{m.p.I.}}{=} - \sum_{\partial\Delta} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} g \cdot \begin{pmatrix} b(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{S} + \underbrace{\sum_{\Delta} \int_{\Delta} \begin{pmatrix} b(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 g \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} g \end{pmatrix} dx \wedge dy}_{=0} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a(x, y) \end{pmatrix} d\vec{S} + \underbrace{\sum_{\Delta} \int_{\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} g \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g \end{pmatrix} dx \wedge dy}_{=0} \\
 & = - \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial \Delta} \frac{\partial}{\partial x} g \cdot \begin{pmatrix} b(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{S} - \sum_{\Delta} \int_{\partial \Delta} \frac{\partial}{\partial y} g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a(x, y) \end{pmatrix} d\vec{S}. \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Weil in unserer Situation  $g$  stückweise linear ist und somit  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 g = 0 = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g$  gilt, verschwindet der jeweils nach der mehrdimensionalen partiellen Integration auftretende zweite Summand.

**Bemerkung 7.3.7.** Wie bei den Rechnungen zur „Linken Seite“ führen wir auch hier zunächst abkürzende Notation ein und bestimmen einige Zwischenergebnisse.

- I) Für die linearen Teile der Funktion  $g$  benutzen wir wieder die in 7.3.2(I) festgelegten Bezeichnungen.
- II) Für die nach außen orientierten Normalen  $\vec{n}$ , wobei die Kanten  $\sigma$  der Simplexe  $\Delta \in V^{(2)}$  mathematisch positiv orientiert sind, gilt

$\Delta$	$\sigma$	$\vec{n}$	$\Delta$	$\sigma$	$\vec{n}$	$\Delta$	$\sigma$	$\vec{n}$	$\Delta$	$\sigma$	$\vec{n}$
$\Delta_{124}$	$\sigma_{12}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\Delta_{478}$	$\sigma_{48}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\Delta_{245}$	$\sigma_{25}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\Delta_{458}$	$\sigma_{45}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	$\sigma_{24}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\sigma_{87}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\sigma_{54}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\sigma_{58}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\sigma_{41}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$		$\sigma_{74}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$		$\sigma_{42}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$		$\sigma_{84}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Delta_{256}$	$\sigma_{26}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\Delta_{568}$	$\sigma_{56}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\Delta_{236}$	$\sigma_{23}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\Delta_{689}$	$\sigma_{69}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$\sigma_{65}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\sigma_{68}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\sigma_{36}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$		$\sigma_{98}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
	$\sigma_{52}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$		$\sigma_{85}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$		$\sigma_{62}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\sigma_{85}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- III) Für jede Kante  $\sigma_{ij} \in V^{(1)}$  gilt  $+\int_{\sigma_{ij}} \dots dS = +\int_{\sigma_{ji}} \dots dS$ , da  $dS$  ein ein unorientiertes Oberflächenmaß der Kante  $\sigma_{ij}$  ist.
- IV) Aufgrund der Periodizität von  $g$  gilt  $\sigma_{14} = \sigma_{36}$ ,  $\sigma_{47} = \sigma_{69}$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{78}$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{89}$ .

**7.3.8.** Mit I. – VI. aus der vorigen Bemerkung erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
 (7.6) = & - \int_{\sigma_{12}} -\frac{\partial g_1}{\partial y} a(x, y) dS - \int_{\sigma_{23}} -\frac{\partial g_4}{\partial y} a(x, y) dS - \int_{\sigma_{14}} -\frac{\partial g_1}{\partial x} b(x, y) dS \\
 & - \int_{\sigma_{14}} +\frac{\partial g_4}{\partial x} b(x, y) dS - \int_{\sigma_{25}} +\frac{\partial g_2}{\partial x} b(x, y) dS - \int_{\sigma_{25}} -\frac{\partial g_3}{\partial x} b(x, y) dS
 \end{aligned}$$

## 7. Greensche Ströme

$$\begin{aligned}
& - \int_{\sigma_{45}} -\frac{\partial g_6}{\partial y} a(x, y) \, dS - \int_{\sigma_{45}} +\frac{\partial g_2}{\partial y} a(x, y) \, dS - \int_{\sigma_{56}} -\frac{\partial g_7}{\partial y} a(x, y) \, dS \\
& - \int_{\sigma_{56}} +\frac{\partial g_3}{\partial y} a(x, y) \, dS - \int_{\sigma_{47}} -\frac{\partial g_5}{\partial x} b(x, y) \, dS - \int_{\sigma_{47}} +\frac{\partial g_8}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& - \int_{\sigma_{58}} +\frac{\partial g_6}{\partial x} b(x, y) \, dS - \int_{\sigma_{58}} -\frac{\partial g_7}{\partial x} b(x, y) \, dS - \int_{\sigma_{12}} +\frac{\partial g_5}{\partial y} a(x, y) \, dS \\
& - \int_{\sigma_{23}} +\frac{\partial g_8}{\partial y} a(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} +\frac{\partial g_1}{\partial x} b(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} +\frac{\partial g_1}{\partial y} a(x, y) \, dS \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} -\frac{\partial g_2}{\partial x} b(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{24}} -\frac{\partial g_2}{\partial y} a(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} +\frac{\partial g_3}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} -\frac{\partial g_3}{\partial y} a(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} -\frac{\partial g_4}{\partial x} b(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{26}} +\frac{\partial g_4}{\partial y} a(x, y) \, dS \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} +\frac{\partial g_5}{\partial x} b(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} -\frac{\partial g_5}{\partial y} a(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} -\frac{\partial g_6}{\partial x} b(x, y) \, dS \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{48}} +\frac{\partial g_6}{\partial y} a(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} +\frac{\partial g_7}{\partial x} b(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} +\frac{\partial g_7}{\partial y} a(x, y) \, dS \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} -\frac{\partial g_8}{\partial x} b(x, y) \, dS - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sigma_{68}} -\frac{\partial g_8}{\partial y} a(x, y) \, dS . \tag{7.7}
\end{aligned}$$

**7.3.9.** Mit den bisherigen Umformungen sind wir unserem Ziel, die Behauptung 7.1.3 zu zeigen, schon deutlich näher gekommen. Denn ein Vergleich der Zwischenergebnisse für die „Linke Seite“ (siehe Gleichung (7.3)) und für die „Rechte Seite“ (siehe Gleichung (7.7)) liefert uns folgendes:

- Für alle horizontalen Kanten von  $V^{(1)}$ , das heißt für  $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{45}$  und  $\sigma_{56}$ , sind die entsprechenden Summanden gleich (inklusive der Vorzeichen).
- Für alle vertikalen Kanten von  $V^{(1)}$ , das heißt für  $\sigma_{14}, \sigma_{47}, \sigma_{25}$  und  $\sigma_{58}$ , sind die entsprechenden Summanden gleich (inklusive der Vorzeichen).
- Für die diagonalen Kanten von  $V^{(1)}$ , das heißt für  $\sigma_{24}, \sigma_{26}, \sigma_{48}$  und  $\sigma_{68}$ , ist ein direkter Vergleich noch nicht möglich. Das Problem ist, dass wir im Ergebnis der „Linken Seite“ nur über Terme der Form  $\pm \frac{\partial}{\partial x} g_i$  integrieren, aber im Ergebnis der „Rechten Seite“ auch Terme der Form  $\pm \frac{\partial}{\partial y} g_i$  auftreten. Die Lösung dieses Problem liefert uns nun aber die folgende Proposition.

Damit ist der Satz 7.1.3 dann gezeigt.

**Proposition 7.3.10.** a) Für jeden Vektor  $\vec{w} \in \mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q)$ , der parallel zu den Kanten  $\sigma_{48}$  und  $\sigma_{26}$  ist, gilt

$$0 = + \int_{\sigma_{48}} \text{grad}(g_5) \cdot \vec{w} \, dS - \int_{\sigma_{48}} \text{grad}(g_6) \cdot \vec{w} \, dS \\ + \int_{\sigma_{26}} \text{grad}(g_3) \cdot \vec{w} \, dS - \int_{\sigma_{26}} \text{grad}(g_4) \cdot \vec{w} \, dS . \quad (7.8)$$

• Für jeden Vektor  $\vec{w} \in \mathbb{Z}v(q) \times \mathbb{Z}v(q)$ , der parallel zu den Kanten  $\sigma_{24}$  und  $\sigma_{68}$  ist, gilt

$$0 = + \int_{\sigma_{24}} \text{grad}(g_1) \cdot \vec{w} \, dS - \int_{\sigma_{24}} \text{grad}(g_2) \cdot \vec{w} \, dS \\ + \int_{\sigma_{68}} \text{grad}(g_7) \cdot \vec{w} \, dS - \int_{\sigma_{68}} \text{grad}(g_8) \cdot \vec{w} \, dS . \quad (7.9)$$

*Beweis.* Wir wollen hier nur den Beweis von Teil a) der Proposition 7.3.10 skizzieren, da Teil b) analog gezeigt wird. Weil wir in Teil a) nur über die Kanten  $\sigma_{48}$  und  $\sigma_{26}$  integrieren gilt  $dS = +\frac{\sqrt{2}}{2}dx = +\frac{\sqrt{2}}{2}dy$ . Weiter gilt für alle Punkte der beiden Kanten und jeden zu diesen Kanten parallelen Vektor  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ , dass die 1.Koordinate gleich der 2. Koordinate ist. Damit können wir den rechten Teil der Proposition 7.3.10 umformen zu

$$\sqrt{2} \int_{\sigma_{48}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_5(x, x) \\ \frac{\partial}{\partial y} g_5(x, x) \end{pmatrix} \cdot \vec{w} \, dx - \sqrt{2} \int_{\sigma_{48}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_6(x, x) \\ \frac{\partial}{\partial y} g_6(x, x) \end{pmatrix} \cdot \vec{w} \, dx \\ + \sqrt{2} \int_{\sigma_{26}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_3(x, x) \\ \frac{\partial}{\partial y} g_3(x, x) \end{pmatrix} \cdot \vec{w} \, dx - \sqrt{2} \int_{\sigma_{26}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_4(x, x) \\ \frac{\partial}{\partial y} g_4(x, x) \end{pmatrix} \cdot \vec{w} \, dx . \quad (7.10)$$

Aufgrund der besonderen Lage der Kanten  $\sigma_{48}$  und  $\sigma_{26}$  wenden wir nun für  $i = 3, 4, 5, 6$  die Parametrisierung

$$\varphi_i(x) := g_i(x, x), \quad \varphi'_i(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x} & \frac{\partial g_i}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(q) \\ v(q) \end{pmatrix} (x, x) = \left( v(q) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x} + v(q) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial y} \right) (x, x)$$

an. Weiter setzen wir  $v := w_1 = w_2$  und erhalten damit

$$(7.10) = \int_0^{v(q)/2} \varphi'_5(x) \cdot v \, dx - \int_0^{v(q)/2} \varphi'_6(x) \cdot v \, dx + \int_{v(q)/2}^{v(q)} \varphi'_3(x) \cdot v \, dx - \int_{v(q)/2}^{v(q)} \varphi'_4(x) \cdot v \, dx \\ = v \cdot (\varphi_5(v(q)/2) - \varphi_5(0)) - v \cdot (\varphi_6(v(q)/2) - \varphi_6(0)) \\ + v \cdot (\varphi_3(v(q)) - \varphi_3(v(q)/2)) - v \cdot (\varphi_4(v(q)) - \varphi_4(v(q)/2)) . \quad (7.11)$$

Jetzt gilt aber aufgrund der Periodizität der Funktion  $g$ , der gewählten Zerlegung  $V1$  und der obigen Parametrisierung  $\varphi_5(0) = \varphi_3(v(q))$ ,  $\varphi_5(v(q)/2) = \varphi_3(v(q)/2)$ ,  $\varphi_6(0) = \varphi_4(v(q))$ ,

## 7. Greensche Ströme

$\varphi_6(v(q)/2) = \varphi_4(v(q)/2)$  und damit

$$\begin{aligned} (7.11) &= v \cdot (\varphi_5(v(q)/2) - \varphi_5(0) - \varphi_6(v(q)/2) + \varphi_6(0) \\ &\quad + \varphi_5(v(q)) - \varphi_5(v(q)/2) - \varphi_6(v(q)) + \varphi_6(v(q)/2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

## 7.4. Ausblick auf Greensche Ströme

In diesem Abschnitt wollen wir einen Ausblick auf die Interpretation des Differentialoperators  $\square$  auf Greensche Ströme geben. Dazu geben wir die Definition eines Greenschen Stroms und führen das Sternprodukt zweier Greenscher Ströme ein. Zum Abschluß wollen wir an einem Beispiel beleuchten, ob es sich dabei wieder um einen Greenschen Strom handeln könnte.

**7.4.1.** Auf komplexen Mannigfaltigkeiten ist ein Greenscher Strom zu einem Zyklus  $Z$  definiert als ein Strom  $g$ , für den es eine Differentialform  $\omega_Z$  gibt mit  $dd^c g = \omega_Z - \delta_Z$ . Dabei bezeichnet  $\delta_Z$  den Dirac-Strom. Für mehr Details zu Strömen siehe [GH78].

In unserer nicht-archimedischen Situation lebt alles auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  und der Differentialoperator  $\square$  ist das Analogon zu  $dd^c$ . In 7.1 haben wir  $\square$  definiert für alle Differentialformen auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  und damit erhalten wir den Differentialoperator  $\square$  wie gewohnt für alle Ströme auf  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ . Aus diesem Grund liegt es nahe einen Greenschen Strom  $g$  so zu definieren, dass  $\square g = \omega - \delta$  gilt. Dabei ist  $\omega$  eine Differentialform auf  $\text{Trop}(E^2) = \mathbb{R}^2/\Lambda$  und  $\delta$  der Dirac-Strom zur Tropikalisierung eines Zyklus auf  $E^2$ .

Unsere Prototypen für einen Greenschen Strom sind von der Form  $-\log \|s\|$ , weil sie die Poincaré-Lelong-Gleichung erfüllen (siehe Kapitel 6).

Gegeben seien nun zwei Greensche Ströme  $g_1, g_2$  zu den zwei Divisoren  $D_1, D_2$ , die sich eigentlich schneiden. Das heißt, es gilt  $\square g_i = \omega_i - \delta_{\text{Trop}(D_i)}$  für  $i = 1, 2$  und wir definieren formal analog zur komplexen Situation das Sternprodukt  $g_1 * g_2$  durch

$$g_1 * g_2 := g_1 \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)} + \omega_1 \wedge g_2 .$$

Dies ist wieder ein Strom und es bleibt zu prüfen, dass es sich dabei wieder um einen Greenschen Strom handelt. Nun gilt

$$\square(g_1 * g_2) = \square(g_1 \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)}) + \square(\omega_1 \wedge g_2)$$

und es folgt formal

$$\begin{aligned}
 &= (\square g_1) \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)} + \omega_1 \wedge \square g_2 \\
 &= (\omega_1 - \delta_{\text{Trop}(D_1)}) \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)} + \omega_1 \wedge (\omega_2 - \delta_{\text{Trop}(D_2)}) \\
 &= \omega_1 \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)} - \delta_{\text{Trop}(D_1)} \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)} + \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)} \\
 &= \omega_1 \wedge \omega_2 - \delta_{\text{Trop}(D_1 \cdot D_2)} .
 \end{aligned}$$

Damit ist, falls wir die folgenden beiden Identitäten

1.  $\square (g_1 \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)}) = (\square g_1) \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)}$
2.  $\square (\omega_1 \wedge g_2) = \omega_1 \wedge \square g_2$

zeigen können,  $g_1 * g_2$  also ein Greenscher Strom zur Differentialform  $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$  und dem Dirac-Strom zur Tropikalisierung des Zyklus  $D_1 \cdot D_2$ .

**Beispiel 7.4.2.** Dies wollen wir hier jetzt an einem Beispiel untersuchen, wobei es sich dabei entweder um eine Modellmetrik oder um die kanonische Metrik zum Geradenbündel  $L$  handelt. Wir wählen

1.  $g_1 = -\log \|s_D\|$  wie in Abschnitt 7.1 und erhalten

$$\text{Trop}(\text{div}(s_D)) = \text{Trop}(D_1) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

das heißt „nur das Kreuz in  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ “.

2.  $g_2 = -\log \|s(x - y)\|$  und erhalten

$$\text{Trop}(\text{div}(s(x - y))) = \text{Trop}(D_2) = \begin{array}{|c|c|} \hline / & \\ \hline & / \\ \hline \end{array}$$

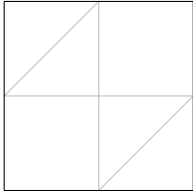
das heißt „nur die zwei Diagonalkanten in  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ , die parallel zur ersten Winkelhalbierenden sind“.

## 7. Greensche Ströme

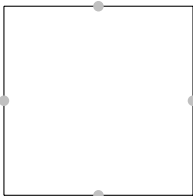
Des Weiteren wissen wir aus Kapitel 5, dass für eine Modellmetrik  $\omega_1 = c_1(L, \|\cdot\|)$  eine gewichtete Summe der Kanten von  $V1$  und für die kanonische Metrik eine 1-Form ist. Wir erhalten also für das Sternprodukt hier

$$\begin{aligned} g_1 * g_2 &= g_1 \wedge \delta_{\text{Trop}(D_2)} + \omega_1 \wedge g_2 \\ &= g_1 |_{\text{Trop}(D_2)} + g_2 |_{c_1(L, \|\cdot\|)} \cdot \end{aligned}$$

Dabei ist für die kanonische Metrik der erste Summand  $g_1 |_{\text{Trop}(D_2)}$  die Einschränkung einer stetigen Funktion auf eine gewichtete Kantensumme und der zweite Summand  $g_2 |_{c_1(L, \|\cdot\|)}$  eine 1-Form. Für eine Modellmetrik sind beide Summanden eine Einschränkung einer stetigen Funktion auf eine gewichtete Kantensumme. Damit ist  $g_1 * g_2$  für eine Modellmetrik stückweise linear, was für die kanonische Metrik im allgemeinen nicht gilt. Jedoch handelt es sich in beiden Fällen um einen Strom, der auf der Menge

$$\text{Trop}(D_1) \cup \text{Trop}(D_2) =$$


lebt. Es bleibt also zu prüfen, ob  $g_1 * g_2$  ein Greenscher Strom ist zur Differentialform  $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$  und dem tropischen Zykel

$$\text{Trop}(D_1 \cdot D_2) =$$


in  $\text{Trop}(E^2) = \mathbb{R}^2/\Lambda$ .

**Bemerkung 7.4.3.** Wir lassen die in Beispiel 7.4.2 angedeutete Rechnung offen, weil das mit den Methoden dieser Dissertation schon ein erheblicher Aufwand wäre. Besser geeignet dafür ist der von Chambert-Loir und Ducros in [CD12] entwickelte Formalismus. Dieses Problem bietet sich für zukünftige Forschungsarbeiten an.

# A. Programm

Version vom 20.10.2009 – Erstellt und ausgeführt in Maple 9.50

```
1 with(geom3d):
2 with(linalg):
3 with(plots):      (* Needed maple packages. *)
4 P :=Matrix([[0, 0, 0], [(0.5, 0, 0.19)], [(1, 0, 0.5)], [(0, 0.5, 0.19)], [(0.5, 0.5, 0.4)], [(1, 0.5, 0.69)], [(0, 1, 0.5)], [(0.5, 1, 0.69)],
5 [(1, 1, 1)]]):      (* Matrix for the points. We count from below left to above right. *)
6 V1 :=Matrix([[1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0], [0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0],
7 [0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1]]):
8 V16 :=Matrix([[1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
9 [0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1]]):
10 (* Inzidenzmatrix for the decomposition. 1 for a connection, 0 for no connection. *)
11 V := V1:      (* Select the decomposition. *)
12 (* Part 1: Check the convexity and compute the measures. *)
13 wahr:=Matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]):
14 wahrzahl:= 1 :      (* Initialise the matrix and the counter for a true output. *)
15 falsch:=Matrix([[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]):
```

```

16 falschzahl:= 1 :      (* The same for a false output. *)
17 for i from 1 to 9 do
18   for j from i + 1 to 9 do
19     if V[i, j] = 1      (* Checks if point i is connected to point j. *)
20     then
21       p := 0 :        (* Counter for the prove if two triangles in the simplex decomposition are adjoint. *)
22       q :=matrix(1, 4, [0, 0, 0, 0]) :      (* Matrix for the numbers of points which build triangles like above. *)
23       for k from 1 to 9 do
24         if (V[i, k] = 1 and V[j, k] = 1)      (* Checks if point k is connected to point i and point j. *)
25         then
26           p := p + 1;
27           q[1, p] := k;
28         fi;
29       od;
30       if p = 4      (* Check if we have found two adjoint triangels (composed of the above four points). *)
31       then
32         for a from 1 to 3 do
33           for b from a + 1 to 4 do
34             if V[q[1, a], q[1, b]] = 0      (* Find the two not connected points. *)
35             then
36               point(A, P[q[1, a], 1], P[q[1, a], 2], P[q[1, a], 3]);
37               point(D, P[q[1, b], 1], P[q[1, b], 2], P[q[1, b], 3]);
38               (* The point with the smaller number becomes the name A, the other the name D. *)
39               v :=delcols(delcols(q, b..b), a..a);      (* Delete the numbers of the points A and D, *)
40               (* because it is not clear where the remaining numbers safed. *)

```



```

41         point(B, P[v[1, 1], 1], P[v[1, 1], 2], P[v[1, 1], 3]);
42         point(C, P[v[1, 2], 1], P[v[1, 2], 2], P[v[1, 2], 3]);      (* Give the remaining points the name B and C. *)
43     fi;      (* Now we have the triangles ABC and BCD with common edge BC. *)
44     od;
45 od;
46 plane(E1, [A, B, C]);
47 plane(E2, [B, C, D]);      (* Compute the plane E1 from A, B, C and the plane E2 from B, C, D. *)
48 n1 :=NormalVector(E1);
49 n2 :=NormalVector(E2);      (* Compute the normalvector n1 from E1 and n2 from E2. *)
50 m1 := -1/n1[3] * n1;
51 m2 := -1/n2[3] * n2;      (* Normalized the normalvectors so that the third coordinate is -1. *)
52 g :=sqrt(convert((m1[1] - m2[1])2 + (m1[2] - m2[2])2,rational));
53 (* Compute the euclidean distance between the first two coordinates from m1 and m2. *)
54 wahr[wahrzahl, 1] := v[1, 1];
55 wahr[wahrzahl, 2] := v[1, 2];
56 wahr[wahrzahl, 3] := g;
57 (* Save the result. Points (first and second entry) and measure (third entry) of the edge. *)
58 wahrzahl:=wahrzahl+1;
59 line(L, [D, n1]);      (* Compute the line throught D and ortogonal to E1 *)
60 intersection(K, L, E1);      (* Compute the intersection K (point) from L and E1. *)
61 if coordinates(D)[3] <=coordinates(K)[3]      (* Check if the point D is above or below the plane E1. *)
62 then
63     falsch[falschzahl, 1] := q[1, 1];
64     falsch[falschzahl, 2] := q[1, 2];
65     falsch[falschzahl, 3] := q[1, 3];

```

```

66         falsch[falschzahl, 4] := q[1, 4];
67         falschzahl:=falschzahl+1;
68         (* Save the numbers of the vertices of the quadrangle in which it is not strict convex. *)
69         fi;
70     fi;
71 fi;
72 od;
73 od;

74 (* Part 2: Draw the simplex decomposition in 2D and 3D. *)

75 G2D := [[0, 0], [0, 0], [0, 0]] :
76 G3D := [[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]] :      (* Initialise the point set for the graph. *)
77 for i from 1 to 7 do
78     for j from i + 1 to 8 do
79         if V[i, j] = 1      (* Checks if point i is connected to point j. *)
80         then
81             for k from j + 1 to 9 do
82                 if (V[i, k] = 1 and V[j, k] = 1)      (* Check if the points i, j and k build a trinagle. *)
83                 then
84                     G2D := G2D, [[P[i, 1], P[i, 2]], [P[j, 1], P[j, 2]], [P[k, 1], P[k, 2]]];
85                     G3D := G3D, [[P[i, 1], P[i, 2], P[i, 3]], [P[j, 1], P[j, 2], P[j, 3]], [P[k, 1], P[k, 2], P[k, 3]]];
86                     (* Add the triangle to the point set, which we will draw later. *)
87                 fi;
88             od;
89         fi;

```

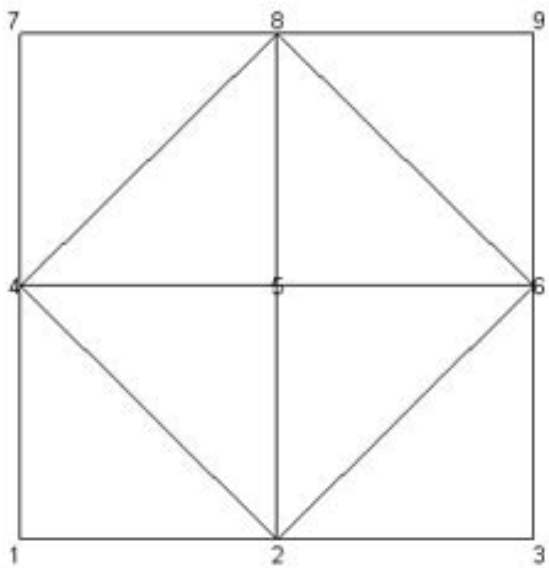
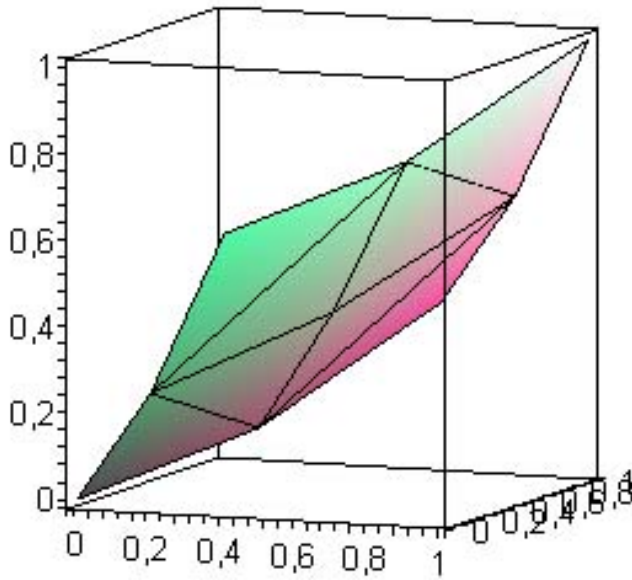
```

90     od;
91 od;
92 P1 :=textplot([P[1, 1], P[1, 2], '1',align= {BELOW,LEFT}) :
93 P2 :=textplot([P[2, 1], P[2, 2], '2',align=BELOW) :
94 P3 :=textplot([P[3, 1], P[3, 2], '3',align= {BELOW,RIGHT}) :
95 P4 :=textplot([P[4, 1], P[4, 2], '4',align=LEFT) :
96 P5 :=textplot([P[5, 1], P[5, 2], '5') :
97 P6 :=textplot([P[6, 1], P[6, 2], '6',align=RIGHT) :
98 P7 :=textplot([P[7, 1], P[7, 2], '7',align= {ABOVE,LEFT}) :
99 P8 :=textplot([P[8, 1], P[8, 2], '8',align=ABOVE) :
100 P9 :=textplot([P[9, 1], P[9, 2], '9',align= {ABOVE,RIGHT}) :      (* Set the label for the 2D graph. *)
101 display(POLYGONS(G3D),axes=boxed);
102 display({POLYGONS(G2D), P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9},axes=NONE,style=LINE,color=BLACK);
103 (* Draw the 2D and the 3D graph. *)
104 if falschzahl= 1      (* Check if we have strict convexity an all edges. *)
105 then
106     print(striktKonvex);
107     print(wahr);
108 else
109     print(nichtStriktKonvex);
110     print(falsch);
111 fi;

```

A. Programm

Output:



*striktKonvex*

2	4	$\frac{1}{25} \sqrt{2}$
2	5	$\frac{4}{25}$
2	6	$\frac{1}{25} \sqrt{2}$
4	5	$\frac{4}{25}$
4	8	$\frac{1}{25} \sqrt{2}$
5	6	$\frac{4}{25}$
5	8	$\frac{4}{25}$
6	8	$\frac{1}{25} \sqrt{2}$

# Literaturverzeichnis

- [AR10] Allermann, L.; Rau, J.: *First steps in tropical intersection theory*, Mathematische Zeitschrift 264, 633–670 (2010)
- [Ber90] Berkovich, V. G.: *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs 33; Providence, R.I.: AMS 1990, ix+169 S.
- [Ber04] Berkovich, V. G.: *Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible II*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol I.; eds Adolphson, Alan et al., de Gruyter Berlin, 293–370 (2004)
- [BG06] Bombieri, E.; Gubler, W.: *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs 4; Cambridge University Press, Cambridge 2006, xvi+652 S.
- [BGR84] Bosch, S.; Güntzer, U.; Remmert, R.: *Non-Archimedean Analysis - A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft 261, Springer Berlin 1984, xii+436 S.
- [BL85] Bosch, S.; Lütkebohmert, W.: *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Mathematische Annalen 270, 349–379 (1985)
- [BL86] Bosch, S.; Lütkebohmert, W.: *Degenerating abelian varieties*, Topology 30, No.4, 653–698 (1986)
- [BLR90] Bosch, S.; Lütkebohmert, W.; Raynaud, M.: *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 21, Springer Berlin 1990, x+325 S.)
- [BR07] Baker, M.; Rumely, R.: *Harmonic Analysis on Metrized Graphs*, Canadian Journal of Mathematics Vol. 59 (2), 225–275 (2007)
- [BR10] Baker, M.; Rumely, R.: *Potential Theory on the Berkovich Projective Line*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 159, American Mathematical Society (2010)

## Literaturverzeichnis

- [Bos01] Bosch, S.: *Algebra - 4. Auflage*, Springer Berlin etc (2001)
- [CD12] Chambert-Loir, A.; Ducros, A.: *Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich*, Preprint unter <http://arxiv.org/abs/1204.6277>
- [Cham06] Chambert-Loir, A.: *Mesure et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 595, 215–235 (2006)
- [Cham11] Chambert-Loir, A.: *Heights and measures on analytic spaces. A survey of recent results, and some remarks*, Motivic Integration and its Interactions with Model Theory and Non-Archimedean Geometry: Volume II (R. Cluckers, J. Nicaise, J. Sebag, eds.); Cambridge University Press, 1–50 (2011)
- [Chan85] Chandrasekharan, K.: *Elliptic Functions*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 281; Springer Berlin 1985, xi+189 p.
- [CR93] Chinburg T.; Rumely, R.: *The capacity pairing*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 434, 1–44 (1993)
- [DFG06] *DFG-Forschungsantrag für das Projekt: p-adische Arakelovgeometrie* (2006)
- [DFG10] *DFG-Fortsetzungsantrag für das Projekt: p-adische Arakelovgeometrie* (2010)
- [DFG12] *DFG-Abschlußbericht für das Projekt: p-adische Arakelovgeometrie* (2012)
- [EGA67] Grothendieck, A.; Dieudonné, J.: *Éléments de géométrie algébrique IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Quatrième partie)*, Publ. Math. IHES, 1–361 (1967)
- [Fab09] Faber, X.W.C.: *Equidistribution of dynamically small subvarieties over the function field of a curve*, Acta Arithmetica 137 345–389 (2009)
- [Ful93] Fulton, W.: *Introduction to toric varieties*, Annals of mathematics studies, no. 131; Princeton University Press, Princeton 1993, xi+157 S.
- [FvdP04] Fresnel, J.; van der Put, M.: *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics; Birkhäuser, Boston 2004, xi+296 S.
- [GH78] Griffiths, P.; Harris J.: *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley, New York 1978.

- [Gub98] Gubler, W.: *Local heights of subvarieties over non-archimedean fields*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 498, 61–113 (1998)
- [Gu03] Gubler, W.: *Local and canonical heights of subvarieties*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze (5) Vol. II, 711–760 (2003)
- [Gub07a] Gubler, W.: *Tropical varieties for non-archimedean analytic spaces*, Inventiones mathematicae 169, 321–376 (2007)
- [Gub07b] Gubler, W.: *The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties*, Inventiones mathematicae 169, 377–400 (2007)
- [Gub08] Gubler, W.: *Equidistribution over function fields*, Manuscripta Mathematica 127, 485–510 (2008)
- [Gub10] Gubler, W.: *Non-archimedean canonical measures on abelian varieties*, Compositio Mathematica 146, 683–730 (2010)
- [Gub12] Gubler, W.: *A guide to tropicalizations*, Preprint unter <http://arxiv.org/abs/1108.6126v3>
- [Hat77] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*; Graduate Texts in Mathematics 52; Springer New York etc. 1977, xvi+496 p.
- [Kat09] Katz, E.: *A tropical Toolkit*; Expositiones Mathematicae 27, no. 1, 1–36, (2009)
- [Lag12] Lagerberg, A.: *Super currents and tropical geometry*, Mathematische Zeitschrift 270, 1011–1050 (2012)
- [Mum72] Mumford, D.: *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*; Compositio Mathematica 24, 239–272 (1972)
- [Oda88] Oda, T.: *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge, Band 15; Springer Berlin etc. 1988, viii+212 p.
- [Roq70] Roquette, P.: *Analytic theory of elliptic functions over local fields*; Vandenhoeck und Ruprecht Göttingen 1970, 90 p.

## Literaturverzeichnis

- [Rob71] Robert, A.: *Elliptic curves*; Springer-Verlag, Berlin, 1973. Notes from postgraduate lectures given in Lausanne 1971/72, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 326.
- [Sil86] Silverman, J. H.: *The Arithmetic of Elliptic Curves*; Graduate Texts in Mathematics 106; Springer New York etc. 1986, xii+400 p.
- [Sil94] Silverman, J. H.: *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*; Graduate Texts in Mathematics 151; Springer New York etc. 1994, xiii+525 p.
- [SABK92] Soulé, C.: *Lectures on Arakelov geometry. With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer.*; Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 33. Cambridge University Press. 1992, viii+177 S.
- [Thu05] Thuillier, A.: *Thèse: Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne - Applications à la théorie d'Arakelov*, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010990/>, Rennes 2005, viii+184 S.
- [Ya12a] Yamaki, K.: *Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those with some degeneration (with an appendix by Walter Gubler: The minimal dimension of a canonical measure)*, Preprint unter <http://arxiv.org/abs/1007.1081>
- [Ya12b] Yamaki, K.: *Strict supports of canonical measures and applications to the geometric Bogomolov conjecture*, Preprint unter <http://arxiv.org/abs/1211.0406>
- [Yua08] Yuan, X.: *Big line bundles over arithmetic varieties*, *Inventiones mathematicae* 173, 603–649 (2008)
- [Zha93] Zhang, S.-W.: *Admissible pairing on a curve*; *Inventiones mathematicae* 112, 171–193 (1993).