

Rheologie von granularer Materie und Ferrofluiden

Dissertation

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Stefan Mahle
aus Kirchheim unter Teck

Tübingen
2012

Tag der mündlichen Qualifikation:

03.04.2012

Dekan:

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. Mario Liu

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. Nils Schopohl

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Hydrodynamische Methode	5
2.1	Lokales Gleichgewicht und Fundamentalrelation	5
2.2	Globales Gleichgewicht	7
2.3	Bilanzgleichungen	8
2.4	Dissipation und Symmetrie	10
3	Granulare Materie	13
3.1	Merkmale und Beobachtungen	13
3.2	Theorie	16
3.2.1	Zustandsvariablen	17
3.2.2	Der Energieausdruck	20
3.2.3	Gleichgewichtsbedingungen	23
3.2.4	Bilanzgleichungen	24
3.2.5	Thermodynamische Stabilität	26
3.2.6	Dissipation	27
4	Langsame Verformungen: Kritischer Zustand	33
4.1	Geometrie und Koeffizienten	36
4.2	Stationäre Scherströmung	39
4.2.1	Lösung für die granulare Entropie	41
4.2.2	Lösung für die elastischen Verzerrungen	42
4.3	Einsetzende Scherströmung	47
4.3.1	Lösung für die granulare Entropie	48
4.3.2	Lösung für die elastischen Verzerrungen	48
5	Schnelle Verformungen: Seismische Spannungen	57
5.1	Geometrie und Koeffizienten	60
5.2	Scherströmungen ohne Gravitation	62
5.2.1	Experimente von Savage und Sayed	68
5.3	Scherströmungen mit Gravitation parallel zu $\nabla \times \boldsymbol{v}$	72
5.4	Scherströmungen mit Gravitation senkrecht zu $\nabla \times \boldsymbol{v}$	79
5.5	Scherströmungen auf der geneigten Ebene	83

6	Verformungen im Zwischenbereich	87
6.1	Spannungstensor	87
6.1.1	Volumenkontrolliertes Experiment	90
6.1.2	Druckkontrolliertes Experiment	92
6.2	Scherband	95
6.2.1	Volumenkontrolliertes Experiment	98
6.2.2	Druckkontrolliertes Experiment	100
7	Ferrofluide	103
7.1	Merkmale und Beobachtungen	104
7.2	Theorie	106
7.2.1	Zustandsvariablen und Bilanzgleichungen	107
7.2.2	Gleichgewichtsbedingungen	110
7.2.3	Dissipation	111
8	Strukturviskosität und Dilatanz	113
8.1	Reduzierte Viskosität in Scherströmungen	114
8.1.1	Äußeres Feld \mathbf{H}^a senkrecht zur Strömungsrichtung	114
8.1.2	Äußeres Feld \mathbf{H}^a parallel zur Strömungsrichtung	117
8.1.3	Magnetisierung nahe am Gleichgewicht	120
9	Scherwelle und der Maxwell'sche Spannungstensor	123
10	Zusammenfassung	129
A	Rotation des Koordinatensystems	133
B	Anschluss an die elastischen Gleichungen	135
	Literaturverzeichnis	142

Kapitel 1

Einführung

Die Navier-Stokes-Gleichung ist die Grundlage der Beschreibung vieler Gase und Flüssigkeiten. Mit ihr lässt sich die Rheologie sogenannter Newtonscher Fluide bestimmen. Charakteristisch für diese Materialklasse ist der lineare Zusammenhang der gemessenen Spannungen mit der Rate der Verformung. Der Oberbegriff unter dem diese zentrale Gleichung in Lehrbüchern diskutiert wird ist die Hydrodynamik [1]. Diese Theorie erweitert den Begriff der Thermodynamik insbesondere um die explizite Darstellung der Bewegungsgleichungen physikalischer Größen. Hydrodynamik ist ihrem Wesen nach makroskopisch und fasst die betrachteten Materialien als Kontinua auf. Die Eigenschaften des Materials werden dabei durch Transportkoeffizienten ausgedrückt. Ein Resultat dieser Beschreibung ist die lokale Formulierung der Impulserhaltung inklusive der Viskositäten: Die Navier-Stokes-Gleichung.

Für viele Fluide ist die klassische Hydrodynamik mit der Navier-Stokes-Gleichung jedoch nicht ausreichend um deren Fließverhalten korrekt wiederzugeben. Die Schwierigkeit einer hydrodynamischen Beschreibung besteht darin, die relevanten makroskopischen Größen zu identifizieren. Es gelang jedoch die hydrodynamische Theorie auf zahlreiche nicht-Newtonsche Systeme zu erweitern. Diese Materialklasse beinhaltet zum Beispiel die Flüssigkristalle oder auch die Supraflüssigkeiten.

Fast täglich begegnen wir Granulaten. Egal ob am Frühstückstisch oder im Urlaub am Strand, granulare Materie ist aus dem Alltag nicht wegzudenken. Eher nicht alltäglich sind Lawinen zum Beispiel aus Schnee oder Geröll. Aber auch die Industrie hat einen breiten Anwendungsbereich granularer Materie. Man denke dabei zum Beispiel an die Lagerung und den Transport von Getreide. Nicht zuletzt ist es für Ingenieure und Geophysiker eine Herausforderung dauerhaft stabile Bauwerke auf granularen Untergrund zu konstruieren. Die Erscheinungsformen sind dabei sehr breit gefächert. Granulare Materie kennen wir als fest, flüssig und gasförmig. Eine Theorie sollte all diese Formen umfassen und möglichst viele Phänomene abdecken. Eine hydrodynamische Beschreibung sollte möglich sein, falls es gelingt die Phänomenologie auf wenige charakteristische makroskopische Größen zu reduzieren. Man muss hierbei wieder beachten, dass das einzelne Korn keine Rolle spielt und das Granulat als makroskopischer Körper aufgefasst wird. Das Ziel einer umfassenden Beschreibung von Granulaten wurde von M. Liu und Y. Jiang in einer hydrodynamischen Theorie [2–6] aufgegriffen. Es lassen sich zwei wesentliche Unterschiede zu

einem gewöhnlichen Fluid ausmachen. Ein Granulat zeigt elastische Eigenschaften. Jedoch ist es nicht möglich ein (trockenes) Granulat einer Zugbelastung auszusetzen. Die Elastizität ist allerdings nur transient, d. h. äußere Anregungen können zu eine Art Kollaps des Systems führen. Beeindruckende Konsequenzen dieses Verhaltens sind Lawinen oder das Explodieren von Getreidesilos. Ist ein Granulat erst einmal zum Fließen gebracht worden, lässt sich sehr einfach das zweite wesentliche Unterscheidungsmerkmal beobachten, welches auch gleichzeitig für die Transienz der Elastizität verantwortlich ist. Die Körner eines Granulats werden untereinander zufällige, ungerichtete Bewegungen ausführen und man kann eine mesoskopische, sogenannte granulare Temperatur T_g einführen, die diese Freiheitsgrade in sich aufnimmt. Trotzdem existiert weiterhin das wesentlich größere Entropiereservoir, das über die mikroskopischen Freiheitsgrade definiert wird und das den Ausdruck der thermischen Energie mit der Temperatur T beinhaltet. M. Liu und Y. Jiang konnten eine Bewegungsgleichung für die granulare Temperatur aufstellen und diese mit den Elastizitätsgleichungen verbinden.

Ferrofluide sind aus unserer Erfahrung heraus viel weniger bekannt als Granulate. Das liegt letztlich daran, dass sie in der Natur nicht vorkommen. Ihre hervorstechende Eigenschaft ist eine sehr starke Magnetisierbarkeit. Ein handelsüblicher Magnet genügt um Ferrofluide sichtbar zu kontrollieren. Erreicht wird dies durch kleine ferromagnetische Partikel, die in einer Trägerflüssigkeit gelöst sind. Dies macht sie für industrielle Anwendungen äußerst interessant. Man kann Ferrofluide zum Beispiel zur Herstellung reibungsarmer Lager verwenden oder sie werden zur effektiven Abführung von Wärme in Lautsprecher-Systemen eingesetzt. Ein weiteres Einsatzgebiet sind Dämpfungssysteme, deren Stärke durch das Anlegen und Variieren von Magnetfeldern kontrolliert wird. H. W. Müller und M. Liu [7, 8] gelang es eine Theorie solch stark magnetisierbarer Materialien zu entwickeln. Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Fluid kann die Kopplung eines Ferrofluids an magnetische Felder im Allgemeinen nicht vernachlässigt werden. Dies erfordert eine makroskopische Beschreibung der elektromagnetischen Felder, bzw. die Einbindung als Zustandsvariablen in die Hydrodynamik. Es zeigte sich, dass dies aber nicht hinreichend ist um Ferrofluide beschreiben zu können. Für gewöhnliche magnetische Materialien hat man meist einen linearen konstitutiven Zusammenhang der magnetischen Felder mit Hilfe der magnetischen Suszeptibilität. Die Magnetisierung in einem Ferrofluid muss aber nicht mit den magnetischen Feldern im Gleichgewicht sein. Die Relaxation der Magnetisierung kann so langsam sein, dass sie als unabhängiges, makroskopisches Phänomen zusätzlich zu den Feldern H und B angesehen werden muss. Dies erfordert eine zusätzliche Bewegungsgleichung für die Magnetisierung, die von H. W. Müller und M. Liu hergeleitet werden konnte.

Wir stellen nun den Aufbau und die beschriebenen Phänomene der vorliegenden Arbeit vor. Wir beginnen in Kapitel 2 mit einer Einführung in die generelle Vorgehensweise einer hydrodynamischen Theorie. Dazu werden wir alle makroskopischen Bewegungsgleichungen eines gewöhnlichen Fluids herleiten.

Kapitel 3 beginnt mit einer Einführung in die Phänomenologie der granularen Materie. Anschließend stellen wir die zusätzlichen makroskopischen Zustandsgrößen und Bewegungsgleichungen vor.

Das erste zu beschreibende Phänomen diskutieren wir in Kapitel 4 mit dem *kritischen Zustand*. Dieser Effekt hat nichts mit dem kritischen Bereich nahe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung zu tun. Stattdessen handelt es sich hierbei um ein nicht-Newtonsches Phänomen. Die gemessene Scherspannung ist unabhängig von der Rate der Verformung solange die Verformungen hinreichend langsam sind. D. h., dass man ein granulares System bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten scheren kann ohne dabei die angelegten Spannungen zu ändern. Man nennt so ein System auch perfekt plastisch. Wir werden zuerst ein stationäres System betrachten und die entsprechenden Bewegungsgleichungen lösen. Anschließend soll noch eine einsetzende Scherströmung betrachtet werden.

In Kapitel 5 machen wir den Übergang zu schnellen Verformungen. Es zeigte sich, dass sich die Spannungen dabei ebenfalls nicht-Newtonsch verhalten. Die Spannungen sind hierbei abhängig von der Rate der Verformung. Diese Abhängigkeit variiert je nach Versuchsaufbau und Material. Dieser Bereich lässt sich als *seismisch* bezeichnen, da sein Ursprung in einer äußeren Anregung liegt. Es werden Lösungen für verschiedene Versuchsgeometrien ohne und mit Gravitation präsentiert werden.

Kapitel 6 beschäftigt sich zuerst mit dem Zwischenbereich der beiden vorangegangenen Kapitel. Es soll der Übergangsbereich der Spannungen für moderate Verformungen diskutiert werden. Zusätzlich präsentieren wir den Effekt des sogenannten Scherbands. Das Granulat bildet dabei zwei Regionen aus: Einen ruhenden Bereich ohne T_g und einen fluiden Bereich mit hohem T_g . Dieser Effekt soll zu verschiedenen Randbedingungen betrachtet werden.

In Kapitel 7 geben wir zunächst eine Einführung in den Aufbau und die Phänomene der Ferrofluide. Wir werden dann die Grundzüge der hydrodynamischen Theorie hierzu diskutieren.

Wir besprechen in Kapitel 8 Effekte, die die Viskosität von Ferrofluiden unter dem Einfluss äußerer Magnetfelder betreffen. Auch hierbei handelt es sich wieder um einen nicht-Newtonschen Effekt. Dabei kann es zu einer sogenannten Strukturviskosität kommen, d. h. die Viskosität hängt von der Stärke der angelegten Scherspannung ab. Wir besprechen dazu zwei verschiedene Konstellationen bezüglich des angelegten äußeren Magnetfeldes.

In Kapitel 9 berechnen wir eine Scherwelle in einem Ferrofluid mit Hilfe des Maxwell'schen Spannungstensors. Als Grundlage wird uns auch hier die Theorie von H. W. Müller und M. Liu dienen. Es wird sich ein elastischer Anteil in der abgeleiteten Dispersionsrelation zeigen, der die Welle senkrecht zur Anregungsrichtung propagieren lässt.

Kapitel 2

Hydrodynamische Methode

Thermodynamik ist die Theorie von Vielteilchensystemen, die sich in einem Gleichgewichtszustand befinden. Deshalb beschränkt sich die thermodynamische Beschreibung der Dynamik auf die Abfolge reversibler quasistatischer Prozesse. Für gewöhnlich werden sich makroskopische Systeme jedoch nicht im Gleichgewicht befinden. Zudem ist oftmals die zeitliche Entwicklung der makroskopischen Messgrößen von Interesse. Das hydrodynamische Konzept liefert eine Dynamik zusätzlich zu den bekannten Relationen der Thermodynamik, d.h. ein System von Bewegungsgleichungen der relevanten makroskopischen Variablen und eine Einbindung dissipativer Prozesse.

2.1 Lokales Gleichgewicht und Fundamentalrelation

Makroskopische Systeme werden im Rahmen der Hydrodynamik als Kontinua aufgefasst¹. Tatsächlich sind jedoch einzelne „Punkte“ solcher Systeme endliche Volumina, die hinreichend klein sein müssen um ein makroskopisches Kontinuum zu gewährleisten. Andererseits sollen die einzelnen Volumina genügend Teilchen enthalten um ein thermodynamisches Gleichgewicht herstellen bzw. überhaupt definieren zu können [1, 9]. Wir nennen diese charakteristischen Zeit- und Längenskalen für die sich solch ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht einstellt τ bzw. λ , die wiederum über eine materialabhängige Transportgeschwindigkeit aneinander gekoppelt sind.

Wir wollen eine Anregung eines makroskopischen Systems betrachten, deren Zeit- und Längenskala wir als $1/\omega$ bzw. $1/q$ festlegen. Um die eben eingeführte Definition eines Kontinuums mit lokalem thermodynamischen Gleichgewicht aufrechterhalten zu können, müssen wir fordern, dass die Skalen der Anregung, $1/\omega$ und $1/q$, groß gegen die lokalen Größen τ und λ sein sollen.

Die meisten Freiheitsgrade eines Vielteilchensystems haben charakteristische Skalen im Bereich von τ und λ und sind dementsprechend für das lokale ther-

¹Es sei angemerkt, dass es sich hierbei um eine Feldtheorie handelt, d.h. Ort und Zeit sind voneinander unabhängige Größen: $\partial \mathbf{r} / \partial t \equiv 0$.

modynamische Gleichgewicht verantwortlich. Nur wenige Systemvariablen variieren langsam bzw. großskalig gegenüber den lokalen Ausgleichsprozessen. Die „überlebenden“ Variablen haben also charakteristische Frequenzen und Wellenzahlen die im Bereich von ω und q liegen. Damit haben wir ein Kriterium für die Einbindung von makroskopisch relevanten Variablen festgelegt [9, 10]:

$$\omega \tau \ll 1, \quad q \lambda \ll 1. \quad (2.1)$$

Insbesondere wird dieses Kriterium von Variablen mit einer Dispersionsrelation folgender Form erfüllt [9, 11]:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \omega = 0. \quad (2.2)$$

Daraus ergeben sich zwei Klassen von Variablen. Zum einen Dichten von Erhaltungsgrößen und zum anderen Variablen, die zu spontan gebrochenen Symmetrien gehören, wobei letztere auf das Goldstone-Theorem zurückzuführen sind [9, 10]. Für ein gewöhnliches Fluid zum Beispiel reduziert sich das auf die Energiedichte ε , die Massendichte ϱ und die Impulsdichte \mathbf{g} . Ein Beispiel für eine Variable, die im Zusammenhang mit einer spontan gebrochenen Symmetrie steht, wäre die Magnetisierung eines Ferromagneten².

Es gibt aber noch eine weitere Variablenklasse, die als langsam relaxierende Variablen bezeichnet werden [9, 11]. Für diese gilt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \omega = 1/\tau_\ell. \quad (2.3)$$

Im langwelligen Limes unterliegen diese Größen immer noch Relaxationsprozessen. Anders ausgedrückt heißt das, dass die Relaxation solcher Größen auch von lokalen Bedingungen abhängig ist und die „Kollektivität“ einer Anregung ($q \rightarrow 0$) keine Rolle mehr spielt. Dabei muss sich die Zeitskala τ_ℓ deutlich von τ abheben, ansonsten würden solch zusätzliche Variablen wenig Sinn machen und wir könnten diese Freiheitsgrade loswerden indem wir einfach das lokale thermodynamische Gleichgewicht abwarten würden. Betrachten wir ein mehrkomponentiges Fluid und lassen chemische Reaktionen zwischen den Komponenten zu, so sind die Massendichten der einzelnen Komponenten langsam relaxierende Variablen, vorausgesetzt die Reaktionen laufen gegenüber τ langsam genug ab.

Nachdem wir jetzt einige Kriterien für ein hydrodynamisches System festgelegt haben führen wir noch die Fundamentalrelation ein, die alle systemspezifische thermodynamische Information beinhaltet. Wir können die fragliche Größe als die Entropiefunktion S bzw. deren Dichte s identifizieren, die ihrerseits eine Funktion von den eben eingeführten Variablen sein muss. Am Beispiel eines gewöhnlichen Fluids illustriert hieße das: $s = s(\varepsilon, \varrho, \mathbf{g})$. Wir können aber auch genauso gut die

²Eigentlich müsste man auch die Drehimpulsdichte $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ und die sogenannte Boosterdichte $\varrho \mathbf{r} - \mathbf{g} t$ mitnehmen, jedoch ergeben sich daraus keine zusätzlichen hydrodynamischen Moden bzw. Lösungen. Allerdings kann man daraus ableiten, dass der Spannungstensor symmetrisch sein muss und der Massenstrom durch $\varrho \mathbf{v}$ gegeben ist [1, 12].

Energiedichte als grundlegende Funktion betrachten, d.h. $\varepsilon = \varepsilon(s, \varrho, \mathbf{g})$, und davon das totale Differential bilden:

$$d\varepsilon = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right|_{\varrho, \mathbf{g}} ds + \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} \right|_{s, \mathbf{g}} d\varrho + \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{g}} \right|_{s, \varrho} \cdot d\mathbf{g}, \quad (2.4)$$

$$= T ds + \mu d\varrho + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g}. \quad (2.5)$$

Im Falle des gewöhnlichen Fluids kennen wir die Ableitungen der Energiedichte, auch Zustandsgleichungen genannt. Das sind die Temperatur T , das chemische Potential μ und die Geschwindigkeit \mathbf{v} , die im Allgemeinen ihrerseits Funktionen der Variablen sind. Die Kenntnis der Zustandsgleichungen ersetzt die explizite Angabe einer Fundamentalrelation, die wir durch Integration der Zustandsgleichungen erhalten können.

Die Abhängigkeiten der Zustandsgleichungen T, \dots von der Impulsdichte \mathbf{g} bzw. der Geschwindigkeit \mathbf{v} lassen sich ganz allgemein mit Hilfe einer Galilei-Transformation in das lokale Ruhesystem angeben. Die Energiedichte transformiert sich via $\varepsilon = \varepsilon_0 + \mathbf{g}^2/(2\varrho)$, wobei ε_0 die Energiedichte im Ruhesystem ist. Die Massendichte und die Entropiedichte bleiben unter einer Galilei-Transformation unverändert und mit $\mathbf{g} = \varrho \mathbf{v}$ erhalten wir:

$$d\varepsilon_0 = T ds + \underbrace{\left(\mu + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right)}_{\equiv \mu_0} d\varrho. \quad (2.6)$$

Wir erkennen, dass sich T unter einer Galilei-Transformation nicht ändert und somit keine Funktion von \mathbf{v} sein kann, wohingegen die Abhängigkeit des chemischen Potentials über $\mu(s, \varrho, \mathbf{g}) = \mu_0(s, \varrho) - \mathbf{v}^2/2$ gegeben ist.

2.2 Globales Gleichgewicht

Von der Entropiefunktion eines Systems wissen wir, dass sie im thermodynamischen Gleichgewicht ihren maximalen Wert annimmt. Für Systeme wie wir sie betrachten ist das lokal immer erfüllt und nur dann gilt auch Relation (2.4). Ein thermodynamisches System wird nun auch zu einem globalen Gleichgewicht streben und die Entropie dabei maximieren. Diese Ausgleichsprozesse, auch thermodynamische Kräfte genannt, verlaufen irreversibel und sind somit dissipativ. Wir können die Extremaleigenschaft der Entropie ausnutzen um Ausdrücke für diese dissipativen Kräfte abzuleiten, die im Gleichgewicht verschwinden müssen [12]. Dazu betrachten wir ein abgeschlossenes System mit Volumen Ω und nutzen aus, dass gewisse Größen dabei erhalten bleiben. Für ein gewöhnliches Fluid wären das die Energie, die Masse, der Impuls, der Drehimpuls und der sogenannte Booster, der die Erhaltung des Schwerpunkts unter Galilei-Transformation ausdrückt. Das Problem lässt sich als Variationsaufgabe unter Nebenbedingungen darstellen [13]:

$$0 = \delta \int_{\Omega} \mathcal{F}(\varepsilon, \varrho, \mathbf{g}) dV, \quad (2.7)$$

wobei

$$\mathcal{F}(\varepsilon, \varrho, \mathbf{g}) = s(\varepsilon, \varrho, \mathbf{g}) + L_1 \varepsilon + L_2 \varrho + \mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{g} + \mathbf{L}_4 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) + \mathbf{L}_5 \cdot (\varrho \mathbf{r} - \mathbf{g} t). \quad (2.8)$$

Die L_i sind sogenannte Lagrange-Multiplikatoren, die jeweils an eine erhaltene Größe bzw. Zwangsbedingung geknüpft sind. Die Ableitungen des Integranden \mathcal{F} nach den Variablen ergeben nach dieser Lösungsmethode getrennt voneinander Null ($\partial \mathcal{F} / \partial \varepsilon = 0, \dots$). Die dafür notwendigen Ableitungen der Entropiedichte $s(\varepsilon, \varrho, \mathbf{g})$ lassen sich aus der Fundamentalrelation (2.4) ablesen und man erhält:

$$0 = \frac{1}{T} + L_1, \quad 0 = -\frac{\mu}{T} + L_2 + \mathbf{L}_5 \cdot \mathbf{r}, \quad 0 = -\frac{\mathbf{v}}{T} + \mathbf{L}_3 + (\mathbf{L}_4 \times \mathbf{r}) - \mathbf{L}_5 t. \quad (2.9)$$

Diese Bedingungen lassen sich auch lokal formulieren:

$$\nabla T = 0, \quad \nabla \mu + \partial_t \mathbf{v} = 0, \quad v_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = 0. \quad (2.10)$$

Ungleich Null wirken diese Größen, wie bereits erwähnt, als thermodynamische Kräfte, die bestrebt sind das System in ein globales Gleichgewicht zu bringen und die Entropie zu maximieren. Interessanterweise kann sich ein Fluid bei reiner Rotation, gegeben durch die Vortizität $(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)/2$, durchaus im Gleichgewicht befinden.

2.3 Bilanzgleichungen

Eines der Kernstücke der hydrodynamischen Methode ist die Bestimmung der Zusammensetzung der Bilanzgleichungen. Für unser Beispiel des gewöhnlichen Fluids hatten wir fünf Erhaltungsgrößen als Variablen, deren prinzipielle Struktur immer folgendermaßen gegeben ist:

$$\int_V \partial_t e \, dV' = - \oint_{\partial V} \mathbf{j}^e \cdot d\mathbf{A}, \quad \int_V \partial_t e_i \, dV' = - \oint_{\partial V} j_{ij}^e \, dA_j. \quad (2.11)$$

D. h., dass eine explizite Änderung der Dichte einer Erhaltungsgröße e, e_i innerhalb eines Volumens V nur durch das gleichzeitige Auftreten eines Stroms \mathbf{j}^e, j_{ij}^e über den Rand des Volumens kompensiert werden kann. Da man das Integrationsvolumen V beliebig wählen kann, lassen sich die Bilanzgleichungen auch lokal formulieren. Für ein gewöhnliches Fluid heißt das:

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.12)$$

$$\partial_t g_i + \nabla_j \sigma'_{ij} = 0, \quad (2.13)$$

$$\partial_t \varepsilon + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0. \quad (2.14)$$

Die Massenstromdichte ist für ein gewöhnliches Fluid identisch mit der Impulsdichte $\mathbf{g} = \varrho \mathbf{v}$, was wir auf die Boostererhaltung zurückführen können. Zudem ist die Impulstromdichte σ'_{ij} aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes ein symmetrischer Tensor. Wir wollen dies an dieser Stelle allerdings nicht zeigen sondern verweisen stattdessen auf die einschlägige Literatur [1, 12].

Für die Entropiedichte lässt sich ebenfalls eine ähnliche Gleichung angeben, die allerdings noch einen Quellterm enthalten muss. Dieser Anteil wird sich, in einer noch zu klärenden Art und Weise, aus den Größen zusammensetzen lassen, die wir im Zusammenhang mit dem globalen Gleichgewicht diskutiert hatten (2.10).

$$\partial_t s + \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{R}{T}. \quad (2.15)$$

Wir wenden nun ein Verfahren an, das uns ermöglicht die reaktiven Anteile der Ströme unserer Variablen zu bestimmen und die Entropieproduktion R/T genauer zu spezifizieren [1, 9]. Dazu bildet man die substantielle Ableitung der Fundamentalrelation (2.4):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} \equiv \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2.16)$$

Man betrachtet also die Änderungen der Größen, die einem sich im Raum bewegendem „Fluidteilchen“ anhaften und drückt dies durch die lokal gebildeten, raumfesten Ableitungen aus.

Unter Verwendung der Bilanzgleichungen (2.12) - (2.15) lässt sich (2.16) auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \partial_t \varepsilon + \nabla_j [(\varepsilon + P) v_j + T (F_j - s v_j) + v_i (\sigma'_{ij} - g_i v_j - P \delta_{ij})] \\ = R + (\mathbf{F} - s \mathbf{v}) \cdot \nabla T + (\sigma'_{ij} - g_i v_j - P \delta_{ij}) v_{ij} \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei wir P definiert haben als³

$$P \equiv T s + \mu \rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \varepsilon. \quad (2.18)$$

Die Form von Gleichung (2.17) wurde bewusst gewählt, wenn man dazu gleichzeitig (2.14) betrachtet. Wir können daraus eindeutig die Energiestromdichte \mathbf{Q} und die Rate der Entropieproduktion R ablesen, da die „rechte“ Seite von Gleichung (2.17) identisch verschwinden muss [14].

Wir nehmen an dieser Stelle vorweg, dass die Anteile der Stromdichten, die in der Entropieproduktion auftauchen von rein dissipativem Charakter sind und wir definieren:

$$\mathbf{F}^D \equiv s \mathbf{v} - \mathbf{F}, \quad \sigma_{ij}^D \equiv g_i v_j + P \delta_{ij} - \sigma'_{ij}. \quad (2.19)$$

³In der Thermodynamik wird dieses P oftmals als Druck bezeichnet und damit meint man die Kraft pro Flächeneinheit in Normalenrichtung. Diese Aussage trifft selbst für ein gewöhnliches Fluid nur im thermodynamischen Gleichgewicht zu. So kann zum Beispiel, wie wir noch sehen werden, im nicht-Gleichgewicht ein volumetrischer Geschwindigkeitsgradient $v_{\ell\ell}$ in der Impulsstromdichte σ_{ij} auftauchen, den man durchaus als Teil der Kraft pro Flächeneinheit in Normalenrichtung ansehen muss. Wir werden uns also größtenteils von der Definition des Druckes als Normalkraft lösen und P vielmehr als Abkürzung bzw. Funktion der Variablen ansehen, siehe hierzu auch [1].

Mit Ausnahme der dissipativen Stromdichten ist das Gleichungssystem (2.12) - (2.15) bestimmt und wir können schreiben:

$$\mathbf{F} = s \mathbf{v} - \mathbf{F}^D, \quad (2.20)$$

$$\sigma'_{ij} = g_i v_j + \sigma_{ij} = g_i v_j + P \delta_{ij} - \sigma_{ij}^D, \quad (2.21)$$

$$Q_j = (\varepsilon + P) v_j - T f_j^D - v_i \sigma_{ij}^D, \quad (2.22)$$

$$R = \mathbf{F}^D \cdot \nabla T + \sigma_{ij}^D v_{ij}. \quad (2.23)$$

Wir erkennen, dass die Entropieproduktion über die Größen ∇T und v_{ij} gegeben ist. Das ist konsistent mit der Diskussion in Abschnitt 2.2, als wir die Bedingungen für ein globales Gleichgewicht diskutierten. Die Entropieproduktion verschwindet also notwendigerweise mit den dissipativen thermodynamischen Kräften. Dabei taucht in R die Größe $\nabla \mu + \partial_t \mathbf{v}$ nicht auf, da wir die Massenstromdichte mit $\mathbf{g} = \rho \mathbf{v}$ als dissipationsfrei festgelegt hatten [12]. Man beachte, dass wir mit σ_{ij} den sogenannten Spannungstensor definiert haben, welcher sich zur Impulsstromdichte σ'_{ij} um den Term $g_i v_j$ unterscheidet.

Das vorgestellte Verfahren liefert uns also explizite Information zur Gestalt der reaktiven Anteile der Bewegungsgleichungen und dabei war keine konkrete Angabe zu Materialeigenschaften notwendig, bis auf die Benennung der makroskopisch relevanten Variablen, die das betrachtete System grundsätzlich charakterisieren.

2.4 Dissipation und Symmetrie

In der Bilanzgleichung für die Entropie (2.15) hatten wir einen Quellterm R eingeführt, den es noch explizit zu spezifizieren gilt. Die Struktur der Entropieproduktion R für ein gewöhnliches Fluid wurde bereits im vorigen Abschnitt mit (2.23) festgelegt und es sind noch die dissipativen Stromdichten \mathbf{F}^D und σ_{ij}^D zu bestimmen.

Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gilt für die Entropieproduktion grundsätzlich:

$$R \geq 0. \quad (2.24)$$

Zieht man noch die in Abschnitt 2.2 gemachte Aussage hinzu, dass die Entropiefunktion im Gleichgewicht ein Maximum besitzt, folgt daraus, dass Stromdichten, die in R auftauchen, Funktionen der thermodynamischen Kräfte sind und auch mit diesen identisch verschwinden müssen [1, 9–11, 15];

$$F_m^D = F_m^D(\nabla_n T, v_{kl}), \quad \sigma_{ij}^D = \sigma_{ij}^D(\nabla_n T, v_{kl}). \quad (2.25)$$

Der einfachste Ansatz diese Abhängigkeiten zu behandeln, ist eine Entwicklung in linearer Ordnung und wir können einen Zusammenhang zwischen den Stromdichten \mathbf{J} und den thermodynamischen Kräften \mathbf{K} mittels einer Koeffizientenmatrix L_{ij} herstellen: $J_i = L_{ij} K_j$. Diesen Zusammenhang wenden wir auf das gewöhnliche Fluid an und erhalten

$$\begin{pmatrix} F_m^D \\ \sigma_{ij}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{mn} & \beta_{mkl} \\ \tilde{\beta}_{ijn} & \eta_{ijkl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_n T \\ v_{kl} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Ganz allgemein können die Koeffizienten der Matrix L_{ij} , auch Transportkoeffizienten genannt, von den Variablen des Systems oder auch den Zustandsfunktionen abhängen, jedoch nicht von den thermodynamischen Kräften. Ließen wir solch eine Abhängigkeit zu, würde das einer Entwicklung in Terme höherer Ordnung gleichkommen, deren Gültigkeit allerdings nicht hinreichend verifiziert ist und außerdem würden wir die dargelegte klare Struktur sozusagen „verderben“ [15].

Lars Onsager konnte eine Relation über die Symmetrie der Matrix L_{ij} , die wir ab jetzt Onsager-Matrix nennen werden, aufstellen [15–17]. Dazu muss man wissen wie sich die thermodynamischen Kräfte unter Zeitumkehr verhalten. So hat, zum Beispiel, v_{ij} eine negative und ∇T eine positive Parität unter Zeitumkehr. Die Onsager-Matrix ist dann, abhängig von den Zeitumkehrparitäten, symmetrisch oder antisymmetrisch bezüglich der Kombination zweier Kräfte K_i ,

$$L_{ij} = L_{ji} \cdot \text{Zeitumkehrparität}(K_i K_j) \quad (2.27)$$

Diese Relation ist auch als Onsagersche Reziprozitätsrelation bekannt und gibt uns weitere Information über die Gestalt von R .

Wie bereits erwähnt haben unsere Kräfte v_{ij} und ∇T eine gegensätzliche Parität und wir erhalten $\tilde{\beta}_{klm} = -\beta_{mkl}$. Verwenden wir dies für (2.26) und (2.23) erkennen wir, dass Beiträge $\sim v_{ij} \nabla_k T$ in R identisch verschwinden. Ein solcher Term wäre auch nicht konsistent mit der Zeitumkehrparität von R , die positiv ist [17]. Jeder unabhängige Beitrag zu R muss dann ebenfalls eine positive Zeitumkehrparität haben und das wäre nicht vereinbar mit Termen $\sim v_{ij} \nabla_k T$, die eine negative Parität besitzen.

Für den Fall $\text{Zeitumkehrparität}(K_i K_j) = +1$ gibt es populäre Phänomene, wie zum Beispiel den Peltier-Effekt, bzw. den Seebeck-Effekt. Hierbei sind ein elektrisches Feld \mathbf{E} und ein Temperaturgradient ∇T die thermodynamischen Kräfte und die Beiträge der „Kreuzterme“ addieren sich in $R = \dots + \mathbf{j}^e \cdot \mathbf{E} + \mathbf{F}^D \cdot \nabla T = \dots + (\alpha_{ij} E_j) \nabla_i T + (\alpha_{ij} \nabla_i T) E_j$, siehe zum Beispiel [10]. Die Positivität von R ist über die Eigenwerte von L_{ij} gewährleistet, die jeweils selbst positiv sein müssen.

Glücklicherweise lassen sich die Tensoren der Onsager-Matrix mit Hilfe von Symmetrieargumenten reduzieren. In unserem System ist keine Vorzugsrichtung oder Ähnliches vorgegeben, d.h. wir können es als isotropes Medium ansehen und wir bekommen:

$$\mathbf{F}^D = \kappa \nabla T, \quad \sigma_{ij}^D = \eta v_{ij}^0 + \frac{\zeta}{3} v_{\ell\ell} \delta_{ij}. \quad (2.28)$$

Dabei ist κ die Wärmeleitfähigkeit, η und ζ sind Zähigkeitskoeffizienten und ganz allgemein definieren wir den spurlosen Anteil von Matrizen (hier von v_{ij}) als $a_{ij}^0 \equiv a_{ij} - a_{\ell\ell} \delta_{ij}/3$. Wie man sehen kann, gibt es keinen Koeffizienten der auf den Tensor β_{mkl} zurückzuführen ist. In einem isotropen Medium lässt sich nur ein antisymmetrischer isotroper Tensor dritter Stufe finden, nämlich der Epsilon-Tensor, ε_{ijk} . Damit hätten wir in (2.28) Beiträge von der Form $F_m^D = \dots + \beta \varepsilon_{mkl} v_{kl}$ und $\sigma_{ij}^D = \dots - \beta \varepsilon_{nij} \nabla_n T$, die jedoch im ersten Fall wegen $\varepsilon_{mkl} v_{kl} \equiv 0$ und im zweiten Fall wegen $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ji}^D$ bzw. $\varepsilon_{nij} = -\varepsilon_{nji}$ verschwinden.

Damit hat die Entropieproduktion die engültige Form:

$$R = \kappa (\nabla T)^2 + \eta (v_{ij}^0)^2 + \frac{\zeta}{3} (v_{\ell\ell})^2 \quad (2.29)$$

Diese drei sogenannten Transportkoeffizienten müssen entweder durch mikroskopische Rechnungen oder Messungen bestimmt werden. Allerdings können wir aufgrund der Positivität von R gewisse quantitative Einschränkungen vornehmen:

$$\kappa \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \zeta \geq 0. \quad (2.30)$$

Wir haben also ein Gleichungssystem zur Verfügung, das uns ermöglicht das Verhalten eines gewöhnlichen Fluids zu beschreiben. Dabei forderten wir als „Materialeigenschaften“ nur, dass sich das Fluid vollständig durch die Massendichte, Impulsdichte und Energiedichte beschreiben lässt.

Im Wesentlichen machten wir nur zwei Einschränkungen: Zum einen darf sich das System nicht zu sehr vom Gleichgewicht entfernen, ansonsten können wir die Forderung für ein lokales Gleichgewicht nicht einhalten und zum anderen setzten wir ein räumlich isotropes System voraus um die Anzahl der Transportkoeffizienten auf drei reduzieren zu können.

Kapitel 3

Granulare Materie

Granulate beschreiben eine Materialklasse, die sich aus klassischen, makroskopischen Teilchen zusammensetzt. Die einzelnen Teilchen sind dabei groß bzw. schwer genug, so dass die thermische Bewegung vernachlässigbar ist. Außerdem können die Teilchen von beliebiger Form oder Oberflächenbeschaffenheit sein (von „extremen“ Verhältnissen einmal abgesehen, wie eine Ansammlung von Kletten). So gelten zum Beispiel Systeme aus Sandkörnern, Glaskugeln, Cornflakes oder Reiskörnern als Granulate [18–20]. Wir werden uns in diesem Kapitel der Beschreibung solcher granularer Materie widmen und einen passenden hydrodynamischen Ansatz vorstellen.

3.1 Merkmale und Beobachtungen

Wir wollen uns ausschließlich mit trockenen Granulaten beschäftigen. Das Material, das sich in den freien Zwischenräumen befindet, soll keinen Einfluss auf die Eigenschaften des Granulats haben. Wählen wir dazu Luft für die Zwischenräume wird dies auch sehr gut erfüllt sein, wohingegen zum Beispiel Wasser mit seiner benetzenden Eigenschaft die Bedingungen für das Granulat ändert. Auch ohne äußere Krafteinwirkung gäbe es eine zusätzliche, anziehende Wechselwirkung zwischen den Körnern, die man berücksichtigen müsste. Die Beschreibung solcher Effekte soll zu einem anderen Zeitpunkt geschehen und wir werden uns im folgenden nur mit Luft als Füllmaterial befassen.

Die Physik trockener Granulate in Ruhe entsteht durch den Kontakt der Körner miteinander. Das Phänomen zweier sphärischer Körper in elastischem Kontakt ist als Hertzscher Kontakt bekannt [21]. Ein Haufen granularer Körner wird bei mechanischer Beanspruchung eine unüberschaubare Anzahl an Hertzschen Kontakten ausbilden, wobei sich dabei „Kraftketten“ ausbilden, die die Information des Kraftübertrags durch den Körper transportieren [22], siehe Abbildung 3.1. So, wie der Hertzsche Kontakt zweier Körner ein elastisches Phänomen ist, ist auch die Fortsetzung für viele Teilchen, vermittelt durch die Kraftketten, von elastischer Natur. Ein Granulat in Ruhe verhält sich also wie ein Festkörper, der elastischen Spannungen ausgesetzt werden kann [23–25]. Eine makroskopische Theorie muss dies berücksichtigen und im Vergleich zu einem Fluid zusätzliche Variablen dafür bereitstellen.

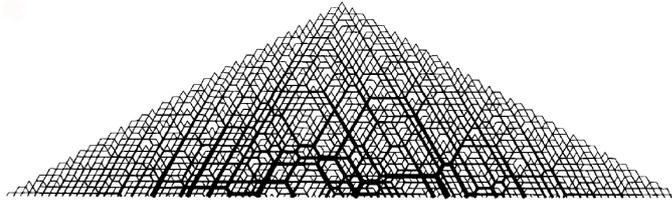


Abbildung 3.1: Darstellung des Kontaktnetzwerks eines aufgeschütteten Granulats unter Einfluß von Gravitation. Die Linienbreite macht die Stärke der Kontaktkraft kenntlich. Übernommen von [22].

Offenbar sind Granulate besondere Festkörper, die sich in ihren Eigenschaften von „konventionellen“ Festkörpern unterscheiden. In Ruhe und ohne eine äußere Krafteinwirkung kann man im Prinzip auch gar nicht von einem Aggregatzustand sprechen, weder fest noch sonst irgendwas, da die Körner im Kollektiv aufgrund der angenommenen Kohäsionslosigkeit keinerlei Wechselwirkung zeigen. Erst wenn man das Material einer Druckbelastung aussetzt, zeigt es elastische Merkmale, gleichzeitig ist es jedoch unmöglich (trockenes) Granulat auf Zug zu belasten. Einen weiteren Effekt können wir unserer Alltagserfahrung entnehmen. Sobald wir ein Granulat aufschütten, sei dies nun Kohle, Sand oder ein beliebiges anderes Schüttgut, bemerken wir, dass dies nur bis zu einem gewissen Grad möglich ist. Die freie Oberfläche wird mit der Horizontalen einen bestimmten Winkel bilden für den der Haufen noch stabil ist. Überschreitet man diesen Winkel verhält sich das Material an der Oberfläche flüssig und gleitet am Haufen entlang und kommt erst zum Stehen wenn der besagte Winkel unterschritten wird. Man nennt diesen Winkel auch *angle of repose*. Im Prinzip dasselbe Phänomen ist der sogenannte *yield*, die Fließgrenze, wobei sich Granulate dabei nicht wesentlich von konventionellen Festkörpern unterscheiden. Dabei ist das Granulat einer Scherspannung ausgesetzt, die sukzessive gesteigert wird, bis das Verhältnis von Scherspannung zu angelegtem Druck einen materialabhängigen Wert übersteigt und thermodynamisch instabil wird und als Folge beginnt das Material zu fließen. Es gibt aber auch ein Beispiel eines Effektes, der unserer physikalischen Erfahrung nicht sofort gerecht wird. Befüllt man einen Silo oder ein ähnliches Gefäß mit Granulat, wird man feststellen, dass der Druck, den man am unteren Rand des Gefäßes misst, immer weniger zunimmt, je mehr Material am oberen Rand nachgefüllt wird, siehe Abbildung 3.2. Der Druck strebt einem Sättigungswert entgegen. Dieser Effekt ist als Janssen-Effekt bekannt [19] und hat tiefe Konsequenzen für die technische Umsetzung von Silos, etc. Verflüssigt man nämlich das gelagerte Material, indem man zum Beispiel am unteren Ende eines Silos Material entnimmt, ändert sich die Situation der mechanischen Belastung abrupt. Die Materialsäule verhält sich nun hydrostatisch (also nicht-sättigend) und man misst einen starken Anstieg des Druckes auf die Materialwände [26]. Dies kann durchaus zur Folge haben, dass das Silo explodiert.

Von diesen dramatischen Folgen einmal abgesehen, kann man sich fragen, wie sich granulare Materie verhält wenn sie angeregt wird. Wir diskutieren dazu ein einfaches Beispiel aus dem Alltag: Man stelle sich einen Zuckerhaufen auf einem

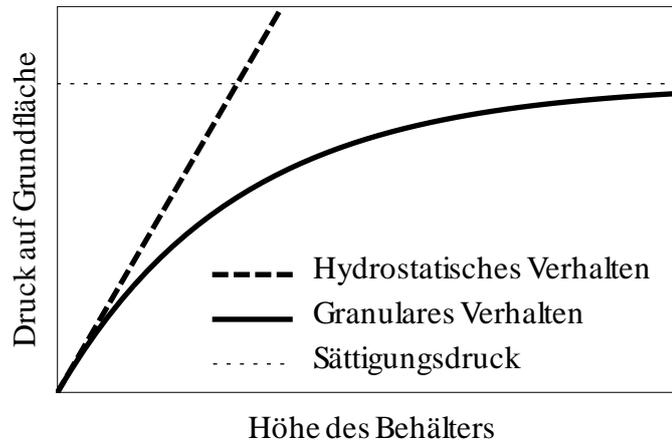


Abbildung 3.2: Darstellung des Janssen-Effekts. Der Druck auf den Gefäßboden nähert sich mit zunehmender Befüllung im Gegensatz zur hydrostatischen Variante einem Sättigungswert.

Tisch vor und wir rütteln permanent an den Tisch um so dem Zuckerberg eine Anregung aufzuzwingen. Nach und nach würde der Zucker auf dem Tisch zerfließen. Wir schließen daraus, dass die Elastizität, die ein Granulat ohne Frage besitzt, nur transient, also vorübergehend ist. Somit hat die Physik von Granulaten auch Merkmale von Polymeren. Elastizität existiert in beiden Fällen nur unter bestimmten Bedingungen und im Allgemeinen sind beide Materialklassen einer Relaxation der elastischen Anteile unterworfen. Die Form der elastischen Gleichungen sind, wie wir noch sehen werden, von derselben grundsätzlichen Struktur. Die Bedingungen und Abhängigkeiten der Terme, die die Relaxation beschreiben sind für beide Fälle allerdings sehr unterschiedlich.

Wir können nun auf einen weiteren Zustand schließen für den Granulate existieren. Granulate können in flüssiger Form vorliegen, wie wir am Beispiel des Fließverhaltens des Zuckers aus dem letzten Absatz sehen konnten. Die Natur dieses Zustandes besteht darin, dass die einzelnen Bausteine des Materials nicht mehr dauerhaft exakt an Ort und Stelle vorliegen müssen, wie das bei einem Festkörper der Fall wäre. D. h. für ein Granulat, dass die Körner bei Anregung makroskopische Distanzen zurücklegen und eine kinetische Energie haben, die nicht zu vernachlässigen ist. Mit dieser kinetischen Energie ist allerdings nicht die kinetische Energie der gerichteten makroskopischen Bewegung des Granulats gemeint, sondern der Energieinhalt der ungerichteten zufälligen Bewegung, die ein Teilchen abweichend von der makroskopischen Geschwindigkeit \mathbf{v} ausführt. Wir erhalten also einen weiteren Freiheitsgrad für granulare Systeme, nämlich die mittlere Energie der ungerichteten Bewegung der Körner.

Im Vergleich zu einer herkömmlichen Flüssigkeit muss der flüssige Zustand eines Granulats dynamisch hergestellt werden. Ohne eine äußere Anregung wird sich das System wieder verfestigen. Dies wird als *jamming* bezeichnet und ist der gegenteilige Prozess zum vorher beschriebenen Überschreiten der Fließgrenze. Jedoch ist es

möglich, dass das Material auch vor Einsetzen des *jammings* elastische Merkmale aufweist [25, 27, 28]. So hat der Spannungstensor, wie wir noch sehen werden, elastische Anteile, die für dicht gepackte Granulate nicht zu vernachlässigen sind. Umgekehrt werden diese Anteile umso unwichtiger, je lockerer das Material gepackt ist bis zu einer Untergrenze für die der elastische Anteil thermodynamisch instabil wird. Zudem zeigt der Spannungstensor eines flüssigen Granulats noch andere Besonderheiten. Für ein gewöhnliches Fluid ist die effektive Viskosität, also das Verhältnis von Scherspannung zu Geschwindigkeitsgradient, eine Konstante, wohingegen die Viskosität für Granulate selbst eine (ansteigende) Funktion des Geschwindigkeitsgradienten und damit der äußeren Anregung ist. Dies ist eine Eigenschaft eines dilatanten Fluids, die auch verschiedene Polymerlösungen zeigen können [29]. Nicht zu vergessen das vielleicht bekannteste und spektakulärste Auftreten einer granularen Flüssigkeit, der Lawine. Im Prinzip haben wir dieses Phänomen mit dem Zuckerhaufen schon angesprochen. Material verflüssigt sich unter bestimmten Bedingungen an der Oberfläche und rutscht ab. Wie wir alle wissen beschränkt sich dies nicht auf Zucker sondern wird beobachtet für Lawinen verschiedenster Art. Ob Schnee oder Geröll, die Materialien zeigen dabei alle flüssiges Verhalten.

Verringern wir sukzessive die Dichte können wir kaum noch von einer granularen Flüssigkeit reden, sondern werden feststellen, dass die Eigenschaften des Granulats eher denen eines Gases entsprechen. Auch hier gilt wieder, dass eine Anregung von außen vorliegen muss um das granulare Gas aufrecht erhalten zu können. Die Teilchen sind dabei völlig delokalisiert und die Physik dieses Zustandes ist nun durch die (inelastischen) Stöße und die, im Vergleich zu den bisherigen Phänomenen, hohe kinetische Energie der Körner bedingt [18, 30].

Wie wir feststellen konnten, lassen sich die Eigenschaften von Sand kaum in einem Satz wiedergeben. Die Phänomene sind von verschiedenstem Charakter und viele Experimente zeigen, wie sehr sich Granulate von „gewöhnlichen“ Materialien unterscheiden. Obwohl uns die Physik der einzelnen Körner vertraut sein mag, müssen wir umso mehr Anstrengung aufwenden, wenn sie als Kollektiv, d. h. als makroskopischer Körper auftreten.

3.2 Theorie

Im letzten Abschnitt haben wir die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Granulaten zu gewöhnlichen Fluiden und Festkörpern aufgezeigt. Ebenso konnten wir auf gewisse Analogien zu Polymeren schließen. Durch die Mannigfaltigkeit der Effekte wird es nicht gelingen die hydrodynamischen Gleichungen eines elastischen Festkörpers oder eines Fluides, so wie wir sie beispielhaft vorgestellt hatten, auf Granulate anzuwenden. Stattdessen werden wir an Hand bestehender theoretischer Modelle aufzeigen, wie wir die hydrodynamische Methode auf Granulate auszuwerten haben [2–6, 31–33]. Zum einen müssen die elastischen Effekte ihre Entsprechung finden und zum anderen soll ein Ausdruck für die ungerichteten Bewegungen der Körner im Falle einer Anregung eingebunden werden.

3.2.1 Zustandsvariablen

Wir beginnen die Diskussion um die Einbindung zusätzlicher relevanter Zustandsvariablen indem wir isotrope elastische Festkörper betrachten. Der Unterschied zu einem gewöhnlichen Fluid liegt darin, dass die „Bausteine“ eines elastischen Festkörpers lokalisiert sind, also einen festen Platz im Ruhesystem des Festkörpers haben. Daran ändert auch ein gewisses Zittern der Bausteine um die gegebene Position aufgrund der immer vorhandenen thermischen Anregung nichts. Die Moleküle eines Fluids, oder aus was auch immer das Fluid aufgebaut ist, führen dagegen eine delokalisierte (thermische) Bewegung aus. Dies ist natürlich die Brownsche Molekularbewegung.

Daraus schließen wir, dass für einen Festkörper offenbar die kontinuierlichen Translationssymmetrien des Raumes gebrochen sind [34]. Mit solchen Symmetriebrüchen sind stets auch hydrodynamische Variablen verbunden, wie wir schon in Abschnitt 2.1 diskutiert hatten. Der makroskopische Ausdruck zur Charakterisierung dieses Symmetriebruchs ist die Angabe eines Koordinatenvektors $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, der jedem Körperpunkt im Raum einen Vektor zuweist. Im unverzerrten Zustand gilt trivialerweise $\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t_0)$. Wenn der Körper bewegt oder verzerrt wird „wandert“ das Vektorfeld \mathbf{a} dementsprechend, da es an die Massenpunkte des Körpers gebunden ist. Im Allgemeinen wird also gelten: $\mathbf{r} \neq \mathbf{a}(\mathbf{r}, t_1)$. Diese Darstellung der körperfesten Koordinaten \mathbf{a} als Funktion der raumfesten \mathbf{r} wird auch die Eulersche Beschreibung genannt. Die Umkehrung, also $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, bzw. die Lagrangesche Darstellung wird häufig in der linearen Elastizitätstheorie verwendet [9]. Die ist für unsere Zwecke allerdings nicht gerade nützlich, da wir sämtliche Definition in raumfesten Koordinaten vorgenommen hatten.

Die Bewegungsgleichungen von \mathbf{a} lassen sich vergleichsweise einfach finden [35],

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = \partial_t \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} = 0. \quad (3.1)$$

Diese Gleichungen drücken den simplen Fakt aus, dass sich die körperfesten Koordinaten bei einer substantiellen Ableitung nicht ändern. Dazu erinnern wir uns an die Definition der substantielle Ableitung (2.16), die ja gerade als körperfeste Ableitung festgelegt wurde.

Jedoch muss $d\mathbf{a}/dt$ nicht notwendigerweise Null ergeben. So kann es dissipative Effekte geben, die auf der „rechten Seite“ von Gleichung (3.1) einen Term erzeugen und die Bindung körperfester Punkte und dem Vektorfeld \mathbf{a} etwas lösen. So ein Effekt wäre zum Beispiel die Leerstellendiffusion [35]. Von der Diskussion solcher Effekte wollen wir in dieser Arbeit absehen und verweisen an dieser Stelle auf zukünftige Arbeiten hierzu.

Nun hängt die elastische Energie nicht explizit von \mathbf{a} ab. Ansonsten würde das bedeuten, dass man einem Körper durch Ausführen einer Galilei-Transformation elastische Energie zuführen könnte. Dies ist natürlich nicht der Fall. Elastische Energie wird mittels elastischer Verzerrungen in einem Körper platziert [35],

$$u_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \nabla_i a_k \nabla_j a_k). \quad (3.2)$$

Die Definition des Verzerrungstensors u_{ij} lässt sich auf die Längenänderung des raumfesten Ortsvektors \mathbf{r} relativ zu dem entsprechenden körperfesten Vektor $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ zurückführen, $d\mathbf{r}^2 - d\mathbf{a}^2 \equiv 2 u_{ij} dr_i dr_j$, siehe [35]. Durch diese Definition ist klar, dass der unverzerrte Zustand $\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t_0)$ äquivalent zu $u_{ij} = 0$ ist.

Auch für u_{ij} lässt sich schnell eine Bewegungsgleichung finden, indem man räumliche und zeitliche Ableitungen der Gleichungen (3.1) und (3.2) bildet,

$$\partial_t u_{ij} + v_k \nabla_k u_{ij} + u_{ik} \nabla_j v_k + u_{jk} \nabla_i v_k - v_{ij} = 0 \quad (3.3)$$

Diese Gleichung ist offenbar von kinematischer Natur, enthält aber auch den Geschwindigkeitsgradienten v_{ij} , der in diesem Fall als eine Art Quellterm auftaucht.

In der Einführung zu diesem Kapitel hatten wir beobachtet, dass die Elastizität granularer Materie „nur“ transient ist. Die rein kinematischen Gleichungen für u_{ij} können in der vorliegenden Form nicht für Granulate gelten. Wir können davon ausgehen, dass es dissipative Prozesse gibt, die im Falle einer äußeren Anregung die elastischen Verzerrungen relaxieren und damit die im Granulat gespeicherte elastische Energie verschwinden lassen [6]. So haben wir uns davon überzeugt, dass zum Beispiel ein Haufen Zucker auf einer Tischplatte durch eine dauerhafte äußere Anregung völlig zerfließen wird. Analog zur Polymerphysik müssen wir also einen Relaxationsterm X_{ij}^D einführen [36] und werden bei der Bestimmung dieses Terms in Abschnitt 3.2.6 (natürlich) die speziellen Charakteristika der Granulate berücksichtigen,

$$\partial_t u_{ij} + v_k \nabla_k u_{ij} + u_{ik} \nabla_j v_k + u_{jk} \nabla_i v_k - v_{ij} = X_{ij}^D \quad (3.4)$$

Mit dem Schritt der Hinzunahme von X_{ij}^D ist allerdings etwas an Qualität der Variablen u_{ij} verloren gegangen. Die elastischen Verzerrungen u_{ij} lassen sich nun nicht mehr auf das Vektorfeld \mathbf{a} zurückführen, d. h. die Gleichungen (3.1) und (3.4) sind nicht mehr äquivalent, und u_{ij} ist damit auch nicht mehr Ausdruck spontan gebrochener Symmetrien. Allerdings lässt sich die Mitnahme von u_{ij} als Variablen rechtfertigen solange sich die Zeitskalen der Relaxationsprozesse der Verzerrungen deutlich von der Zeitskala des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts abheben. Diese Definition wurde schon in Abschnitt 2.1 gebraucht und wir nannten Variablen, die dieses Kriterium erfüllen langsam relaxierende Variablen. Im folgenden Kapitel werden wir durch die Berechnung einer einsetzenden Strömung zeigen können, dass sich die Entwicklung von u_{ij} tatsächlich auf makroskopischen Zeitskalen abspielt.

Das Auftreten des Terms X_{ij}^D hat noch weitere Konsequenzen. Solange sich u_{ij} auf das Vektorfeld \mathbf{a} zurückführen lässt haben wir effektiv „nur“ drei Freiheitsgrade bzw. hydrodynamische Variablen statt der zu erwartenden sechs. Mit u_{ij} als langsame Variablen sind es sechs unabhängige Komponenten.

Die elastischen Verzerrungen u_{ij} liefern uns die notwendigen Variablen um die für Granulate vorhandene (transiente) Elastizität zu beschreiben. Dies wird aber nicht ausreichen granulare Materie als Ganzes beschreiben zu können. Es zeigt sich, dass sich das Verhalten verflüssigter Granulate mit der Hinzunahme von u_{ij} als Variablen nicht hinreichend beschreiben lässt. Letztlich lautet die Fragestellung was denn die Ursache für die Transienz der Elastizität ist.

Im einführenden Abschnitt hatten wir diskutiert, dass Granulate unter einer äußeren Anregung beginnen sich zu verflüssigen. Die Körner werden durch ein gewisses „Rütteln“ immer wieder den Kontakt untereinander verlieren. Das hat zur Folge, dass die Elastizität, die durch diese Kontakte im System gespeichert war relaxieren wird. Dies identifizieren wir als genau die dissipativen Prozesse, die wir im letzten Abschnitt als Grund für die Einführung des Termes X_{ij}^D in Gleichung (3.4) angesehen hatten [6].

Die dem System aufgezwungene „Unruhe“ verursacht nun einen neuen Freiheitsgrad in einem granularen System, der nicht durch die bisherigen Variablen abgedeckt ist. So kennen wir die gerichtete makroskopische Bewegung des Systems mit der entsprechenden Geschwindigkeit \mathbf{v} , siehe Gleichung (2.5). Durch eine äußere Anregung erfahren die Körner nun eine zusätzliche Geschwindigkeit, die im Mittel allerdings ungerichtet ist und damit nicht Bestandteil von \mathbf{v} sein kann. Da diese zweite Geschwindigkeit keine Vorzugsrichtung hat werden wir wie in [6] einen Skalar T_g einführen um diese hinzukommende Variable zu charakterisieren. Wir wählen in Analogie zur Temperatur T den Begriff der granularen Temperatur T_g , da beide ihre Existenz einer willkürlichen mikroskopischen bzw. mesoskopischen Bewegung verdanken. Es ist klar, dass man die Analogie nicht überstrapazieren darf, da die Geschwindigkeitsverteilung der Körner für den Anregungsbereich den wir betrachten einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung nicht entsprechen wird. Zudem werden bei diesen zufälligen mesoskopischen Bewegungen allein schon durch die Unregelmäßigkeiten der Form der Körner auch Drehimpulse angeregt, die ebenfalls (makroskopisch) gleichmäßig auf die Körner verteilt sind. Nichtsdestotrotz lässt sich T_g als Maß für die Zufallsbewegung der Körner angeben und von der makroskopischen Geschwindigkeit \mathbf{v} als zusätzlicher unabhängiger Beitrag abgrenzen.

Die Zunahme einer Temperatur T_g lässt sich auch über deren konjugierte Variable, der sogenannten granularen Entropiedichte s_g , verstehen. Die Größen T_g und s_g sind folgendermaßen verknüpft [6]:

$$T_g \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_g}. \quad (3.5)$$

Die granulare Entropiedichte s_g ist Teil der Gesamtentropiedichte s , wird aber für unseren Fall der Granulate separiert mit $s = (s - s_g) + s_g$. Nun steht s_g für die mesoskopischen Freiheitsgrade der Körner als Ganzes und deren ungerichtete Bewegung, wohingegen sich $s - s_g$ auf die mikroskopischen Freiheitsgrade, das heißt zum Beispiel die Phononen, bezieht. Mit dieser Definition ist klar, dass s_g wesentlich kleiner ist als $s - s_g$. Betrachtet man ein Korn, so gibt es eine ungezählte Menge an mikroskopischen Freiheitsgraden, die sich aus dem atomaren Aufbau des Korn ergibt. Das Korn im Ganzen genommen besitzt dagegen nur sehr wenige Freiheitsgrade, wie zum Beispiel die der Translation. Also gilt in sehr guter Näherung $s \gg s_g$ und $(s - s_g) \approx s$.

Das Energiedifferential hat mit s und s_g folgende algebraisch identische Formen,

$$d\varepsilon = T d(s - s_g) + T_g ds_g + \dots = T ds + (T_g - T) ds_g + \dots \quad (3.6)$$

Beide Beschreibungen werden sich als nützlich erweisen. Die Definition mit $s - s_g$ und s_g als Variablen ist die Grundlage für die Herleitung der Bewegungsgleichungen.

Die zweite Variante mit s und s_g als Variablen ist wichtig für das Auffinden der globalen Gleichgewichtsbedingungen, da dafür auch weiterhin die Gesamtentropie s maximiert wird. An der Definition von T_g ändert die zweite Variante übrigens nichts, da es zu beachten gilt, dass $\partial s / \partial s_g \neq 0$ gilt.

Zur Erleichterung der Schreibearbeit sollen folgende Größen definiert werden:

$$\bar{s} \equiv s - s_g, \quad \bar{T}_g \equiv T_g - T. \quad (3.7)$$

Grundsätzlich gehen wir davon aus, dass makroskopische Anregungen primär zuerst in die mesoskopischen Freiheitsgrade, also s_g „fließen“ und erst danach soll die in das System gebrachte Energie in das mikroskopische Reservoir \bar{s} übergehen. Dies entspricht der Alltagserfahrung, da eine äußere Anregung offenbar zunächst eine granulare Temperatur T_g verursacht und erst durch die dabei entstehende Reibung, etc. die einzelnen Körner erwärmt, bzw. die Temperatur T des Systems erhöht [6, 37]. Der umgekehrte Fall tritt nicht ein. Ein Erhöhen der Temperatur T führt nicht zu makroskopischen Geschwindigkeiten der Körner.

Bevor wir diesem Verhalten in Abschnitt 3.2.6 eine Gestalt per Formel zuordnen, muss zuerst eine Bilanzgleichung für die neue Variable s_g gefunden werden. Da es sich bei s_g um eine Entropiedichte handelt analog zu s , sollte auch die Bilanzgleichung dieselbe Form besitzen [6],

$$\partial_t s_g + \nabla \cdot \mathbf{F}_g = \frac{R_g}{T_g}. \quad (3.8)$$

Gleichung (2.15) lässt sich genauso umschreiben um die Bilanzgleichung für das große Entropiereservoir \bar{s} zu erhalten,

$$\partial_t \bar{s} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{R}{T}. \quad (3.9)$$

Es gilt zu beachten, dass jetzt nicht mehr zwingend $R \geq 0$ gelten muss. Die Gesamtentropie s setzt sich bekanntermaßen zusammen aus $\bar{s} + s_g$ und für die Raten der Entropieerzeugung addiert man die Gleichungen (3.8) und (3.9), so dass wir für die Gesamtentropieproduktion folgern können:

$$\frac{R}{T} + \frac{R_g}{T_g} \geq 0. \quad (3.10)$$

Wir erkennen, dass Gleichung (3.8) offenbar keinen Erhaltungssatz darstellt. Außerdem wird mit der Einführung von s_g auch keine Symmetrie spontan gebrochen. Es muss sich also bei der granularen Temperatur, ganz analog zu den Verzerrungen u_{ij} , um eine langsam relaxierende Variable handeln.

3.2.2 Der Energieausdruck

Im Vergleich zu dem in Kapitel 2 vorgestellten gewöhnliche Fluid hat sich der Ausdruck für die Fundamentalrelation erweitert [6],

$$d\varepsilon = T d\bar{s} + T_g ds_g + \mu d\rho - \pi_{ij} du_{ij} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g}. \quad (3.11)$$

Hierbei ist $\pi_{ij} \equiv -\partial\varepsilon/\partial u_{ij}$ der elastische Spannungstensor, der *nicht* identisch mit σ_{ij} aus der Impulserhaltungsgleichung ist.

Relation (3.11) zeigt zudem einen wesentlichen Unterschied zur gewöhnlichen Elastizitätstheorie (mal abgesehen von der Einführung einer granularen Temperatur). Die Massendichte ϱ und die elastischen Verzerrungen sind unabhängige Variablen. Dies ist insofern außerordentlich, dass im Falle kleiner Verzerrungen für einen gewöhnlichen Festkörper ein Zusammenhang zwischen der Spur des Verzerrungstensors und der Massendichte besteht: $d\varrho/\varrho = -du_{\ell\ell}$. Für ein granulares Medium gibt es einen solchen Zusammenhang nicht. Man kann sich relativ einfach klar machen, dass sich eine elastische Verzerrung auch ohne eine Dichtevariation ändern lässt. So könnten sich die Körner gegeneinander verschieben, so dass dabei die Verzerrung u_{ij} relaxiert, wohingegen das „Leerstellenvolumen“ und damit auch die Massendichte ϱ unverändert bleibt.

Wie so oft wird es nützlich sein das System als Funktion der Temperatur(en) darzustellen, so auch hier. Eine zweifache Legendresche Transformation führt auf

$$f(T, T_g, \dots) = \varepsilon(\bar{s}, s_g, \dots) - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{s}} \bar{s} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial s_g} s_g, \quad (3.12)$$

$$df = -\bar{s} dT - s_g dT_g + \mu d\varrho - \pi_{ij} du_{ij} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g}. \quad (3.13)$$

Wir erhalten also ein Art *freie Energie* des Systems, obwohl die Benennung eigentlich nur für die Transformation bezüglich T reserviert ist. Immerhin ist der zweite Teil der durchgeführten Legendreschen Transformation ebenfalls eine Transformation nach einer Temperatur.

Um ein makroskopisches System vollständig beschreiben zu können genügt es bekanntermaßen nicht die relevanten Variablen zu kennen. Man benötigt die Kenntnis der Zustandsgleichungen oder auch des Ausdrucks der Energie. Für ein ideales Gas wären das die kalorische und thermische Zustandsgleichung. Der notwendige Energieausdruck für ein granulares System soll nun spezifiziert werden.

Wie bereits diskutiert, hat eine Variation der Temperatur T keine wesentliche Rückkopplung an anderen Reservoirs. Es sei erwähnt, dass sich die Elastizitätskoeffizienten wesentlich ändern könnten falls T (und P) die Regionen eines Phasenübergangs erreichen würden. Die Kristallstruktur von Quarzsand (Siliziumdioxid) wird sich allerdings erst im Temperaturbereich $\approx 850 K$ (und $1 bar$) modifizieren. Dadurch würden sich auch die Elastizitätskoeffizienten ändern und somit hinge der elastische Beitrag zu f sicherlich von der Temperatur T ab. Wir wollen hier aber Systeme betrachten deren Materialeigenschaften sich im Bereich der Raumtemperatur nur unwesentlich ändern. Dies impliziert auch, dass im unten vorgestellten Ausdruck für die Energie die thermische Ausdehnung der Körner, ebenfalls eine Funktion von T , vernachlässigt wird. Ebenso soll die freie Energiedichte f zwei Beiträge enthalten, die getrennt voneinander Funktionen von T_g und u_{ij} sind. Dies entspricht sozusagen einer Entwicklung in niedrigster Ordnung und Kopplungsterme von T_g und u_{ij} seien an dieser Stelle vernachlässigt. Allerdings heißt das nicht, dass der Energiebeitrag $\sim u_{ij}$ unbeeinflusst von T_g wäre. Schließlich gilt es die Bewegungsgleichungen für

u_{ij} zu lösen und die sind via X_{ij}^D an T_g gekoppelt. Es ist nach [6]

$$f = \frac{\mathbf{g}^2}{2\varrho} + f_0(T, \varrho) + f_1(\varrho, u_{ij}) + f_2(\bar{T}_g, \varrho); \quad (3.14)$$

$$f_1 \equiv \mathcal{B}(\varrho) \sqrt{\Delta} \left(\frac{2}{5} \Delta^2 + \frac{u_s^2}{\xi} \right), \quad (3.15)$$

$$f_2 \equiv -\frac{1}{2} \varrho b(\varrho) \bar{T}_g^2. \quad (3.16)$$

Dabei sind $\Delta \equiv -u_{\ell\ell}$ und $u_s^2 \equiv u_{ij}^0 u_{ij}^0$. Außerdem sind $\mathcal{B}(\varrho)$, ξ und $b(\varrho)$ materialabhängige Parameter, wobei der Zusammenhang mit der Dichte ϱ noch zu spezifizieren ist [6],

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \left(\frac{\varrho - \varrho_{\ell p}^*}{\varrho_{cp} - \varrho} \right)^A, \quad (3.17)$$

$$b = b_0 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{cp}} \right)^a. \quad (3.18)$$

Die Massendichte ϱ_{cp} ist die Dichte der *random closest packing fraction*, d. h. die maximal mögliche Schüttdichte. Den Parameter $\varrho_{\ell p}^*$ werden wir später im Rahmen des Abschnitts 3.2.5 definieren. Offenbar divergiert $\mathcal{B}(\varrho)$ (für $A > 0$) und damit auch der elastische Energiebeitrag für $\varrho \rightarrow \varrho_{cp}$; dieses Verhalten wurde aus Gründen der Einfachheit so gewählt. Prinzipiell lässt sich die Festlegung des Ansatzes von $\mathcal{B}(\varrho)$ auf bereits vorhandene Ansätze und auf die Erfüllung bzw. die Verletzung thermodynamischer Stabilitätskriterien zurückführen, siehe hierzu Abschnitt 3.2.5. Es konnte $A = 3/20$ gefunden werden [6], was wir ab jetzt immer verwenden werden. Die Form des Parameters $b(\varrho)$ erfüllt eine experimentelle Vorgabe. Solange $1 > a > 0$ gilt, erhält man einen Druck P , der für $\varrho \rightarrow \varrho_{cp}$ divergiert [6].

Der elastische Energieausdruck f_1 wurde offenbar in Anlehnung an den Effekt des Hertzschens Kontakts gefunden und auf makroskopische gescherte Systeme erweitert. Der Beitrag f_2 erinnert nun nicht gerade an die kalorische Zustandsgleichung eines idealen Gases. Dies hat damit zu tun, dass wir hier granulare Systeme betrachten, die auch den elastischen Limes beinhalten sollen. Und dieser Grenzfall ist $\bar{T}_g \rightarrow 0$, d. h. die Anregung verschwindet. Also ist f_2 gerade eine Entwicklung um den Gleichgewichtszustand mit einem Maximum bei $\bar{T}_g = 0$. Für die Energiedichte ε erhalten wir ein dementsprechendes Minimum für $s_g = 0$. Das Reservoir der mesoskopischen Freiheitsgrade hat sich im Gleichgewichtszustand „entleert“.

Die konjugierten Variablen s_g und π_{ij} ergeben sich auf natürliche Art und Weise:

$$-\frac{\partial f}{\partial T_g} \equiv s_g = \varrho b(\varrho) \bar{T}_g, \quad (3.19)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial u_{ij}} \equiv \pi_{ij} = \mathcal{B}(\varrho) \sqrt{\Delta} \left(\Delta + \frac{u_s^2}{2\xi\Delta} \right) \delta_{ij} - 2 \frac{\mathcal{B}(\varrho)}{\xi} \sqrt{\Delta} u_{ij}^0. \quad (3.20)$$

Der Ausdruck für die elastische Energie wurde bereits erfolgreich auf verschiedene experimentelle Situationen angewendet und vertrauen deshalb auf dessen grundsätzliche Anwendbarkeit [2–5, 31–33]. Der Beitrag f_2 soll letztlich (auch) in dieser Arbeit auf seine Anwendbarkeit hin überprüft werden.

3.2.3 Gleichgewichtsbedingungen

Analog zum gewöhnlichen Fluid werden wir die Extremaleigenschaft der Entropie ausnutzen um lokal formulierte Bedingungen für das thermodynamische Gleichgewicht abzuleiten. Dazu war es nötig eine Variationsaufgabe unter Nebenbedingungen zu lösen. Für ein granulares System ergeben sich keine zusätzlichen Zwangs- bzw. Nebenbedingungen, schließlich haben die hinzugekommenen Variablen s_g und u_{ij} keine Bilanzgleichungen, die einem Erhaltungssatz entsprechen würden. Wir können also das zu maximierende Funktional \mathcal{F} aus Abschnitt 2.2 quasi unverändert übernehmen⁴,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varepsilon, s_g, \varrho, u_{ij}, \mathbf{g}) &= s(\varepsilon, s_g, \varrho, u_{ij}, \mathbf{g}) \\ &+ L_1 \varepsilon + L_2 \varrho + \mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{g} + \mathbf{L}_4 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) + \mathbf{L}_5 \cdot (\varrho \mathbf{r} - \mathbf{g}t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nun können oder müssen wir \mathcal{F} zusätzlich nach den Variablen s_g und u_{ij} ableiten und wir erhalten (siehe hierzu auch Abschnitt 2.2):

$$\begin{aligned} \nabla T &= 0, & \nabla \mu + \partial_t \mathbf{v} &= 0, & v_{ij} &\equiv \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = 0, \\ \bar{T}_g &= 0, & \pi_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die „neuen“ Gleichgewichtsbedingungen entsprechen der Intuition. Überlässt man ein granulares System sich selbst, wird es recht schnell einen unangeregten Zustand einnehmen ($\bar{T}_g = 0$). Gleichgewicht in T_g , bzw. für die angeregte granulare Bewegung bedeutet also, dass die mesoskopischen Freiheitsgrade in den mikroskopischen aufgehen. Der zerfließende Haufen Zucker aus Abschnitt 3.1 ist dagegen ein Beispiel dafür, dass ein stetig angeregtes granulares System ($\bar{T}_g \neq 0$) keine elastischen Spannungen aufrecht erhalten kann und letztlich in einen Zustand mit $\pi_{ij} = 0$ münden muss.

Falls $\bar{T}_g \equiv 0$ gilt kann allerdings $\pi_{ij} = 0$ nicht mehr eine passende Beschreibung eines Gleichgewichts sein. Schließlich kann ein ruhendes granulares System sehr wohl elastische Spannungen im Gleichgewicht halten. Unter solch einer Voraussetzung, $\bar{T}_g \equiv 0$, und damit auch $s_g \equiv 0$ vermehrt sich allerdings die Anzahl der Nebenbedingungen der oben diskutierten Variationsaufgabe. Der Limes $\bar{T}_g \rightarrow 0$ beinhaltet nämlich $X_{ij}^D \rightarrow 0$ und die Bewegungsgleichungen für u_{ij} reduzieren sich

⁴Es sei explizit erwähnt, dass die Gesamtentropie s zu maximieren ist und nicht \bar{s} oder gar s_g . Auch wenn sich der Löwenanteil der physikalischen Resultate aus s_g ergibt, muss doch immer im Hinterkopf behalten werden, dass die einzelnen Körner eines Granulats selbst schon makroskopische und damit thermodynamische Systeme sind. Würde man dieses riesige Entropiereservoir tatsächlich vernachlässigen, würden sich daraus seltsame Schlussfolgerungen ergeben. Die Energieerhaltung sollte jedoch auch für granulare Systeme eine Grundvoraussetzung sein.

auf (3.3). Die Verzerrungen sind sozusagen „erhalten“ und lassen sich auf das Vektorfeld \mathbf{a} zurückführen. Man kann zeigen [6], dass dies dann zu veränderten lokalen Gleichgewichtsbedingungen führt mit $\nabla_j \pi_{ij} = 0$. Die elastischen Spannungen müssen demnach nicht zwingend identisch verschwinden, wie wir das auch für ein ruhendes System erwarten. Im Rahmen dieser Arbeit wird aber immer $\bar{T}_g \neq 0$ gelten, so dass wir die gefundenen Ergebnisse ohne Einschränkung weiter verwenden können.

Man kann die gefundenen Gleichgewichtsbedingungen auch kombinieren um eine etwas schwächere Formulierung zu erhalten. Im Laufe des nächsten Kapitels verwenden wir zusätzlich folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$\nabla T_g = 0. \quad (3.23)$$

Im Gleichgewicht muss gelten: $T = -1/L_1$ und $T_g = -1/L_1$ und damit natürlich auch $\nabla T = 0$ und $\nabla T_g = 0$.

3.2.4 Bilanzgleichungen

Ziel dieses Abschnitts ist es die reaktiven Anteile der noch unbestimmten Ströme herauszufinden. Die allgemeinen Formen der Bewegungsgleichungen aller Variablen haben wir mit (2.12) - (2.14), (3.4), (3.8) und (3.9) bereits zusammengestellt. Die Vorgehensweise wird dieselbe sein wie am Beispiel des gewöhnlichen Fluids in Abschnitt 2.3 illustriert. Zuerst soll die substantielle Ableitung des Energiedifferentials gebildet und anschließend durch Einsetzen der allgemeinen Bewegungsgleichungen und adäquate Umformungen die reaktiven Anteile der Ströme gefunden werden.

Die Ableitung des Energiedifferentials (3.11) mittels der substantiellen Ableitung $d/dt \equiv \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = T \frac{d\bar{s}}{dt} + T_g \frac{ds_g}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} - \pi_{ij} \frac{du_{ij}}{dt}. \quad (3.24)$$

Wir verwenden also die Bewegungsgleichungen (2.12) - (2.14), (3.4), (3.8) und (3.9) um folgende Form der Bilanzgleichung der Energie zu erhalten:

$$\begin{aligned} \partial_t \varepsilon + \nabla_j \left[(\varepsilon + P) v_j + T (F_j - \bar{s} v_j) + T_g (F_{g,j} - s_g v_j) + v_i (\sigma'_{ij} - g_i v_j - P \delta_{ij}) \right] \\ = R + R_g + \left(\sigma'_{ij} - g_i v_j - P \delta_{ij} - \pi_{ij} + \pi_{ki} u_{kj} + \pi_{jk} u_{ik} \right) v_{ij} \\ + (\mathbf{F} - \bar{s} \mathbf{v}) \cdot \nabla T + (\mathbf{F}_g - s_g \mathbf{v}) \cdot \nabla T_g - X_{ij}^D \pi_{ij}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dazu wurde auch die Symmetrierelation aus Anhang A benutzt. P ist die „Abkürzung“ folgender Relation,

$$P \equiv T \bar{s} + T_g s_g + \mu \rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \varepsilon \quad (3.26)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g} - f. \quad (3.27)$$

Wie schon beim gewöhnlichen Fluid soll der Begriff Druck für P etwas gescheut werden, da P nicht der komplette Ausdruck für die Kraft senkrecht zur Oberfläche ist.

Die „rechte“ Seite von Gleichung (3.25) beginnend mit $R + R_g + \dots$ hat identisch zu verschwinden, da die „linke“ Seite genau der Energieerhaltung (2.14) entspricht. Dies definiert uns die Raten zur Entropieproduktion $R + R_g$. Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass die Beiträge zu $R + R_g$ offenbar von der Form *Stromdichte* \cdot *Thermodynamische Kraft* sind, wobei wir die für ein granulares Medium auftretenden möglichen Kräfte im vorigen Abschnitt hergeleitet hatten. Die Stromdichten, die in R und R_g auftauchen sind von rein dissipativen Charakter und um uns die Schreibarbeit zu erleichtern definieren wir:

$$\mathbf{F}^D \equiv \bar{s} \mathbf{v} - \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}_g^D \equiv s_g \mathbf{v} - \mathbf{F}_g, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{ij}^D \equiv g_i v_j + P \delta_{ij} + \pi_{ij} - \pi_{ki} u_{kj} - \pi_{jk} u_{ik} - \sigma_{ij}. \quad (3.29)$$

Die reaktiven Anteile der Bilanzgleichungen (2.12) - (2.14), (3.8) und (3.9) und auch die Summe der Raten der Entropieproduktion $R + R_g$ sind damit bestimmt und wir können schreiben:

$$\mathbf{F} = \bar{s} \mathbf{v} - \mathbf{F}^D, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{F}_g = s_g \mathbf{v} - \mathbf{F}_g^D, \quad (3.31)$$

$$\sigma_{ij}' = g_i v_j + \sigma_{ij} = g_i v_j + P \delta_{ij} + \pi_{ij} - \pi_{ki} u_{kj} - \pi_{jk} u_{ik} - \sigma_{ij}^D, \quad (3.32)$$

$$Q_j = (\varepsilon + P) v_j + v_i (\pi_{ij} - \pi_{ki} u_{kj} - \pi_{jk} u_{ik}) - T f_j^D - T_g f_{g,j}^D - v_i \sigma_{ij}^D, \quad (3.33)$$

$$R + R_g = \mathbf{F}^D \cdot \nabla T + \mathbf{F}_g^D \cdot \nabla T_g + \sigma_{ij}^D v_{ij} + X_{ij}^D \pi_{ij}. \quad (3.34)$$

Da wir den Ausdruck der Energie f kennen (3.14), kann man daraus mit (3.27) leicht P berechnen. Da die Energie abzüglich der kinetischen Energie aus drei additiven Teilen f_0 , f_1 und f_2 besteht, erhält man auch für P dementsprechend drei Anteile. Wir nahmen an, dass die Körner kohäsionslos sind und daraus lässt sich zeigen, dass ein Anteil in P , der sich auf f_0 zurückführen lässt identisch verschwindet [6]. Die verbleibenden Teile P_1 und P_2 ergeben sich zu

$$P = P_1 + P_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \varrho} \varrho - f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \varrho} \varrho - f_2, \quad (3.35)$$

$$P_1 = \left[\frac{3}{20} \varrho \left(\frac{1}{\varrho_{cp} - \varrho} + \frac{1}{\varrho - \varrho_{\ell p}^*} \right) - 1 \right] f_1, \quad (3.36)$$

$$P_2 = \frac{a}{2} b(\varrho) \frac{\varrho^2 / \varrho_{cp}}{1 - \frac{\varrho}{\varrho_{cp}}} \bar{T}_g^2. \quad (3.37)$$

Mal abgesehen davon, dass es noch gilt die dissipativen Ströme zu bestimmen, haben wir für ein granulares System noch eine zusätzliche Freiheit im Vergleich zum herkömmlichen Fluid. Mit R und R_g gibt es zwei Entropieproduktionen. D. h. es müssen zusätzliche Entscheidungen getroffen werden, ob ein dissipativer Strom, wie zum Beispiel σ_{ij}^D , zu R , R_g oder anteilig zu beiden beiträgt. Dies soll in Abschnitt 3.2.6 diskutiert werden.

3.2.5 Thermodynamische Stabilität

Ein wichtiger Punkt einer thermo- bzw. hydrodynamischen Theorie ist die Stabilität des Systems. Dazu ist es bekanntermaßen erforderlich, dass die Entropie eine konkave Funktion bezüglich ihrer natürlichen Variablen ist [10]. Dies lässt sich auf die hier verwendete Legendre-Transformierte der Energie f umformulieren und es müssen verschiedene Bedingungen erfüllt sein, so dass ein stabiles granulares System möglich ist. Die explizite Diskussion dieser Kriterien wurde bereits dargelegt [6, 38], so dass wir an dieser Stelle auf eine detaillierte Herleitung verzichten werden. Nur eine Anmerkung: Die Energie wurde so konstruiert, dass sie bezüglich T_g immer stabil ist, d. h. jedes T_g sei zugelassen. Dies mag in der Realität möglicherweise nicht immer zutreffend sein, sei es für sehr kleine oder sehr große T_g . Uns soll die generelle Stabilität der Energie bezüglich T_g genügen, es sei denn diese Annahme wird durch Experimente oder theoretische Überlegungen widerlegt. Man erhält für den elastischen Teil der Energie folgende Kriterien:

$$\mathcal{B}(\varrho) \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad b(\varrho) \geq 0 \quad \text{und} \quad \varrho \geq \varrho_{lp}. \quad (3.38)$$

Dabei kann der Materialparameter ϱ_{lp} als *loosest packing density* interpretiert werden [6]. Wie der Name schon sagt, verlieren die Körner eines granularen Systems mit $\varrho < \varrho_{lp}$ dauerhaft den Kontakt untereinander und deshalb kann auch keine stabile (elastische) Lösung solch eines Systems möglich sein. In der Definition von $\mathcal{B}(\varrho)$, siehe (3.17), hatten wir ein ϱ_{lp}^* definiert. Wir können nun den Zusammenhang zu ϱ_{lp} nachliefern:

$$\varrho_{lp}^* \equiv \varrho_{cp} + \frac{20}{9} (\varrho_{lp} - \varrho_{cp}). \quad (3.39)$$

Die Größe ϱ_{lp}^* ist also so gewählt, dass die elastische Lösung bei ϱ_{lp} instabil wird.

Außerdem ist das System nur stabil falls

$$\frac{u_s^2}{\Delta^2} \leq 2\xi \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi_s}{\pi_{\ell\ell}/3} \leq \sqrt{\frac{2}{\xi}} \quad (3.40)$$

gilt (wobei $\pi_s^2 \equiv \pi_{ij}^0 \pi_{ij}^0$) [3, 6]. Dies entspricht der sogenannten Drucker-Prager-Form des Coulomb-*yield*-Kriteriums [39]. Granulare Materie kann also nur bis zu einem bestimmten Punkt (elastische) Scherspannungen aufnehmen. Jenseits der Stabilitätsgrenze wird sich das granulare System eine alternative Lösung zu den gegebenen Randbedingungen „suchen“ müssen und der Energieausdruck des Granulats wird sich auf $f = \mathbf{g}^2/2\varrho + f_0 + f_2$ reduzieren. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen zu diesem Energieausdruck sind sozusagen rein fluid. Die Theorie granularer Materie gibt mit diesem letzten Kriterium (*yield*) ein wichtiges Merkmal der Granulate korrekt wieder, was bereits ausführlich diskutiert wurde [3, 6]. Damit lässt sich sehr gut der Parameter ξ bestimmen. So lässt sich an Hand des Schüttwinkels, d. h. der Winkel den ein aufgeschütteter Haufen Granulat mit der Horizontalen einschließt, der Parameter ξ für Sand mit $\approx 5/3$ bestimmen [2].

Im Rahmen dieser Arbeit sollen Scherströmungen beschrieben werden. D. h. es gilt eigentlich nicht nur die thermodynamische Stabilität, sondern auch die dynamische Stabilität der Lösungen zu gewährleisten. Wir beschränken uns aber nur auf die eben aufgezählten Stabilitätsbedingungen. Das „Austesten“ der dynamischen Stabilität soll auf zukünftige Arbeiten verschoben werden, da es uns in dieser Arbeit um die prinzipielle Möglichkeit einer Lösung ging. Die Untersuchungen bezüglich der dynamischen Stabilität werden sicherlich nützliche Informationen zu Tage fördern, die den Wertebereich der Materialparameter einschränken werden.

3.2.6 Dissipation

Nachdem die reaktiven Anteile der Stromdichten gefunden wurden, sollen nun die irreversiblen Anteile bestimmt werden. Der Ansatz für die verbleibenden Stromdichten soll von linearer Ordnung in den thermodynamischen Kräften sein, wie wir das schon von dem gewöhnlichen Fluid bereits kennen. Die Onsager-Matrix⁵ lautet:

$$\begin{pmatrix} F_i^D \\ F_{g,j}^D \\ \sigma_{kl}^D \\ X_{mn}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{io} & \tilde{K}_{ip} & 0 & 0 \\ K_{jo} & \kappa_{g,jp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{klqr} & -\tilde{\alpha}_{klst} \\ 0 & 0 & -\alpha_{mnqr} & \beta_{mnst} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_o T \\ \nabla_p T_g \\ v_{qr} \\ \pi_{st} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Beim Aufstellen der Onsager-Matrix wurde schon davon ausgegangen, dass die Transporteigenschaften eines granularen Systems im Allgemeinen von isotropen Charakter sind. Für solch ein System kann es keine lineare Kopplung geben, die einen Tensor dritter Stufe benötigt, siehe Abschnitt 2.4. So ergeben sich also bereits acht Einträge für die Onsager-Matrix, die wir identisch Null setzen können.

Weitere Einschränkungen erhalten wir wenn wir das Onsagersche Prinzip, d. h. Relation (2.27), auf die Außerdiagonaleinträge von (3.41) anwenden. Die Temperaturgradienten $\nabla_i T$ und $\nabla_i T_g$ haben offenbar beide eine positive Parität unter Zeitumkehr und wir schließen $\tilde{K}_{ij} = K_{ji}$. Anders sieht es für v_{ij} und π_{ij} aus. Der Geschwindigkeitsgradient hat eine negative Zeitumkehrparität, wohingegen die Spannungen eine positive besitzen. Also erhalten wir hierfür $\tilde{\alpha}_{ijkl} = -\alpha_{klij}$.

Betrachten wir zuerst die Ströme \mathbf{F}^D und \mathbf{F}_g^D . Ist das System isotrop erhält man $\kappa_{ij} = \kappa' \delta_{ij}$ und $\kappa_{g,ij} = \kappa'_g \delta_{ij}$. Es darf nicht vergessen werden, dass es nicht klar ist welcher Entropierate (oder beiden) die dissipativen Ströme denn „zugeschlagen“ werden müssen. So können (oder müssen) wir für die Transportkoeffizienten einen additiven Ansatz machen derart, dass man für R und R_g jeweils einen Betrag bekommt, zum Beispiel $\kappa' = \kappa_R + \kappa_{R_g}$. Wir entscheiden uns für den Ansatz aus [6],

$$\mathbf{F}^D = \kappa \nabla T, \quad \mathbf{F}_g^D = \kappa_g \nabla T_g. \quad (3.42)$$

⁵Wir sind zutiefst von der Anwendbarkeit der Onsagerschen Prinzipien auch für granulare Materie überzeugt. Die Onsagerschen Relationen basieren unter anderem auf der mikroskopischen Reversibilität. Nach unserer Kenntnis gibt es Zweifel ob dies für Granulate überhaupt erfüllt wird, da die Kollisionen der Körner von dissipativen Charakter sind. Dabei wird aber vergessen, dass sich die eigentliche Reversibilität eben nicht auf der mesoskopischen Skala einzelner Körner, sondern auf atomarer Ebene abspielt [40]. Im Prinzip handelt es sich um dieselben Diskussion wie bereits in Fußnote 4 ausgeführt.

Die Stromdichte \mathbf{F}^D trägt dabei nur zu R bei und \mathbf{F}_g^D soll nur zu R_g einen Beitrag leisten. Die Koeffizientenmatrizen \tilde{K}_{ij} und K_{ij} verschwinden identisch. Dieser Ansatz geht davon aus, dass die jeweiligen Temperaturgradienten näherungsweise ausschließlich für ihre „eigenen“ Reservoirs s und s_g einen Beitrag liefern.

Für den Viskositätstensor η_{ijkl} soll nicht so verfahren werden. Man erhält nach Auswerten unter der Annahme von Isotropie zwei Beiträge, einen proportional zur Spur des Tensors und den zweiten proportional zum spurlosen Anteil. Die sollen nun aber jeweils zweigeteilt werden und einen Beitrag zu R und R_g liefern. Damit lässt sich η_{ijkl} folgendermaßen schreiben [6],

$$\eta_{ijkl} = \frac{\eta + \eta_g}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \frac{\zeta + \zeta_g}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (3.43)$$

η , ζ ergeben einen Beitrag zu R und η_g , ζ_g zählen zu R_g . Die Viskositäten η und ζ interpretieren wir als „Festkörperviskositäten“, die auch dann noch da sind wenn die granulare Temperatur T_g nicht auftritt bzw. relaxiert ist. η_g und ζ_g sollen von granularem Charakter sein, also zusätzliche Viskositäten darstellen, die nur auftreten wenn die Körner des Granulats durch ein T_g angeregt sind. Dies entspricht sehr gut dem anschaulichen Bild des dissipativen Impulstransports bei dem eine angeregte Materialschicht die nächstliegende Schicht nach und nach „mitnimmt“.

Eine der Grundannahmen bestand darin, dass das Entropiereservoir s_g ausschließlich Freiheitsgrade beinhalten soll, die auf einer zusätzliche Bewegung der Körner beruhen. Alles was mit Spannungen und Verzerrungen zu tun hat soll hingegen nur Auswirkungen auf das große Entropiereservoir \bar{s} haben. So auch die Koeffizientenmatrix β_{ijkl} und im Gegensatz zum Viskositätstensor hat β_{ijkl} demnach keine Anteile, die einen Beitrag zu R_g liefern [6]. Für ein isotropes System ergeben sich für β_{ijkl} zwei übrig bleibende Koeffizienten und wir können schreiben:

$$\beta_{ijkl} = \frac{\beta_0}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \frac{\beta_1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (3.44)$$

Für die letzte unbestimmte Koeffizientenmatrix α_{ijkl} wollen wir nun nicht mehr nähern, dass es sich um ein rein isotropes System handelt. Stattdessen nehmen wir an, dass die Transporteigenschaften eines granularen Systems bezüglich α_{ijkl} durch den momentanen Verzerrungszustand mitbestimmt sind. Die Berücksichtigung dieser nicht-isotropen Erweiterung führt zu weiteren nicht-linearen Termen in den Bewegungsgleichungen zu u_{ij} . Es stellte sich heraus, dass gerade diese Terme einen wesentlichen Beitrag in bestimmten Situationen liefern können, siehe nächstes Kapitel, und deshalb auch nicht zu vernachlässigen sind. Würden wir ähnliches für die anderen Koeffizientenmatrizen zulassen bekämen wir Beiträge, die immer durch Terme niedrigerer Ordnung in den Bewegungsgleichungen „überlagert“ wären. Deshalb reicht uns der isotrope Ansatz für die übrigen Transportkoeffizienten.

Die Matrix α_{ijkl} konstruieren wir mit Hilfe der Tensoren δ_{ij} und u_{ij} . Ein Beitrag

$\sim \epsilon_{ijk}$ liefert uns keine zusätzliche Information. Man erhält:

$$\begin{aligned} \alpha_{ijkl} = & \left[\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4) \frac{u_{nn}}{3} \right] \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} + \alpha_2 u_{kl}^0 \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\alpha_3}{3} u_{ij}^0 \delta_{kl} \\ & + \frac{1}{2} \left(\alpha_0 + \frac{2}{3} \alpha_4 u_{nn} \right) \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \\ & + \frac{\alpha_4}{2} \left(u_{ik}^0 \delta_{jl} + u_{il}^0 \delta_{jk} + u_{jk}^0 \delta_{il} + u_{jl}^0 \delta_{ik} - \frac{4}{3} [u_{ij}^0 \delta_{kl} + u_{kl}^0 \delta_{ij}] \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Die „üblichen“, also isotropen Koeffizienten eines Tensors vierter Stufe sind α_0 und α_1 , analog zu η und ζ . Es ergeben sich mit α_2 , α_3 und α_4 drei zusätzliche Materialparameter deren Relevanz in den kommenden Abschnitten gezeigt werden soll.

Die Verzerrungen sind im Allgemeinen kleine Größen ($u_{ij} \ll 1$), deshalb lässt sich α_{ijkl} noch etwas vereinfachen,

$$\begin{aligned} \alpha_{ijkl} \approx & \alpha_1 \frac{\delta_{ij} \delta_{kl}}{3} + \alpha_2 u_{kl}^0 \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\alpha_3}{3} u_{ij}^0 \delta_{kl} + \frac{\alpha_0}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \\ & + \frac{\alpha_4}{2} \left(u_{ik}^0 \delta_{jl} + u_{il}^0 \delta_{jk} + u_{jk}^0 \delta_{il} + u_{jl}^0 \delta_{ik} - \frac{4}{3} [u_{ij}^0 \delta_{kl} + u_{kl}^0 \delta_{ij}] \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Schlußendlich lassen sich die Stromdichten σ_{ij}^D und X_{ij}^D angeben:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^D = & (\eta + \eta_g) v_{ij}^0 + \frac{\zeta + \zeta_g}{3} v_{\ell\ell} \delta_{ij} + \left(\alpha_1 \pi_{\ell\ell} + \alpha_3 u_{kl}^0 \pi_{kl}^0 \right) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\alpha_2}{3} u_{ij}^0 \pi_{\ell\ell} \\ & + \alpha_0 \pi_{ij}^0 + \alpha_4 \left([u_{ik}^0 \pi_{kj}^0]^0 + [u_{jk}^0 \pi_{ki}^0]^0 \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} X_{ij}^D = & \beta_0 \pi_{ij}^0 + \frac{\beta_1}{3} \pi_{\ell\ell} \delta_{ij} - \left(\alpha_1 v_{\ell\ell} + \alpha_2 u_{kl}^0 v_{kl}^0 \right) \frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{\alpha_3}{3} u_{ij}^0 v_{\ell\ell} \\ & - \alpha_0 v_{ij}^0 - \alpha_4 \left([u_{ik}^0 v_{kj}^0]^0 + [u_{jk}^0 v_{ki}^0]^0 \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{1}{\tau_0} u_{ij}^0 + \frac{1}{3\tau_1} \Delta \delta_{ij} - \left(\alpha_1 v_{\ell\ell} + \alpha_2 u_{kl}^0 v_{kl}^0 \right) \frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{\alpha_3}{3} u_{ij}^0 v_{\ell\ell} \\ & - \alpha_0 v_{ij}^0 - \alpha_4 \left([u_{ik}^0 v_{kj}^0]^0 + [u_{jk}^0 v_{ki}^0]^0 \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Es wird im Allgemeinen handlicher sein β_{ijkl} als Funktion der Verzerrungen, (3.49), und nicht der Spannungen, (3.48), zu schreiben. Dies ist auch problemlos möglich⁶, schließlich kennen wir die Spannungen als Funktion der Verzerrungen, siehe Gleichung (3.20). Mit τ_0 und τ_1 erhält man zwei Relaxationszeiten für die Verzerrungen u_{ij} , deren Grenzwerte $\tau_0, \tau_1 \rightarrow \infty$ dem elastischen Limes entsprechen.

⁶Mit Hilfe der Relation zwischen den elastischen Spannungen und Verzerrungen, siehe Gleichung (3.20), können wir die Relaxationszeiten τ_0 und τ_1 mit β_0 und β_1 in Zusammenhang bringen:

$$\frac{1}{\tau_0} \equiv 2\beta_0 \frac{\mathcal{B}}{\xi} \sqrt{\Delta}, \quad \frac{1}{\tau_1} \equiv 3\beta_1 \mathcal{B} \sqrt{\Delta} \left(1 + \frac{u_s^2}{2\xi \Delta^2} \right). \quad (3.50)$$

Interessanterweise tritt T_g in $R + R_g$ nur als ∇T_g explizit in Erscheinung, siehe (3.34). Ruft man sich Abschnitt 3.2.3 in Erinnerung, war $\bar{T}_g = 0$ eine notwendige Gleichgewichtsbedingung und die granulare Temperatur ist mit \bar{T}_g somit selbst Teil einer thermodynamischen Kraft. Eine Stromdichte mit \bar{T}_g als treibende Kraft würde gerade den dissipativen Transport von mesoskopischen in mikroskopische Freiheitsgrade beschreiben. Das dieser Transport stattfindet hatten wir bereits in einem früheren Abschnitt festgestellt. Das Problem liegt darin, dass solch ein Anteil $\sim \bar{T}_g$ in $R + R_g$ quasi „verschluckt“ wird. Daraus lässt sich schließen, dass dieser Übertrag an Freiheitsgraden sozusagen von energetischer (und damit erhaltender) Natur ist, da R und R_g formal nichts anderes sind als Raten für eine Energieänderung: $\partial_t \varepsilon \sim T_g \partial_t s_g \sim R_g$. Anschaulich formuliert handelt es sich um den Transport einer Wärmemenge aus einem Reservoir in ein anderes.

Leider können wir die explizite Form der Stromdichte nicht über das oben angewendete Verfahren erhalten. Trotzdem lässt sich ein solcher Beitrag konsistent mit den bisherigen Diskussionen bestimmen. Man erhält in niedrigster Ordnung nach [6]

$$R = \dots + \gamma \bar{T}_g^2 \quad \text{und} \quad R_g = \dots - \gamma \bar{T}_g^2, \quad (3.51)$$

wobei $\gamma \geq 0$. Mit dieser Einschränkung für γ erfüllt man die Forderung aus Abschnitt 3.2.1, dass der Transport der Freiheitsgrade eine „Einbahnstraße“ in Richtung des großen Entropiereservoirs $\sim \bar{s}$ ist. Da \bar{T}_g die Kraft ist, haben die entsprechenden dissipativen Stromdichten die Form $\gamma \bar{T}_g$ und verschwinden identisch für $\bar{T}_g \rightarrow 0$. Dies erscheint vernünftig, da wir solch ein Verhalten in Abschnitt 2.4 ganz allgemein für dissipative Stromdichten folgern konnten. Außerdem ergibt sich mit $R_g = \dots - \gamma \bar{T}_g^2$ eine Relaxationsgleichung für T_g bzw. s_g , denn nach Einsetzen in (3.8) erhält man $\partial_t s_g \sim -\gamma s_g$.

Es sei noch eine zusätzliche Anmerkung gestattet. Zwar kürzen sich die Anteile $\sim \gamma \bar{T}_g^2$ aus $R + R_g$ heraus, das heißt jedoch nicht, dass die Entropie bei so einem dissipativen Vorgang nicht zunimmt. Das Ansteigen der Entropie (bzw. der zweite Hauptsatz) wird nämlich bestimmt durch $R/T + R_g/T_g$ und eine einfache Rechnung führt auf

$$\frac{R}{T} + \frac{R_g}{T_g} = \dots + \gamma \frac{\bar{T}_g^3}{T T_g} \geq 0. \quad (3.52)$$

Damit der zweite Hauptsatz erfüllt werden kann muss also $\gamma \geq 0$ gelten, was wir bisher oben „nur“ angenommen hatten.

Setzt man nun alle dissipativen Ströme in Gleichung (3.34) ein und nutzt die in diesem Abschnitt diskutierten Informationen bezüglich der Trennung von R und R_g erhält man letztlich:

$$R = \kappa (\nabla T)^2 + \eta (v_{ij}^0)^2 + \frac{\zeta}{3} (v_{\ell\ell})^2 + \beta_0 (\pi_{ij}^0)^2 + \frac{\beta_1}{3} (\pi_{\ell\ell})^2 + \gamma T_g^2 \quad (3.53)$$

$$R_g = \kappa_g (\nabla T_g)^2 + \eta_g (v_{ij}^0)^2 + \frac{\zeta_g}{3} (v_{\ell\ell})^2 - \gamma T_g^2 \quad (3.54)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der thermodynamischen Kräfte und der Positivität der Entropieproduktion $R/T + R_g/T_g$ kann man quantitative Einschränkungen der Transportkoeffizienten vornehmen,

$$\kappa \geq 0, \quad \kappa_g \geq 0, \quad \frac{\eta}{T} + \frac{\eta_g}{T_g} \geq 0, \quad \frac{\zeta}{T} + \frac{\zeta_g}{T_g} \geq 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0. \quad (3.55)$$

Es ist also thermodynamisch nicht verboten, dass zum Beispiel η_g auch kleiner Null sein könnte. Dies wollen wir aber aus Gründen der Plausibilität für alle vier Viskositäten ausschließen.

Aus Gründen der Allgemeinheit der Diskussion hatten wir bisher immer an allen notwendigen Stellen \bar{T}_g von T_g unterschieden. Für alle folgenden Kapitel werden wir \bar{T}_g durch T_g ersetzen. Aufgrund der Masse eines granularen Korns (im Vergleich zu den atomaren Skalen auf denen T definiert ist) wird T_g schon für kleinste Anregungen sehr schnell sehr groß gegenüber T sein, so dass wir guten Gewissens $\bar{T}_g \approx T_g$ annehmen können.

Es ist also gelungen ein vollständiges Gleichungssystem mit (2.12) - (2.14), (3.4), (3.8), (3.9), (3.30) - (3.33), (3.42), (3.47), (3.49), (3.53) und (3.54) für ein granulares Medium abzuleiten. Natürlich muss sich der hydrodynamische Ansatz mit der Hinzunahme von s_g und u_{ij} als Variablen erstmal bewähren. Wie wir zum Ende des Abschnitts 3.2.2 erwähnt hatten, ließen sich bereits für diesen speziellen Ansatz mit u_{ij} und s_g qualitative und quantitative Übereinstimmungen mit grundlegenden Effekten von Granulaten erzielen. Nicht zuletzt soll auch diese Arbeit sowohl qualitative als auch quantitative Ergebnisse erzeugen, die zeigen wie groß der Rahmen der vorgestellten Theorie ist.

Kapitel 4

Langsame Verformungen: Kritischer Zustand

In diesem Kapitel wollen wir einen Effekt diskutieren, der in der einschlägigen Literatur als *critical state* oder auch als quasistatischer Bereich der granularen Ströme bekannt ist [39, 41–44]. Leider sind beide Begriffe etwas irreführend im Kontext einer thermodynamischen Betrachtung. Ein kritischer Zustand ist im thermodynamischen Sprachgebrauch für den Fall eines Van-der-Waals-Gases ein Punkt im Phasendiagramm an dem eine Phasengrenze zwischen gasförmig und flüssig gerade noch existiert [45]. Für Temperaturen und Drücke, die größer sind als an diesem kritischen Punkt existiert immer nur eine Phase, die fluid genannt wird. Das Phänomen, das wir in diesem Kapitel beschreiben wollen befindet sich im Allgemeinen aber nicht an solch einem Punkt, sondern ist thermodynamisch stabil – oder nicht. Das Missverständnis im Sprachgebrauch könnte von der Tatsache stammen, dass ein granulares System, das in einen stationären Zustand überführt wird, durchaus an eine Instabilitätsgrenze stoßen kann und deshalb in einen anderen Zustand „hineinrutscht“. Desweiteren verstehen wir unter quasistatischen Vorgängen die Abfolge von thermodynamischen Gleichgewichtszuständen, bzw. das Ausbleiben einer Entropieerzeugung. Bei dem von uns im folgenden betrachteten Phänomen steigt aber gerade der plastische Anteil stetig an. Der sogenannte quasistatische Bereich eines granularen Stroms soll in seiner Namensgebung die Nähe zum elastischen Bereich und die Langsamkeit der Deformationen des Granulats betonen.

Tatsächlich lässt sich eine befriedigendere Definition finden. Es zeigte sich, dass es für die Spannungen und die Dichte einen Bereich für stationär gescherte granulare Medien gibt, der unabhängig von der (Scher-)Deformation ist [39, 41, 43, 46],

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \sigma_{ij} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} = \sigma_{k,ij} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \varrho = 0 \quad \rightarrow \quad \varrho = \varrho_k \quad (4.2)$$

$$\text{wobei} \quad \varepsilon_s \equiv \int_0^t v_s dt' = v_s t \quad \text{mit} \quad v_s^2 \equiv v_{ij}^0 v_{ij}^0.$$

Ein granulares System dieses Charakters kann also geschert werden ohne seine Span-

nungsverhältnisse und Dichte zu ändern. Oder anders ausgedrückt: Ein Granulat verhält sich in diesem Bereich perfekt plastisch.

Dieser „Zustand“ zeichnet sich jedoch noch durch zusätzliche Merkmale aus. So ist auch der zeitabhängige Prozess, der zu diesen stationären Ergebnissen der perfekten Plastizität führt, geprägt von wiederkehrenden experimentellen Beobachtungen [39, 41–43, 46–50]. Die Kurve $\sigma_s(\varepsilon_s)$ für eine einsetzende Scherströmung mit dem Anfangswert $\sigma_s(\varepsilon_s = 0) = 0$ zeigt grundsätzlich zwei qualitativ unterschiedliche Verläufe, siehe hierzu auch Abbildung 4.1. Wählt man für die Dichte als Anfangswert $\varrho(\varepsilon_s = 0) < \varrho_k$ zeigt die Kurve $\sigma_s(\varepsilon_s)$ ein streng monotonen Verhalten mit $\sigma_{k,s}$ als Grenzwert für $\varepsilon_s \rightarrow \infty$. Außerdem verdichtet sich das System als Funktion von ε_s bis zu seinem Grenzwert ϱ_k . Wählt man hingegen $\varrho(\varepsilon_s = 0) > \varrho_k$ steigt die gemessene Spannung σ_s zuerst an und zwar bis zu einem Wert, der oberhalb von $\sigma_{k,s}$ liegt. Anschließend fällt die Kurve in Richtung des asymptotischen Werts $\sigma_{k,s}$. Die Dichte wird für größer werdende Deformationen ε_s geringer um sich sukzessive dem Grenzwert ϱ_k zu nähern. Diesen Effekt nennt man Dilatanz, d. h. das Volumen des Granulats vergrößert sich während der Scherung (nicht zu verwechseln mit einem dilatanten Fluid).

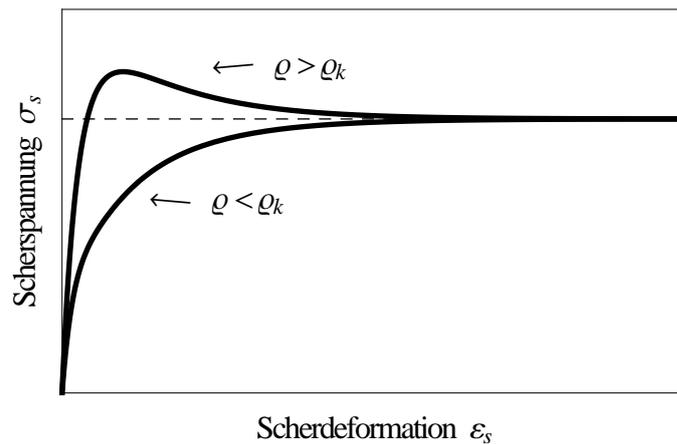


Abbildung 4.1: Beispielhafter Verlauf der Scherspannung σ_s als Funktion der Scherdeformation ε_s . Dabei wurde als Anfangswert für beide Kurven $\sigma_s(\varepsilon_s = 0) = 0$ gewählt. Die Kurven unterscheiden sich in dem Anfangswert für die Materialdichte ϱ . Diese wurde größer bzw. geringer gewählt als der stationäre Grenzwert ϱ_k .

Experimentell lässt sich das Verhalten von Granulaten in diesem Scherratenbereich in verschiedenen Anordnungen nachprüfen. Die nachvollziehbarsten Experimente sind dabei Versuche in *simple shear*-Geometrie [43, 46, 50]. Das Material wird in eine Scherzelle eingebracht und anschließend wird (zum Beispiel) die obere Platte mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt. Von der Seite betrachtet wird aus einer rechteckigen Geometrie der Scherzelle eine parallelogrammförmige. Die Wände einer solchen Messapparatur müssen dazu natürlich flexibel gelagert sein. Unter dieser sukzessiven Scherdeformation der gesamten Zelle wird die Scherspannung bei konstanter Normalspannung gemessen. Dies ist sozusagen das homogenste Experiment,

solange gravitative Effekte durch Anlegen einer hinreichend großen Normalspannung zu vernachlässigen sind. Ähnlich ist der Aufbau sogenannter *direct shear tests* [47–49]. Etwas vereinfacht dargestellt werden zwei „Töpfe“ mit Granulat befüllt und mit der Öffnung voraus gegeneinander gelegt. Nun wird einer von beiden bewegt und der zweite festgehalten. In der Lücke zwischen beiden Töpfen bildet sich dann eine *simple shear*-Geometrie aus. Die dritte Möglichkeit ein möglichst homogenes Experiment durchzuführen ist ein sogenannter Triaxialtest [46]. Das Granulat wird dazu in einer Zylindergeometrie angeordnet. Auf der Mantelfläche wird ein konstanter Druck aufrechterhalten, zum Beispiel durch eine Flüssigkeit. Der „Deckel“ wird mit einer zur Mantelfläche abweichenden Spannung belastet, d. h. es bildet sich eine Normalspannungsdifferenz im Granulat aus. Dies ist äquivalent zu einer Scherbelastung, da $\sigma_s \equiv \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0$ nach Definition auch Normalspannungsdifferenzen enthält. Diesen drei Versuchsaufbauten ist gemein, dass sich bei hinreichend hohen Drücken eine homogene Scherdeformation realisieren lässt. Aus diesen Messungen konnte auch der qualitative Verlauf der Scherspannungskurve extrahiert werden, so wie es in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Aber auch für andere Geometrien konnte festgestellt werden, dass σ_s für einen gewissen Bereich von v_s unabhängig von ε_s ist. Andere experimentelle Methoden nutzen zumeist zylindrische Anordnungen. Das Granulat wird in das Behältnis gefüllt und auf verschiedenste Arten zum Rotieren gebracht. So ist es möglich den aufgebrachten Stempel rotieren zu lassen [51, 52]. Weiterhin ist es möglich gerade keinen Deckel auf das granulare Material zu setzen, sondern die nach unten abschließende Platte rotieren zu lassen [53]. Da die Schergeschwindigkeiten v_s eher moderat sind, wird allerdings nur ein eher geringer Teil des Materials sichtbar bewegt. Die Experimente sind also ziemlich inhomogen. Dies gilt auch für die klassische Versuchsanordnung der Couette-Geometrie, also zwei ineinander stehende Zylinder. Da die Rotationsgeschwindigkeiten eher gering sein müssen um das beschriebene Phänomen beobachten zu können, bewegt sich auch nur ein kleiner Anteil nahe des inneren Zylinders [54]. Trotzdem zeigten auch diese Experimente die oben besprochenen Eigenschaften (4.1).

In der Kontinuumsmechanik existieren Modelle, die experimentelle Gegebenheiten von Granulaten wiedergeben. Diese sogenannten hypoplastischen Modelle verwenden konstitutive Relationen folgender Form [55]:

$$\partial_t \sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varrho, \sigma_{mn}) v_{kl} + B_{ij}(\varrho, \sigma_{mn}) \sqrt{v_{kl} v_{kl}}. \quad (4.3)$$

Der zweite auftretende Term erbringt hysteretische Effekte, d. h. es macht einen Unterschied ob man ein System be- oder entlastet. Die Materialtensoren A und B müssen aus mikroskopischen Rechnungen, Simulationen oder experimentellen Messungen bestimmt werden. Der *critical state* ist hier gegeben mit $\partial_t \sigma_{ij} = 0$, was die Spannungsrelation unabhängig von der Rate v_{ij} bzw. von der Deformation werden lässt und somit die oben angegebenen Bedingungen erfüllt. Es konnte gezeigt werden, dass konstitutive Relationen dieser Form bereits in der hier verwendeten Theorie enthalten sind [4].

4.1 Geometrie und Koeffizienten

Bevor wir die Lösungen der Bewegungsgleichungen diskutieren, sollen die Rahmenbedingungen für die Anwendung der vorgestellten Gleichungen in Kapitel 3 abgesteckt werden. Dazu ist es nötig eine passende Versuchsgeometrie zu definieren. Außerdem können wir schon frühzeitig einige Festlegungen der Abhängigkeiten der Transportkoeffizienten treffen. Da wir den prinzipiellen Charakter des im letzten Abschnitt diskutierten Phänomens der Scherratenunabhängigkeit wiedergeben wollen, wählen wir dementsprechend eine einfache Geometrie, siehe Abbildung 4.2 und die dazugehörige Bildlegende. Aus Gründen der Symmetrie können alle Größen ausschließlich Funktionen von y sein und o. B. d. A. können wir die Geschwindigkeitskomponenten in y - und z -Richtung Null setzen mit $v_y = v_z = 0$, da die Bewegungsgleichungen in dieser Geometrie nur von dem Geschwindigkeitsgradienten v_{ij} abhängen. Außerdem soll Gravitation vorerst keine Rolle spielen, dazu müssen die Drücke auf das Granulat hinreichend groß gegen das Eigengewicht sein.

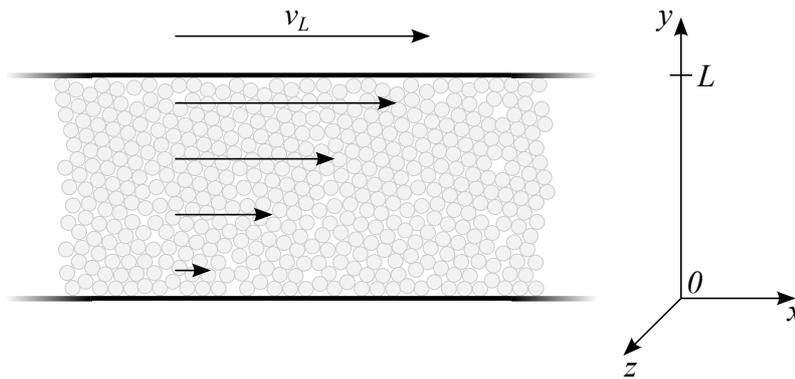


Abbildung 4.2: Granulares Medium in *simple shear*-Geometrie. Die zwei in y -Richtung abschließenden Platten an den Positionen 0 und L seien in x - und z -Richtung unendlich ausgedehnt. Die untere Platte bei 0 ruhe und die obere Platte bei L soll mit der Geschwindigkeit v_L bewegt werden.

Für die untere Platte bei $y = 0$ soll die Geschwindigkeit $v_x(y, t)$ zu jedem Zeitpunkt verschwinden,

$$v_x(0, 0) = 0 \quad (4.4)$$

und für die obere Platte bei $y = L$ werden wir im Laufe dieses Kapitels bezüglich der Randbedingung für $v_x(y, t)$ zwei verschiedene Verhaltensweisen ansprechen,

- **Stationäre Scherströmung** für $v_x(L, t) = v_L$,
- **Einsetzende Scherströmung** für $v_x(L, t) = v_L \Theta(t)$.

Dabei ist $\Theta(t)$ die Heaviside-Funktion. Die erste Randbedingung führt unmittelbar zu stationären Lösungen, wohingegen die zweite auch als Bedingung für eine einsetzende Scherströmung bezeichnet werden kann und uns eine Zeitabhängigkeit der

Größen liefert. Es wird jeweils explizit klar beschrieben werden, welche Randbedingung zur Lösung der Gleichungen verwendet wurde.

Es stellte sich heraus, dass in dieser Geometrie nur ein zusätzlicher Parameter erforderlich ist um das betrachtete System grundsätzlich zu charakterisieren: Entweder man hält den Abstand der zwei Platten konstant, $L = \textit{konstant}$, oder man hält die Normalspannung bei $y = L$ während des Experiments aufrecht, $\sigma_{yy}(L) = \textit{konstant}$. Man kann deshalb folgende Definitionen machen,

- **Volumenkontrollierte Experimente für $L = \textit{konstant}$,**
- **Druckkontrollierte Experimente für $\sigma_{yy}(L) = \textit{konstant}$.**

Wir werden sehen, dass sich durch diese Einteilung große qualitative Unterschiede für die Lösungen eines granularen Systems ergeben.

Nun ist es notwendig für die Variablen u_{ij} (oder die Spannungen σ_{ij}), T_g und ϱ ebenfalls Randbedingungen anzugeben. Für eine einsetzende Scherströmung müssen zusätzlich noch Anfangswerte der genannten Variablen gegeben werden. Diese Diskussion soll jedoch in die jeweiligen Abschnitten verschoben werden, da diese dann doch speziell für die gerade anstehende Fragestellung gewählt werden müssen bzw. sollen.

Wir haben also eine Geometrie und zwei grundsätzliche Randbedingungen gefunden für die wir die granulare Theorie testen wollen. Zusätzlich ist es möglich bzw. sogar nötig gewisse Abhängigkeiten einiger Transportkoeffizienten anzusetzen. Die Festlegung der Koeffizienten geht natürlich über die Wahl der Versuchsgeometrie weit hinaus und hat für die Theorie entscheidenden Charakter.

Wir erinnern uns an die Bilanzgleichung für u_{ij} , siehe Gleichung (3.4). Der dissipative Strom X_{ij}^D konnte im Laufe des Kapitels 3 weiter konkretisiert werden, so dass wir für X_{ij}^D einen Ausdruck finden konnten. Zudem hatten wir festgestellt, dass für verschwindendes T_g , also $T_g \rightarrow 0$, eine elastische Spannung auch im Gleichgewicht aufrecht erhalten werden kann. Die Gleichungen für u_{ij} müssen in diesem Limes dann durch (3.3) gegeben sein. Dies erfordert, dass α_{ijkl} und $1/\tau_0$, $1/\tau_1$ für $T_g \rightarrow 0$ ebenfalls identisch verschwinden [6]. Wir sahen, dass die Matrix α_{ijkl} mit den thermodynamischen Kräften v_{ij} und π_{ij} verbunden ist. Das Verhalten von α_{ijkl} basiert deshalb wohl auf dem Aufbrechen und der Entstehung von den sogenannten Kraftketten, die sich für ein elastisches granulares System herausbilden [6, 22]. Beginnen wir ein Granulat anzuregen werden einige der Kraftketten im Granulat aufbrechen, d. h. das System hat die Tendenz seine elastische Spannung herabzusetzen und damit wird auch $\alpha_{ijkl} \sim T_g$ gelten (müssen). Werden die Anregungen größer nehmen wir an, dass sich durch Umlagerung der Körner des Granulats wieder neue Kraftketten ausbilden können [6]. Ab einem gewissen Niveau der Anregungen wird sich das Aufbrechen und Entstehen von Kraftketten die Waage halten und somit wird α_{ijkl} nicht mehr explizit von T_g abhängen. Im Rahmen dieser Arbeit für recht hohe T_g , also Anregungen die hinreichend weit weg vom elastischen Limes angesiedelt sind, wollen wir annehmen, dass $\alpha_{ijkl} = \textit{konstant}$ bezüglich T_g ist. So eine Annahme lässt sich für $1/\tau_0$ und $1/\tau$ nicht finden. Wir setzen deshalb beide

Relaxationen linear in T_g an [6],

$$\frac{1}{\tau_0} = \lambda_0 T_g, \quad \frac{1}{\tau_1} = \lambda_1 T_g. \quad (4.5)$$

Der plastische Anteil der Verzerrungen ist also umso größer, je stärker T_g ist. Dies ist auch der Hauptunterschied zu den Polymeren [36], da waren nämlich die Relaxationszeiten von u_{ij} gerade *nicht* abhängig von einer äußeren Anregung.

Die Relaxationszeiten der Verzerrungen abhängig von T_g anzusetzen ergibt allerdings ein „Problem“. Löst man die Gleichung für s_g bzw. T_g und setzt diese in die Gleichungen für u_{ij} ein, wird man feststellen, dass sich der Übergang zu den rein elastischen Gleichungen für die Verzerrungen nicht sauber bilden lässt, siehe hierzu Anhang B. Es ist ein Ansatz der Transportkoeffizienten η_g und γ in T_g notwendig. η_g und γ können demnach (in linearer Ordnung in T_g) nur so aussehen:

$$\eta_g = \eta_1 T_g, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 T_g. \quad (4.6)$$

Die beiden anderen Transportkoeffizienten κ_g und ζ_g sind für diese Arbeit nicht relevant und sollen hier nicht diskutiert werden. Allerdings können wir den Zusammenhang der granularen Viskosität η_g mit T_g qualitativ verstehen. Schließlich ist anzunehmen, dass eine Viskosität zwischen den granularen Körnern verschwindet, wenn diese keine Stöße oder Ähnliches gegeneinander mehr ausführen ($T_g = 0$). Falls man einem gewöhnlichen Fluid die Temperatur T „abdrehen“ könnte, wäre sozusagen keine Ursache mehr vorhanden, die den Impuls durch ein Fluid transportieren würde. Für ein Granulat ist dies jedoch möglich und die Viskosität verschwindet mit T_g . Wir vergessen auch nicht, dass in der hydrodynamischen Theorie ein η eingeführt wurde, das seine Ursache nicht in T_g hat, siehe hierzu Gleichung (3.53). Wir bezeichnen dieses η als Viskosität eines Festkörpers [21] und werden es für ein Granulat mit endlichem T_g vernachlässigen.

An dieser Stelle können wir bereits die Abhängigkeit von $1/\tau_0$ und $1/\tau_1$ von der Materialdichte ϱ abschätzen. Diese nehmen wir folgendermaßen an:

$$\frac{1}{\tau_0}, \frac{1}{\tau_1} \sim \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{cp}}\right). \quad (4.7)$$

ϱ_{cp} hatten wir bereits als die maximal mögliche Schüttdichte definiert. Falls ϱ den Wert ϱ_{cp} erreicht divergieren τ_0 und τ_1 . Dies entspricht dem elastischen Limes. Ähnliches wird auch für α_{ijkl} gelten müssen. Letztlich bedeutet die Abhängigkeit von $\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{cp}}\right)$, dass die Relaxation der elastischen Verzerrungen stoppt sobald kein Platz mehr für die granularen Körner da ist in den sie „wegrutschen“ können. Das dies exakt bei $\varrho = \varrho_{cp}$ passieren soll, ist natürlich nur eine vereinfachende Annahme. Möglicherweise wird dieser Limes ϱ_{cp} nie erreicht, sondern es findet bereits vorher ein Phasenübergang statt, der das fließende granulare System in einen rein elastischen Zustand überführt. Das erfordert noch zusätzliche Analysen, die in dieser Arbeit jedoch nicht vorgesehen sind. Wir wollen die Abhängigkeiten von der Dichte (noch) nicht konkret ansetzen. Stattdessen soll dies auf den nächsten Abschnitt verschoben werden, da wir nicht λ_0 und λ_1 in ϱ entwickeln wollen, sondern eine Kombination aus mehreren (unbestimmten) Materialparametern. Zudem ist es an dieser

Stelle auch nicht nötig η und γ als Funktionen der Dichte anzugeben, da die Lösungen der Bewegungsgleichungen dieses Kapitels dadurch nicht beeinflusst werden.

Zu guter Letzt soll der Anwendungsbereich des Spannungstensors σ_{ij} abgegrenzt werden. Die Überschrift dieses Kapitels lautet *Langsame Verformungen*. Das werden wir jetzt konkretisieren. Dazu betrachtet man die Gleichung für σ_{ij} , siehe (3.32), und auch σ_{ij}^D , siehe (3.47). Der Spannungstensor lässt sich in zwei Teile einteilen. Zum einen in Terme, die explizit aus den elastischen Größen π_{ij} und u_{ij} aufgebaut sind und zum anderen in Terme, die explizit die Schergeschwindigkeit v_s und T_g enthalten. Wie wir noch sehen werden ist T_g proportional zur Schergeschwindigkeit v_s oder sogar v_s^2 . D. h. Terme, die die Schergeschwindigkeit explizit enthalten, sind mindestens von $\mathcal{O}(v_s^2)$. Die Lösungen zu u_{ij} werden in den nächsten Abschnitten zeigen, dass die elastischen Verzerrungen und damit auch die elastischen Spannungen unabhängig von v_s sind. Wählt man die Terme in σ_{ij} , die v_s und T_g explizit enthalten hinreichend klein, d. h. man betrachtet *Langsame Verformungen*, ist der gesamte Spannungstensor näherungsweise unabhängig von v_s . Exakt dieser Bereich definiert uns dann das Phänomen $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_s = 0$.

Soweit sind nun Rahmenbedingungen gegeben um in den folgenden Abschnitten Lösungen der Gleichungen für T_g und u_{ij} präsentieren zu können. Dazu wurden die Ergebnisse nach den oben genannten Bedingungen ($L = \textit{konstant}$, $v_x(L, t) = v_L$, ...) angeordnet.

4.2 Stationäre Scherströmung

Zunächst soll eine **stationäre Strömung**, d. h. $v_x(L, t) = v_L$, betrachtet werden. Dies beinhaltet auch, dass man $v_{\ell\ell} = 0$ setzen kann. Hierfür erinnere man sich an die Massenerhaltung, siehe Gleichung (2.12), und erkennt, dass eine zeitlich unveränderliche Dichte $\partial_t \varrho = 0$ für ein System aus Abbildung 4.2 ($\vec{v} \perp \nabla$) nur möglich ist, falls gleichzeitig auch $v_{\ell\ell} = 0$ gilt. Der spurlose Anteil des Geschwindigkeitsgradienten v_{ij}^0 lässt sich in *simple shear*-Geometrie darstellen als

$$\left(v_{ij}^0\right)^2 = 2 v_{xy}^2 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \quad \text{wobei} \quad \dot{\gamma} \equiv \nabla_y v_x. \quad (4.8)$$

Die Einführung von $\dot{\gamma}$ ist in der einschlägigen Literatur üblich und wir nennen $\dot{\gamma}$ die Scherrate.

Es gilt folgende Gleichungen für unser System zu lösen,

$$0 = \eta_1 \frac{\dot{\gamma}^2}{2} - (\gamma_0 + \gamma_1 T_g) T_g, \quad (4.9)$$

$$0 = \nabla_y \sigma_{xy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(\varrho, T_g, \dot{\gamma}, u_{ij}), \quad (4.10)$$

$$0 = \nabla_y \sigma_{yy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(\varrho, T_g, \dot{\gamma}, u_{ij}), \quad (4.11)$$

$$0 = \frac{1}{\tau_0} u_{xx}^0 + \frac{1}{3\tau_1} u_{\ell\ell} + \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{3} u_{xy} \dot{\gamma} \quad (4.12)$$

$$\text{mit} \quad \frac{1}{\tau_0} = \lambda_0 T_g \quad \text{und} \quad \frac{1}{\tau_1} = \lambda_1 T_g,$$

$$0 = \frac{1}{\tau_0} u_{yy}^0 + \frac{1}{3\tau_1} u_{\ell\ell} + \left(2 + \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{3}\right) u_{xy} \dot{\gamma}, \quad (4.13)$$

$$0 = \frac{1}{\tau_0} u_{zz}^0 + \frac{1}{3\tau_1} u_{\ell\ell} + \frac{\alpha_2 - 2\alpha_4}{3} u_{xy} \dot{\gamma}, \quad (4.14)$$

$$0 = -\frac{1 - \alpha_0}{2} \dot{\gamma} + \lambda_0 T_g u_{xy} + \left[u_{xx} + \frac{\alpha_4}{2} (u_{xx} + u_{yy}) \right] \dot{\gamma}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad u_{xx}^0 &= \frac{1}{3} (2u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}), \quad u_{yy}^0 = \frac{1}{3} (2u_{yy} - u_{xx} - u_{zz}), \\ u_{zz}^0 &= \frac{1}{3} (2u_{zz} - u_{xx} - u_{yy}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Es handelt sich hierbei nacheinander um folgende Gleichungen: Die oberste Gleichung ist diejenige für die granulare Entropie s_g bzw. T_g . Die nächsten beiden Gleichungen stehen für die x - und die y -Komponente der Impulserhaltungsgleichung. Und die letzten vier sind die ausgewerteten Gleichungen der Verzerrungen mit $ij \in \{xx, yy, zz, xy\}$.

Dazu gibt es die ein oder andere Bemerkung zu machen. Zuerst fällt auf, dass die Gleichung der Massenerhaltung (2.12) nicht auftaucht. Da es sich um ein stationäres System in *simple shear*-Geometrie handelt wird die Gleichung für ϱ immer erfüllt und man erhält keinerlei Information. Außerdem gibt es offensichtlich kein u_{xz} und u_{yz} , d. h. es fehlen zwei Gleichungen zu u_{ij} . Diese zwei Gleichungen lassen uns allerdings keine andere Wahl als $u_{xz} = u_{yz} = 0$ zu wählen und deshalb wurden sie gar nicht erst aufgelistet. Des weiteren wurden Terme in der Gleichung für s_g bzw. T_g , die $\sim \nabla T_g$ sind in Kenntnis der Lösung bereits weggelassen. Die Gleichung für s wird nicht explizit gelöst, da s bzw. T nicht in die anderen Gleichungen einkoppelt und uns deshalb keine relevanten Informationen liefert. Wir erinnern daran, dass das im Allgemeinen auch nicht gemacht wird wenn man die Navier-Stokes-Gleichung (d. h. die Impulserhaltung) für ein gewöhnliches Fluid löst, solange der Temperaturgradient nicht zu groß wird und die Viskosität nachhaltig beeinflussen würde. Zudem braucht die Gleichung für die Energiedichte nicht extra gelöst werden, da sie nicht unabhängig ist, siehe Gleichung (2.5) bzw. (3.25).

An Hand der oben aufgeführten Gleichungen lässt sich die Relevanz der Entwicklung von α_{ijkl} in die Verzerrungen u_{ij} ablesen. Ohne unseren Ansatz gäbe es die Beiträge $\sim \alpha_2, \alpha_4$ nicht. Diese sind aber offensichtlich von der selben Ordnung

in u_{ij} und $\dot{\gamma}$ wie alle anderen auftauchenden Terme in den Gleichungen (4.12) - (4.15). Der Ansatz für α_{ijkl} im vorigen Kapitel war also notwendig. Ein zusätzlicher Ansatz von η_{ijkl} in u_{ij} hätte nicht die gleiche Relevanz wie für α_{ijkl} geliefert. Viskositäten mit $\sim u_{ij}$ wären immer eine Ordnung höher in u_{ij} als die führenden Terme in Gleichung (4.9). Da aber u_{ij} eine kleine Größe ist, wären solche Beiträge zu vernachlässigen.

Dieses Gleichungssystem lässt sich einfach lösen und wir werden die Lösungen sukzessive vorstellen und diskutieren.

Für die Materialdichte ρ und das Geschwindigkeitsfeld v_x erhält man:

$$\rho = \textit{konstant}, \quad v_x = \dot{\gamma} \cdot y \quad \text{wobei} \quad \dot{\gamma} = \frac{v_L}{L}. \quad (4.17)$$

Die Dichte und die Scherrate sind also konstant innerhalb des Granulats. Diese Lösung wird auch dann nicht verändert, falls man die Transportkoeffizienten als Funktionen von ρ darstellt (von der Scherrate dürfen sie sowieso nicht abhängen, Abschnitt 2.4). Die Dichte ist also ein reiner Parameter, der vom Experimentator durch die Menge des Materials und den Abstand der Platten L gesteuert wird. Wir hätten hier der Dichte prinzipiell den Namen ρ_k geben können, denn dieses Resultat $\rho = \textit{konstant}$ ist natürlich gerade die asymptotische Lösung, wie wir sie zu Anfang des vorliegenden Kapitels vorgestellt hatten.

Wir wählen für diese Art von Geometrie und Rahmenbedingungen o. B. d. A. eine positive Geschwindigkeit der oberen Platte bei L , d. h. $v_L \geq 0$. Für die Scherrate folgt dann

$$\dot{\gamma} \geq 0. \quad (4.18)$$

Dies soll für alle nachfolgenden Abschnitte und Kapitel gelten.

4.2.1 Lösung für die granularen Entropie

Die Lösung der Gleichung (4.9) für T_g lässt sich unabhängig von u_{ij} finden und wir erhalten,

$$T_g = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\eta_1 \gamma_1}{2 \gamma_0^2} \dot{\gamma}^2} \right). \quad (4.19)$$

Um die Sache etwas übersichtlicher zu machen bzw. zwei Lösungsbereiche voneinander zu trennen, führen wir ein:

$$\Phi(\dot{\gamma} d) = \frac{\sqrt{1 + 2(\dot{\gamma} d)^2} - 1}{\sqrt{2} \dot{\gamma} d} \quad \text{mit} \quad d \equiv \frac{\sqrt{\eta_1 \gamma_1}}{\gamma_0}. \quad (4.20)$$

Wir erhalten eine Zeitskala d , die uns zwei verschiedene Bereiche für die Lösung von T_g liefert,

$$\Phi(\dot{\gamma} d \ll 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\gamma} d, \quad \Phi(\dot{\gamma} d \gg 1) \approx 1. \quad (4.21)$$

T_g hat dann folgende Form,

$$T_g = \sqrt{\frac{\eta_1}{2\gamma_1}} \dot{\gamma} \Phi(\dot{\gamma} d). \quad (4.22)$$

Solange $\dot{\gamma} d \gg 1$ besteht ein linearer Zusammenhang zwischen T_g und der Scherrate, wohingegen für $\dot{\gamma} d \ll 1$ gilt: $T_g \sim \dot{\gamma}^2$. Die quadratische Abhängigkeit von $\dot{\gamma}$ ist nötig, damit die Gleichungen für u_{ij} für verschwindende Scherraten ihr elastisches Limit erfüllen können, siehe Anhang B. Die Zeitskala d gibt uns also ein Maß für den Übergang in den rein elastischen Bereich. Innerhalb dieser Arbeit werden wir aber nicht so nahe am elastischen Limit operieren, dass wir die Lösungen im Bereich $\dot{\gamma} d \ll 1$ ausführlich diskutieren müssten. Wie wir noch sehen werden, sind die Lösungen für u_{ij} im Bereich $\dot{\gamma} d \gg 1$ unabhängig von der Deformation bzw. Scherrate und wir können damit den *critical state* hinreichend gut erklären.

Die Relaxationszeiten τ_0 und τ_1 lassen sich nun schreiben als

$$\frac{1}{\tau_0} = \lambda_0 T_g = \frac{\Lambda_0}{\sqrt{2}} \dot{\gamma} \Phi(\dot{\gamma} d) \quad \text{mit} \quad \Lambda_0 \equiv \lambda_0 \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}}, \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \lambda_1 T_g = \frac{\Lambda_1}{\sqrt{2}} \dot{\gamma} \Phi(\dot{\gamma} d) \quad \text{mit} \quad \Lambda_1 \equiv \lambda_1 \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}}. \quad (4.24)$$

Wir hatten diskutiert, dass $\tau_0^{-1}, \tau_1^{-1} \sim (1 - \varrho/\varrho_{cp})$ gelten soll. Um dies zu erfüllen machen wir einen Ansatz für $\Lambda_{0/1}$:

$$\Lambda_0 \equiv \tilde{\Lambda}_0 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{cp}}\right) \quad \text{und} \quad \Lambda_1 \equiv \tilde{\Lambda}_1 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{cp}}\right). \quad (4.25)$$

Offensichtlich gilt

$$\Lambda_0 \geq 0 \quad \text{und} \quad \Lambda_1 \geq 0. \quad (4.26)$$

Es zeigte sich [4], dass die Relaxationsrate Λ_0 der Scherung größer ist als die der Kompression Λ_1 , also

$$\Lambda_0 > \Lambda_1. \quad (4.27)$$

Wegen $\tau_{0/1} = 1/\Lambda_{0/1}$ folgern wir, dass sich ein granulares System elastischer bezüglich der Kompression als der Scherung verhält.

Soweit sei die Lösung von T_g diskutiert. Damit haben wir natürlich auch s_g „erledigt“, schließlich besteht ein linearer Zusammenhang $s_g = \varrho b T_g$.

4.2.2 Lösung für die elastischen Verzerrungen

Wir erhalten Lösungen für die Verzerrungen u_{xx} , u_{yy} , u_{zz} und u_{xy} . Die Lösungen zu u_{xz} und u_{yz} hatten wir bereits als 0 identifizieren können. Zusätzlich geben wir

noch die Kompression Δ und die Scherverzerrung u_s an, da diese für die Energie bzw. den Spannungstensor relevant sind.

$$u_{xy}^{(s)} = \frac{1 - \alpha_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\Lambda_0 \Phi(\dot{\gamma} d) - \mathcal{K}} \quad (4.28)$$

$$\text{wobei } \mathcal{K} \equiv \frac{2}{3 \Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d)} \left[(2 + \alpha_2)(1 + \alpha_4) + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} (2 - [2 + \alpha_4] \alpha_4) \right],$$

$$u_{xx}^{(s)} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2 + \alpha_2 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} (2 - \alpha_4)}{\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d)} \cdot u_{xy}^{(s)}, \quad (4.29)$$

$$u_{yy}^{(s)} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2 + \alpha_2 + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} (4 + \alpha_4)}{\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d)} \cdot u_{xy}^{(s)}, \quad (4.30)$$

$$u_{zz}^{(s)} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2 + \alpha_2 - 2 \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} (1 + \alpha_4)}{\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d)} \cdot u_{xy}^{(s)}, \quad (4.31)$$

$$u_s^{(s)} = \sqrt{u_{ij}^0 u_{ij}^0} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4 + (2 + \alpha_4) \alpha_4}{\Lambda_0 \Phi(\dot{\gamma} d)}} \cdot u_{xy}^{(s)}, \quad (4.32)$$

$$\Delta^{(s)} = -u_{\ell\ell} = \sqrt{2} \cdot \frac{2 + \alpha_2}{\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d)} \cdot u_{xy}^{(s)}. \quad (4.33)$$

Da wir o. B. d. A. $\dot{\gamma} \geq 0$ gewählt hatten, gilt auch immer $u_{xy} \geq 0$. Alles andere wäre unphysikalisch: Eine Verformung in eine bestimmte Richtung wird keine gegenteilige Antwort in den Verzerrungen hervorrufen, da $\partial_t u_{ij} \sim v_{ij}$. Daraus lässt sich sofort eine Einschränkung an die Materialparameter ableiten. Zuallererst wissen wir, dass die α_i im elastischen Limes $T_g \rightarrow 0$ verschwinden müssen, so auch α_0 . Da nun kein Vorzeichenwechsel von u_{xy} zu erwarten ist, muss gelten:

$$1 \geq \alpha_0 \geq 0. \quad (4.34)$$

Falls $\alpha_0 = 1$ ist, wird keinerlei geometrische Verformung $\dot{\gamma}$ in eine elastische Verzerrung u_{xy} umgesetzt werden. Deshalb auch der Name *softening parameter* für α_0 .

Ein kohäsionsloses Granulat kann sicherlich keinen Zug aufnehmen und die Kompression Δ wird immer positiv sein, $\Delta \geq 0$. Der elastische Anteil der Energie würde für $\Delta < 0$ imaginär werden, siehe Gleichung (3.15). Betrachtet man die Lösung zu Δ , schränkt das den Bereich von α_2 ein:

$$\alpha_2 \geq -2. \quad (4.35)$$

Der Parameter α_2 tritt in den Lösungen offensichtlich immer als „Pärchen“ $2 + \alpha_2$ auf. Die 2 stammt von den „geometrischen“ Termen in den Bewegungsgleichungen zu u_{ij} , also $u_{ik} \nabla_j v_k + u_{jk} \nabla_i v_k$. Dies sind sozusagen die Rotationsterme einer totalen Zeitableitung von u_{ij} . Diese Terme koppeln die Gleichungen und dienen als eine Art gegenseitige Quelle für die Scher- und Kompressionsanteile. Eine ähnliche

Funktion hat α_2 . Ist α_2 negativ wird die immer vorhandene geometrische Kopplung geschwächt, ist α_2 jedoch positiv wird der Effekt der Kopplung noch erhöht. D. h. α_2 ist ein Parameter, der die „Rotation“ der Verzerrungen bzw. die Kopplungsstärke der Scher- und Kompressionsanteile, u_s und Δ mitregelt. Ohne diese Terme in den Bewegungsgleichungen wäre eine stationäre Lösung für Δ überhaupt nicht möglich, da in linearer Ordnung nur u_{xy} via v_{xy} eine äussere Quelle hat, siehe Gleichung (3.4).

Der Nenner in u_{xy} hat offensichtlich eine Nullstelle und da wir wissen, dass $1 - \alpha_0 \geq 0$ gilt, können wir auch für α_4 Schlussfolgerungen ziehen. Solange gilt

$$2 \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right)^2 \leq (\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d))^2 - \frac{(2 + \alpha_2)^2}{6} \quad (4.36)$$

lässt sich für jedes α_4 eine Lösung $u_{xy} > 0$ finden.

Falls hingegen gilt

$$(\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d))^2 - \frac{(2 + \alpha_2)^2}{6} < 2 \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right)^2 \quad (4.37)$$

ist α_4 eingeschränkt auf

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \left[\frac{2 + \alpha_2}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{2 \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right)^2 - \left((\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d))^2 - \frac{(2 + \alpha_2)^2}{6} \right)} \right] - 1 < \alpha_4 \quad (4.38)$$

oder

$$\alpha_4 < \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \left[\frac{2 + \alpha_2}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{2 \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right)^2 - \left((\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d))^2 - \frac{(2 + \alpha_2)^2}{6} \right)} \right] - 1. \quad (4.39)$$

Falls nun der Fall sein sollte, dass die Materialparameter $\alpha_4, \Lambda_0, \dots$ diese Einschränkungen „verletzen“, wird es keine (physikalisch sinnvolle) Lösung für die Verzerrungen u_{ij} geben.

Erstaunlich ist die Tatsache der grundsätzlichen Existenz einer stationären Lösung für u_{ij} . Trotz (oder gerade wegen) konstanter Anregung $\dot{\gamma}$ wird ein gewisser Anteil der geometrischer Verformung dauerhaft als elastische Energie bzw. elastische Verzerrungen u_{ij} gespeichert. Durch den „Quellterm“ v_{ij} wird permanent Verformungsarbeit am System geleistet, jedoch wird dies bis auf einen konstanten Anteil u_{ij} direkt in plastische Verformung umgesetzt.

Der zweite Punkt betrifft die Abhängigkeit der Lösung für u_{ij} von $\dot{\gamma}$. Falls die Scherrate nicht im Bereich des elastischen Limits gewählt wurde, also solange $\dot{\gamma} d \gg 1$ gilt, hatten wir $\Phi(\dot{\gamma} d) \approx 1$. Dann sind aber die u_{ij} unabhängig von der äußeren Anregung, d. h. $u_{ij}(\dot{\gamma}) = \textit{konstant}$. Der elastische Anteil der Verformungsarbeit, der durch die Scherrate ins System eingebracht wird, ist gerade unabhängig von der Scherrate (!) Dies gilt auch dann noch, falls die Beiträge $\sim u_{ij}$ im Spannungstensor gegen Beiträge $\sim T_g$ zu vernachlässigen sind. D. h. also auch für den Fall, dass die Spannungen durch T_g dominiert sind.

Gelangen wir in den Bereich des elastischen Limits $\dot{\gamma} d \approx 1$ divergieren die stationären Lösungen zu u_{ij} , denn dann erhalten wir via $\Phi(\dot{\gamma} d)$ eine Abhängigkeit von der Scherrate. Es wird also immer schwieriger eine stationäre Scherströmung für kleiner werdende Scherraten aufrecht zu erhalten. Dies entspricht genau der Vorstellung des elastischen Limes. Wir bemerken die Möglichkeit, dass eine Divergenz von u_{ij} auch schon für eine endliche Scherrate $\dot{\gamma} > 0$ auftreten kann. Es besteht übrigens nicht die Möglichkeit, dass u_{ij} für verschwindende Scherraten nicht divergiert, gleichbedeutend mit $\mathcal{K} < 0$. Obwohl wir die α_i nicht explizit in T_g entwickelten, hatten wir in Abschnitt 4.1 erwähnt, dass diese Transportkoeffizienten mit T_g bzw. $\dot{\gamma}$ identisch verschwinden müssen. Und damit ist \mathcal{K} im Limit $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ positiv.

Thermodynamische Stabilität der Lösung:

Wir untersuchen nun die gefundenen Lösungen auf deren Stabilität. Interessant ist hierzu besonders das *yield*-Kriterium. Der Name *yield* suggeriert uns zwar eine Fließgrenze, d. h. solange das Material thermodynamisch stabil bezüglich der Elastizität ist, sollte es quasi an Ort und Stelle „ruhen“. So in etwa ist unsere Vorstellung. Dies trifft auch auf die meisten Situationen zu, nur haben wir eben gezeigt, dass auch ein stationär geschertes, und damit nach unserer Begrifflichkeit fluides Material elastische Lösungen zeigen kann. Also kann (und muss) auch das *yield*-Kriterium darauf anwendbar sein. Wir setzen die Lösungen (4.32) und (4.33) in die Bedingung (3.40) ein und erhalten

$$\frac{(\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d))^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}\right)^2 (4 + [2 + \alpha_4] \alpha_4)}{(2 + \alpha_2)^2} \leq 2\xi. \quad (4.40)$$

Wir erkennen ein zu erwartendes Verhalten von Λ_1 . Kleine Λ_1 stabilisieren das System, was gleichbedeutend mit einer großen Relaxationszeit τ_1 verbunden ist. Wir wissen aber, dass größere τ_1 das System näher an sein elastisches Limit bringt. Somit ergeben sich hieraus keine Überraschungen. Das Verhalten des Parameters α_2 ist gegensätzlich zu Λ_1 . Kleinere α_2 bringen das System näher an die *yield*-Grenze. Wie bereits besprochen, ist α_2 eine Art Kopplungsparameter der Scher- und Kompressionsanteile der Verzerrungen. Wir können daraus schlussfolgern: Je näher α_2 an -2 ist und damit eine schwächere Kopplung der Verzerrungen vorgibt, desto wahrscheinlicher ist es, dass das System instabil wird.

Die stationären Lösungen der Verzerrungen sind (außer für sehr kleine Scherraten $\dot{\gamma} d \ll 1$) unabhängig von der Scherrate, das hat die Betrachtung dieses Abschnitts gezeigt. Der Name dieses Kapitels ist *Strömungen dominiert durch die Verzerrungen* u_{ij} . Wie bereits diskutiert heißt das, dass alle Terme im Spannungstensor $\sigma_{ij} \sim u_{ij}$ sind. Beiträge $\sim T_g^2$ sollen klein genug sein, so dass sie vernachlässigbar sind. Da die Anteile $\sim u_{ij}$ unabhängig von der Scherrate und Beiträge $T_g^2 \sim \dot{\gamma}^2$ oder höherer Ordnung sind, ist dies auch immer möglich. Die Materialparameter müssen dazu natürlich „sinnvoll“ gewählt sein, ansonsten wird man der experimentellen Situation nicht gerecht und der Bereich für den der Spannungstensor unabhängig von T_g bzw. der Scherrate sein soll verfehlt sein Ziel. Wir haben also einen Lösungsbereich

gefunden für den gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \sigma_{ij} = 0. \quad (4.41)$$

Wir identifizieren diesen Bereich als den Bereich, der in der Literatur als *critical state* bezeichnet wird. Dies gilt unabhängig davon ob es sich um ein Volumen- oder ein Druckkontrolliertes Experiment handelt. Die Lösungen zu u_{ij} bzw. die Materialparameter können (und werden) von der Dichte ϱ abhängen. Für den ein oder anderen Parameter wurde bereits ein Ansatz in ϱ gefunden. D. h. es handelt sich bei den Lösungen primär um Ergebnisse für ein Volumenkontrolliertes Experiment. Dies lässt sich jedoch leicht für ein Druckkontrolliertes Experiment umschreiben. Der Druck P ist via u_{ij} eine Funktion von ϱ . Durch (numerisches) Bilden der Umkehrfunktion $\varrho = \varrho(P)$ und anschließendem Einsetzen in die Lösungen der Verzerrungen erhalten wir $u_{ij}^{(s)} = u_{ij}^{(s)}(P)$. Daraus erhält man wiederum zum Beispiel die Scherspannung σ_{xy} als Funktion des angelegten Druckes. Wir sehen zum gegenwärtigen Zeitpunkt davon ab diese Aufgabe durchzuführen. Dazu müsste man Annahmen bezüglich der Abhängigkeiten von der Dichte ϱ von α_{ijkl} zu machen. Damit soll aber noch gewartet werden bis die experimentelle Situation hinsichtlich der Messungen des *critical states* als Funktion der Materialdichte zahlreicher und zielgerichteter werden. Zur Vervollständigung sollen die Spannungen für den Bereich mit (4.41) angegeben werden:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \left(1 - \alpha_0 - [u_{xx} + u_{yy}] - \alpha_4 [u_{xx}^0 + u_{yy}^0] \right) \pi_{xy} \\ & - \left(\pi_{xx} + \pi_{yy} + \left[\frac{\alpha_2}{3} \pi_{\ell\ell} + \alpha_4 (\pi_{xx}^0 + \pi_{yy}^0) \right] \right) u_{xy}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & P_1 + (1 - 2u_{xx}) \pi_{xx} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 u_{xx}^0}{3} \pi_{\ell\ell} - 2 \left(1 + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{3} \right) u_{xy} \pi_{xy} \\ & - \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_3 + 4\alpha_4}{3} u_{xx}^0 \right) \pi_{xx}^0 - \frac{\alpha_3 - 2\alpha_4}{3} (u_{yy}^0 \pi_{yy}^0 + u_{zz}^0 \pi_{zz}^0), \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & P_1 + (1 - 2u_{yy}) \pi_{yy} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 u_{yy}^0}{3} \pi_{\ell\ell} - 2 \left(1 + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{3} \right) u_{xy} \pi_{xy} \\ & - \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_3 + 4\alpha_4}{3} u_{yy}^0 \right) \pi_{yy}^0 - \frac{\alpha_3 - 2\alpha_4}{3} (u_{xx}^0 \pi_{xx}^0 + u_{zz}^0 \pi_{zz}^0), \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & P_1 + (1 - 2u_{zz}) \pi_{zz} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 u_{zz}^0}{3} \pi_{\ell\ell} - \frac{2}{3} (\alpha_3 - 2\alpha_4) u_{xy} \pi_{xy} \\ & - \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_3 + 4\alpha_4}{3} u_{zz}^0 \right) \pi_{zz}^0 - \frac{\alpha_3 - 2\alpha_4}{3} (u_{xx}^0 \pi_{xx}^0 + u_{yy}^0 \pi_{yy}^0), \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} = & P_1 + \frac{1 - \alpha_1}{3} \pi_{\ell\ell} - 2(u_{xx} \pi_{xx} + u_{yy} \pi_{yy} + u_{zz} \pi_{zz}) - \frac{2}{3} (2 + \alpha_3) u_{xy} \pi_{xy} \\ & - \frac{\alpha_3}{3} (u_{xx}^0 \pi_{xx}^0 + u_{yy}^0 \pi_{yy}^0 + u_{zz}^0 \pi_{zz}^0). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Man kann P_1 Gleichung (3.36) entnehmen. Der letzte Ausdruck (4.46) ist dann der „Gesamtdruck“. Man erkennt die führenden Terme des Spannungstensors. Dies sind Terme $\sim \pi_{ij}$, also $\sim u_{ij}^{3/2}$. Alle anderen Terme sind von Ordnung $u_{ij}^{5/2}$. Die elastischen Verzerrungen sind zwar kleine Größen, jedoch ist nicht klar wie groß die Parameter α_{ijkl} sind. Es könnte also passieren, dass ein Term höherer Ordnung in u_{ij} durch ein großes α_{ijkl} quasi ausgeglichen wird. Man muss dies im weiteren Verlauf berücksichtigen und insbesondere durch Messungen überprüfen.

4.3 Einsetzende Scherströmung

Nachdem die stationäre Lösung diskutiert wurde soll nun eine zeitaufgelöste Lösung zu u_{ij} präsentiert werden. Wir lösen also eine **einsetzende Scherströmung** wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, d. h. die obere Platte aus Abbildung 4.2 soll ab einem Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit v_L annehmen. Es ist klar, dass der Impuls an allen Punkten im Medium nicht sofort gegen seinen stationären Wert konvergiert, sondern zuerst von der oberen zu der unteren Platte transportiert werden muss. Das Geschwindigkeitsprofil ist also für $t > 0$ mit Sicherheit nicht linear. D. h. man müsste jetzt bei der einsetzenden Scherströmung auch die Impulsbilanzgleichungen in die Lösungsfindung miteinbeziehen, sprich v_x als „ernstzunehmende“ zeitabhängige Variable mitnehmen. Dies werden wir aber unterlassen. Zu Beginn bei $t = 0$ ist das System noch rein elastisch, d. h. $T_g = 0$, und der Impulstransport von Platte zu Platte wird mit Schallgeschwindigkeit vonstatten gehen. Für granulare Medien existieren Ausdrücke für die Schallgeschwindigkeitsmoden [33]. Um eine Abschätzung für unser Problem zu bekommen, benötigen wir die Transversalmode mit $c_s = (\mathcal{B}/\xi \varrho)^{1/6} \cdot \sqrt{P/\mathcal{B}}$. Wir schätzen die charakteristische Zeit des Impulstransports mit $t_s \approx L/c_s$ ab. Diese Skala vergleichen wir mit der Relaxationszeit der Verzerrungen τ_0 nahe am elastischen Limes $\dot{\gamma} d \ll 1$. Falls also gilt $t_s/\tau_0 \ll 1$, dann können wir behaupten, dass der Impulstransport schon abgeschlossen ist bevor die Verzerrungen ihrerseits auf die veränderten Randbedingungen reagiert haben. Wir vergleichen:

$$\frac{t_s}{\tau_0} = \frac{1}{2} \Lambda_0 d \dot{\gamma}^2 \frac{L}{c_s} \quad \text{und} \quad \dot{\gamma} \approx \frac{v_L}{L} \quad (4.47)$$

$$\approx \frac{1}{2} \Lambda_0 d \frac{v_L^2}{L c_s} \quad (4.48)$$

$$\approx 10^5 \frac{v_L^2}{L}. \quad (4.49)$$

Dabei haben wir typische Werte für Sand verwendet, $d \approx 10^2 \text{ s}$, $\Lambda_0 \approx 10^2$, $\mathcal{B} \approx 5 \text{ GPa}$ und $\Delta^{(0)} \approx 10^{-3} \rightarrow \pi_{\ell\ell}/3 \approx 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ [4, 33, 56]. Wir sehen, dass die Geschwindigkeit mit der die obere Platte „gezogen“ wird, recht klein zu sein hat. Die Breite des Mediums L , nach Abbildung 4.2, wird sich im Bereich von 1 cm bis 10 cm bewegen, so dass v_L mit Sicherheit im Bereich von 10^{-4} m/s oder 10^{-5} m/s sein muss, damit t_s/τ_0 klein sein kann. Ist dies der Fall, können wir guten Gewissens die Impulsbilanzgleichungen stationär betrachten.

Außerdem sind die spurfreien Anteile von u_{ij} alle um den Faktor $\Lambda_1/\Lambda_0 \approx 1/10$ kleiner im Vergleich zu den Diagonalbeiträgen. Wir vernachlässigen deshalb die Normalverzerrungsdifferenzen $u_{xx}^0, u_{yy}^0, u_{zz}^0$ oder anders ausgedrückt gilt dann $u_{xx} = u_{yy} = u_{zz}$. Die Bilanzgleichungen zu u_{ij} reduzieren sich dadurch auf zwei unabhängige Gleichungen zu u_{xy} und Δ und wir können schreiben:

$$\varrho b \partial_t T_g = \eta_1 \frac{\dot{\gamma}^2}{2} - (\gamma_0 + \gamma_1 T_g) T_g, \quad (4.50)$$

$$\partial_t u_{xy} = \frac{1 - \alpha_0}{2} \dot{\gamma} - \lambda_0 T_g u_{xy} + \frac{\Delta}{3} \dot{\gamma}, \quad (4.51)$$

$$\partial_t \Delta = -\lambda_1 T_g \Delta + (2 + \alpha_2) u_{xy} \dot{\gamma}. \quad (4.52)$$

4.3.1 Lösung für die granularen Entropie

Ebenso so wie im Abschnitt für die stationäre Lösung gelingt es uns, die Gleichung für T_g separat zu lösen. Man erhält:

$$T_g(t) = \sqrt{\frac{\eta_1}{\gamma_1}} \cdot \frac{1}{2d} \left(-1 + \sqrt{2} \dot{\gamma} d \cdot \Psi(\dot{\gamma} d) \cdot \tanh \left[\frac{\sqrt{\eta_1 \gamma_1}}{\sqrt{2} \varrho b} \cdot \Psi(\dot{\gamma} d) \cdot \dot{\gamma} t + \mathcal{C} \right] \right) \quad (4.53)$$

$$\text{wobei } \mathcal{C} \equiv \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \dot{\gamma} d \cdot \Psi(\dot{\gamma} d)} \right) \quad (4.54)$$

$$\text{und } \Psi(\dot{\gamma} d) = \frac{\sqrt{1 + 2(\dot{\gamma} d)^2}}{\sqrt{2} \dot{\gamma} d}. \quad (4.55)$$

Als Anfangsbedingung wurde $T_g(0) = 0$ gewählt.

Ähnlich zu der stationären Lösung wurde ein $\Psi(\dot{\gamma} d)$ eingeführt um verschiedene Lösungsbereiche voneinander zu trennen. Ist die Scherrate nun sehr klein bezüglich der uns bereits bekannten Zeitskala d , $\dot{\gamma} d \ll 1$, dann befinden wir uns sehr nahe am elastischen Limit, also im Bereich von γ_0 . Für $\Psi(\dot{\gamma} d)$ gilt:

$$\Psi(\dot{\gamma} d \ll 1) \approx \frac{1}{\sqrt{2} \dot{\gamma} d} \left(1 + (\dot{\gamma} d)^2 \right), \quad \Psi(\dot{\gamma} d \gg 1) \approx 1. \quad (4.56)$$

T_g sättigt also gegen einen Wert der abhängig von den gewählten Parametern zügig oder eher langsam erreicht wird. Siehe hierzu Abbildung 4.3 und Bildunterschrift dazu.

4.3.2 Lösung für die elastischen Verzerrungen

Prinzipiell müsste nun die Lösung zu T_g in die Bewegungsgleichungen für u_{xy} und Δ , also (4.51) und (4.52), eingesetzt werden um anschließend die Lösungen zu u_{xy} und Δ zu finden. Dies ist allerdings nur numerisch möglich und wir werden diese Lösungen erst anschließend nach einer analytisch genäherten Lösung präsentieren.

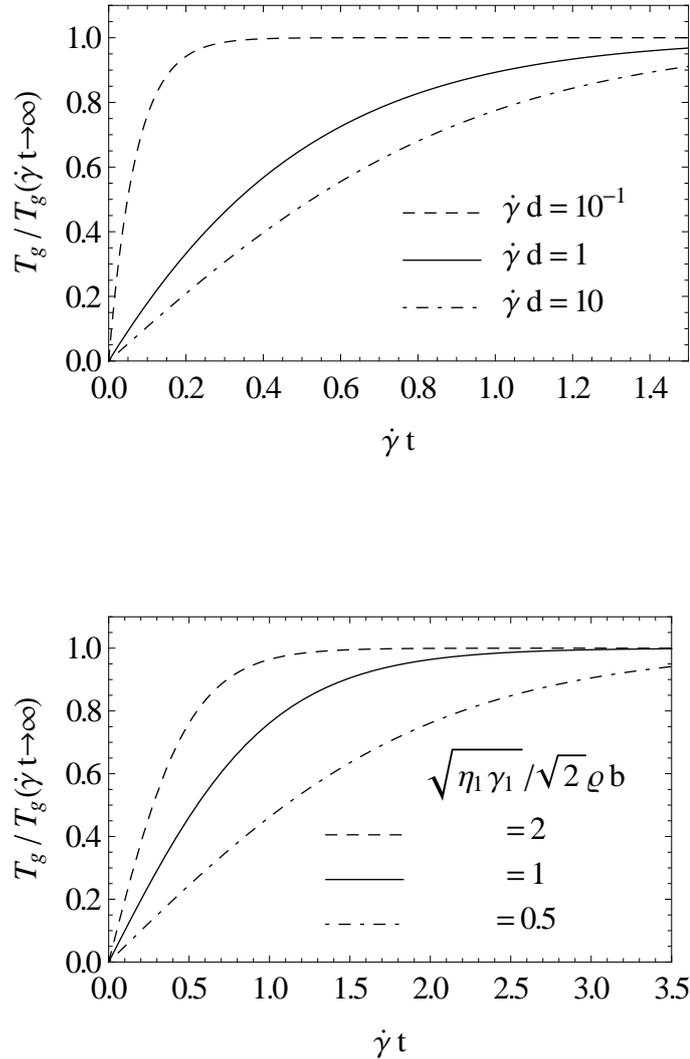


Abbildung 4.3: Es wird T_g gegen die dimensionslose Zeit $\dot{\gamma}t$ gezeigt. Allen Kurven ist gemein, dass sie gegen den jeweiligen Sättigungswert $T_g(t \rightarrow \infty)$ konvergieren. Die obere Graphik zeigt T_g für verschiedene Parameter $\dot{\gamma}d$. Dabei wurde $\sqrt{\eta_1/\gamma_1}/2d = 1$ und $\sqrt{\eta_1 \gamma_1}/\sqrt{2} \rho b = 1$ gewählt. Man erkennt, dass ein kleiner werdendes $\dot{\gamma}d$ zu einer schnelleren Konvergenz führt. Je näher das System am elastischen Limit operiert umso schneller stellt sich ein stationäres T_g ein. Die untere Graphik zeigt das Verhalten von T_g bezüglich der Parametergruppe $\sqrt{\eta_1 \gamma_1}/\sqrt{2} \rho b$. Hierbei wurde $\dot{\gamma}d \rightarrow \infty$ angenommen. Offenbar sättigt ein dissipativeres System schneller, d. h. größer gewählte η_1 und γ_1 begünstigen den Relaxationsprozess. Da η_1 und γ_1 so etwas wie positive und negative „Quellenstärke“ für T_g sind, und damit das Verhalten von T_g regulieren, ist dies auch verständlich. Die Aussagen zu beiden Graphiken erscheinen nur im ersten Moment widersprüchlich. Letztlich bedeutet $\dot{\gamma}d \ll 1$ nichts anderes als ein großes γ_0 , welches die Konvergenz von T_g wie ein großes γ_1 unterstützt.

Dazu betrachten wir uns die typischen Relaxationszeitskalen von T_g und u_{ij} . Für T_g bzw. s_g erhält man $\tau_g = b \varrho / \gamma$ und die Relaxationszeit von u_{ij} ist τ_0 bzw. τ_1 . Es gilt diese Zeiten miteinander zu vergleichen,

$$\longrightarrow \quad \frac{\tau_g}{\tau_{0/1}} = \frac{b \varrho \lambda_{0/1}}{\gamma_1} = \frac{b \varrho \Lambda_{0/1}}{\sqrt{\eta_1} \gamma_1}. \quad (4.57)$$

Für $\Lambda_{0/1}$ machten wir den Ansatz $\sim (1 - \varrho / \varrho_{cp})$ und im folgenden Kapitel werden wir noch sehen, dass η_1 und γ_1 für $\varrho \rightarrow \varrho_{cp}$ divergieren. $\tau_g / \tau_{0/1}$ wird also stark gegen 0 tendieren für Dichten die recht nahe bei ϱ_{cp} liegen. Setzt man die numerischen Werte für η_1 und γ_1 aus dem nächsten Kapitel ein und gibt man noch den Wert von $\Lambda_1 \approx 10$ an [4], so zeigt sich, dass es absolut gerechtfertigt ist für Dichten oberhalb von etwa $\varrho > 0.9 \varrho_{cp}$ von $\tau_g / \tau_{0/1} \ll 1$ auszugehen. Es mag Granulate gegen für die das nicht gilt, jedoch wurde das noch nicht beobachtet und es scheint offenbar eine sehr gute Annahme zu sein. Wir gehen also für die analytische Lösung von einem saturiertem T_g aus, d. h. wir verwenden die stationäre Lösung für T_g und setzen diese in die Bewegungsgleichungen (4.51) und (4.52) ein.

Bevor die zeitabhängige Lösung zu u_{xy} und Δ präsentiert wird, geben wir die stationären Lösungen $u_{xy}(t \rightarrow \infty)$ und $\Delta(t \rightarrow \infty)$ an:

$$u_{xy}^{(S)} = \frac{1 - \alpha_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\Lambda_0 \Phi(\dot{\gamma} d) - \mathcal{K}_0} \quad (4.58)$$

$$\text{wobei } \mathcal{K}_0 \equiv \frac{2}{3 \Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d)} (2 + \alpha_2),$$

$$u_s^{(S)} = \sqrt{2} \cdot u_{xy}^{(S)}, \quad (4.59)$$

$$\Delta^{(S)} = \sqrt{2} \cdot \frac{2 + \alpha_2}{\Lambda_1 \Phi(\dot{\gamma} d)} \cdot u_{xy}^{(S)}. \quad (4.60)$$

Die unterscheiden sich natürlich nicht sonderlich von denen aus dem letzten Abschnitt. Einzig \mathcal{K}_0 ist etwas „einfacher“ im Vergleich zu \mathcal{K} .

Die zeitabhängigen Lösungen zu u_{ij} und Δ haben folgende Form:

$$u_{xy}(t) - u_{xy}^{(S)} = \left(u_{xy}^{(0)} - u_{xy}^{(S)} \right) \cosh(\mathcal{K}_2 \dot{\gamma} t) \cdot e^{-\mathcal{K}_1^+ \dot{\gamma} t} - \frac{\mathcal{K}_1^+ u_{xy}^{(S)} + \mathcal{K}_1^- u_{xy}^{(0)} - \frac{1 - \alpha_0}{2} - \frac{\Delta^{(0)}}{3}}{\mathcal{K}_2} \cdot \sinh(\mathcal{K}_2 \dot{\gamma} t) \cdot e^{-\mathcal{K}_1^+ \dot{\gamma} t}, \quad (4.61)$$

$$\Delta(t) - \Delta^{(S)} = \left(\Delta^{(0)} - \Delta^{(S)} \right) \cosh(\mathcal{K}_2 \dot{\gamma} t) \cdot e^{-\mathcal{K}_1^+ \dot{\gamma} t} - \frac{\mathcal{K}_1^+ \Delta^{(S)} - \mathcal{K}_1^- \Delta^{(0)} - (2 + \alpha_2) u_{xy}^{(0)}}{\mathcal{K}_2} \cdot \sinh(\mathcal{K}_2 \dot{\gamma} t) \cdot e^{-\mathcal{K}_1^+ \dot{\gamma} t} \quad (4.62)$$

$$\text{wobei } \mathcal{K}_1^+ \equiv \frac{\Lambda_0 \Phi(\dot{\gamma} d)}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right), \quad \mathcal{K}_1^- \equiv \frac{\Lambda_0 \Phi(\dot{\gamma} d)}{\sqrt{8}} \left(1 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} \right)$$

$$\text{und } \mathcal{K}_2 \equiv \sqrt{\frac{2 + \alpha_2}{3} + (\mathcal{K}_1^-)^2}.$$

Die Lösungen erscheinen etwas unübersichtlich, lassen sich aber mit geeigneten Anfangsbedingungen $u_{xy}^{(0)}$ und $\Delta^{(0)}$ noch vereinfachen. So ist es realistisch $u_{xy}^{(0)} = 0$ anzunehmen. Wir starten also mit einem Granulat, das komprimiert aber nicht geschert ist.

Bemerkenswert ist die Abhängigkeit der Lösungen von der Scherrate $\dot{\gamma}$, denn diese tritt nur in der Zusammenhang mit der Zeit t auf. Damit hängt $u_{xy}(t)$ und $\Delta(t)$ (außer für sehr kleine Scherraten $\dot{\gamma} d \ll 1$) ausschließlich von der Scherdeformation ε_s ab. In der einschlägigen Literatur wird dieses Verhalten als *Raten-unabhängig* bezeichnet. Falls $u_{xy}(t)$ bzw. $\Delta(t)$ gegen $\dot{\gamma} t$ aufgetragen wird, fallen sämtliche gezeichnete Kurven auf dieselbe. Aufgrund der Kombinationen der Hyperbolicus und e -Funktionen kann (oder muss) man eine Einschränkung für die Materialparameter feststellen:

$$\mathcal{K}_1^+ > \mathcal{K}_2 \quad (4.63)$$

$$\rightarrow 2 + \alpha_2 < \frac{3}{2} \Lambda_0 \Lambda_1. \quad (4.64)$$

Falls diese Ungleichung nicht erfüllt sein sollte, werden die Lösungen zu u_{xy} und Δ mit der Zeit divergieren. Eine stationäre Lösung wäre also nicht möglich. Es kann natürlich Materialien geben, die gerade diese Ungleichung verletzen und der *critical state* nicht erreicht wird. Wir interpretierten α_2 als Kopplungsparameter der Kompressions- und Scheranteile der Verzerrungen. Wird diese Kopplung zu groß, kann quasi durch $\Lambda_{0/1}$ nicht hinreichend viel Elastizität „abgeführt“, d. h. relaxiert werden und eine stationäre Lösung ist nicht möglich.

Die Lösungen zeigen zudem eine weitere Besonderheit. So ist $\Delta(t)$ (für $u_{xy}^{(0)}(0) = 0$) nicht immer eine monotone Funktion mit $\dot{\gamma} t$ als Variable. Dies ist nur dann der Fall falls

$$\Delta^{(0)} \geq \frac{\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_1^+}{\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_1^-} \cdot \Delta^{(S)} \equiv \Delta^* \quad (4.65)$$

gilt. Wird diese Ungleichung verletzt, zeigt sich ein Minimum in der Kurve zu $\Delta(t)$. Die Kompression $\Delta(t)$ (für $u_{xy}^{(0)}(0) = 0$) wird sich zu Beginn immer erst verringern, was an der Kopplung zu u_{xy} liegt. Dabei gibt Δ quasi quantitativ an u_{xy} ab bevor sich Δ auf seinen stationären Wert einpegelt. Bei Verletzung der gerade angegebenen Ungleichung „rutscht“ Δ im Laufe der Zeit unterhalb von $\Delta^{(S)}$ und muss anschließend wieder ansteigen. Siehe hierzu Abbildung 4.4.

Für u_{xy} findet man exakt dasselbe Kriterium wie für Δ . D. h., falls die eben aufgestellte Ungleichung verletzt wird, zeigt u_{xy} als Funktion von ε_s ein Maximum. Allerdings ist die Abweichungen der Kurven für variierendes $\Delta^{(0)}$ kaum sichtbar. Dies erklärt sich wenn man die Lösung zu u_{xy} genauer betrachtet, siehe Gleichung (4.61). Da nun $1 - \alpha_1 \approx 0,3$ [6] und $\Delta^{(0)} \approx 10^{-3}$ ist, erkennt man, dass der Einfluss der Anfangsbedingung für $u_{xy}(t)$ nicht sonderlich groß sein kann, siehe hierzu Abbildung 4.4.

Es gilt die Verzerrungen in die Spannungen umzusetzen. Die Verzerrungen sollten für diesen Abschnitt keine „Normalverzerrungsdifferenzen“ zeigen, $u_{xx}^0 = u_{yy}^0 =$

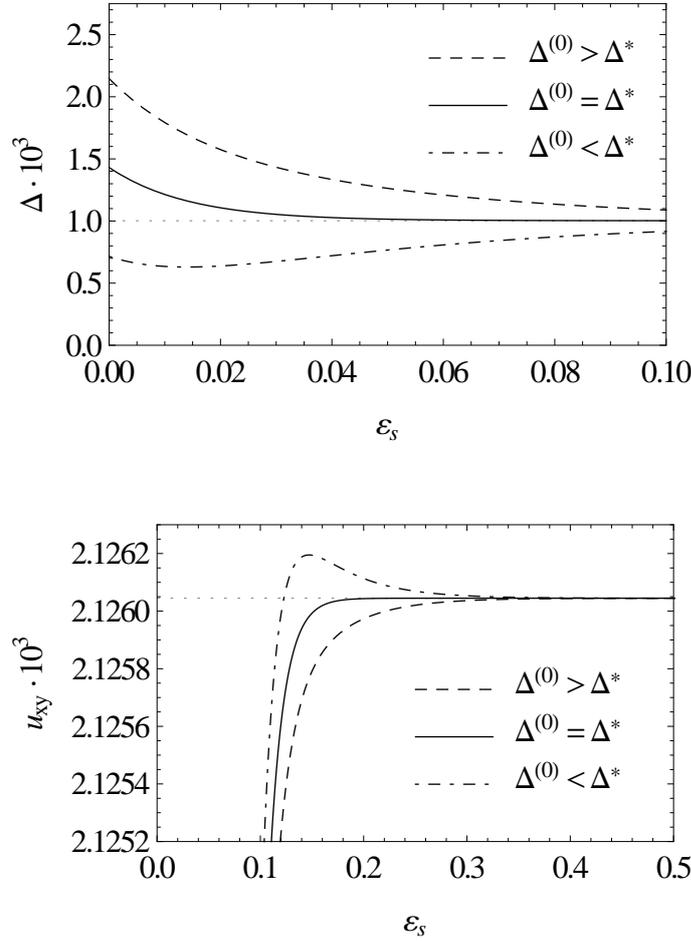


Abbildung 4.4: Lösungen zu Δ und u_{xy} als Funktion von der Scherdeformation ε_s . Als Anfangsbedingungen wurden $u_{xy}(0) = 0$ und $\Delta(0) = \Delta^{(0)}$ gewählt. Die Parameter wurden gewählt mit: $\xi = 5/3$, $1 - \alpha_0 = 1 - \alpha_1 = 0.3$, $2 + \alpha_2 = 10$, $\Lambda_0 = 100$, $\Lambda_1 = 30$ und $\alpha_3 = 0$. Es lässt sich in der Graphik zu Δ das Minimum erkennen, das auftritt wenn $\Delta^{(0)} < \Delta^*$ gilt. Das Maximum in der Graphik für u_{xy} tritt in der Tat auf, aber man beachte die quantitative Skala von u_{xy} . Würde man u_{xy} und Δ in einer Graphik einzeichnen, könnte man keine Abweichung von der Kurve zu u_{xy} mit $\Delta^{(0)} = \Delta^*$ bemerken.

$u_{xx}^0 = 0$. Damit vereinfachen sich die Spannungen, die wir bereits mit (4.42) - (4.46) angegeben hatten zu:

$$\sigma_{xy} = \left(1 - \alpha_1 + \frac{2}{3} \Delta\right) \pi_{xy} - \frac{2 + \alpha_2}{3} \pi_{\ell\ell} u_{xy}, \quad (4.66)$$

$$\frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} = P_1 + \frac{1 - \alpha_1 + \frac{2}{3} \Delta}{3} \pi_{\ell\ell} - \frac{4}{3} \left(1 + \frac{\alpha_3}{3}\right) \pi_{xy} u_{xy}. \quad (4.67)$$

$\frac{\sigma_{\ell\ell}}{3}$ verstehen wir wieder als Gesamtnormalspannung. Es wird für σ_{xy} als Funktion von ε_s ein eigenständiges Kriterium für die Existenz eines Maximums geben. Je-

doch ist Ungleichung (4.65) eine gute Näherung auch für σ_{xy} . Zum einen hatten wir gesehen, dass u_{xy} praktisch unbeeinflusst von der Diskussion um ein Extremum bleibt. Zum anderen sind Terme in σ_{xy} , die „störend“ wirkend könnten allesamt eine Ordnung in u_{ij} höher als der führende Term $(1 - \alpha_1) \pi_{xy}$. Diese Terme werden also keinen entscheidenden Einfluss haben. Jetzt ist aber $\sigma_{xy} \sim \sqrt{\Delta}$ und wir können Ungleichung (4.65) in guter Näherung auch auf σ_{xy} anwenden. Die qualitativ verschiedenen Möglichkeiten der Kurven zu σ_{xy} sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

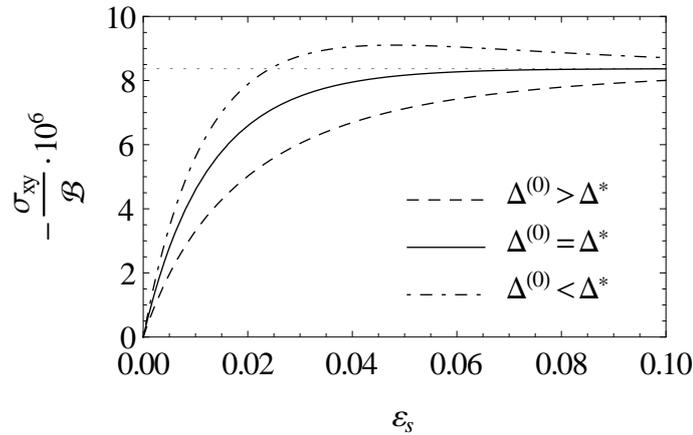


Abbildung 4.5: Lösungen zu σ_{xy} als Funktion von der Scherdeformation ε_s . Als Anfangsbedingungen wurden $u_{xy}(0) = 0$ und $\Delta(0) = \Delta^{(0)}$ gewählt. Die Parameter wurden gewählt mit: $\xi = 5/3$, $1 - \alpha_0 = 1 - \alpha_1 = 0.3$, $2 + \alpha_2 = 10$, $\Lambda_0 = 100$, $\Lambda_1 = 30$, $\alpha_3 = 0$, $\rho_{cp} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{lp}^* = 0,8 \rho_{cp}$ und $\rho = 0,95 \rho_{cp}$. Auch hier lässt sich eindeutig das Maximum erkennen falls das Kriterium (4.65) verletzt wird.

Nun soll die Möglichkeit eines nicht-stationären T_g in die Betrachtung miteinbezogen werden. Dazu muss für T_g Gleichung (4.53) anstatt (4.19) verwendet werden. Wir wählen als Lösungsbereich $\dot{\gamma} d \gg 1$. Diesen Ausdruck können wir dann in die Bewegungsgleichungen für u_{xy} und Δ einsetzen. Das Problem lässt sich numerisch lösen. Die Anfangsbedingungen sind wie seither: $T_g(0) = 0$, $u_{xy}(0) = 0$ und $\Delta(0) = \Delta^{(0)}$. Wir starten zu $t = 0$ also mit einem rein komprimierten Granulat ohne Scherdeformation und Anregung. Die Lösung sind in den Abbildungen 4.6 und 4.7 dargestellt. Der variierte Parameter ist $\sqrt{\eta_1 \gamma_1} / 2 \rho b$. Umso größer dieser Parameter ist, desto schneller erreicht T_g seinen Sättigungswert, siehe hierzu auch Abbildung 4.3. Für die Interpretation der Kurven in den Abbildungen 4.6 und 4.7 wissen wir, dass ein Granulat mit $T_g = 0$ ausschließlich elastisch ist. Wählt man als Anfangsbedingung $T_g(0) = 0$, wird das Granulat zunächst vollkommen elastisch reagieren. Ist nun $\sqrt{\eta_1 \gamma_1} / 2 \rho b$ entsprechend klein gewählt, dauert es auch seine Zeit bis das System plastische Anteile „aufbaut“. In den Graphiken 4.6 und 4.7 erkennen wir diesen Effekt: Sowohl u_{xy} als auch Δ beschreiben Kurven, die immer oberhalb der Ergebnisse liegen, die wir mit einem gesättigten T_g erhielten. Wir verstehen demnach, dass das System für ein nicht-stationäres T_g elastischer reagiert als mit einem stationären.

Die Kurve für die Scherspannung σ_{xy} kann für ein nicht-stationäres T_g ebenso ein Maximum zeigen wie für eine variierende Anfangsbedingung für Δ . Wir können die jeweilige Natur des Maximums unterscheiden, falls wir die Anfangsbedingung $\Delta^{(0)}$ verändern. Hat das Maximum in σ_{xy} seine Ursache in einem nicht-stationären T_g wird die Kurve σ_{xy} für ein veränderliches $\Delta^{(0)}$ quasi unangetastet bleiben.

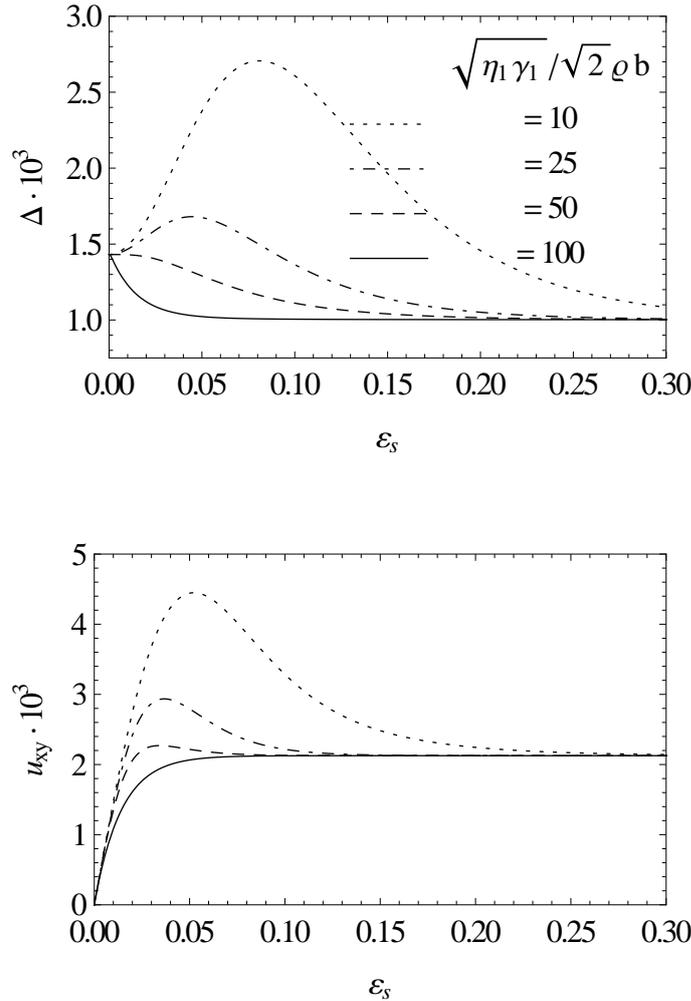


Abbildung 4.6: Lösungen zu Δ und u_{xy} als Funktion von der Scherdeformation ε_s unter Berücksichtigung eines nicht-stationären T_g . Als Anfangsbedingungen wurden $T_g(0) = 0$, $u_{xy}(0) = 0$ und $\Delta(0) = \Delta^{(0)}$ gewählt. Die Parameter wurden gewählt mit: $\xi = 5/3$, $1 - \alpha_0 = 1 - \alpha_1 = 0.3$, $2 + \alpha_2 = 10$, $\Lambda_0 = 100$, $\Lambda_1 = 30$ und $\alpha_3 = 0$. Die Legende gilt für beide gezeigten Graphiken. Für größere $\sqrt{\eta_1 \gamma_1} / 2 \rho b$ nähert sich die Kurve der Lösung für ein stationäres T_g an.

Wir haben also gezeigt, dass die Scherspannung, die im Allgemeinen bei solchen Experimenten gemessen wird, ein Maximum in Abhängigkeit von der Anfangsbedingung $\Delta^{(0)}$ zeigt (oder eben gerade nicht). Wir setzten ein volumenkontrolliertes Experiment voraus. Für das betrachtete System bedeutete dies, dass wir die Dichte ρ

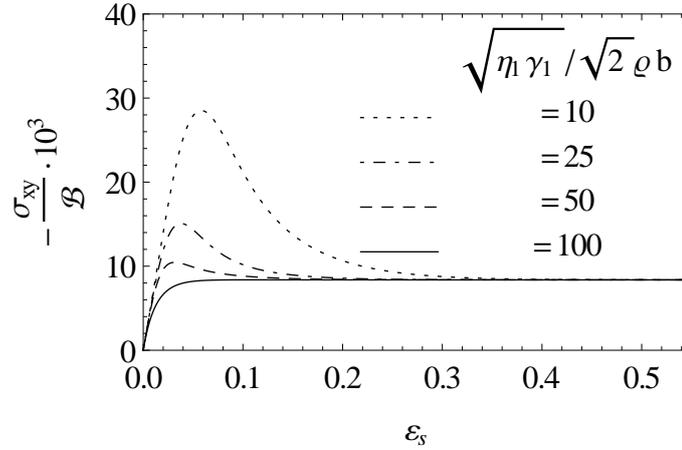


Abbildung 4.7: Lösungen zu σ_{xy} als Funktion von der Scherdeformation ε_s unter Berücksichtigung eines nicht-stationären T_g . Als Anfangsbedingungen wurden $T_g(0) = 0$, $u_{xy}(0) = 0$ und $\Delta(0) = \Delta^{(0)}$ gewählt. Die Parameter wurden gewählt mit: $\xi = 5/3$, $1 - \alpha_0 = 1 - \alpha_1 = 0.3$, $2 + \alpha_2 = 10$, $\Lambda_0 = 100$, $\Lambda_1 = 30$, $\alpha_3 = 0$, $\varrho_{cp} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\varrho_{lp}^* = 0,8 \varrho_{cp}$ und $\varrho = 0,95 \varrho_{cp}$. Für größere $\sqrt{\eta_1 \gamma_1} / 2 \varrho b$ nähert sich die Kurve der Lösung für ein stationäres T_g an.

quasi als Parameter verwenden konnten, bzw. war es nicht nötig Dichteabhängigkeiten der Parameter explizit anzugeben. Leider werden druckkontrollierte Experimente im Allgemeinen stark bevorzugt. Das mag vielleicht an der einfacheren Versuchsdurchführung liegen. So haben wir zwar bewiesen, dass es ein Maximum bezüglich eines Anfangswertes geben kann, jedoch ist $\Delta^{(0)}$ eigentlich der „Falsche“. So liest sich die Betrachtung zu einem zeitaufgelösten System eher als Vorhersage. Wie gesagt werden die Experimente unter Bedingungen bewerkstelligt, die die Normalspannungen als Kontrollparameter bevorzugen. Für solche Experimente ist die Dichte kein Parameter mehr, sondern wird sich während des Experiments zeitlich ändern. Solch ein System lässt sich nur numerisch lösen. Man kann die Tatsache ausnutzen, dass die Normalspannung $\sigma_{\ell\ell}$ aufrecht erhalten wird. $\sigma_{\ell\ell}$ ist eine Funktion von ϱ , u_{xy} und Δ . Ändern sich also u_{xy} und Δ mit der Zeit muss sich auch ϱ anpassen, damit $\sigma_{\ell\ell}$ konstant gehalten werden kann. Während dieses Prozesses lässt sich ein volumetrischer Geschwindigkeitsgradient $v_{\ell\ell}$ nicht vermeiden, da sich das Volumen des Granulats mit der Zeit verändern wird. Wir erhalten dadurch eine zusätzliche Variable, nämlich eine zweite Geschwindigkeitskomponente. Vervollständigt man diese Rechnung [57] erhält man tatsächlich das typisch gemessene Bild, wie wir es zu Beginn des Kapitels gezeigt hatten, siehe Abbildung 4.1. Für anfänglich dichtere Systeme erhält man ein Maximum in σ_{xy} als Funktion der Scherdeformation und für Dichten die unterhalb des asymptotischen Werts für die Dichte liegen eine monotone Funktion.

Mit der stationären Lösung zu u_{ij} konnte das Hauptmerkmal des sogenannten *critical state* gezeigt werden. Solange Anteile im Spannungstensor σ_{ij} die T_g explizit

enthalten vernachlässigbar sind, werden die gemessenen Spannungen unabhängig von Zeit und Scherrate sein: $\partial \sigma_{ij} / \partial \varepsilon_s = 0$. Diesen zugelassenen Bereich, bzw. den Übergang zu einem T_g -dominierten System diskutieren wir in Kapitel 5. Zudem haben wir gezeigt, dass es für eine einsetzende Scherströmung möglich ist, dass sich die Scherspannung qualitativ unterschiedlich verhält, je nachdem wie man die Anfangsbedingungen wählt. Auch dies entspricht der experimentellen Beobachtung, allerdings unter den bereits besprochenen abweichenden Vooraussetzungen. So gilt es, diese Vorhersage für ein Volumenkontrolliertes System experimentell zu überprüfen. Wie eben erwähnt, existiert für ein Druckkontrolliertes System eine mit dem Experiment konsistente numerische Rechnung [57].

Kapitel 5

Schnelle Verformungen: Seismische Spannungen

Der nächste Effekt den wir besprechen wollen betrifft das sogenannte *Bagnold scaling* der Scherspannungen als Funktion der Scherrate. Der Name dieses Verhaltens geht auf den britischen Ingenieur Ralph Alger Bagnold zurück, der während seiner (militärisch bedingten) Aufenthalte in Ländern mit Sandwüsten das Verhalten von Sand studieren konnte. Er konnte seine Studien in einschlägigen Laboren fortsetzen und gelangte zu für uns wichtigen experimentellen Erkenntnissen [58]. Bagnold erkannte, dass es einen Bereich für Granulate gibt für den die Scherspannung eines Granulats proportional zu dem Quadrat der Ortsableitung der Geschwindigkeit ist,

$$\sigma_s \sim v_s^2. \quad (5.1)$$

Auch nachfolgende Experimente belegten diese quadratische Abhängigkeit [59–61]. Man nennt solch ein Verhalten auch dilatant oder scherverdickend. Wir wissen, dass die Spannung explizit eine lineare Funktion des Geschwindigkeitsgradienten ist $\sigma_{ij} \sim v_{ij}$. Der Proportionalitätsfaktor η_g bzw. die Viskosität ist für ein gewöhnliches Fluid wie Wasser oder Honig eine Konstante bezüglich der Scherrate. Dies kann also für ein Granulat nicht der Fall sein. Die Viskosität muss selbst von der Schergeschwindigkeit abhängen. Dieser granulare Effekt konnte auch durch theoretische mesoskopische Betrachtungen bestätigt werden [62]. Dabei wurde gerade festgestellt, dass die granulare Viskosität abhängig von einer ungerichteten, d. h. *thermischen Geschwindigkeit* sein muss. Wir ahnen bereits die Abhängigkeit der Viskosität von T_g .

Die Viskosität eines granularen Materials zeigt aber noch weitere Besonderheiten. So ließ sich feststellen, dass die Viskosität nahe der größtmöglichen Packungsdichte ϱ_{cp} regelrecht divergiert [59–61, 63].

Desweiteren scheint es von der Versuchsanordnung abzuhängen ob das sogenannte *Bagnold scaling* beobachtet werden kann oder nicht. So ist die Abhängigkeit der Scherspannung von der Scherrate im Allgemeinen nicht unbedingt so wie in Gleichung (5.1) angegeben. Die (effektive) Viskosität zeigt dabei ein Verhalten, das von nahezu unabhängiger bis zu der bereits besprochenen linearen Abhängigkeit von der

Schergeschwindigkeit reicht [51, 52, 58–61, 64–68]. Die Steigungen dieser Spannungs-Scherratenkurven sind offenbar Funktionen des angelegten Druckes [68]. Und je nachdem ob man das Material „einschließt“ oder es bei einer freien Oberfläche belässt ändern sich ebenfalls die Spannungs-Scherratenkurven.

Die experimentellen Aufbauten zum Testen dieser Effekte sind recht mannigfaltig [64, 69]. So wurde in manchen Experimenten versucht eine *simple shear*-Konfiguration herzustellen [59, 60], siehe Abbildung 5.1. Für diesen Versuchsaufbau ist es am einfachsten verschiedene Randbedingungen am Material auszutesten. So ist es möglich, einerseits den Druck auf die abschließenden Platten der *simple shear*-Konfiguration aufrecht zu erhalten oder andererseits die Platten zu fixieren um so ein Volumenkontrolliertes Experiment durchzuführen. Leider wird es nicht gelingen die einfache Schergeometrie mit einer simplen Scherzelle zu verwirklichen, dazu sind die Scherraten bzw. die Geschwindigkeiten der einschließenden Platten einfach zu hoch um über einen längeren Zeitraum an einem stationär gescherten Medium messen zu können. Zudem gibt es die „klassische“ Anordnung zweier Zylinder, wobei der innere Zylinder rotiert wird [54, 63, 65, 67, 68, 70–72]. Diese Anordnung kann man dann wahlweise an der oberen Seite mit Gewichten abschließen oder auch „frei“ lassen. Zahlreiche Experimente wurden auf einer fest angebrachten geneigten Ebene durchgeführt [58, 73–77]. D. h., dass das Material aus einer Anordnung auf die geneigte Ebene gestreut wird und das Material anschließend auf der Ebene hinter fließen kann. Ist der Winkel der Ebene mit der Horizontalen nicht zu groß, stellt sich ein stationärer Fluß ein. Diesem Versuch sehr ähnlich ist der sogenannte *heap flow* [64, 78]. Dabei wird Material prinzipiell so lange aufgeschüttet bis es ab einem gewissen Schüttwinkel (dem uns bereits bekannten *yield*-Winkel) beginnt am aufgeschütteten Material entlang abzufließen. Auch hierbei ist ein stationärer Fluß möglich. Diese Experimente bei denen das Auftreten eines konstanten Flusses gravitative Ursachen hat, sind natürlich dem Effekt der Lawinen stark verwandt. All sochen Aufbauten gemein ist das generelle Vorhandensein einer freien Oberfläche. Das Material kann sich also frei ausdehnen und wird durch die eigene Masse „zusammengehalten“. So auch bei einem Trommelexperiment [64]. Dies lässt sich am einfachsten veranschaulichen wenn man sich das Verhalten eines rotierenden Betonmischers vergegenwärtigt, wobei die Rotationsachse des Zylinders senkrecht zur Gravitationsrichtung gehalten wird. Da jedes Experiment abhängig von den Randbedingungen unterschiedliche Steigungen der gemessenen Spannungsverhältnisse bezüglich der Schergeschwindigkeit zeigt, ist es nun nicht sofort klar, dass es sich um ein und denselben Bereich für die oben genannten Effekte handelt. Dies zu zeigen, ist auch Teil der kommenden Diskussion dieses Kapitels.

Wir werden wie für das letzte Kapitel wieder den vorgestellten theoretischen Ansatz wählen. Es existieren aber auch andere Theorien um die Bewegung der Körner zu beschreiben. So wurde zum Beispiel eine granulare Entropie eingeführt, die sogenannte Edwards-Entropie [79], die die Möglichkeiten der Körner abzählt sich im zur Verfügung stehenden Raum anzuordnen. Die thermische Energie $\sim T$ wurde in der Betrachtung vernachlässigt. Dies scheint nur im ersten Moment Ähnlichkeit

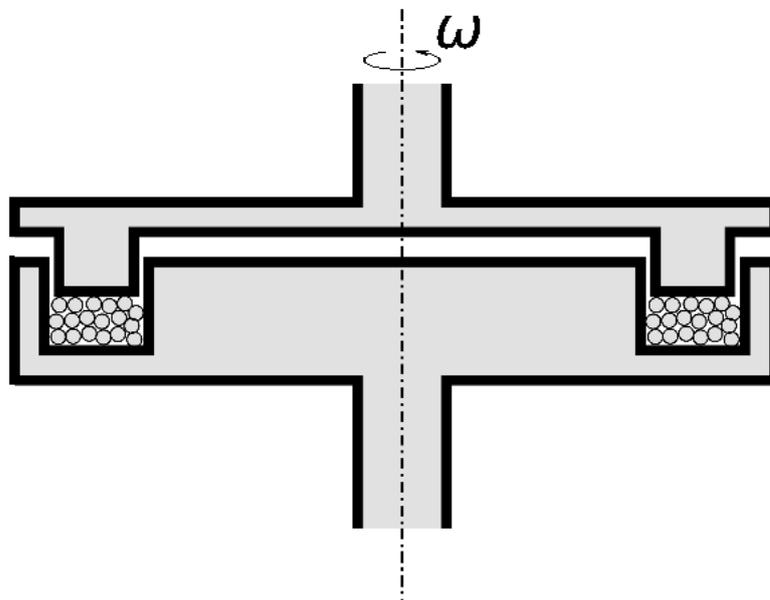


Abbildung 5.1: Versuchsaufbau zu den Experimenten aus [59, 60]. Dargestellt ist ein Schnitt durch den Versuchsaufbau. Die unterbrochene Linie stellt die Rotationsachse dar um die die obere Platte mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Beide Platten sind von oben aus betrachtet rund und die untere Platte ist fixiert. Die untere Platte enthält eine kreisförmige Aussparung in die das Granulat eingebracht wird. Die obere Platte schließt diese Aussparung vollständig ab. Die Wände der Aussparung senkrecht zu der Rotationsachse sind rau, d. h. das Material wird oben und unten die Geschwindigkeiten der Platten annehmen. Durch die Rotation entsteht dann der gewünschte annähernd homogene Geschwindigkeitsgradient.

mit der hier vorgestellten Theorie zu haben, da in [79] offenbar mit der thermischen Energie auch gleichzeitig die „normale“ Entropie s vernachlässigt wurde. Dieser Weg scheint aber Schwierigkeiten zu ergeben. Ohne das große Reservoir s lassen sich nur schwer solche Begriffe wie Energieerhaltung oder thermodynamisches Gleichgewicht aufrecht erhalten [6].

In [80] konnte eine ziemlich ähnliche Gleichung für eine granulare Temperatur gefunden werden wie die, die in den letzten Kapiteln vorgestellt wurde. Diese Theorie beruht auf der Auswertung von *hard core* Stoßprozessen und von der Definition konstitutiver Relationen. Diese Betrachtung erbringt sogar einen Term, der einen Wärmetransport in die mikroskopischen Freiheitsgrade zulässt. Trotzdem entscheiden wir uns für den kompletteren hydrodynamischen Ansatz, der ohne spezielle Annahme über die Art der mesoskopischen Teilchenstöße auskommt und zudem noch die Elastizität der Körner miteinbezieht.

5.1 Geometrie und Koeffizienten

Wie kann es nun sein, dass wir im letzten Kapitel einen Effekt beschrieben hatten, der sich scheinbar gegenteilig verhält? Wir hatten festgestellt, dass die Spannungen unabhängig von der Scherdeformation sind. Nun haben wir im letzten Abschnitt beschrieben wie unterschiedlich die Scherspannungen als Funktion der Scherrate aussehen können, insbesondere ist der Effekt des *Bagnold scaling* alles andere als unabhängig von der Scherdeformation ε_s . Wir erinnern an die Einschränkung des letzten Kapitels auf einen Teil des Spannungstensors σ_{ij} , siehe Abschnitt 4.1. Wie wir bereits diskutierten, kann man den Spannungstensor in zwei qualitativ unterschiedliche Teile aufteilen. Und zwar in Beiträge, die die Verzerrungen u_{ij} explizit enthalten und Beiträge bei denen T_g explizit auftritt. Da die Anteile $\sim u_{ij}$ wie gezeigt quasi unabhängig von der Scherrate $\dot{\gamma}$ sind, ganz im Gegensatz zu Anteilen mit T_g , lassen sich zwei Bereiche des Spannungstensors bezüglich der Scherrate eindeutig voneinander trennen. Im letzten Kapitel wählten wir die Scherrate hinreichend klein, damit Terme $\sim T_g$ im Spannungstensor vernachlässigbar sind. Für dieses Kapitel kehren wir die Verhältnisse um. Granulare Systeme dieses Kapitels sollen hinreichend stark gesichert werden um zu gewährleisten, dass die von der Scherrate unabhängigen elastischen Anteile $\sim u_{ij}$ klein genug sind. Dies nennen wir dann: *Schnelle Verformungen* oder auch *seismisch*, in Anlehnung an den Ursprung einer äußeren Anregung.

Bezüglich der Geometrie werden wir genauso wie im letzten Kapitel die einfache Scherkonfiguration wählen, siehe Abbildung 4.2. Daran sollen ganz analog zu den u_{ij} -Strömungen des letzten Kapitels, die prinzipiellen Verhaltensweisen eines granularen Systems diskutiert werden. Allerdings werden wir nun die Gravitation nicht gänzlich vernachlässigen sondern auch in die Betrachtung miteinbeziehen. Die Berechnung des granularen Stroms in anderen Scherkonfigurationen soll auf einen späteren Zeitpunkt verlegt werden und ist nicht Teil dieser Arbeit. Ansatzweise werden wir das Experiment auf der geeigneten Ebene diskutieren um zu zeigen, dass auch dies grundsätzlich mit der verwendeten Theorie machbar ist. Experimentelle Aufbauten sind zumeist geprägt von starken Inhomogenitäten in der Schergeschwindigkeit, so dass es nicht gut genug möglich ist, das Verhalten des Granulats auf einen Scherratenbereich zu beschränken. D. h. der Spannungstensor muss in seiner Gesamtheit verwendet werden, da jeder Beitrag, sei er $\sim u_{ij}$ oder $\sim T_g$ irgendwo im Medium dominant sein wird.

Die Beschreibung des Verhaltens eines strömenden Granulats ohne die elastischen Anteile u_{ij} ist noch aus einem anderen Grund richtig und wichtig. Die thermodynamische Stabilität der Lösungen zu u_{ij} ist je nach System nicht immer gewährleistet, siehe Abschnitt 4.2.2. Nach Konstruktion ist die freie Energie bezüglich T_g immer stabil, so dass es Materialien bzw. Konstellationen geben kann, für die ausschließlich die Lösungen dieses Kapitels relevant sein könnten und zwar für jeden Scherratenbereich.

Entscheidend wird in diesem Kapitel die bereits vorgestellte Einteilung in **Vol-**

umen- und Druckkontrollierte Experimente sein. Genau damit werden wir die unterschiedlichen Abhängigkeiten der Scherspannung von der Schergeschwindigkeit erklären können. Zudem sollen nur **stationäre Scherströmungen** betrachtet werden. Dies hat ganz pragmatische Gründe, da schlicht und ergreifend Messdaten hierzu fehlen. Eine einsetzende Scherströmung zu diskutieren, die nur Teile $\sim T_g$ im Spannungstensor berücksichtigt, scheint nicht sonderlich sinnvoll zu sein. Schließlich muss immer mit der Anfangsbedingung $T_g = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gerechnet werden. D. h. der „Startpunkt“ ist durch ein elastisches System gegeben.

Für das letzte Kapitel war es bereits notwendig die Abhängigkeiten der Materialparameter von T_g zu diskutieren. Dies können wir dann mit den Gleichungen (4.6) für diesen Scherratenbereich einfach übernehmen. Das soll auch eine gewisse Stärke dieser Theorie demonstrieren, dass uns ein linearer Ansatz der Materialparameter in T_g bereits genügt um Experimente zu beschreiben, die in der Scherrate viele Größenordnungen auseinander liegen. Wir weisen noch einmal darauf hin, dass uns die Phänomenologie dieses Scherratenbereichs eigentlich dazu „verführt“ die granulare Viskosität η_g als Funktion der Scherrate anzusetzen, dies aber nicht erlaubt ist, siehe Abschnitt 2.4. Die Schergeschwindigkeit ist eine Größe des Nichtgleichgewichts und somit keine Variable zur Entwicklung der Materialparameter. Der Ansatz von η_g in T_g genügt vollkommen, da durch die Lösung der Gleichung zu s_g bzw. T_g eine implizite Abhängigkeit von η_g zu $\dot{\gamma}$ hergestellt werden kann.

Die granulare Viskosität η_g tritt nun nicht mehr nur in der Bewegungsgleichung für s_g in Erscheinung, sondern auch in der Impulsbilanzgleichung. Wir leiteten in Kapitel 3 auch eine zweite Scherviskosität η ab, die wir als „Festkörperviskosität“ bezeichneten. Da die Scherrate hinreichend groß sein soll, werden wir diesen Anteil $\sim \eta$ im Spannungstensor nicht weiter berücksichtigen.

Im Vorlauf zum letzten Kapitel hatten wir die Abhängigkeit der Transportkoeffizienten bezüglich der Materialdichte ϱ nur angedeutet, siehe Gleichung (4.7). In diesem Kapitel werden wir aber explizit Druckkontrollierte Experimente diskutieren. Dazu benötigt man dann auch einen Zusammenhang zwischen der Normalspannung und der Dichte, d. h. es ist nötig Abhängigkeiten von ϱ anzunehmen. Es ist

$$\eta_1 = h_1 \frac{\varrho_{cp}}{(1 - \varrho_n)^\alpha}, \quad \gamma_1 = g_1 \frac{\varrho_{cp}}{(1 - \varrho_n)^\beta} \quad (5.2)$$

$$\text{wobei } \varrho_n \equiv \frac{\varrho}{\varrho_{cp}}. \quad (5.3)$$

Die Viskosität η_g als divergierende Funktion von ϱ bei ϱ_{cp} anzusetzen hat sich in Experimenten als vernünftig erwiesen. Solch eine starke Abhängigkeit konnte hinreichend oft gemessen werden [60, 61] und auch bei der noch folgenden Diskussion der Experimente von Savage und Sayed [59] zeigte sich eine solche starke Abhängigkeit von ϱ . Den Transportkoeffizienten γ_1 so anzusetzen, ist zunächst nur eine Annahme, die wir uns plausibel machen können. γ_1 regelt den „Abtransport“ mesoskopischer Wärme $\sim T_g^2$ in die mikroskopischen Freiheitsgrade. Je mehr Kontakte pro Zeiteinheit zwischen den Körnern bestehen, desto stärker wird dieser Transport

unterstützt. Wir können uns für den Grenzfall bei $\varrho \rightarrow \varrho_{cp}$ vorstellen, dass dieser Prozess maximal effizient ist, da dauerhafter Kontakt zwischen den Körnern besteht. Natürlich muss dieser Ansatz durch Experimente gerechtfertigt werden, wobei auch andere Autoren ähnliche Parameter ebenfalls als divergierende Funktionen bezüglich ϱ ansetzen [63].

Für recht geringe Dichten wird der gemachte Ansatz wohl nicht mehr gelten. Da müsste man sicherlich $\eta_1 \sim \varrho^x$ ansetzen. Dadurch schränken wir den betrachteten Bereich dieses Kapitels weiter ein. Während für die elastischen Spannungen des letzten Kapitels eine „natürliche“ untere Grenze für die Dichte mit der *loose packing fraction* ϱ_{lp} bestand, gilt für η und γ nicht unbedingt solch eine Beschränkung und wir müssen den Bereich der Dichte explizit angeben. D. h. in diesem Kapitel betrachten wir tendenziell nur **dichte granulare Ströme** bei denen ϱ recht nah bei ϱ_{cp} sein soll. Falls der Ansatz auch noch für Systeme gilt, die weit entfernt von ϱ_{cp} sind, sträuben wir uns natürlich nicht dagegen. Wird das System hingegen sehr verdünnt sein, erreicht man den Limes des granularen Gases, insbesondere an freien Oberflächen, für das eine extra Diskussion notwendig ist.

Es seien nun die Rahmenbedingungen für dieses Kapitel vorgegeben. Wir werden jetzt die Lösungen zu den Bewegungsgleichungen im Einzelnen diskutieren.

5.2 Scherströmungen ohne Gravitation

Unser System soll stationär geschert werden, also $v_x(L, t) = v_L$. Damit können wir wieder die Massenerhaltung als gelöst auffassen, da $v_{\ell\ell}$ für ein stationäres System identisch verschwinden muss.

Wir haben folgende Gleichungen zu lösen:

$$0 = \eta_1 \frac{\dot{\gamma}^2}{2} - (\gamma_0 + \gamma_1 T_g) T_g, \quad (5.4)$$

$$0 = \nabla_y \sigma_{xy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{xy} \approx -\frac{\eta_1}{2} T_g \dot{\gamma}, \quad (5.5)$$

$$0 = \nabla_y \sigma_{yy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{yy} \approx P_2 = \frac{a}{2} \varrho_{cp} b(\varrho) \frac{\varrho_n^2}{1 - \varrho_n} T_g^2, \quad (5.6)$$

Es handelt sich hierbei um die Gleichungen für s_g und ϱv_k mit $k \in \{x, y\}$. Die Spannungen σ_{ij} enthalten nur die „viskosen“ Anteile. Beiträge die explizit von den Verzerrungen u_{ij} abhängen sollen nach Voraussetzung dieses Kapitels nicht berücksichtigt werden.

Wie gesagt ist die Gleichung für die Massenerhaltung in dieser Geometrie immer erfüllt. Zudem erhalten wir für die z -Komponente der Impulserhaltung in dieser Konstellation ohne Gravitation nur triviale Informationen, so dass wir sie nicht weiter beachten. Die Gleichung für die Entropiedichte s und die Energiedichte ε haben wir aus den selben Gründen missachtet, die wir in Abschnitt 4.2 diskutiert hatten. Und natürlich müssen wir diesmal die Gleichungen für die Verzerrungen nicht lösen. Daraus erwächst uns keine Information, da die u_{ij} in keine andere Gleichung einkoppeln.

Wir lösen dieses Gleichungssystem und erhalten

$$\varrho = \textit{konstant}, \quad v_x = \dot{\gamma} \cdot y \quad \text{wobei} \quad \dot{\gamma} = \frac{v_L}{L}. \quad (5.7)$$

Auch die Lösung für T_g kennen wir bereits. Man kann die Lösung des letzten Kapitels einfach mit (4.19) übernehmen. Es ist für die stationären Lösungen im Prinzip irrelevant ob es sich um ein Volumen- oder ein Druckkontrolliertes Experiment handelt. Für letzteres muss man $P_2(\varrho) = P_L$ invertieren und dann in den Lösungen ϱ durch $\varrho(P_L)$ ersetzen (P_L soll der vorgegebene Druck an der oberen Platte sein). Da wir in diesem Kapitel auch Druckkontrollierte Experimente betrachten, werden wir dies zu einem späteren Zeitpunkt auch durchführen.

Im letzten Kapitel haben wir die qualitativen Eigenschaften der Lösungen hauptsächlich an Hand der Variablen u_{xy} und Δ diskutiert. Erst anschließend daran wurden die Spannungen analysiert. In diesem Kapitel erhalten die Spannungen eine zentralere Rolle, so dass wir bereits jetzt σ_{ij} diskutieren werden. Da wir die umfangreichen elastischen Anteile des Spannungstensors vernachlässigen, ist es diesmal auch wesentlich praktikabler als in Strömungen, die von u_{ij} dominiert werden. Wir setzen also die Lösungen zu ϱ , ϱv_x und T_g in σ_{ij} ein und erhalten:

$$-\sigma_{xy} = \varrho_{cp} \sqrt{\frac{(h_1^*)^3}{8g_1^*}} \cdot \frac{1}{(1 - \varrho_n)^{\delta - \delta'}} \cdot \dot{\gamma}^2, \quad (5.8)$$

$$P_2 = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \quad (5.9)$$

$$= \frac{\varrho_{cp}}{4} \cdot \frac{h_1^*}{g_1^*} \cdot \frac{\varrho_n^2}{(1 - \varrho_n)^\delta} \cdot \dot{\gamma}^2, \quad (5.10)$$

$$-\frac{\sigma_{xy}}{P_2} = \sqrt{2h_1^*g_1^*} \cdot \frac{(1 - \varrho_n)^{\delta'}}{\varrho_n^2} \quad (5.11)$$

$$\text{wobei} \quad \delta - \delta' \equiv \frac{3}{2}\alpha - \frac{\beta}{2} \quad \text{und} \quad \delta \equiv 1 + \alpha - \beta. \quad (5.12)$$

Die Materialparameter h_1 und g_1 wurden folgendermaßen normiert:

$$h_1^* \equiv \frac{h_1}{\sqrt{a b_0}}, \quad g_1^* \equiv \frac{g_1}{\sqrt{(a b_0)^3}}. \quad (5.13)$$

Falls ϱ_{cp} für ein Material bekannt ist, reduzieren sich die unbekannt Parameter auf h_1^* , g_1^* , δ und δ' .

Wir machen zu diesen Ergebnissen noch ein paar Anmerkungen. Die Lösungen, die wir von T_g kennen und eingesetzt haben, sind im Prinzip hier nicht vollständig verwendet worden. Es fehlt offensichtlich die Funktion $\Phi(\dot{\gamma} d)$. Wir erinnern daran, dass die Funktion $\Phi(\dot{\gamma} d)$ den Übergang zu einem rein elastischen Körper lenken sollte. Nach Voraussetzung werden die Scherraten für solche Strömungen wie wir sie

in diesem Kapitel diskutieren, so weit vom elastischen Limes entfernt sein, dass wir für dieses Kapitel $\Phi(\dot{\gamma}d) = 1$ setzen.

Desweiteren müsste eigentlich die Abhängigkeit der Normalspannungen von ϱ nicht δ sondern $\delta - a$ lauten. Der Parameter a ergibt sich wiederum aus $b(\varrho)$. Dieses a wurde in [6] als relativ klein mit $a \approx 0,1$ gewählt. Wir schließen uns dieser Wahl an, wobei es kein Problem wäre a , falls notwendig wieder einzuführen. Da δ und δ' zwei unabhängige Parameter sind, würde a die Werte dieser beiden sozusagen „verschieben“.

Handelt es sich um ein **Volumenkontrolliertes Experiment** ist ϱ_n in dieser Geometrie ein Parameter der vom Experimentator festgelegt wird. Daraus folgt, dass der Zusammenhang zwischen der Scherspannung und der Scherrate fest ist, wir erhalten immer $\sigma_{ij} \sim \dot{\gamma}^2$. Die Spannungen zeigen also unabhängig vom Material das angesprochene *Bagnold scaling* [58]. Damit ist es bereits gelungen eine wichtige Feststellung bzw. Einteilung der Strömungen zu treffen: Für ein **stationäres Volumenkontrolliertes Experiment** erhält man die Skalierung

$$\sigma_{ij} \sim \dot{\gamma}^2. \quad (5.14)$$

Wie bereits erwähnt, konnte dies durch Experimente bestätigt werden [59–61]. Wir werden am Ende dieses Abschnitts die Untersuchungen von Savage und Sayed [59] heraus greifen und die Theorie daran testen.

Als eine Art „Nebeneffekt“ ergibt sich für ein Volumenkontrolliertes Experiment, dass das Verhältnis aus Scherspannung und Druck (5.11) praktisch unabhängig von der Scherrate ist. Auch dieses Verhalten entspricht der experimentellen Beobachtung [59, 60]. Wie wir bereits diskutierten, ist es zu erwarten, dass man den Messbereich für den $\Phi(\dot{\gamma}d)$ relevant wird wohl nie messen wird. Weitere Besonderheiten der Kurven zu $\sigma_{xy}/\sigma_{\ell\ell}$ werden wir in Kapitel 6 diskutieren.

Wir wenden uns nun den **Druckkontrollierten Experimenten** zu. An der oberen Platte aus Abbildung 4.2 soll nun dauerhaft ein Druck bzw. eine Normalspannung P_L aufrecht erhalten werden. Das heißt aber auch, dass die Breite der Strömung L keine Konstante während des Experiments mehr ist, sondern eine Funktion der Scherrate, die es zu bestimmen gilt. Trotzdem soll die Strömung auch weiterhin stationär sein mit $v_{\ell\ell} = 0$, obwohl die obere Platte verschiedene Positionen einnehmen kann. Wir nehmen also an, dass sich das System bezüglich der Scherrate quasi-stationär verhält und wir müssen für eine „neu“ eingestellte Scherrate warten bis sich das System wieder in einem stationär gescherten Zustand befindet. Dies ist etwas, das der Experimentator zu gewährleisten hat oder extra auf eine nicht-Stationarität hin untersucht. Im Allgemeinen wird die Zeit angegeben für wie lange ein System bei genau einer Scherrate geschert wird bevor der Wert hierfür verändert wird.

Im folgenden verwenden wir die Abkürzungen

$$\dot{\Gamma} \equiv \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\tilde{P}_L}} \quad \text{mit} \quad \tilde{P}_L \equiv \frac{P_L}{\frac{\varrho_{cp}}{4} \cdot \frac{h_1^*}{g_1^*}} \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}_{xy} \equiv \frac{\sigma_{xy}}{\varrho_{cp} \sqrt{\frac{(h_1^*)^3}{8g_1^*}}}. \quad (5.15)$$

P_L ist hierbei die Normalspannung auf die obere Platte aus Abbildung 4.2.

Mit den veränderten Randbedingungen werden die Spannungen σ_{ij} explizit nicht mehr die Form von (5.8) und (5.10) annehmen. Schließlich gilt jetzt $\varrho = \varrho(P_L, \dot{\Gamma})$, d. h. ϱ_n ist kein Parameter mehr sondern eine Funktion der angelegten Scherrate $\dot{\gamma}$ bzw. $\dot{\Gamma}$. Zu der „sichtbaren“ Abhängigkeit der Spannungen $\sigma_{ij} \sim \dot{\gamma}^2$ gesellt sich also noch eine implizite via ϱ . Nun heißt es die Umkehrfunktion von $P_2(\varrho) = P_L$ zu finden. Dies lässt sich leider im Allgemeinen nicht analytisch lösen, da δ und δ' jeden (reellen) Wert annehmen dürfen. Für die ein oder andere Kombination aus δ und δ' ist dies jedoch möglich, wovon wir zwei Beispiele angeben wollen:

- Für $\delta = 2$ und $\delta' = 0$,

$$\varrho_n = \frac{1}{1 + \dot{\Gamma}}, \quad (5.16)$$

$$-\tilde{\sigma}_{xy} = \tilde{P}_L (1 + \dot{\Gamma})^2. \quad (5.17)$$

- Und für $\delta = 1$ und $\delta' = 0$,

$$\varrho_n = \frac{\sqrt{1 + 4\dot{\Gamma}^2} - 1}{2\dot{\Gamma}^2}, \quad (5.18)$$

$$-\tilde{\sigma}_{xy} = \tilde{P}_L \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{1 + 4\dot{\Gamma}^2}\right)^2}{4}. \quad (5.19)$$

Offenbar ist die explizite Abhängigkeit der Spannungen von der Dichte bzw. $\dot{\Gamma}$ eine Frage des Materials, so dass jeweils δ und δ' gemessen werden müssen. Wir sahen für die Versuche von Savage und Sayed [59] und auch für andere Experimente [60], dass $\delta = 1, 2$ und $\delta' = 0$ vernünftige Werte sind. Es ist in dieser Geometrie klar, dass σ_{yy} und auch die anderen Normalspannungen einen homogenen Wert mit $\sigma_{yy} = P_L$ annehmen. Setzt man $\delta' = 0$ ergibt sich eine bemerkenswerte Tatsache für den Limes der Scherspannungen $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$. σ_{xy} nimmt einen konstanten Wert an und ist damit immer größer als folgender Wert:

$$-\tilde{\sigma}_{xy} \geq \tilde{P}_L. \quad (5.20)$$

Gleichzeitig erhält man $\varrho \rightarrow \varrho_{cp}$. D. h. dieser minimale Wert aus (5.20) ist die Scherspannung für eine Dichte mit $\varrho_n = 1$. Dies ist ein großer Unterschied zu der Lösung für Volumenkontrollierte Systeme. Da verschwand Druck und Scherspannung gleichzeitig mit der angelegten Geschwindigkeit bzw. der Scherrate. Zudem ist

sofort ersichtlich, dass die Skalierung der Scherspannung mit der Scherrate unterhalb derer liegt, die wir aus dem Volumenkontrollierten Experiment mit $\sigma_{xy} \sim \dot{\gamma}^2$ kannten. Das sogenannte *Bagnold scaling* tritt also für Druckkontrollierte Experimente nicht auf. Das Verhalten von ϱ_n und σ_{xy} ist in den Abbildungen 5.2 und 5.3 dargestellt. In Abbildung 5.4 haben wir außerdem die Ergebnisse des Volumen- und Druckkontrollierten Experiments verglichen.

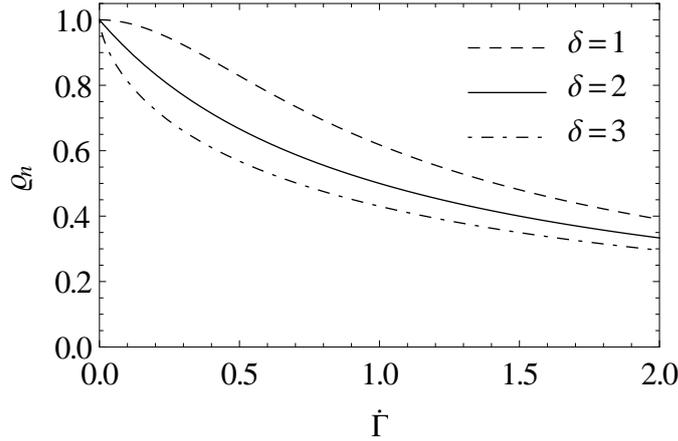


Abbildung 5.2: Die Dichte ϱ_n als Funktion der dimensionslosen Scherrate $\dot{\Gamma}$. Für alle drei Kurven wurde $\delta' = 0$ gewählt. Die Dichte zeigt für steigendes δ offenbar eine etwas stärkere Abhängigkeit von $\dot{\Gamma}$.

Jetzt ist aber noch ungeklärt wie sich der Plattenabstand L mit veränderlichem v_L verhält. Außerdem finden wir eine zweite Darstellung der Dichte ϱ und der Scherspannung σ_{xy} . Die Scherrate $\dot{\gamma}$ bzw. $\dot{\Gamma}$ ist definiert als $\dot{\gamma} = v_L/L$. Da nun aber L selbst eine Funktion der angelegten Geschwindigkeit v_L ist kann man Dichte und Scherspannung auch als Funktion von v_L angeben (hier am Beispiel für $\delta = 2$ und $\delta' = 0$):

$$\varrho_n = \frac{\mu_L}{L}, \quad (5.21)$$

$$-\tilde{\sigma}_{xy} = \tilde{P}_L \left(\frac{L}{\mu_L} \right)^2 \quad (5.22)$$

$$\text{wobei } L = \mu_L \left(1 + \frac{v_L}{\mu_L \sqrt{\tilde{P}_L}} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{v_L}{\mu_L \sqrt{\tilde{P}_L}}} + 2 \frac{v_L}{\mu_L \sqrt{\tilde{P}_L}}}} \right) \quad (5.23)$$

$$\text{und } \mu_L \equiv \int_0^L \varrho_n dy = \varrho_n L. \quad (5.24)$$

Siehe hierzu auch die Abbildungen 5.5.

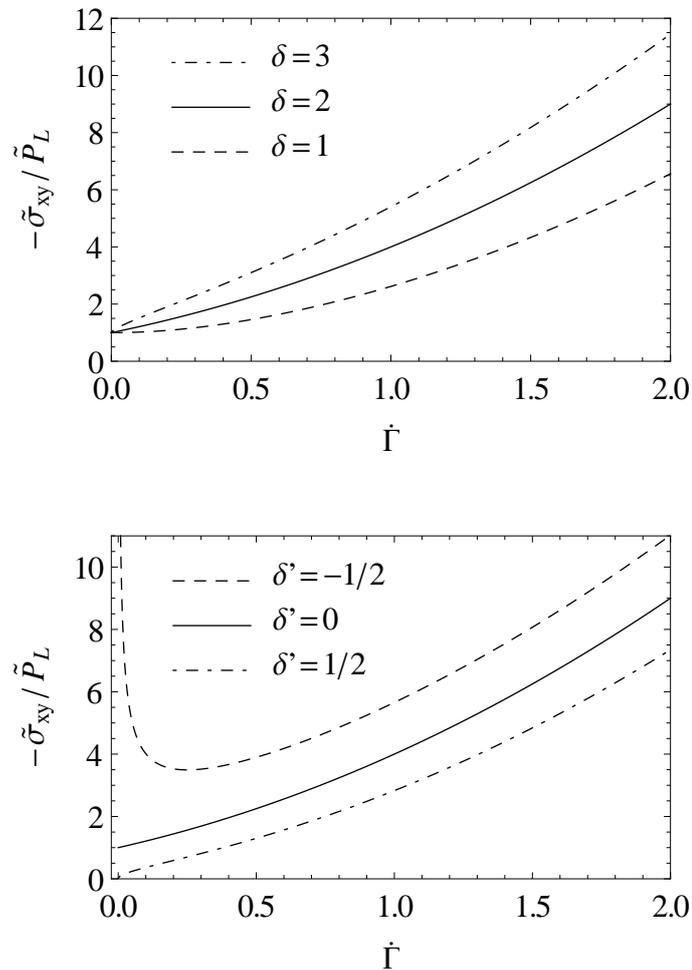


Abbildung 5.3: Die Scherspannung $\tilde{\sigma}_{xy}$ als Funktion der dimensionslosen Scherrate $\dot{\Gamma}$. Für die zwei Graphiken wurde jeweils δ bzw. δ' variiert. Für das obere Bild wurde $\delta' = 0$ gewählt. Dabei zeigt sich, dass $\tilde{\sigma}_{xy}$ für größere δ stärker ansteigt. Für das untere Bild wurde $\delta = 2$ gewählt. Hier zeigt sich ein großer qualitativer Einfluß von δ' . Die Kurve für $\delta' = 0$ zeigt die im Text diskutierte Möglichkeit, dass $\tilde{\sigma}_{xy}$ für $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$ einen konstanten Wert annimmt. Wählt man hingegen $\delta' > 0$, wird $\tilde{\sigma}_{xy}$ mit der Scherrate ebenfalls verschwinden. Die Lösungen für $\delta' < 0$ divergieren für $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$.

Wir konnten zeigen, dass es einen großen qualitativen Unterschied ausmacht welche Randbedingung man wählt. Während die Spannungen eines Volumenkontrollierten Experiments immer mit $\dot{\gamma}^2$ skalieren, hängt es bei Druckkontrollierten Experimenten von den Materialparametern δ, δ' ab. Zudem konnten wir eine Art „Sockel“, also eine minimale Scherspannung für Druckkontrollierte Experimente im Limes $\dot{\Gamma} \rightarrow 0$ identifizieren. Leider ließ sich kein Experiment in der einfachen Scherkonfiguration aus Abbildung 4.2 finden für das der angelegte Druck eine Konstante war. So kann das aufgezeigte Verhalten nicht direkt überprüft werden. Jedoch gibt es genügend Experimente in Geometrien die einigermaßen der einfachen Scherkon-

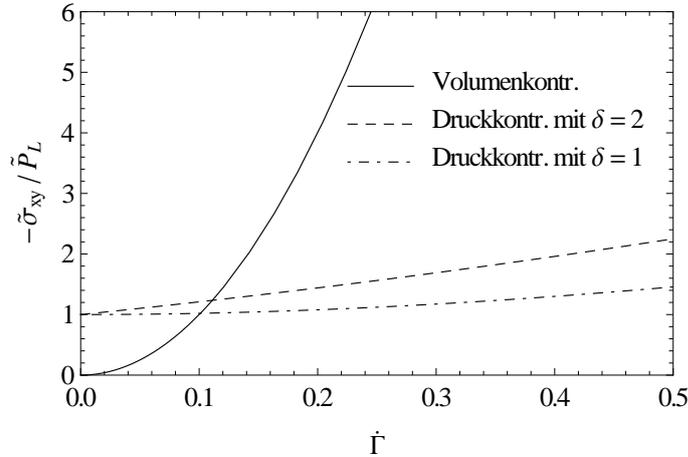


Abbildung 5.4: Dargestellt sind Kurven der Scherspannung als Funktion der Scherrate. Der steilere Verlauf der Kurve des Volumenkontrollierten Experiments mit $\sim \dot{\Gamma}^2$ ist eindeutig zu erkennen. Die Kurven für ein Druckkontrolliertes Experiment sind zum einen viel flacher, siehe Gleichungen (5.17) und (5.19), und zum anderen hängen sie noch von δ und δ' ab. Für die Graphik wurde $\delta' = 0$ und zwei verschiedene δ gewählt.

figuration entsprechen, allerdings mit Gravitation. D. h. das Material wird vom Eigengewicht zusammengehalten und zeigt eine freie Oberfläche. Diese Experimente zeigen ähnliches Verhalten wie Druckkontrollierte Experimente und es ist tatsächlich so, dass die Steigung der Scherspannungen mit $\dot{\gamma}$ unterhalb des *Bagnold scaling* mit $\dot{\gamma}^2$ liegt. Wir besprechen solche Versuchsaufbauten in Abschnitt 5.3.

5.2.1 Experimente von Savage und Sayed

Wir diskutieren nun ein Experiment [59], das dem Versuchsaufbau der einfachen Schergeometrie sehr nahe kommt. Hierbei wurde ein Gerät verwendet, welches wir bereits in Abbildung 5.1 skizziert hatten. Damit bei diesem Versuchsaufbau auch tatsächlich Ergebnisse gemessen werden können, die zu einer Geometrie wie in Abbildung 4.2 auch passen, müssen ein paar Anforderungen gestellt werden. Zum einen müssen Zentrifugaleffekte klein sein. Diesen Effekt gaben die Autoren mit $\approx 1\%$ bei den gemessenen Scherspannungen an. Zum anderen darf die Gravitation keine Rolle spielen, ansonsten ist das Granulat bezüglich der Dichte nicht mehr homogen in der Messzelle. Auch dies wurde von den Autoren minimiert indem sie bei relativ hohen Scherraten gemessen haben bei denen das Eigengewicht eine untergeordnete Rolle spielt. Die Autoren gaben außerdem an, dass sie Messpunkte verworfen haben falls für kleinere Scherraten der Effekt des Scherbands auftrat (siehe nächstes Kapitel). Diese Experimente stellen also näherungsweise eine *simple shear*-Konfiguration bei festgehaltenem Plattenabstand L dar, d. h. es ist ein Volumenkontrolliertes Experiment.

Die Abstand L beträgt für diese Experimente etwa zehn Teilchendurchmesser.

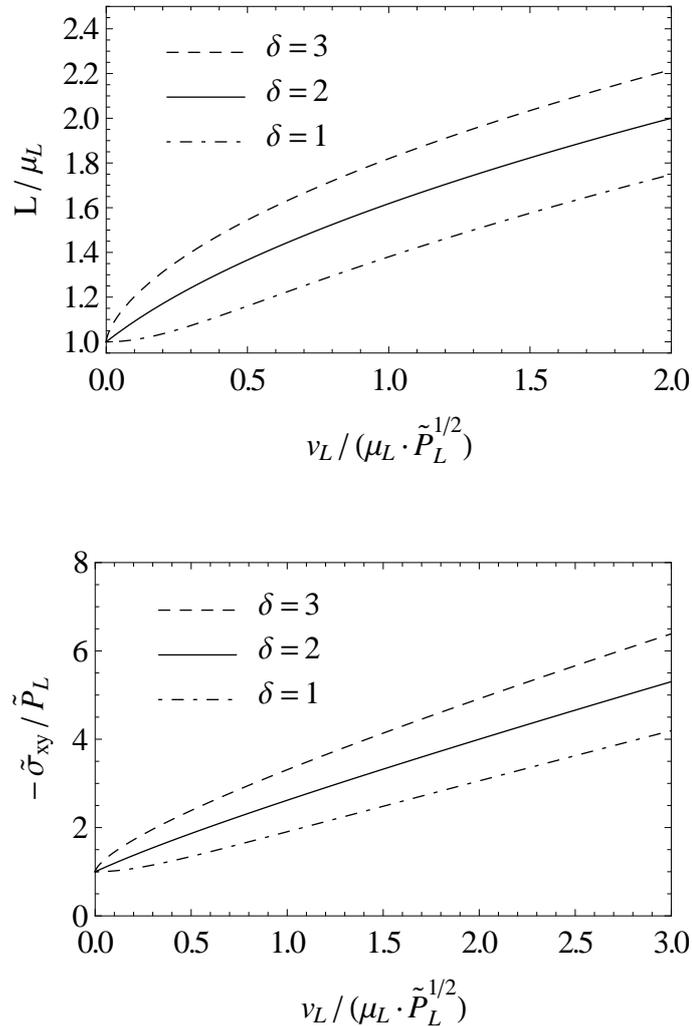


Abbildung 5.5: Für beide Bilder wurde $\delta' = 0$ gewählt. Das obere Bild zeigt den Plattenabstand L als Funktion der Plattengeschwindigkeit v_L . Offenbar „presst“ ein größeres δ die Platten stärker auseinander. Demensprechend verhält sich $\tilde{\sigma}_{xy}$ als Funktion von v_L im unteren Bild. Interessant ist die Tatsache, dass das untere Bild im Prinzip dasselbe zeigt wie der obere Graph aus Abbildung 5.3 - allerdings als Funktion von $\dot{\Gamma}$. Stellt man die Scherspannung als Funktion der Scherrate $\dot{\Gamma}$ und v_L dar, ergeben sich verschiedene Krümmungen der Kurven.

Das erscheint uns gerade noch geeignet die vorgestellte Theorie darauf anwenden zu können. Gemessen wurde an verschiedenen Materialien, wobei wir Messergebnisse zu Plastik- und Glaskügelchen herausgegriffen haben. Die einzelnen Partikel haben einen Durchmesser von $\approx 1 \text{ mm}$ bzw. $\approx 1,8 \text{ mm}$ und zeigen jeweils eine polydisperser Verteilung um Kristallisationseffekte zu minimieren. Messkurven für die die Autoren angaben, dass sich das Material bei den Messungen hysteretisch verhalten hat (aufgrund der Kristallisationseffekte), werden in der folgenden Diskussion nicht weiter berücksichtigt. Dies war bei den größten gemessenen Dichten der Fall.

Leider musste bezüglich des Materials eine Annahme getroffen werden. Es wurden nur die Dichten des Materials angegeben, als handle es sich um einen „lückenlosen“ Festkörper. Für die Theorie ist es aber notwendig ϱ_{cp} zu kennen. Wir müssen also für das Verhältnis von $\varrho_{cp}/\varrho_{Partikel}$ einen Wert annehmen. Wir wählen eine typische Größe mit $\varrho_{cp}/\varrho_{Partikel} \approx 0.65$ [6]. Für die Plastikkügelchen ist $\varrho_{Partikel} = 1095 \text{ kg/m}^3$ und für die Glaskügelchen $\varrho_{Partikel} = 2970 \text{ kg/m}^3$. Ein weiterer Materialparameter ist nicht notwendig und wir können direkt daran gehen die Messungen mit der Theorie zu vergleichen.

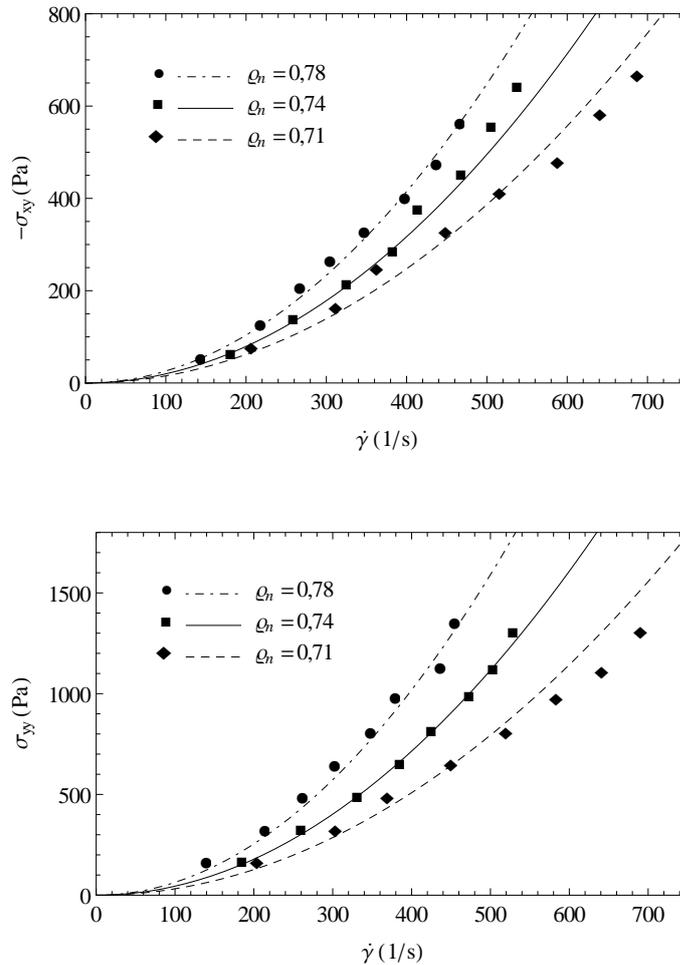


Abbildung 5.6: Experiment aus [59] zusammen mit theoretisch berechneten Kurven entsprechend den Gleichungen (5.8) und (5.10). Das Experiment entspricht dem Aufbau aus Abbildung 4.2 mit konstantem L , d. h. es ist ein volumenkontrolliertes Experiment. Aufgetragen wurden die Scherspannung und die Normalspannung als Funktion der Scherrate. Das getestete Material waren Plastikkügelchen mit $\varrho_{Partikel} = 1095 \text{ kg/m}^3$. Die Daten der Anpassung lassen sich dem Text entnehmen.

Nach den Gleichungen (5.8) und (5.10) haben wir vier unabhängige Parameter: h_1^* , g_1^* , δ und δ' . Es stellte sich heraus, dass man gute Ergebnisse erzielt wenn man

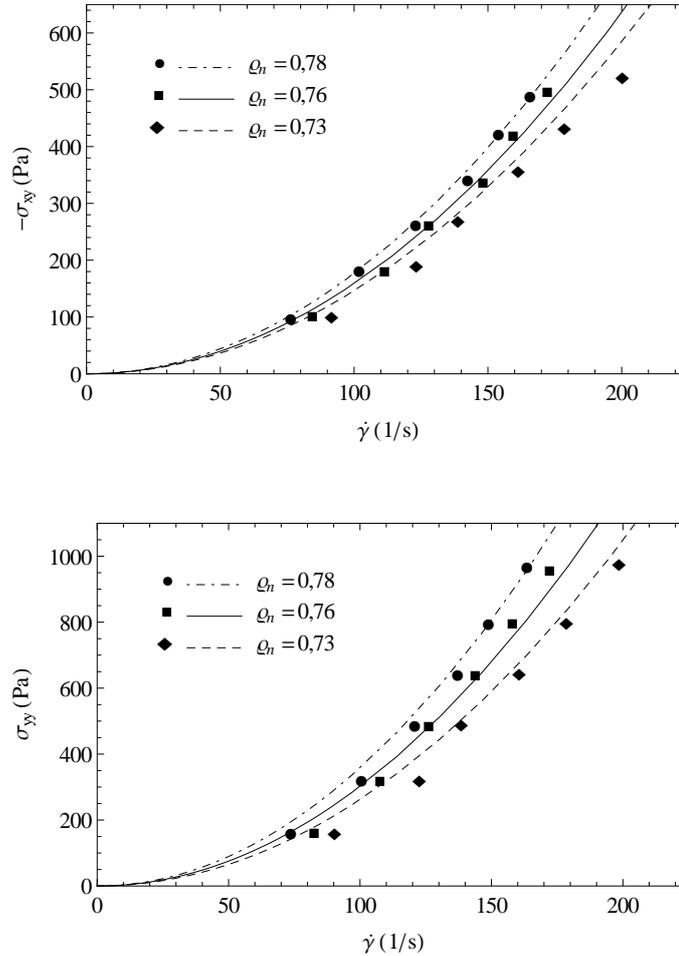


Abbildung 5.7: Experiment aus [59] zusammen mit theoretisch berechneten Kurven entsprechend den Gleichungen (5.8) und (5.10). Das Experiment entspricht dem Aufbau aus Abbildung 4.2 mit konstantem L . Aufgetragen wurden die Scherspannung und die Normalspannung als Funktion der Scherrate. Das getestete Material waren Glaskügelchen mit $\varrho_{Partikel} = 2970 \text{ kg/m}^3$. Die Daten der Anpassung lassen sich dem Text entnehmen.

für Glas- und für die Plastikkügelchen $\delta' = 0$ wählt. Für den Parameter δ wählen wir auch jeweils eine ganze Zahl: $\delta = 2$ für Plastikkügelchen und $\delta = 1$ für Glaskügelchen. Mit dieser Wahl ließen sich gute Übereinstimmungen erzielen. Natürlich werden diese Werte nicht perfekt die Experimente widerspiegeln, jedoch erhalten wir damit eine gute Übereinstimmung und eine Vorstellung der Größenordnungen für δ und δ' . Übrig bleiben h_1^* und g_1^* . Es wurde für jedes Material jeweils die Scherspannung und die Normalspannung als Funktion der Scherrate gemessen. So können wir mit einer Anpassung der Kurven h_1^* und g_1^* bestimmen. Die Graphen sind in den Abbildungen 5.6 und 5.7 dargestellt. Wir bekommen folgende Werte:

- Für die Plastikkügelchen:

$$h_1^* \approx 3 \cdot 10^{-4} m, \quad g_1^* \approx 100 \frac{1}{m}. \quad (5.25)$$

- Für die Glaskügelchen:

$$h_1^* \approx 1,1 \cdot 10^{-3} m, \quad g_1^* \approx 41 \frac{1}{m}. \quad (5.26)$$

Diese Werte können wir im nächsten Kapitel verwenden um den Übergang des *critical state* zum *Bagnold scaling* darzustellen. Dies bringt uns zur Diskussion, ob diese Messungen elastische Anteile beinhalten. Schaut man sich die Messdaten an kann man kein eindeutiges Ergebnis festlegen. Für $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ müsste ein Anteil sichtbar sein, der den scherratenunabhängigen elastischen Anteil des letzten Kapitels wiedergeben sollte. Es könnte aber auch sein, dass für Dichten, die in diesem Experiment getestet wurden, die thermodynamische Stabilität der elastischen Lösung verletzt ist und damit nicht existiert. Aus den Messungen von σ_{xy} und σ_{yy} lässt sich dies aber nicht ablesen. Wir kommen auf diese Diskussion im nächsten Kapitel wieder zurück, denn da werden wir das Verhältnis σ_{xy}/σ_{yy} genauer unter die Lupe nehmen.

Dieses Experiment belegt eindeutig die Abhängigkeit $\sigma_{ij} \sim \dot{\gamma}^2$, die auch vorab von den Gleichungen so gegeben war. Zudem erkennen wir eine sehr empfindliche Abhängigkeit von der Dichte. Wir sehen es deshalb als gerechtfertigt an die Transportkoeffizienten η_1 und γ_1 mit $\varrho \rightarrow \varrho_{cp}$ divergieren zu lassen. Im Falle der Plastikkügelchen haben wir die Abhängigkeiten $\eta_1 \sim (1 - \varrho_n)^{-3/2}$ und $\gamma_1 \sim (1 - \varrho_n)^{-1/2}$. Für die Glaskügelchen erhalten wir hingegen $\eta_1 \sim (1 - \varrho_n)^{-1}$ und $\gamma_1 \sim (1 - \varrho_n)^{-1}$.

5.3 Scherströmungen mit Gravitation parallel zu $\nabla \times \mathbf{v}$

Nachdem im letzten Abschnitt die einfachst mögliche Scherströmung besprochen wurde, führen wir nun Gravitation als zusätzlichen Effekt ein⁷. Die Voraussetzungen sind dann zwar unsymmetrischer, jedoch wohl auch realistischer für die meisten Experimente. Die Richtung der Erdbeschleunigung zeige in z -Richtung, siehe hierzu Abbildung 4.2. Der Vektor der Gravitation zeigt also „aus dem Blatt heraus“ bzw. parallel zu $\nabla \times \mathbf{v}$. Dieses System lässt sich lösen indem man eine zusätzliche Gleichung zu den drei des letzten Abschnitts betrachtet. Das System sei weiterhin stationär mit den Randbedingungen $v_x(y = 0, z) = 0$ und $v_x(y = L, z) = v_L$ und

⁷Es ist problemlos möglich Gravitation in eine hydrodynamische Theorie einzubinden. Mit einer Einschränkung: Das Gravitationspotential muss zeitlich konstant sein und das betrachtete Medium darf höchstens als „Testladung“ agieren. Ist dies gewährleistet, geht die Gravitation additiv als zusätzlicher Term in die Energiedichte ein und taucht auf der „rechten“ Seite der Impulserhaltung als eine Quelle auf. Siehe hierzu einschlägige Literatur, zum Beispiel [9]. Betrachtet man zum Beispiel ein Phänomen wie Planetenentstehung ist solch ein einfaches Vorgehen nicht mehr möglich, da man sonst feldtheoretische Gleichungen erhält, die nicht mehr lokal definiert werden können.

wir können schreiben

$$\nabla_z \sigma_{zz} = -\varrho_{cp} \varrho_n g \quad \text{mit} \quad \sigma_{zz} \approx P_2 = \frac{a}{2} \varrho_{cp} b(\varrho) \frac{\varrho_n^2}{1 - \varrho_n} T_g^2. \quad (5.27)$$

Dies ist die z -Komponente der Impulserhaltung. Zusammen mit (5.4) - (5.6) haben wir ein hinreichendes Gleichungssystem. Beim Aufstellen der Gleichungen nehmen wir prinzipiell schon vorweg, dass sich das System immer noch mit einer einzigen Geschwindigkeitskomponente $v_x = v_x(y)$ lösen lässt. So können wir irrelevante Komponenten von σ_{ij} beim Aufstellen der Gleichungen einfach weglassen. Das System wirkt im ersten Moment überbestimmt. Schließlich haben wir als Variablen nur ϱ , T_g und v_x für vier Gleichungen. Die Abhängigkeit der Dichte ϱ von z lässt sich aber separat lösen, so dass wir keine Probleme deswegen bekommen werden.

Wir betrachten zuerst ein **Volumenkontrolliertes Experiment**. D. h. das Experiment ist in z -Richtung zwischen 0 und einer konstanten Höhe H der Messzelle eingeschlossen. Es ist bereits für ein Volumenkontrolliertes Experiment notwendig δ zu definieren, sonst lässt sich zu der oben angegebenen Gleichung keine allgemeine analytische Lösung finden. Wir wählen $\delta = 2$ und bereits jetzt aus Gründen der Einfachheit $\delta' = 0$. Die Lösung der stationären Gleichung für T_g übernehmen wir wieder aus den vorangegangenen Abschnitten und erhalten für ϱ und v_x

$$\varrho_n(z) = 1 - \frac{1 - \bar{\varrho}_{n,H}}{\sqrt{(1 - \dot{\Gamma}_H^2)^2 + 4 \dot{\Gamma}_H^2 (1 - \frac{z}{H})}} \cdot \dot{\Gamma}_H^2, \quad v_x = \dot{\gamma} \cdot y \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma} = \frac{v_L}{L}, \quad (5.28)$$

$$\dot{\Gamma}_H \equiv \sqrt{\frac{h_1^* g_1^*}{g H}} \cdot \frac{1}{1 - \bar{\varrho}_{n,H}} \cdot \dot{\gamma} \quad \text{und} \quad \bar{\varrho}_{n,H} \equiv \frac{1}{H} \int_0^H \varrho_n dz. \quad (5.29)$$

Der Parameter $\bar{\varrho}_{n,H}$ ist für ein Volumenkontrolliertes Experiment ($H = konst.$ und $L = konst.$) unveränderlich für jede Scherrate und äquivalent zu der eingeschlossenen Masse. Die Dichte ϱ und die Scherrate hängen auch in dieser Geometrie nicht von y ab. Die einzige Veränderung der Lösung zum letzten Abschnitt ohne Gravitation ist die Abhängigkeit der Dichte von der Koordinate z . Die Lösung zu $\varrho_n(z)$ ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

Damit lassen sich die Spannungen sofort angeben:

$$-\sigma_{xy}(z) = -\bar{\sigma}_{xy} + \sqrt{\frac{h_1^* g_1^*}{2}} \cdot \varrho_{cp} g (H - 2z) \quad (5.30)$$

$$\text{mit} \quad -\bar{\sigma}_{xy} \equiv -\frac{1}{H} \int_0^H \sigma_{xy} dz = \varrho_{cp} \sqrt{\frac{h_1^* g_1^*}{8}} \cdot g H \dot{\Gamma}_H^2 \left(1 + \frac{1}{\dot{\Gamma}_H^4} \right), \quad (5.31)$$

$$P_2(z) = \frac{\varrho_{cp}}{4} (1 - \bar{\varrho}_{n,H})^2 g H \dot{\Gamma}_H^2 \left(\frac{\sqrt{(1 - \dot{\Gamma}_H^2)^2 + 4 \dot{\Gamma}_H^2 (1 - \frac{z}{H})}}{(1 - \bar{\varrho}_{n,H}) \dot{\Gamma}_H^2} - 1 \right)^2. \quad (5.32)$$

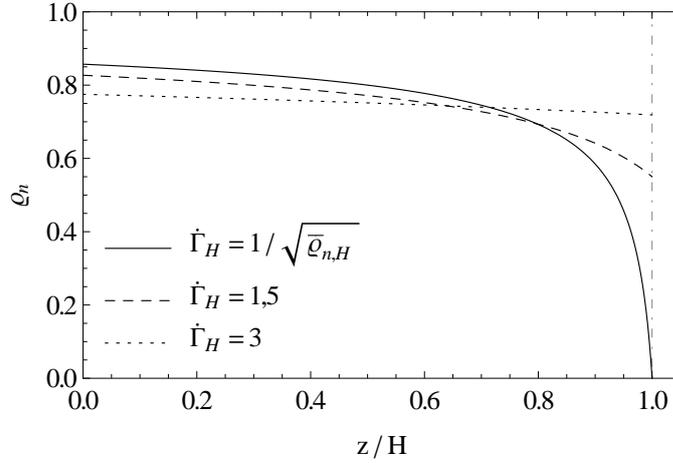


Abbildung 5.8: Die Dichte ϱ_n als Funktion von z (normiert auf die Behälterhöhe H) für verschiedene Scherraten $\dot{\Gamma}_H$. Es wurde $\delta = 2$ gewählt. Die durchgezogene Kurve repräsentiert den Verlauf für die minimal mögliche Scherrate (siehe Text). Man erkennt, dass sich die Kurven für höhere Scherraten zusehends abflacht. Der Limes für $\dot{\Gamma}_H \rightarrow \infty$ wäre dann eine konstante Dichte. Der Einfluss der Gravitation wäre in diesem Fall natürlich vollkommen vernachlässigbar.

Interessant ist, dass die Scherspannung um ihren mittleren Wert $\bar{\sigma}_{xy}$ einfach nur linear „gekippert“ ist, wohingegen die Normalspannung P_2 eine komplizierte Abhängigkeit in z zeigt.

Wir werden nun die Lösung auf ihre Grenzfälle untersuchen. Aufgrund der Struktur von σ_{ij} wird es nie möglich sein, dass die Dichte den Grenzfall $\varrho_n = 1$ erreicht bzw. überschreitet. Dies tritt nur dann auf falls die Scherrate komplett verschwindet. Für ein volumenkontrolliertes Experiment gilt es zu beachten, dass an der oberen abschließenden Platte bei $z = H$ die Dichte nicht negativ werden darf. Dies lässt sich leicht veranschaulichen. Man stelle sich folgendes vor: Die Scherrate wird sukzessive verkleinert und der Schwerpunkt des Materials wird unter dem Einfluss der Gravitation mehr und mehr in Richtung des unteren Abschlusses bei $z = 0$ rutschen. Irgendwann wird das Material aber den Kontakt zur oberen Platte bei $z = H$ verlieren. Dieser Moment entspricht genau $\varrho_n(H) = 0$. Die Scherrate muss deshalb folgender Relation genügen:

$$\dot{\Gamma}_H \geq \dot{\Gamma}_{min} \equiv \frac{1}{\sqrt{\bar{\varrho}_{n,H}}} (> 1). \quad (5.33)$$

Die zugehörigen minimalen Spannungen schreiben sich als

$$\bar{\sigma}_{xy,min} \equiv \varrho_{cp} \sqrt{\frac{h_1^* g_1^*}{8}} \cdot \frac{1 + \bar{\varrho}_{n,H}^2}{\bar{\varrho}_{n,H}} \cdot g H, \quad (5.34)$$

$$P_{2,min}(z) \equiv \frac{\varrho_{cp}}{4} \cdot g H \cdot \frac{(1 - \bar{\varrho}_{n,H})^2}{\bar{\varrho}_{n,H}} \left(\sqrt{1 + 4 \cdot \frac{\bar{\varrho}_{n,H}}{(1 - \bar{\varrho}_{n,H})^2} \left(1 - \frac{z}{H}\right)} - 1 \right)^2. \quad (5.35)$$

Die Normalspannung P_2 verschwindet erwartungsgemäß für $\dot{\Gamma}_{min}$ bzw. $\varrho(H) = 0$ bei $z = H$. Mit der minimalen Scherrate lösen wir auch ein anderes Problem. Bis zum jetzigen Zeitpunkt war es nicht klar ob sich für jeden Wert von $\bar{\sigma}_{xy}$ und P_2 genau einen Wert für die Scherrate $\dot{\Gamma}_H$ finden lässt. Das Minimum von $\bar{\sigma}_{xy}$ befindet sich jedoch gerade bei $\dot{\Gamma}_H = 1$ und ist damit immer kleiner als $\dot{\Gamma}_{min}$. Für P_2 kann man zeigen, dass sich das „gefährlichste“ Minimum gerade bei $\dot{\Gamma}_H = 1/\sqrt{\varrho_{n,H}}$ und $z = H$ befindet. Dies entspricht aber gerade $\dot{\Gamma}_{min}$. Unsere Sorge war also unbegründet. Beide Funktionen $\bar{\sigma}_{xy}$ und P_2 sind monoton steigend zu dem Parameter $\dot{\Gamma}_H \geq \dot{\Gamma}_{min}$.

Die gefundenen Lösungen, die geringe Dichten beinhalten sollten mit Vorsicht gehandhabt werden. Wir erinnern an die Rahmenbedingungen, die wir für dieses Kapitel getroffen hatten. Wir sprachen dabei von dichten Strömungen, da wir die Ansätze für η_1 und γ_1 nur für diesen Bereich vorgenommen hatten. Es stellt sich die Frage bis zu welchen Dichten die gewählten Abhängigkeiten von genau dieser überhaupt noch gute Näherungen sind. Dies können wir im Rahmen dieser Arbeit nicht abschließend klären. Ein qualitativ deutlich verbesserter Ansatz wird sein, die vorliegende Theorie mit bestehenden Theorien zum granularen Gas [30] zu verbinden. Zumindest ist der verfolgte Weg nicht vollkommen aus der Welt, wie man aus Experimenten mit einer freien Oberfläche ablesen kann [64, 73, 74, 77]. Gemeinsam ist diesen Experimenten der rasche Abfall der Dichte nahe der Oberfläche und einen großer Bereich für den die Dichte konstant ist. Unsere Ansätze zu η_1 und γ_1 liefern zumindest qualitativ diese Charakteristik. Der Fehler, den wir implizit zum Beispiel für $\bar{\sigma}_{xy}$ in Kauf nehmen, wird also wegen des breiten Bereichs einer hohen Dichte recht gering ausfallen.

Wir werden nun wieder ein **Druckkontrolliertes Experiment** betrachten. D. h. für diese Versuchsgeometrie, dass die abschließende Platte bei $z = H$ variabel gelagert ist und jederzeit den Druck P_H aufrecht erhält. Hier ist also H keine Konstante mehr. Die Breite L halten wir hingegen konstant, ganz im Gegensatz zu den Druckkontrollierten Experimenten ohne Gravitation. Druckkontrolliert meint also in diesem Abschnitt in Richtung z und nicht in y -Richtung.

Wir lösen die Differentialgleichung (5.27) mit der Randbedingung $\sigma_{zz}(H) = P_H$. Unter diesen Voraussetzungen (wieder mit $\delta = 2$) ändert sich die Lösung für $\varrho_n(z)$ zu

$$\varrho_n(z) = 1 - \frac{\dot{\Gamma}_{P_H}}{\sqrt{(1 + \dot{\Gamma}_{P_H})^2 + G_H(H - z)}} \quad (5.36)$$

$$\text{mit } \dot{\Gamma}_{P_H} \equiv \sqrt{\frac{\varrho_{cp}}{4} \cdot \frac{h_1^*}{g_1^*}} \cdot \dot{\gamma}, \quad G_H \equiv \frac{\varrho_{cp} g}{P_H} \quad \text{und} \quad \mu_H \equiv \int_0^H \varrho_n dz. \quad (5.37)$$

Für dieses Experiment ist die „Masse“ μ_H immer konstant. Die Abmessung des Behälters in z -Richtung H ist eine Funktion der angelegten Scherrate $\dot{\Gamma}_{P_H}$,

$$H = \mu_H + 2 \left(\sqrt{1 + \mu_H G_H} - 1 \right) \frac{\dot{\Gamma}_{P_H}}{G_H}. \quad (5.38)$$

Die Höhe H verhält sich also linear bezüglich der Scherrate. Im Limes $\dot{\Gamma}_{P_H} \rightarrow 0$ ist $H = \mu_H$. D. h. für verschwindende Scherrate muss die Dichte gerade $\varrho_n = 1$ sein. Dies entspricht im Allgemeinen nicht der Anfangsbedingung eines ungesicherten Systems, sondern ist tatsächlich nur als Grenzwert des gesicherten Systems aufzufassen. In Abbildung 5.9 ist der Verlauf der Dichte mit z gezeigt.

Die Spannungen ergeben sich zu

$$-\sigma_{xy}(z) = \sqrt{2 h_1^* g_1^*} \cdot P_H \left[(1 + \dot{\Gamma}_{P_H})^2 + G_H (H - z) \right] \quad (5.39)$$

$$P_2(z) = P_H \left(\sqrt{(1 + \dot{\Gamma}_{P_H})^2 + G_H (H - z)} - \dot{\Gamma}_{P_H} \right)^2 \quad (5.40)$$

Für die mittlere Scherspannung erhält man

$$-\bar{\sigma}_{xy} \equiv -\frac{1}{H} \int_0^H \sigma_{xy}(z) dz = \sqrt{2 h_1^* g_1^*} \cdot P_H \left[(1 + \dot{\Gamma}_{P_H})^2 + \frac{G_H H}{2} \right] \quad (5.41)$$

Für $\dot{\Gamma}_{P_H} \rightarrow 0$ erhalten wir ein konstantes σ_{xy} , das auch Anteile enthält, die frei von G_H bzw. g sind. Dies ist ganz analog zu Abschnitt 5.2 ohne Gravitation.

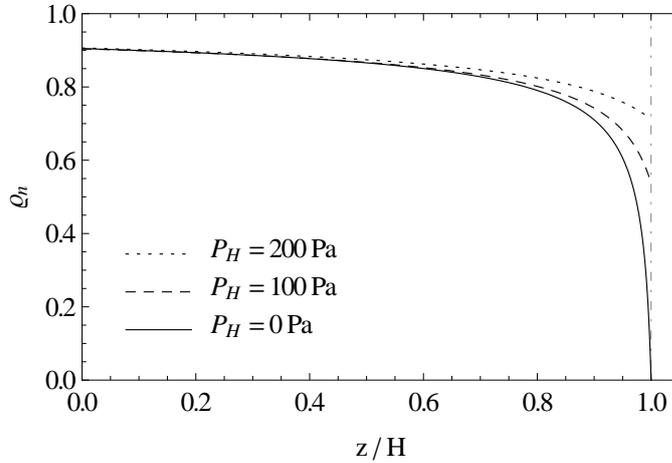


Abbildung 5.9: Die Dichte ϱ_n als Funktion von z (normiert auf die Behälterhöhe H) für verschiedene Randbedingungen für die Normalspannung. Als Parameter wurden gewählt: $h_1^* = 1$, $g_1^* = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu_H = 0,9 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ und $\dot{\gamma} = 0,2 \text{ Hz}$. Der Limes $P_H \rightarrow 0$ beinhaltet auch $\varrho_n(H) = 0$.

Nun stellen wir uns vor, wir würden den Deckel bei $z = H$ einfach weglassen. D. h. wir betrachten den Limes $P_H \rightarrow 0$ oder anders ausgedrückt gehen wir jetzt von einer freien Oberfläche bei $z = H$ aus. Auch hier gilt wieder, dass die Ansätze für η_1 und γ_1 nahe der freien Oberfläche nicht mehr hinreichend begründet sind und ein Übergang zum granularen Gas erfolgen sollte. Nichtsdestotrotz lassen sich

Ergebnisse für den Limes $P_H \rightarrow 0$ wiederum für $\delta = 2$ und $\delta' = 0$ angeben:

$$\varrho_n = 1 - \frac{\sqrt{\frac{\varrho_{cp}}{4} \frac{h_1^*}{g_1^*} \cdot \dot{\gamma}}}{\sqrt{\frac{\varrho_{cp}}{4} \frac{h_1^*}{g_1^*} \cdot \dot{\gamma}^2 + \varrho_{cp} g (H - z)}} \quad (5.42)$$

$$\text{mit } H = \mu_H \left(1 + \sqrt{\frac{h_1^*/g_1^*}{\mu_H g}} \cdot \dot{\gamma} \right). \quad (5.43)$$

Der beispielhafte Verlauf der Dichte mit z ist in Abbildung 5.9 gezeigt. Die entsprechenden Spannungen sind

$$-\sigma_{xy}(z) = \varrho_{cp} \sqrt{\frac{(h_1^*)^3}{8 g_1^*} \cdot \dot{\gamma}^2 + \varrho_{cp} g \sqrt{2 h_1^* g_1^*} (H - z)}, \quad (5.44)$$

$$P_2(z) = \frac{\varrho_{cp}}{4} \frac{h_1^*}{g_1^*} \left(\sqrt{\dot{\gamma}^2 + 4 \frac{g}{h_1^*/g_1^*} (H - z)} - \dot{\gamma} \right)^2. \quad (5.45)$$

Wobei die mittlere Scherspannung gegeben ist mit

$$-\bar{\sigma}_{xy} \equiv -\frac{1}{H} \int_0^H \sigma_{xy}(z) dz = \varrho_{cp} \sqrt{\frac{(h_1^*)^3}{8 g_1^*} \cdot \dot{\gamma}^2 + \varrho_{cp} g \sqrt{\frac{h_1^* g_1^*}{2}} \cdot H}. \quad (5.46)$$

Einige Experimente kommen diesem Versuchsaufbau mit $P_H = 0$ sehr nahe [63–65, 68]. Es handelt sich hierbei um eine Geometrie mit zwei Zylindern mit rauher Oberfläche bei denen der innere rotiert. Falls die Zentrifugalkraft vernachlässigbar ist, entspricht das den eben gezeigten Lösungen. Bei diesen Experimenten wird im Allgemein kein „Deckel“ oben aufgesetzt und so erhalten wir zumindest einen qualitativen Anwendungsbereich der obigen Gleichungen.

Es gibt zu den Volumen- oder Druckkontrollierten Experimenten noch eine dritte Möglichkeit des Versuchsaufbaus. Man könnte dies als **Hybridexperiment** bezeichnen. Dabei wird die rotierte Fläche (bzw. Höhe H) während des Experiments konstant gehalten. Soweit entspricht das einem Volumenkontrollierten Experiment. Bei $z = H$ befindet sich aber für das Hybridexperiment *keine* feste Wand. Stattdessen wird das „überschüssige“ Material für größer werdende Scherraten nach oben weggeschoben, das dann seinerseits *nicht* mehr mitrotiert wird wenn es die Marke $z = H$ passiert hat. Dieses aufliegende Material dient als zusätzlicher Beitrag zur Randbedingung für die Normalspannung bei $z = H$, welcher abhängig von der momentan anliegenden Scherrate ist:

$$\sigma_{zz}(H) \equiv P_H + \tilde{m} \varrho_{cp} g H. \quad (5.47)$$

Das ist die „korrigierte“ Randbedingung für ein Druckkontrolliertes Experiment mit Gravitation in Richtung z . Hierbei ist P_H der angelegte Druck verschwindende Scherrate $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Der Parameter $\tilde{m} = \tilde{m}(\dot{\gamma})$ ist der Anteil der Masse an der

Gesamtmasse in der Messzelle, der oberhalb von $z = H$ durch das Anheben des Materials aufgrund einer anliegenden Scherrate zustande kommt. D. h. es muss gelten $\tilde{m}(\dot{\gamma} \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Für ein Druckkontrolliertes System gibt es einen Beitrag mit $\sim \tilde{m}$ nicht, da dabei H variabel ist und das Material niemals über die rotierte Fläche hinausragt. Für \tilde{m} lässt sich folgendes finden:

$$\tilde{m} = 2 \frac{\dot{\Gamma}_{PH}}{G_H} \left(\sqrt{(1 + \dot{\Gamma}_{PH})^2 + G_H H} - (1 + \dot{\Gamma}_{PH}) \right). \quad (5.48)$$

Der Massenanteil \tilde{m} hängt selbst noch von der Höhe H ab. Je größer H ist, umso schwieriger ist es das Material gegen die Gravitation nach oben zu schieben. Dies erklärt sich mit Gleichung (5.36) für ein Druckkontrolliertes Experiment. Je größer H und damit die Gesamtmasse des rotierten Materials ist, desto stärker verschiebt sich der relative Schwerpunkt des Materials in Richtung $z = 0$. Und damit wird für das Hybridexperiment relativ gesehen für größere H weniger Material bei $z = H$ heraus geschoben.

Wir erhalten für die korrigierte Randbedingung

$$\tilde{\sigma}_{zz}(H) \equiv \frac{\sigma_{zz}(H)}{\frac{\rho_{cp}}{4} \frac{h_1^*}{g_1^*}} = \tilde{P}_H \left(1 + 2 \dot{\Gamma}_{PH} \left[\sqrt{(1 + \dot{\Gamma}_{PH})^2 + G_H H} - (1 + \dot{\Gamma}_{PH}) \right] \right). \quad (5.49)$$

Die Dichte und die Spannungen zum Hybridexperiment haben eine sehr ähnliche Form wie für das Druckkontrollierte Experiment, enthalten aber implizit über $\sigma_{zz}(H)$ zusätzliche Abhängigkeiten. Die Parameter $\dot{\Gamma}_{PH}$ und G_H können hier nun leider nicht mehr verwendet werden und wir erhalten:

$$\rho_n(z) = 1 - \frac{\dot{\gamma} / \sqrt{\tilde{\sigma}_{zz}(H)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{zz}(H)}}\right)^2 + \frac{\rho_{cp} g}{\sigma_{zz}(H)} (H - z)}} \quad (5.50)$$

$$-\sigma_{xy}(z) = \sqrt{2 h_1^* g_1^*} \cdot \sigma_{zz}(H) \left[\left(1 + \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{zz}(H)}}\right)^2 + \frac{\rho_{cp} g}{\sigma_{zz}(H)} (H - z) \right] \quad (5.51)$$

$$P_2(z) = \sigma_{zz}(H) \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{zz}(H)}}\right)^2 + \frac{\rho_{cp} g}{\sigma_{zz}(H)} (H - z)} - \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{zz}(H)}} \right)^2 \quad (5.52)$$

Für die mittlere Scherspannung erhält man

$$-\bar{\sigma}_{xy} \equiv -\frac{1}{H} \int_0^H \sigma_{xy}(z) dz = \sqrt{2 h_1^* g_1^*} \cdot \sigma_{zz}(H) \left[\left(1 + \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{zz}(H)}}\right)^2 + \frac{\rho_{cp} g H}{2 \sigma_{zz}(H)} \right] \quad (5.53)$$

Die Besprechung des Hybridexperiments ist kein reines Gedankenexperiment sondern tatsächlich in ähnlicher Weise von Tardos et al. [68] durchgeführt worden. Dabei wurde die Geometrie der zwei ineinander stehenden Zylinder gewählt, wobei der innere von beiden rotiert. Da die Zylinder relativ zu ihrem Radius recht dicht beieinander stehen, werden die experimentellen Ergebnisse im Vergleich zu den besprochenen theoretischen Überlegungen qualitativ ähnliche Resultate liefern. Zumindest können wir die prinzipiellen Abhängigkeiten bezüglich der Scherrate $\dot{\gamma}$ überprüfen. Und tatsächlich erhalten wir befriedigende Resultate. Unter anderem wurden in [68] Experimente mit freier Oberfläche ($\sigma_{zz}(H) = 0$) und ein Hybridexperiment, so wie wir es vorgestellt hatten, durchgeführt. Für das Hybridexperiment wurde außerdem $P_H \neq 0$ gewählt, d. h. es wurde zusätzlich (ruhendes) Material auf das rotierende Medium aufgebracht. Es war deutlich zu erkennen, dass die Scherspannung für das Hybridexperiment stärker von der Scherrate abhängt als für die Experimente mit freier Oberfläche. Trotzdem waren beide Steigungen weit entfernt von dem was für ein Volumenkontrolliertes Experiment (mit $\sim \dot{\gamma}^2$) zu erwarten wäre. Die theoretischen Resultate sind in Abbildung 5.10 zusammengefasst. Die Abbildung liefert einen grundsätzlichen Vergleich aller gewonnenen Ergebnisse dieses Abschnitts. Zu erkennen sind die eben beschriebenen Charakteristika der Experimente von Tardos et al.

An dieser Stelle lässt sich noch ein weiteres Experiment zitieren. Da Cruz et al. [65] wählten den identischen Versuchsaufbau wie in [68]. Die Autoren waren am Messen des sogenannten Scherbands interessiert, das wir im nächsten Kapitel besprechen wollen. Quasi als „Nebeneffekt“ wurden aber Kurven $\bar{\sigma}_{xy}(\dot{\gamma})$ gemessen. Es handelte sich hierbei wieder um Messungen für eine freie Oberfläche bei $z = H$. Aus den Experimenten lässt sich wiederum herauslesen, dass sich trotz recht kräftiger Änderungen in der Scherrate nur relativ geringe Änderungen in der Scherspannung ergaben. Auch dies entspricht unserem Bild des Druckkontrollierten Experiments, für das die Steigungen weit unter denen liegen wie wir es fürs *Bagnold scaling* kennen. Das Experiment wurde in [65] in logarithmischen Skalen dargestellt und leider ist deshalb ein zweites wichtiges Merkmal auf den ersten Blick nicht zu erkennen. In [81] lässt sich eine Abbildung in linearen Skalen finden und wir erkennen sofort, dass wir für $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ einen „Sockel“ in der Scherspannung erhalten: $\bar{\sigma}_{xy}(\dot{\gamma} \rightarrow 0) \rightarrow \textit{konstant}$. Exakt solch ein Verhalten erwarten wir, siehe Gleichung (5.46) und Abbildung 5.10.

5.4 Scherströmungen mit Gravitation senkrecht zu $\nabla \times \mathbf{v}$

Wir befassen uns nun mit Scherströmungen für die die Richtung der Gravitation senkrecht zu $\nabla \times \mathbf{v}$ steht. D. h., dass in Abbildung 4.2 der Vektor der Gravitationsbeschleunigung parallel zur y -Richtung ist. Wir wählen o. B. d. A. $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$. Dadurch wird die y -Komponente der Impulserhaltung modifiziert,

$$\nabla_y \sigma_{yy} = -\varrho_{cp} \varrho_n g \quad \text{mit} \quad \sigma_{yy} \approx P_2 = \frac{a}{2} \varrho_{cp} b(\varrho) \frac{\varrho_n^2}{1 - \varrho_n} T_g^2. \quad (5.54)$$

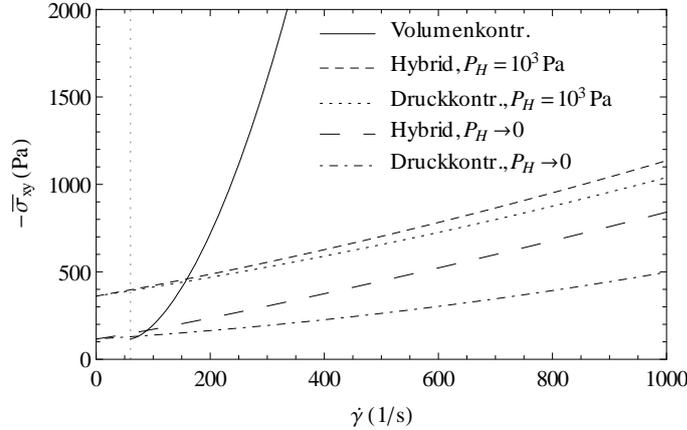


Abbildung 5.10: Dargestellt ist die gemittelte Scherspannung als Funktion der Scherrate. Alle Kurven gemeinsam ist die einfache Schergeometrie mit Gravitation parallel zu $\nabla \times \mathbf{v}$. Für die Materialparameter ρ_{cp} , h_1^* und g_1^* wurden die Werte für die Plastikkügelchen aus Abschnitt 5.2.1 gewählt. Außerdem wurde H bzw. $H(\dot{\gamma} \rightarrow 0)$ mit 10 cm festgelegt. Für das Volumenkontrollierte Experiment wurde zusätzlich $\bar{\rho}_{n,H} = 0,9$ gewählt. Offenbar zeigen die Hybridexperimente eine stärkere Steigung als die Druckkontrollierten Experimente. Die mit Abstand steilste Kurve stammt vom Volumenkontrollierten Experiment. Die senkrechte gepunktete Linie deutet die minimale Scherrate für das Volumenkontrollierte Experiment an.

Die Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponente v_x belassen wir wieder bei $v_x(y = 0) = 0$ und $v_x(y = L) = v_L$. Die Gleichungen für T_g und die x -Komponente der Impulserhaltung lassen wir unverändert mit (5.4) und (5.5). Eine z -Komponente für die Impulserhaltung wie im letzten Kapitel ist diesmal nicht nötig zu betrachten. Für diesen Abschnitt müssen wir eine zusätzliche Näherung einführen. So haben wir in der Gleichung für T_g keine Terme berücksichtigt, die $\sim \kappa_g$ bzw. $\sim \nabla T_g$ sind. Für die bisher besprochenen Problem war dies auch nicht nötig, da solche Terme identisch verschwunden wären. Für das Problem dieses Abschnitts mit Gravitation in Richtung y jedoch nicht. Wir erinnern daran, dass sich für alle Probleme, die wir bisher besprochen hatten ein lineares Geschwindigkeitsfeld $v_x \sim y$ ergab. Dies ist mit Gleichung (5.54) nicht mehr möglich. Die Scherrate wird nun auch eine Funktion des Ortes sein, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(y)$. D. h. aber auch, dass T_g ebenfalls eine Funktion des Ortes ist und $\nabla T_g \neq 0$ sein wird. Wir wollen aber eine analytische Lösung besprechen und setzen $\kappa_g \equiv 0$. Lösungen, die Terme κ_g beinhalten sollen zu einem späteren Zeitpunkt besprochen werden. Die Lösungen dieses Abschnittes haben trotzdem ihren Wert. Temperaturdiffusion (T_g oder T) wird immer von der größeren zur kleineren Temperatur stattfinden, so dass im Gleichgewicht $\nabla T_g = 0$ erfüllt werden kann. Je größer κ_g ist, desto abgeflachter wird das Geschwindigkeitsprofil sein. Falls wir also solche Diffusionsterme weglassen bekommen wir eine Lösung mit der größten Ortsabhängigkeit von T_g in y und damit auch der Scherrate $\dot{\gamma}$. Wir können diese „Maximallösung“ wieder für $\delta = 2$ und $\delta' = 0$ analytisch berechnen.

Zuerst besprechen wir wieder ein **Volumenkontrolliertes Experiment**. Für das Problem dieses Abschnitts halten wir den Abstand der einschließenden Platten L konstant und in die anderen beiden Dimensionen sei das Medium unendlich ausgedehnt, wie wir das bereits für eine Scherströmung ohne Gravitation hatten. Wir erhalten:

$$\varrho_n(y) = \bar{\varrho}_{n,L} + g \cdot \frac{L^3 (1 - \bar{\varrho}_{n,L})^2}{v_L^2 h_1^*/g_1^*} \left(1 - 2 \frac{y}{L}\right), \quad (5.55)$$

$$v_x(y) = v_L \frac{y}{L} \left(1 - g \cdot \frac{L^3 (1 - \bar{\varrho}_{n,L})}{v_L^2 h_1^*/g_1^*} \left(1 - \frac{y}{L}\right)\right). \quad (5.56)$$

Der Parameter $\bar{\varrho}_{n,L}$ ist wiederum die mittlere Dichte mit $\int_0^L \varrho_n dy/L$. Wir erkennen v_L/L als die Scherrate ohne g und wir bekommen folgende modifizierte Scherrate:

$$\dot{\gamma}(y) = \frac{v_L}{L} \left(1 - g \cdot \frac{L^3 (1 - \bar{\varrho}_{n,L})}{v_L^2 h_1^*/g_1^*} \left(1 - 2 \frac{y}{L}\right)\right). \quad (5.57)$$

Die Scherrate wird an der unteren Platte bei $y = 0$ geringer sein als an der oberen Platte bei $y = L$. D. h., dass wir an Stellen mit höherer Dichte eine niedrigere Scherrate erwarten und umgekehrt. Die Lösungen zu $\varrho_n(y)$ und $\dot{\gamma}(y)$ „kippen“ sozusagen um ihre Mittelwerte $\bar{\varrho}_{n,L}$ und v_L/L .

Die Spannungen ergeben sich zu

$$-\sigma_{xy} = \varrho_{cp} \sqrt{\frac{(h_1^*)^3}{8 g_1^*}} \cdot \frac{1}{(1 - \bar{\varrho}_{n,L})^2} \left(\frac{v_L}{L}\right)^2, \quad (5.58)$$

$$P_2(y) = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{2 h_1^* g_1^*}} (\varrho_n(y))^2. \quad (5.59)$$

Die Scherspannung ist natürlich aufgrund von $\nabla_y \sigma_{xy} = 0$ eine Konstante, wohingegen P_2 via ϱ_n abhängig vom Ort ist.

Für ein **Druckkontrolliertes Experiment** soll nun die Randbedingung $\sigma_{yy}(L) = P_L$ gelten. Der Plattenabstand L wird deshalb eine Funktion von der angelegten Geschwindigkeit der oberen Platte v_L sein. Wir erhalten

$$L = \mu_L \left(1 + 4 \frac{v_L}{\mu_L \sqrt{\tilde{P}_L}} \sqrt{\frac{(1 + G_L/2 - \sqrt{1 + G_L})/G_L^2}{1 + \sqrt{1 + 8 \frac{v_L}{\mu_L \sqrt{\tilde{P}_L}} \cdot \frac{\sqrt{1+G_L-1}}{G_L}} + 4 \frac{v_L}{\mu_L \sqrt{\tilde{P}_L}} \cdot \frac{\sqrt{1+G_L-1}}{G_L}}}}\right) \quad (5.60)$$

$$\text{mit } G_L \equiv \frac{\varrho_{cp} g \mu_L}{P_L} \quad \text{und} \quad \mu_L \equiv \int_0^L \varrho_n dy. \quad (5.61)$$

Der Parameter μ_L ist hierbei eine Materialkonstante. In Abbildung 5.11 ist L für verschiedene G_L als Funktion der Plattengeschwindigkeit v_L dargestellt.

Diese Funktion $L(v_L)$ setzen wir in die oben erhaltenen Gleichungen für ϱ_n , σ_{xy} und P_2 ein und können damit ein Druckkontrolliertes Experiment beschreiben.

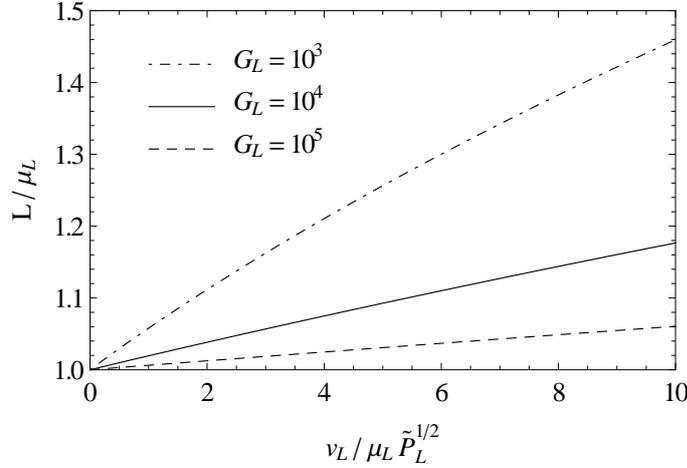


Abbildung 5.11: Es ist der Plattenabstand L als Funktion der Plattengeschwindigkeit v_L für verschiedene G_L dargestellt.

Auch für diese Resultate erhalten wir Grenzfälle für die die Lösungen nicht mehr gelten können. Je kleiner wir v_L wählen, umso stärker wird die Scherrate bzw. die Geschwindigkeit v_x von der Lösung mit $g \equiv 0$ abweichen. Nun kann die Dichte aber höchstens $\varrho_n(0) = 1$ oder wenigstens $\varrho_n(L) = 0$ sein. Man bekommt also eine minimal mögliche Randbedingung v_L . Wir weisen wieder darauf hin, dass Dichten im Bereich nahe bei $\varrho_n \approx 0$ nicht hinreichend durch die vorhandenen Ansätze abgedeckt sind. Trotzdem geben wir die Ergebniss der Vollständigkeit halber mit an und wir bekommen folgende Bedingungen:

$$\text{Für } 1 > \bar{\varrho}_{n,L} \geq \frac{1}{2} \quad \text{gilt} \quad v_L \geq \sqrt{\frac{g L^3}{h_1^*/g_1^*}} \cdot \sqrt{1 - \bar{\varrho}_{n,L}} \quad (5.62)$$

$$\text{und für } \frac{1}{2} > \bar{\varrho}_{n,L} > 0 \quad \text{gilt} \quad v_L \geq \sqrt{\frac{g L^3}{h_1^*/g_1^*}} \cdot \frac{1 - \bar{\varrho}_{n,L}}{\sqrt{\bar{\varrho}_{n,L}}}. \quad (5.63)$$

Diese Ergebnisse gelten unabhängig ob es sich nun um ein Volumen- oder ein Druckkontrolliertes Experiment handelt. Für ein Druckkontrolliertes Experiment müssen wir L nur durch den entsprechend abgeleiteten Ausdruck ersetzen. L enthält natürlich selbst den Parameter v_L , so dass man die Ungleichung noch einmal nach v_L auflösen muss. Dies ist leicht möglich und wir sparen uns die Angabe der Lösung.

Ein Experiment, das zu diesem Abschnitt passt, brauchen wir nicht extra diskutieren. Die Experimente von Savage und Sayed [59], die wir bereits diskutiert hatten, entsprechen bereits der Konstellation dieses Abschnitts. Einen Einfluss auf die Ergebnisse für σ_{xy} durch die Gravitation gibt es nicht und h_1^* , g_1^* werden durch die Modifikationen in P_2 nur unwesentlich verändert, so dass wir die gefundenen Resultate dieses Abschnitts nicht auf die Experimente aus [59] anwenden brauchen und auch nicht ein weiteres Mal präsentieren müssen. Wir können aber mit den eben aufgestellten Ungleichungen eine Abschätzung für die Experimente aus [59] machen.

Die Parameter $\varrho_{n,L}$, h_1^* , g_1^* und L sind uns unter anderem für Plastikkügelchen aus Abschnitt 5.2.1 bekannt und wir erhalten für v_L bzw. der „scheinbaren“ Scherrate v_L/L :

$$v_L/L \geq 80 \text{ Hz.} \quad (5.64)$$

Und für die Glaskügelchen:

$$v_L/L \geq 30 \text{ Hz.} \quad (5.65)$$

Dies entspricht in etwa den Messpunkten mit den kleinsten Scherraten des Experiments. Die Autoren gaben an, dass sie für kleiner werdende Scherrate $\dot{\gamma}$ irgendwann in einen Bereich kamen, für den es nicht mehr möglich war eine Geschwindigkeit $v_x > 0$ für das gesamte Medium herzustellen. Es bildete sich unterhalb einer bestimmten Scherrate ein sogenanntes Scherband aus, siehe hierzu Kapitel 6. Diese Messpunkte haben die Autoren nicht mit in ihre Graphiken übernommen. Das System sucht sich also für eine gewisse Plattengeschwindigkeit v_L eine alternative Lösung mit dem Scherband. Wir vermuten hierbei, dass die oben angegebenen Ungleichungen dabei verletzt werden und damit das System gezwungen wird in diese zweite Lösung zu „springen“. Zumindest entsprechen die Größenordnungen der theoretischen minimalsten Scherraten v_L/L und der Messpunkte für die kleinsten Scherraten einander.

5.5 Scherströmungen auf der geneigten Ebene

Wir besprechen in diesem Abschnitt eine Strömung auf einer geneigten Ebene, siehe Abbildung 5.12. Das Material habe eine Höhe H für alle x und schließt denselben Winkel φ mit der Waagrechten ein wie die geneigte Ebene. Dies schließt „Aufschüttphänomene“ aus, d. h. das gesamte Material soll jederzeit fließen und nicht eine zweite Oberfläche bilden an der das Material dann tatsächlich hinunter gleitet. Diese Konstellation wird auch *heap flow* genannt und der Winkel φ ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad des Systems.

Auch für diese Geometrie haben wir das Problem der Diffusion von T_g , die wir wieder vernachlässigen wollen. Somit gelten die Einschränkungen auf die selbe Weise wie für den letzten Abschnitt besprochen. So werden nur die Gleichungen für die Impulserhaltung modifiziert und man erhält für die x - und die y -Komponente:

$$\nabla_y \sigma_{xy} = \varrho_{cp} \varrho_n g \sin \varphi \quad \text{mit} \quad \sigma_{xy} \approx -\frac{\eta_1}{2} T_g \dot{\gamma}, \quad (5.66)$$

$$\nabla_y \sigma_{yy} = -\varrho_{cp} \varrho_n g \cos \varphi \quad \text{mit} \quad \sigma_{yy} \approx P_2 = \frac{a}{2} \varrho_{cp} b(\varrho) \frac{\varrho_n^2}{1 - \varrho_n} T_g^2. \quad (5.67)$$

Wir übernehmen die bekannte stationäre Lösung für T_g , setzen diese in die aufgestellten Differentialgleichungen ein und erhalten zwei verbleibende Variablen mit ϱ_n und v_x . Eine zusätzliche Geschwindigkeitskomponente v_y kann es aus Symmetriegründen wiederum nicht geben.

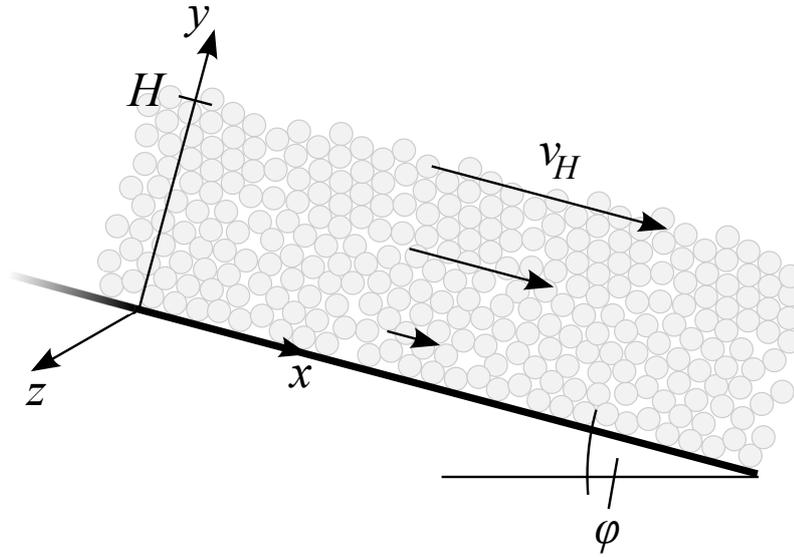


Abbildung 5.12: Strömung auf einer geneigten Ebene, die mit der Horizontalen den Winkel φ einschließt. Das Koordinatensystem ist ebenfalls um den Winkel φ gedreht. Das System sei in x - und z -Richtung unendlich ausgedehnt und zeige bei $y = H$ eine freie Oberfläche. Die Darstellung ist nahe der freien Oberfläche idealisiert. Es wird keine derartig scharfe „Materialkante“ geben. Es ist viel eher ein Übergang zu einem granularen Gas zu beobachten.

Die Randbedingungen finden wir an der freien Oberfläche mit

$$\sigma_{xy}(H) = \sigma_{yy}(H) = 0. \quad (5.68)$$

Damit lässt sich als erstes eine allgemeine „Bedingung“ für solch eine Strömung finden. Integration der Impulsgleichungen und Einsetzen der Randbedingungen liefert

$$\sigma_{xy} = -\varrho_{cp} g \sin \varphi \int_y^H \varrho_n dy' \quad \text{und} \quad \sigma_{yy} = \varrho_{cp} g \cos \varphi \int_y^H \varrho_n dy'. \quad (5.69)$$

Dividiert man beide Gleichung erhält man einen universellen Zusammenhang, der gültig ist ungeachtet des verwendeten Materials (und der Theorie):

$$-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = \tan \varphi. \quad (5.70)$$

Daraus lässt sich unmittelbar die Dichte des Systems bestimmen indem wir die Ausdrücke für die Spannungen einsetzen, bzw. wir lesen den Quotienten der Spannungen einfach aus Gleichung (5.11) ab und setzen der Einfachheit halber $\delta' = 0$,

$$\frac{\sqrt{2 h_1^* g_1^*}}{\varrho_n^2} = \tan \varphi \quad (5.71)$$

$$\rightarrow \varrho_n = \frac{(2 h_1^* g_1^*)^{1/4}}{\sqrt{\tan \varphi}}. \quad (5.72)$$

Die Dichte ist einzig durch den Neigungswinkel φ bestimmt und hat für alle y den gleichen Wert. Experimentelle Ergebnisse zeigen [73–77], dass die Dichte tatsächlich über einen großen Bereich von y ziemlich konstant bleibt. In der Nähe der freien Oberfläche beobachten man aber einen starken Abfall von ϱ , so dass die gefundene Lösung nicht mehr gültig sein kann. Es zeigt sich ein Übergang zum granularen Gas, der in der Theorie nicht enthalten ist. Während in den anderen Abschnitten mit freier Oberfläche noch ganz passable Ergebnisse für die Dichteverteilung nahe der freien Oberfläche erzielt werden konnte, schlägt dies für die geneigte Ebene leider fehl. Der Ansatz und die Lösung gilt also definitiv nur in einem Bereich, der hinreichend weit entfernt von der freien Oberfläche liegt. Da der Abfall der Dichte in der Tat erst sehr nahe an der freien Oberfläche passiert, hat die Betrachtung dieses Abschnitts durchaus ihren Wert.

Gleichung (5.72) definiert uns interessanterweise einen minimalen Winkel, da die Dichte höchstens $\varrho_n = 1$ sein kann. Man erhält

$$\varphi_{min} = \arctan \left(\sqrt{2 h_1^* g_1^*} \right). \quad (5.73)$$

Man muss allerdings mit diesem φ_{min} vorsichtig sein. Es ist zu erwarten, dass das System schon für eine Dichte mit $\varrho < \varrho_{cp}$ zum stoppen kommt. Eine kurze Diskussion hierzu findet sich in den Abschnitten zur Scherbandlösung. Die beiden Größen h_1^* und g_1^* konnten wir in diesem Kapitel unter anderen für Plastikkügelchen bestimmen und wir bekommen dafür $\varphi_{min} \approx 14^\circ$. Dies definiert einen zweiten Winkel in einem granularen System, den wir Stopwinkel nennen können. Der erste Winkel ist gegeben durch den *yield*. Beginnt man die Experimente auf der Ebene (mit ruhendem Granulat) bei $\varphi = 0$ und erhöht sukzessive den Winkel wird das Granulat erst ab einem bestimmten Winkel zu fließen beginnen (*yield*). Für Sand liegt dieser Winkel in etwa bei $\approx 30^\circ$ [2]. Es wird also höchstwahrscheinlich einen Zwischenbereich geben für den ein ruhendes als auch ein fließendes Granulat möglich ist $\varphi_{min} < \varphi < \varphi_{yield}$. Theoretisch möglich ist natürlich auch der Fall, dass $\varphi_{min} > \varphi_{yield}$ ist. Dann gäbe es einen Bereich für den eine dritte bzw. gar keine Lösung möglich ist. Ein beobachteter Fall so einer Konstellation ist uns aber nicht bekannt.

Es gilt noch die Geschwindigkeit v_x zu bestimmen. Die Lösung einer der beiden Impulsgleichungen zusammen mit der Lösung für die Dichte liefert

$$v_x = v_H \left(1 - \left[1 - \frac{y}{H} \right]^{3/2} \right) \quad \text{mit} \quad v_H \equiv \frac{4}{3} \sqrt{\frac{g \cos \varphi}{h_1^*/g_1^*}} \cdot H^{3/2} \cdot \frac{1 - \varrho_n}{\sqrt{\varrho_n}}. \quad (5.74)$$

Der Experimentator wird aber weder v_H noch H als Parameter bzw. Randbedingung wählen. Es ist üblicher den Massenstrom vorzugeben. Wir definieren $J \equiv \text{Masse}/\text{Zeit} \cdot \text{Breite}$. Hierbei meint Breite die Ausdehnung des Experiments in z -Richtung. Es lässt sich folgendes finden:

$$J \equiv \int_0^H \varrho v_x dy = \frac{3}{5} \varrho v_H H. \quad (5.75)$$

Dies ist also der Massenstrom entlang der geneigten Ebene und ist für alle x gültig. Mit J lässt sich H in der Lösung für v_x ersetzen. Die Höhe der Strömung H ist so wieso eine recht schwache Variable, beinhaltet sie die Lösung der konstanten Dichte

auch an der Oberfläche. Ebenso wird die Geschwindigkeitsverteilung deswegen auch an der freien Oberfläche nicht korrekt sein. Nichtsdestotrotz liefert uns $v_x(y)$ eine Skalierung mit $(1 - y/H)^{3/2}$, was auch *Bagnold-profile* genannt wird [64] und in Experimenten (mit der Einschränkung an der freien Oberfläche) gemessen werden konnte [77].

Für ein Volumenkontrolliertes Experiment konnte zu Beginn des Kapitels das sogenannte *Bagnold scaling* gezeigt werden. Desweiteren haben wir gezeigt, dass die Steigung der Spannungskurven als Funktion der Scherrate für Druckkontrollierte Experimente vom Material abhängt. Es konnte ein zufriedenstellender Abgleich mit dem Experiment hergestellt werden und wir haben sukzessive Gravitation in die Diskussion mit eingebaut. Als letztes haben wir eine Strömung auf der geneigten Ebene (mit Einschränkungen) beschrieben und haben insgesamt mindestens qualitativ übereinstimmende Ergebnisse mit bestehenden Experimenten erzielen können.

Kapitel 6

Verformungen im Zwischenbereich

Dieses Kapitel ist für Effekte reserviert, die sich nicht eindeutig als *critical state* oder *seismisch* einordnen lassen. Seither hatten wir deshalb den Spannungstensor in zwei grundsätzliche Teile getrennt. Es wird aber nicht immer der Fall sein, dass Experimente in dem ein oder dem anderen Limit durchgeführt werden. Nicht nur deswegen, sondern auch aufgrund der interessanten Effekte die sich aus der Theorie herauslesen lassen, werden wir den Spannungstensor σ_{ij} als Ganzes betrachten. Zudem werden wir eine alternative Lösung zu den vorgestellten, größtenteils homogenen Lösungen der letzten Kapitel vorstellen. Diese Lösung wird dem Effekt der Phasentrennung, wie wir es zum Beispiel von einem van-der-Waals-Gas kennen, ähneln.

6.1 Spannungstensor

Kapitel 4 und 5 waren jeweils dafür reserviert einen Teil des Spannungstensors zu analysieren. Der u_{ij} -dominierte Teil führte uns auf den *critical state* und der T_g -dominierte Teil lieferte unter anderem das *Bagnold scaling*. Getrennt wurden diese beiden Bereiche letztlich durch die Scherrate, die die Größe von T_g wesentlich bestimmt. Dies soll uns nun nicht mehr genügen. Wir werden in diesem Abschnitt die Frage klären, wie die Spannungs-Scherraten-Kurven aussehen, wenn man man beide Bereiche verbindet (Abbildung 6.1).

Auch experimentell wurde die Fragestellung nach großen Änderungen in der Scherrate schon bearbeitet [51–54, 67]. Hierbei wurde die Geometrie mit zwei ineinander stehenden Zylindern bevorzugt verwendet. Es ist gelungen, die Scherrate über bis zu sechs Größenordnungen hinweg zu kontrollieren. Dies sollte genügen um den Übergang vom Bereich, der unabhängig von der Scherrate ist zum Bereich, der (variable) Abhängigkeiten zeigt, zu veranschaulichen. So zeigten Experimente, die eher Druckkontrolliert sind (d. h. hauptsächlich vom Eigengewicht zusammen gehalten werden), ein Minimum für $\dot{\gamma} > 0$ in den Graphiken zu der gemessenen Scherspannung als Funktion der Scherrate [51–54]. Wobei dies wiederum eine Frage des Materials zu sein scheint. In [53] wurden Experimente über viele Größenordnungen an unterschiedlichen Materialien durchgeführt. Die Scherspannungs-Scherraten-Kurve zeigte je nach Material ein Minimum oder auch nicht. Die Antwort nach einem

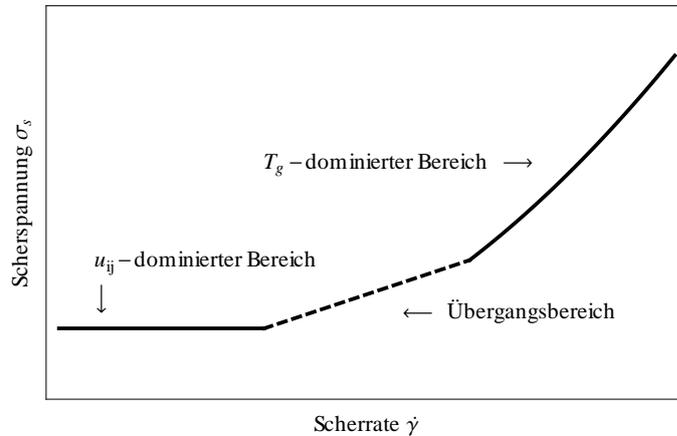


Abbildung 6.1: Die Scherspannung ist als Funktion der Scherrate dargestellt. Für kleine Scherraten kennen wir die Lösung mit dem *critical state*. Für größere Scherraten erhalten wir je nach Randbedingung eine bestimmte Steigung mit $\dot{\gamma}$. Der „Zwischenbereich“ ist bisher von uns noch nicht analysiert worden. Dabei wird sich die Frage stellen, wie sich die Wahl der Randbedingung auf diesen noch unbekanntem Bereich auswirkt.

„echt“ Volumenkontrolliertes Experiment lässt sich nicht einfach finden. Ab einem gewissen Scherratenbereich ist es offenbar ausgeschlossen Messungen ohne den Einfluss der Gravitation auszuführen. Dies wird aber womöglich gerade der Bereich sein, der den Übergang markiert. Wir finden deshalb kein Experiment, das über viele Größenordnungen hinweg in der Lage wäre eine Messung Volumenkontrolliert ohne den Einfluss gravitativer Effekte aufrecht zu erhalten. Wir werden jedoch auf das uns bereits bekannte Volumenkontrollierte Experiment von Savage und Sayed [59] berufen. Auch bei diesem Experiment gibt es keine Messungen für den niederen Scherratenbereich. Wir erinnern daran, dass das System für kleiner werdende Scherraten die alternative Lösung des Scherbands, siehe nächster Abschnitt, gewählt hat. Es ließen sich allerdings in den Messkurven zum Quotienten aus Scherspannung zu Normalspannung gewisse Tendenzen ablesen. Wir werden dies im folgenden noch besprechen.

Da wir an qualitativen Eigenschaften der Lösung interessiert sind, werden wir wieder die einfache Schergeometrie bevorzugen. Wir beschränken uns auf stationäre Systeme mit $v_x(L) = v_L$. Explizit sollen wiederum Volumen- und Druckkontrollierte Systeme betrachtet werden. Auch hier identifizieren wir wieder große qualitative Unterschiede.

Wir müssen nun prinzipiell dieselben Gleichungen für u_{ij} , T_g , ϱv_k und ϱ lösen wie in Abschnitt 4.2 vorgestellt und diskutiert. Das betrachtete System wird wieder homogen sein (außer für v_x , dafür in $\dot{\gamma}$). Die Lösungen für u_{ij} , T_g , ϱ und v_k können deshalb einfach aus dem besagten Abschnitt übernommen werden. Es gilt zu beachten, dass wir für u_{ij} die „Variante“ ohne Normalverzerrungsdifferenzen gewählt

haben. D. h. es bleiben für die Verzerrungen nur u_{xy} und Δ übrig, siehe Gleichung (4.58) und (4.60). Wir gehen sogar noch einen Schritt weiter: Wir setzen $\mathcal{K}_0 = 0$ und wählen $\Phi(\dot{\gamma}d) \approx 1$. Eine Betrachtung dieser Größen würde nur unwesentlich zur qualitativen Betrachtung dieses Kapitels beitragen und deshalb vernachlässigen wir diese Beiträge schon an dieser Stelle.

Obwohl wir die Lösungen aus Abschnitt 4.2 übernehmen konnten gilt es zu beachten, dass wir den Spannungstensor allgemeiner betrachten müssen, als wir dies in dem angesprochenen Abschnitt getan hatten. Denn für diesen Abschnitt dürfen wir keine grundsätzlichen Einschränkungen bezüglich der Größenordnungen von Termen $\sim u_{ij}$ und $\sim T_g$ im Spannungstensor stellen. Stattdessen müssen erst einmal alle Terme berücksichtigt werden. Wir finden für die Scherspannung σ_{xy} und die Normalspannung $\sigma_{\ell\ell}/3$:

$$-\sigma_{xy} = -\Pi_{xy} + \varrho_{cp} \sqrt{\frac{(h_1^*)^3}{8g_1^*}} \cdot \frac{1}{(1 - \varrho_n)^{\delta - \delta'}} \cdot \dot{\gamma}^2, \quad (6.1)$$

$$\frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} = \Pi_{\ell\ell} + \frac{\varrho_{cp}}{4} \cdot \frac{h_1^*}{g_1^*} \cdot \frac{\varrho_n^2}{(1 - \varrho_n)^\delta} \cdot \dot{\gamma}^2. \quad (6.2)$$

Um uns Schreibarbeit zu sparen haben wir die Anteile $\sim u_{ij}$ symbolisch als Π_{xy} und $\Pi_{\ell\ell}$ zusammengefasst. Man kann diese Teile mit Gleichung (4.66) und (4.67) nachlesen. Wir erkennen für den Quotienten aus Scherspannung und Normalspannung zwei Grenzfälle. Für verschwindende Scherraten ist das Verhältnis durch die elastischen Anteile gegeben und für $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ erhält man $-\sigma_{xy}/(\sigma_{\ell\ell}/3) \approx \sqrt{2} h_1^* g_1^* / \varrho_n^2$. D. h. der Grenzfall für große Scherraten ist unabhängig von der Scherrate, da die Spannungen für ein volumenkontrolliertes Experiment dieselbe Abhängigkeit von der Scherrate zeigen. Für ein druckkontrolliertes Experiment wird die Dichte eine Funktion der Scherrate sein, so dass das Spannungsverhältnis bzw. σ_{xy} eine Funktion der Scherrate bleibt.

Wir werden den Parameter α_3 , der in der Gleichung für $\sigma_{\ell\ell}$ auftaucht, für den weiteren Verlauf Null setzen. Zum einen ist der Term $\sim \alpha_3$ nicht von führender Ordnung in $\sigma_{\ell\ell}$ und zum anderen können wir α_3 nicht auf einen Bereich einschränken. Der Parameter α_2 taucht an mehreren Stellen auf. So sind die Lösung zu u_{xy} und Δ , und damit auch σ_{ij} abhängig von α_2 . Zudem ist α_2 wichtig für die thermodynamische Stabilität der Lösung von u_{ij} , so dass wir diesen Parameter auf jeden Fall in unsere Diskussion mit einbeziehen müssen. Dadurch wird es nötig α_2 als Funktion der Dichte ϱ anzusetzen. Schließlich betrachten wir auch druckkontrollierte Experimente für die $\sigma_{\ell\ell}(\varrho)$ invertiert werden muss. Wir finden:

$$\alpha_2 = a_2 (1 - \varrho_n). \quad (6.3)$$

Dieser Ansatz beruht auf der Annahme, dass der Quotient $\sigma_{xy}/\sigma_{\ell\ell}$ im Bereich des *critical state* weitestgehend unabhängig von der Dichte ϱ ist [40, 57]. Daraus lässt sich der angegebene Zusammenhang leicht ableiten.

Mit diesen Angaben können wir nun direkt den Übergangsbereich für verschiedene Randbedingungen betrachten. Dabei wählen wir wieder die Einteilung in Volumen- und druckkontrollierte Experimente.

6.1.1 Volumenkontrolliertes Experiment

In diesem Abschnitt besprechen wir den Übergangsbereich für ein Volumenkontrolliertes Experiment. D. h., dass wir den Plattenabstand L in y -Richtung konstant halten, siehe Abbildung 4.2. Der Zusammenhang zwischen der Scherspannung und der Scherrate ist bereits im Vorlauf dieses Kapitels geklärt worden. Für ein Volumenkontrolliertes und damit in ϱ , $\dot{\gamma}$ und u_{ij} homogenes Experiment sind damit keine zusätzlichen Umformungen oder Angaben notwendig. Wir können also direkt zur Auswertung der Ergebnisse schreiten. Als Hinweis sei gesagt, dass mit unseren Annahmen σ_{yy} und $\sigma_{\ell\ell}/3$ identisch sind. Abbildungen 6.2 zeigen die Resultate.

Wir erkennen in den Abbildungen 6.2, dass für die Scherspannung eigentlich nicht viel zu sehen ist. Eine extra Abbildung für $\sigma_{\ell\ell}$ haben wir uns erspart, da dies im Prinzip dem Bild für σ_{xy} qualitativ entspricht. Durch die Hinzunahme der elastischen Anteile Π_{xy} „rutscht“ die Kurve für σ_{xy} zu höheren Spannungen. Das Entscheidende ist, dass dieses Anheben konstant für den gesamten Scherratenbereich ist. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da wir die Lösungen der Terme mit $\sim u_{ij}$ als unabhängig von der Scherrate kennengelernt hatten. Daran hat auch die Verallgemeinerung des Spannungstensors nicht geändert.

Spannender ist hingegen der Quotient der Spannungen wie das untere Bild aus Abbildung 6.2 zeigt. Je nach Verhältnis der elastischen Anteile $\Pi_{xy}/\Pi_{\ell\ell}$ ändert sich die Form der Kurven und wir bekommen als Grenzwert für $\dot{\gamma}$ ein Verhältnis der Spannungen, das ober- oder unterhalb der T_g -dominierten Lösung liegt. Dies ist insofern interessant, dass dieser Effekt der offensichtlichste für Volumenkontrollierte Experimente sein wird.

Dazu lassen sich wiederum die Experimente von Savage et al. [59] heranziehen. In den Abbildungen 5.6 und 5.7 waren die Spannungen als Funktion der Scherrate aufgetragen. Leider konnten aufgrund des Scherbandeffektes unterhalb von $\approx 100 \frac{1}{s}$ keine Messungen gemacht werden. Es lässt sich mit einer Anpassung der Formeln nicht endgültig klären ob nun ein konstanter Anteil Π_{xy} und $\Pi_{\ell\ell}$ vorhanden ist. Letzlich wissen wir auch nicht ob eine elastische Lösung für die verwendeten Materialien bei den getesteten Dichten überhaupt thermodynamisch stabil ist. Jedoch haben die Autoren auch explizit das Verhältnis σ_{xy}/σ_{yy} gemessen. Es konnten zwei Tendenzen festgestellt werden: Für Plastikkügelchen hatten die Kurven die Tendenz etwas abzufallen, wie die Strich-Punkt-Kurve des unteren Bildes aus Abbildung 6.2. Und für Glaskügelchen zeigte sich eine Tendenz für kleiner werdende Scherraten anzusteigen, wie die gestrichelte Kurve des unteren Bildes aus Abbildung 6.2. Wir müssen allerdings für diese Experimente den Einfluss der Gravitation beachten. Wir erinnern an die Diskussion aus Abschnitt 5.4. Wir hatten für ein T_g -dominiertes Experiment festgestellt, dass die Scherspannung durch die Gravitation im Vergleich zu einem Experiment ohne Gravitation nicht verändert wird. Die Normalspannung wird hingegen durch Gravitation beeinflusst. Vergleichen wir die Ergebnisse mit der Lösung ohne Gravitation, wird der Druck an der Platte bei $y = L$ etwas herabgesetzt werden. Je kleiner die Scherrate, umso kleiner der Druck bei $y = L$. Dieser Effekt ist nicht sonderlich groß, bewirkt aber, dass der Quotient σ_{xy}/σ_{yy} die Tendenz hat für kleiner werdende Scherraten anzusteigen. Dies würde prinzipiell in etwa der

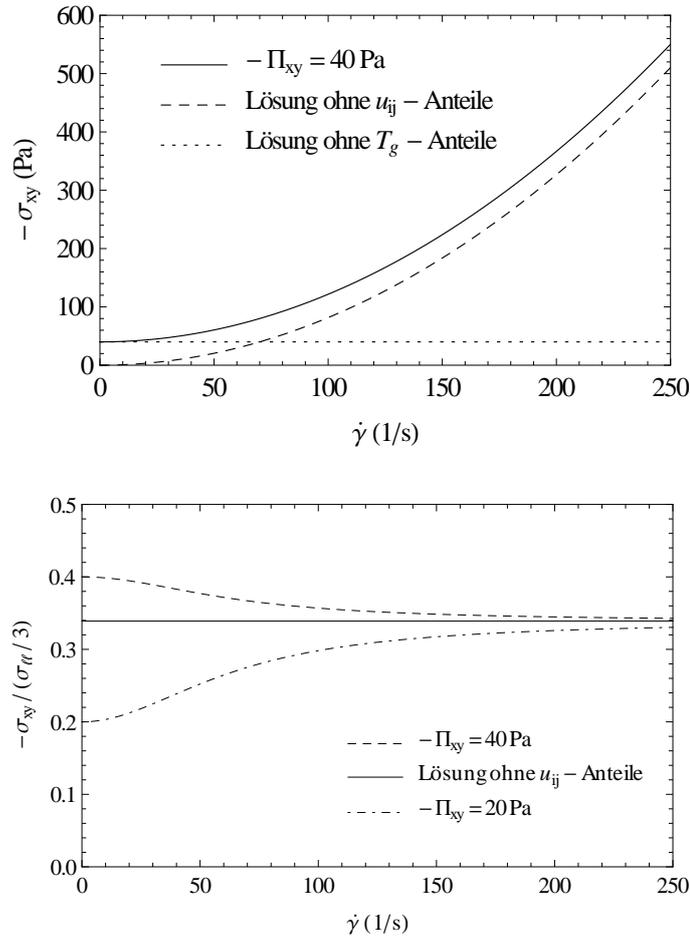


Abbildung 6.2: Im oberen Bild ist die Scherspannung als Funktion der Scherrate $\dot{\gamma}$ dargestellt. Im unteren Bild wurde der Quotient aus σ_{xy} und $\sigma_{\ell\ell}$ gegen die Scherrate aufgetragen. Der elastische Scheranteil Π_{xy} wurde für die jeweilige Kurve explizit angegeben. Für $\sigma_{\ell\ell}$ war es auch notwendig einen elastischen Anteil miteinzubeziehen: $\Pi_{\ell\ell} = 100$ Pa. Die Werte entsprechen in etwa $\Delta \approx u_s \approx 10^{-3}$ und $\mathcal{B}_0 \approx 10^6$ Pa bei einer Dichte von $\varrho_n = 0,85$. Desweiteren wurden Kurven eingezeichnet, die wahlweise Anteile mit $\sim u_{ij}$ oder $\sim T_g$ nicht enthalten. So erkennen wir im oberen Bild mit der gepunkteten Linie den *critical state*. Die restlichen Werte wurden folgendermaßen gewählt: $\varrho_{cp} = 1000$ kg/m³, $h_1^* = 3 \cdot 10^{-3}$ m, $g_1^* = 100 \frac{1}{m}$, $\delta = 2$ und $\delta' = 0$.

gestrichelten Kurve des unteren Bildes aus Abbildung 6.2 entsprechen. Damit ließe sich aber nicht das „Abfallen“ zu kleiner werdenden Scherraten für die Plastikkügelchen erklären. Falls es keine andere, uns nicht bekannte Ursache für dieses Verhalten gibt, sehen wir hier ein Beispiel eines Übergangseffekts für ein volumenkontrolliertes Experiment. Abbildung 6.3 zeigt die experimentellen Daten für die Messung des Spannungsquotienten.

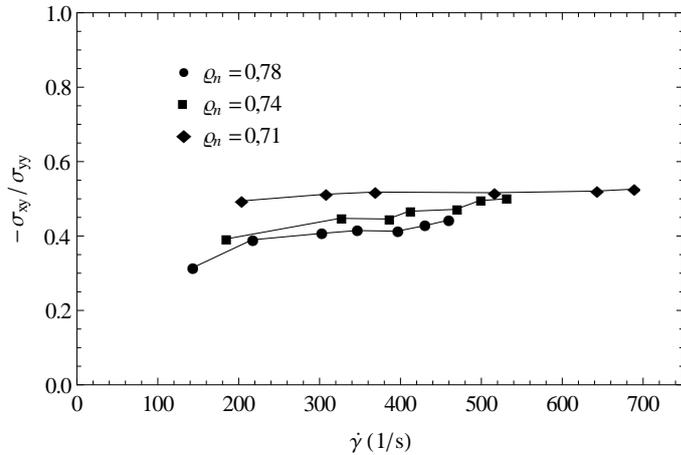


Abbildung 6.3: Messung des Spannungsquotienten σ_{xy}/σ_{yy} als Funktion der Scherrate $\dot{\gamma}$ für Plastikkügelchen aus [59] für verschiedene Dichten. Es lässt sich eine Tendenz feststellen, dass der Spannungsquotient keine Konstante bezüglich der Scherrate ist, sondern für kleiner werdende Scherraten abfällt.

6.1.2 Druckkontrolliertes Experiment

Für das Druckkontrollierte Experiment wählen wir wieder die einfache Schergeometrie unter stationären Bedingungen. Bei $y = L$ soll nun die Normalspannung σ_{yy} ($= \sigma_{\ell\ell}/3$) konstant gehalten werden. Es gilt also $\sigma_{yy}(L) = P_L$. Dadurch wird ϱ_n bzw. der Plattenabstand L wieder eine Funktion der angelegten Geschwindigkeit $v_x(L) = v_L$. Die relevanten Komponenten des Spannungstensor kennen wir bereits mit Gleichung (6.1) und (6.2). Da die y -Komponente der Impulserhaltung mit $0 = \nabla_y \sigma_{yy}$ eine homogene Lösung für die Normalspannung vorsieht, können wir Gleichung (6.2) im gesamten Bereich zwischen den Platten mit P_L gleichsetzen, wie wir das auch im vorangegangenen Kapitel gemacht hatten. Anschließend invertieren wir diese Gleichung und erhalten $\varrho = \varrho(\dot{\gamma}, P_L)$. Dies ist leider nur numerisch möglich. Die Funktion $\varrho(\dot{\gamma}, P_L)$ lässt sich in σ_{xy} einsetzen, so dass wir $\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(\dot{\gamma}, P_L)$ erhalten. Diese Funktionen sind in den Abbildungen 6.4 und 6.5 dargestellt.

Es zeigen sich interessante Verläufe der Kurven zu σ_{xy} . Je nach Wahl des Parameters a_2 zeigen die Kurven ein Minimum. Diese „Senke“ ist charakteristisch für ein Druckkontrolliertes Experiment. Für ein Volumenkontrolliertes Experiment ließ sich kein solches Minimum feststellen, da der Quotient aus Scherspannung und Normalspannung für große Scherraten konstant ist, siehe Abbildung 6.2. Falls die Abhängigkeit der Scherspannung σ_{xy} von der Scherrate für ein Druckkontrolliertes Experiment nur sehr gering sein sollte, ähneln sich die Graphiken von Volumen- und Druckkontrollierten Experimenten. Dies gilt auch für den Fall, dass man nicht allzu weit in Regionen mit großen Scherraten vorstößt. So könnte man für den Quotienten $\sigma_{xy}/(\sigma_{yy}/3)$ in solch einem eingeschränkten Bereich eine universelle empirische Formel angeben, die diese Kurven näherungsweise beschreibt. Dies wurde mit entsprechendem Erfolg bereits vollzogen, siehe hierzu [64, 76, 81, 82]. Wir sehen

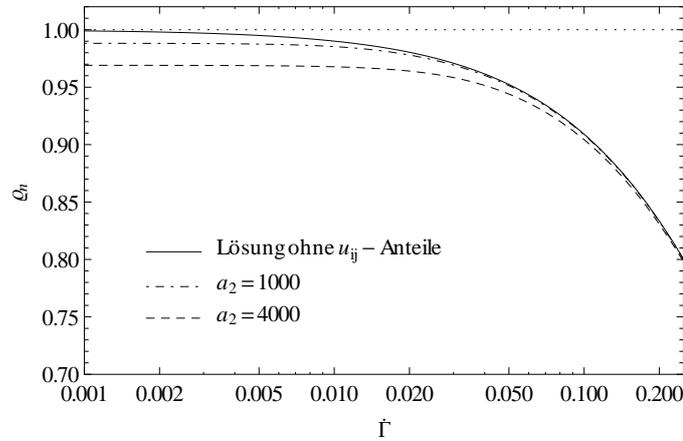


Abbildung 6.4: Dichte als Funktion der Scherrate $\dot{\Gamma}$ für verschiedene Parameter a_2 . Die durchgezogene Kurve zeigt das bekannte Ergebnis aus dem letzten Kapitel ohne Anteile $\sim u_{ij}$ im Spannungstensor. Die verwendeten Werte sind: $\rho_{cp} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho^* = 2 \rho_{cp}/3$, $h_1^* = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $g_1^* = 100 \frac{1}{\text{m}}$, $\delta = 2$, $\delta' = 0$, $1 - \alpha_0 = 0,3$, $\alpha_3 = 0$, $\tilde{\Lambda}_0 = 2500$, $\tilde{\Lambda}_1 = 250$, $\mathcal{B}_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\xi = 5/3$ und $P_L = 1000 \text{ Pa}$.

allerdings davon ab diese empirische Formel mit den hier gefundenen Resultaten zu vergleichen, da der Anwendungsbereich doch sehr eingeschränkt ist.

In Abbildung 6.5 wurde der Parameter a_2 variiert. Dies ist natürlich nicht der einzige Parameter der Einfluss auf den Kurvenverlauf hat. Um dies zu analysieren bilden wir den Limes für kleine Scherraten $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ und betrachten nur die führenden Ordnungen zu u_{ij} in σ_{ij} , wobei Anteile $\sim T_g$ für $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ identisch verschwinden. Wir erhalten:

$$-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{\ell\ell}/3} \approx 2\sqrt{2} \cdot \frac{(2 + \alpha_2) \Lambda_1}{\Lambda_1^2 + 2(2 + \alpha_2)^2 \xi}. \quad (6.4)$$

Wir erkennen, dass Λ_1 sich exakt gleich verhält wie $(2 + \alpha_2)$. Das Verhalten der Kurven bezüglich Λ_1 lässt sich also ebenfalls aus Abbildung 6.5 herauslesen.

Der andere Grenzfall ist $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$. Dafür ergibt sich $-\sigma_{xy}/(\sigma_{\ell\ell}/3) \sim \sqrt{h_1^* g_1^*}$. Ändern wir das Parameterpaar $h_1^* g_1^*$ und halten wir gleichzeitig alle anderen Parameter konstant, wird sich der Teil für größere Scherraten nach oben bzw. unten verschieben, siehe hierzu Abbildung 6.6.

Dieses Verhalten, d. h. das Ausbilden eines Minimums bei endlichem $\dot{\gamma}$, zeigte sich in mehreren Experimenten. Leider sind die entsprechenden Versuchsaufbauten nicht gerade ideal um eine einfache qualitative Diskussion, wie wir sie hier anstrengen, auch quantitativ von der Theorie auf das Experiment zu übertragen. Es soll uns ein qualitativer Vergleich genügen. So wurden in [51, 52] Messungen an einer Messzelle durchgeführt, die der Geometrie mit zwei Zylindern entspricht. Wie so oft wurde der innere Zylinder in Rotation versetzt. Das Experiment wurde für Sand durchgeführt und aufgrund der niedrigen bis moderaten Scherraten sind gravitative

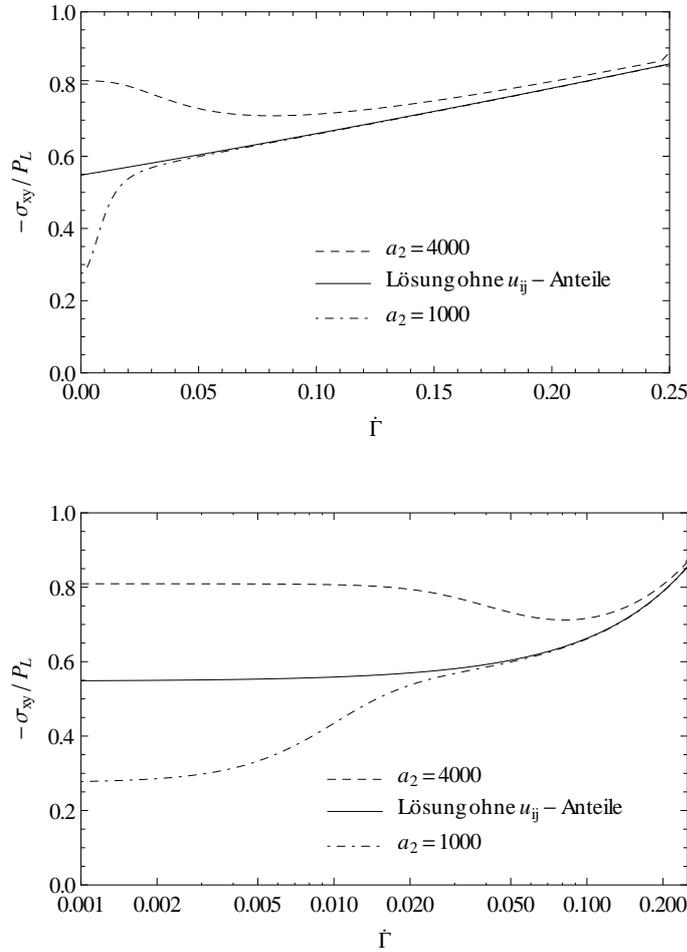


Abbildung 6.5: Scherspannung als Funktion der Scherrate $\dot{\Gamma}$ für verschiedene Parameter a_2 . Die durchgezogene Kurve zeigt das bekannte Ergebnis aus dem letzten Kapitel ohne Anteile $\sim u_{ij}$ im Spannungstensor. Es handelt sich um dieselbe Graphik jedoch für verschiedene Skalierungen, linear und logarithmisch. Die verwendeten Werte sind: $\rho_{cp} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{lp}^* = 2 \rho_{cp}/3$, $h_1^* = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $g_1^* = 100 \frac{1}{\text{m}}$, $\delta = 2$, $\delta' = 0$, $1 - \alpha_0 = 0,3$, $\alpha_3 = 0$, $\tilde{\Lambda}_0 = 2500$, $\tilde{\Lambda}_1 = 250$, $\mathcal{B}_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\xi = 5/3$ und $P_L = 1000 \text{ Pa}$.

Effekte miteinzubeziehen. D. h. es handelt sich hierbei tendenziell um ein Druckkontrolliertes Experiment. Und tatsächlich konnte für Sand das besprochene Minimum beobachtet werden. Die Messungen zeigten den für den *critical state* typischen von der Scherrate unabhängigen Bereich und für größere Scherraten eine entsprechende Abhängigkeit von $\dot{\gamma}$. Außerdem wurden in [53, 54] Experimente gezeigt, die dem Versuchsaufbau des Hybridexperiments aus dem letzten Kapitel sehr ähneln. Der einzige Unterschied ist wieder die Verwendung einer Messzelle, die aus zwei ineinander stehenden Zylindern besteht. Es handelt sich hierbei also auch eher um Druckkontrollierte Experimente. In den Messungen (in beiden Fällen an Glaskügelchen) zeigte sich genau der Verlauf der Messkurven, wie wir ihn für Druckkontrollierte Ex-

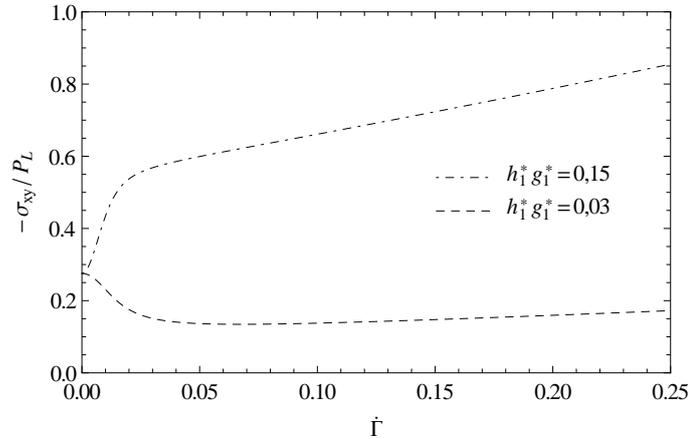


Abbildung 6.6: Scherspannung als Funktion der Scherrate $\dot{\Gamma}$ für verschiedene Parameter $h_1^* g_1^*$. Die verwendeten Werte sind: $\rho_{cp} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{lp}^* = 2 \rho_{cp}/3$, $h_1^* = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\delta = 2$, $\delta' = 0$, $a_2 = 1000$, $1 - \alpha_0 = 0,3$, $\alpha_3 = 0$, $\tilde{\Lambda}_0 = 2500$, $\tilde{\Lambda}_1 = 250$, $\mathcal{B}_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\xi = 5/3$ und $P_L = 1000 \text{ Pa}$.

perimente besprochen hatten: Für sehr kleine Scherraten lässt sich der *critical state* beobachten um nach Durchlaufen eines Minimums für größere Scherraten mit einer gewissen Steigung in $\dot{\gamma}$ in den Bereich eines T_g -dominierten Experiments überzugehen. Die Experimente aus [53] wurden zudem an anderen granularen Materialien durchgeführt. Je nach Material war ein anderes Verhalten der Kurven zu $\sigma_{xy}(\dot{\gamma})$ zu beobachten. In [53] konnte gezeigt werden, dass das Ausbilden eines Minimums abhängig vom getesteten Medium ist. Dies entspricht den gefundenen Ergebniswen dieses Abschnitts, wobei der quantitative Vergleich dieses Verhaltens noch aussteht.

Im Rahmen dieses Abschnitts konnten zumindest qualitativ befriedigende Ergebnisse für den Übergangsbereich von kleinen zu großen Scherraten gefunden werden. Sowohl für Volumen- als auch für Druckkontrollierte Experimente konnte das theoretische Verhalten im Experiment beobachtet werden.

6.2 Scherband

Bis zum jetzigen Zeitpunkt lösten wir die Probleme, indem wir annahmen, dass es sich um eine „Phase“ in der Messzelle handelt. Das Granulat zeigte also keine Schnittstelle an der sich das Medium zu beiden Seiten in einer völlig verschiedenen Form wiederfindet. Wir kennen diesen Effekt zum Beispiel für ein van-der-Waals-Gas, das eine Koexistenz der flüssigen und gasförmigen Phase zulässt. Für ein Granulat lässt sich ein ähnlicher Effekt beobachten. Granulare Materie trennt sich in einen flüssigen und einen festen Teil. Betrachtet man die einfache Schergemotrie wird es einen Bereich geben der ruht. Im zweiten Bereich wird die übliche Schercharakteristik ausgebildet, die wir schon hinlänglich kennen. Abbildung 6.7 zeigt das Prinzip dieser Trennung. Würden wir Gleichgewichtsthermodynamik betreiben,

könnten wir tatsächlich von einer Phasentrennung reden. Dies ist in unserem Fall aber nicht so einfach. Schließlich ist $v_{ij} \neq 0$ und damit sind wir nicht im thermodynamischen Gleichgewicht, was aber notwendig ist um die Begriffe der Thermodynamik zu verwenden⁸. Trotzdem haben wir eine Grenzfläche und einen großen qualitativen Unterschied beider Bereiche. Auf der einen Seite ruhen die Körner (quasi) und sind durch elastische Eigenschaften bestimmt, wohingegen die Teilchen auf der anderen Seite stark angeregt sind.

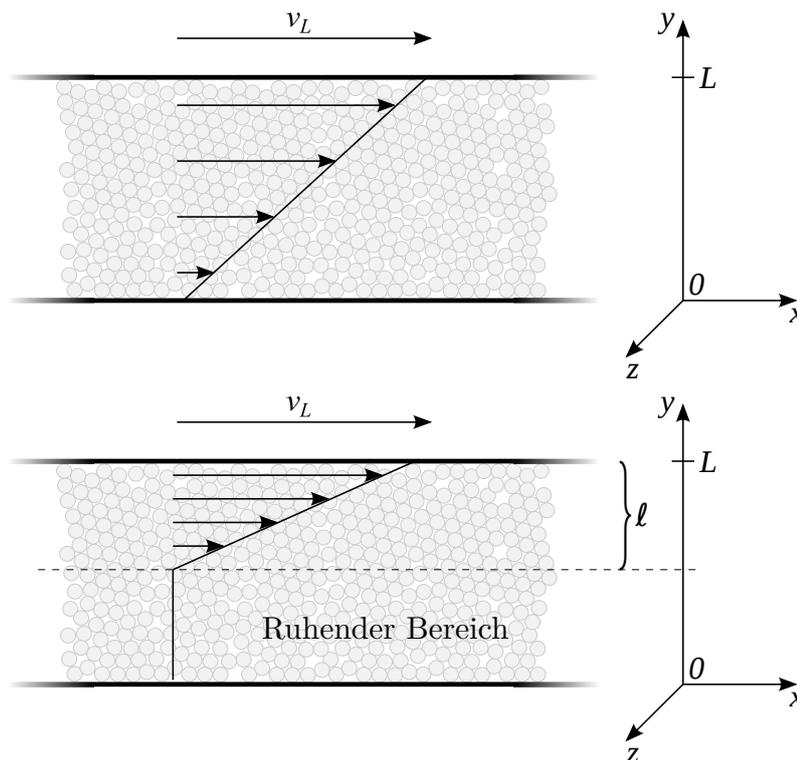


Abbildung 6.7: Das obere Bild zeigt die einfache Schergeometrie wie wir sie bereits kennen. D. h. in x - und z -Richtung unendlich ausgedehnte Platten und ein Plattenabstand L in y -Richtung. Dazwischen bildet sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil aus (ohne Gravitation). Das untere Bild zeigt das Prinzip des Scherbands. Bei gleicher Plattengeschwindigkeit v_L bildet sich ein Bereich aus, der ungeschert ist mit $v_x = 0$. Im Scherbandbereich muss $\dot{\gamma}$ folglich größer sein als für die homogene Lösung. Wir haben den gescherten Bereich mit ℓ gekennzeichnet.

Dieser Effekt wird wegen der Einschränkung des gescherten Bereichs in der einschlägigen Literatur als Scherband bezeichnet. Ein Scherband tauchte bei den verschiedensten Messungen auf [59, 63–65, 68, 70–72, 78, 83] und gehört zu den

⁸Es ist sicherlich problematisch den Begriff Phase hier zu verwenden, da sich das System *global* nicht im Gleichgewicht befindet. Trotzdem ist es möglich thermodynamische Größen wie das chemische Potential μ (als Funktion des Ortes) zu verwenden. Die Definition dieser Größen beruht auf lokalem Gleichgewicht, das wir zu Beginn all unserer Betrachtungen vorausgesetzt hatten und können deshalb bedenkenlos in diesem Kontext verwendet werden.

grundlegenden Eigenschaften, die sich für ein granulares Material im Experiment beobachten lassen. Es zeigte sich, dass ein Bereich stark angeregt ist, d. h. $\dot{\gamma} > 0$, wohingegen ein Teil, den wir ruhend nannten, Geschwindigkeiten v_x zeigt, die nahe bei Null liegen [63, 64, 70–72, 78, 83]. Die makroskopische Geschwindigkeit der Teilchen im unangeregten Bereich liegen um vier bis fünf Größenordnungen unter der Geschwindigkeit v_L , also der Geschwindigkeit mit der die Platte am Rand bewegt wird. Man kann also durchaus von einem ruhenden Bereich sprechen. Die Einbeziehung dieser sehr kleinen, aber vorhandenen Teilchenbewegung im ruhenden Bereich wird in einem Rahmen, der außerhalb dieser Arbeit liegt, besprochen werden. Eins sei hierzu gesagt: Diese sehr kleinen Teilchenbewegungen lassen sich sehr wahrscheinlich auf die Diffusion von T_g zurückführen. Wir stellen also fest, dass der ruhende Bereich weitestgehend bestimmt ist durch Elastizität mit $T_g \approx 0$. Der angeregte Bereich zeigt dagegen $T_g > 0$ und einen oder auch keinen elastischen Anteil (*critical state*), je nachdem ob dieser thermodynamisch stabil ist.

Das Scherband wird nicht nur durch die simple Beobachtung charakterisiert, dass sich das Medium in zwei Bereiche aufspaltet. Der Effekt dieser Trennung ist auch messbar. So wurde in verschiedenen Messungen für **Druckkontrollierte Experimente** ein besonderes Verhalten der Scherspannung festgestellt [64, 65, 68]. Solange zwei qualitativ unsterschiedliche Bereiche existieren ändert sich die Scherspannung mit der Scherrate quasi nicht,

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \dot{\gamma}} \approx 0. \quad (6.5)$$

Dies sieht sehr ähnlich aus wie das Phänomen des *critical state*, hat jedoch völlig unterschiedliche Ursachen (und Konsequenzen). Dieses Verhalten ist mit Sicherheit *nicht* das Merkmal perfekter Plastizität. Stattdessen lässt sich dieses Phänomen, wie wir noch sehen werden, auf das Verschieben der Grenze der unterschiedlichen Bereiche zurückführen.

Um das Problem des Scherbands zu lösen können und müssen wir Bedingungen an die Grenzfläche stellen. Sind beide Bereiche miteinander in einem diffusiven Gleichgewicht muss gelten

$$\Delta\mu = \mu_F - \mu_S = 0 \quad \text{mit} \quad \mu \equiv \frac{\partial f}{\partial \varrho}. \quad (6.6)$$

Diffusives Gleichgewicht bedeutet unter den hier gestellten Anforderungen (Stationarität, Massenerhaltung) und der verwendeten Geometrie, dass sich die Grenzfläche mit der Zeit nicht verschiebt. Die chemischen Potentiale μ beider Bereiche müssen an der Grenzfläche also identisch sein. Wir bezeichnen hier und im weiteren Verlauf Größen, die im flüssigen Bereich definiert sind mit dem Index F und Größen des ruhenden Bereichs mit dem Index S . Gleichzeitig müssen natürlich auch die Spannungen an der Grenzfläche kontinuierlich sein (mechanisches Gleichgewicht) und eigentlich auch T_g (thermisches Gleichgewicht). Betrachten wir hierzu Abbildung 6.7 erkennen wir, dass dies nach Konstruktion nicht der Fall ist. T_g macht an der Grenzfläche einen Sprung, da sich auch die Scherrate $\dot{\gamma}$ an der Grenzfläche

diskontinuierlich verhält. Zukünftige Arbeiten sollten dies berücksichtigen und ein kontinuierliches T_g annehmen. Wir erwähnten, dass wir als Lösung des Problems die Diffusion von T_g „verdächtigen“.

6.2.1 Volumenkontrolliertes Experiment

Leider ist uns kein explizit durchgeführte Messung bekannt, die den Effekt des Scherbands für Granulate für Volumenkontrollierte Experimente zeigt. Jedoch wurde dieser Effekt in [59] erwähnt. Wir besprachen diese Experimente in vorangegangenen Kapiteln und bemerkten, dass die Autoren nur bis zu einer gewissen minimalen Scherrate gemessen hatten. Unterhalb dieser Scherrate existieren keine aufgezeichneten Messwerte. Der Grund war nach eigenen Angaben das Ausbilden eines Scherbands, so wie wir es beschrieben hatten. Es konnten bzw. wurden keine Messungen durchgeführt, die die Scherspannung oder die Breite des Scherbands beinhalteten. D. h. wir sind uns der Existenz eines Scherbands für Volumenkontrollierte Experimente sicher, können aber die hier vorgestellten Ergebnisse dieses Abschnitts (noch) nicht überprüfen.

Um die Lösung des Problems zu bekommen müssen wir die chemischen Potentiale an der Grenzfläche betrachten. Wir können die Bedingung $\Delta\mu = 0$ schreiben als

$$\frac{\partial f_{1,S}}{\partial \varrho_S} = \frac{\partial f_{1,F}}{\partial \varrho_F} - \frac{1}{2} b(\varrho_F) T_g^2 \cdot \frac{1 - (1+a) \varrho_{n,F}}{1 - \varrho_{n,F}} \quad (6.7)$$

$$= \frac{\partial f_{1,F}}{\partial \varrho_F} - \frac{1}{4a} \cdot \frac{h_1^*}{g_1^*} \cdot \dot{\gamma}^2 \cdot \frac{1 - (1+a) \varrho_{n,F}}{(1 - \varrho_{n,F})^\delta}. \quad (6.8)$$

Im letzten Schritt wurde die stationäre Lösung von T_g verwendet. Nun werden wir die einzelnen Beiträge gegeneinander abschätzen. Wir kennen aus den vorangegangenen Kapiteln typische Werte, die in obere Gleichung eingehen. So wird zum Beispiel Δ und u_s im Bereich von $10^{-4} - 10^{-3}$ liegen. Zudem haben wir die Werte für h_1^* und g_1^* für verschiedene Materialien aus Kapitel 5. Die Parameter δ , ξ und a kennen wir ebenfalls mit ≈ 2 , $5/3$ bzw. $\approx 0,1$. Schätzen wir \mathcal{B}_0 für Plastikkügelchen mit etwa $10^6 - 10^7 Pa$ ab und nehmen eine Dichte von $\varrho_n \approx 0.9$ an erhält man $\frac{\partial f_1}{\partial \varrho} \approx 10^{-3} J/kg$. Der fluide Beitrag liefert hingegen $\frac{\partial f_2}{\partial \varrho_F} \approx \frac{10^{-3}}{((1+a)\varrho_{n,F}-1)\dot{\gamma}^2} J/kg$.

Solange also die Scherrate relativ groß ist, muss also gleichzeitig der Beitrag $((1+a)\varrho_{n,F} - 1)$ klein sein, damit Gleichung 6.8 erfüllt werden kann. Daraus ergibt sich

$$\varrho_{n,F} \approx \frac{1}{1+a}. \quad (6.9)$$

Da die Bereiche, jeder für sich genommen, homogen sind gilt dieser Wert der Dichte nicht nur an der Grenzfläche, sondern für den gesamten fluiden Bereich. Die Dichte des Scherbands ist für ein heterogenes System (mit hinreichend großer Scherrate) also gegeben durch den Parameter a . Für $a = 0,1$ ergibt sich zum Beispiel $\varrho_{n,F} \approx 0,91$. Dies ist gleichzeitig erstaunlich und nützlich. So kann man durch einfaches Messen

der Dichte im Scherband eines Experiments den Parameter a bestimmen. Diese Festlegung der Dichte hat noch weitere Konsequenzen. Aus der Massenerhaltung bekommen wir folgende Relation:

$$\frac{\ell}{L} = \frac{1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho_S}}{1 - \frac{\rho_F}{\rho_S}}. \quad (6.10)$$

Dabei ist ℓ die Breite des Scherbands, siehe Abbildung 6.7. Der Parameter $\bar{\rho}$ ist die mittlere Dichte über die gesamte Breite L . Für ein volumenkontrolliertes Experiment mit $L = \textit{konstant}$ gilt dann $\bar{\rho} = \textit{konstant}$. Die Dichte des fluiden Bereichs kennen wir bereits mit dem konstanten Wert $\sim 1/1 + a$. Die Dichte des ruhenden Bereichs wird ebenfalls eine recht „träge“ Angelegenheit sein. Beim Bilden der Scherbandlösung hat das System sozusagen einmal die Wahl für ein ρ_S . Anschließend wird sich diese Größe aufgrund fehlender Anregung kaum bzw. überhaupt nicht mehr verändern, so dass wir annehmen können: $\rho_S \approx \textit{konstant}$. Daraus schließen wir

$$\frac{\ell}{L} \approx \textit{konstant}. \quad (6.11)$$

Wir erhalten also eine zweite charakteristische Relation für die Scherbandlösung eines volumenkontrollierten Systems.

Desweiteren lässt sich die Scherspannung berechnen. Wir erhalten σ_{xy} aus der Relation eines homogenen Experiments aus Kapitel 5. Dabei muss ρ durch ρ_F ersetzt werden. Die Scherrate ist dann auch nicht mehr v_L/L sondern v_L/ℓ . Wir bekommen also

$$\sigma_{xy} = \rho_{cp} \sqrt{\frac{(h_1^*)^3}{8 g_1^*}} \cdot \frac{1}{(1 - \rho_{n,F})^2} \left(\frac{v_L}{\ell}\right)^2. \quad (6.12)$$

Wir haben dabei $\delta = 2$ angenommen. Die Scherspannung des ruhenden Bereichs der heterogenen Lösung hat offenbar denselben quantitativen Wert wie der gerade angegebene für den fluiden Bereich. Schließlich gilt $\sigma_{xy,F} = \sigma_{xy,S}$ an der Grenzfläche und mit Hilfe von $\nabla_y \sigma_{xy} = 0$ auch im gesamten Bereich von 0 bis L .

Die Messkurven zu σ_{xy} der Scherbandlösung werden keinen qualitativen Unterschied zu der homogenen Lösung eines über L komplett gescherten Systems zeigen. In beiden Fällen gilt $\sigma_{xy} \sim v_L^2$ bei konstanter Dichte und Breite des gescherten Bereichs. So wird es schwierig sein allein aufgrund der Messung der Spannungen zu entscheiden ob sich das betrachtete System in einer homogenen oder einer heterogenen Konstellation befindet. Falls nun aber die Messkurve zu σ_{xy} für verschiedene v_L einen „Sprung“ zeigt, kann man davon ausgehen, dass das System die alternative Lösung ab einem bestimmten v_L angenommen hat. Für eine gegebene Randbedingung v_L ergeben sich für die homogene und die Lösung mit zwei Bereichen verschiedene Scherspannungen, die verantwortlich für solch eine Diskontinuität wären. Es ist allerdings ziemlich unklar welcher Vorgang das System veranlasst die Lösungsmöglichkeit zu „wechseln“. Zumindest für die volumenkontrollierten Experimente aus [59] lässt sich eine Vermutung äußern. Wie besprochen, ähneln diese Experimente

eher der Konstellation mit Gravitation in y -Richtung. In Abschnitt 5.4 konnten wir eine minimal mögliche Randbedingung v_L festlegen. Wird diese Grenze im Experiment unterschritten ist eine Lösung, die $T_g > 0$ für den gesamten Bereich zwischen den Platten vorsieht, nicht mehr möglich. Dies wird der Punkt sein, an dem sich das System eine Alternative für gegebenes v_L suchen muss und wir erhalten eine Lösung mit Scherband. Zumindest deckt sich dies mit den Angaben der Autoren aus [59], die angaben ein Scherband unterhalb eines bestimmten Wertes für v_L gesehen zu haben.

6.2.2 Druckkontrolliertes Experiment

Für ein Druckkontrolliertes Experiment können wir die Gleichheit der chemischen Potentiale beider Bereiche auf dieselbe Art und Weise ausnutzen wie wir dies für ein Volumenkontrolliertes Experiment getan hatten. D. h. es gilt auch für diesen Abschnitt

$$\varrho_{n,F} \approx \frac{1}{1+a}. \quad (6.13)$$

Der flüssige Bereich lässt sich exakt gleich lösen wie wir dies im Abschnitt *Scherströmungen ohne Gravitation* für ein Druckkontrolliertes Experiment bereits getan hatten. Die Normalspannung ist bei $y = L$ mit P_L vorgegeben und wir setzen dies mit dem entsprechenden Teil des Spannungstensors gleich, $P_L = \sigma_{yy}$. Da unser System in den Spannungen homogen ist, gilt diese Relation für den gesamten Bereich zwischen 0 und L . Die Normalspannung hängt prinzipiell von zwei variierenden Größen ab: ϱ und $\dot{\gamma}$, siehe Gleichung (5.10). Die Dichte hatten wir fixiert und die Normalspannung wird mit P_L auch immer gleich bleiben. Für die Scherrate muss dies aber bedeuten, dass sie ebenfalls konstant zu sein hat,

$$\rightarrow \quad \dot{\gamma} = \frac{v_L}{\ell} \approx \textit{konstant}. \quad (6.14)$$

Dies ist ein erstaunliches Resultat: Man ändert die Randbedingung v_L der oberen Platte und gleichzeitig vergrößert oder verkleinert sich der gescherte Bereich. Diesen Vorgang haben wir in Abbildung 6.8 schematisch dargestellt. Das ist ein grundlegend anderes Verhalten als für ein Volumenkontrolliertes Experiment. Da war gerade ℓ fixiert, welches hier für ein Druckkontrolliertes Experiment zu einer Art „Folgevariable“ von v_L umfunktioniert wurde.

Für die Scherspannung erhalten wir ebenfalls ein überraschendes Ergebnis. σ_{xy} ist genauso wie die Normalspannung von ϱ und $\dot{\gamma}$ abhängig. Wenn aber beide Größen fixiert sind muss auch die Scherspannung eine konstante Größe für die Scherbandlösung sein,

$$\rightarrow \quad -\sigma_{xy} \approx \sqrt{2h_1^*g_1^*} \cdot P_L (1+a)^2. \quad (6.15)$$

Man kann also die Grenze beider Bereiche durch Ändern von v_L beliebig verschieben und muss dabei keine zusätzliche Kraft bzw. Arbeit aufwenden. Dies erinnert uns

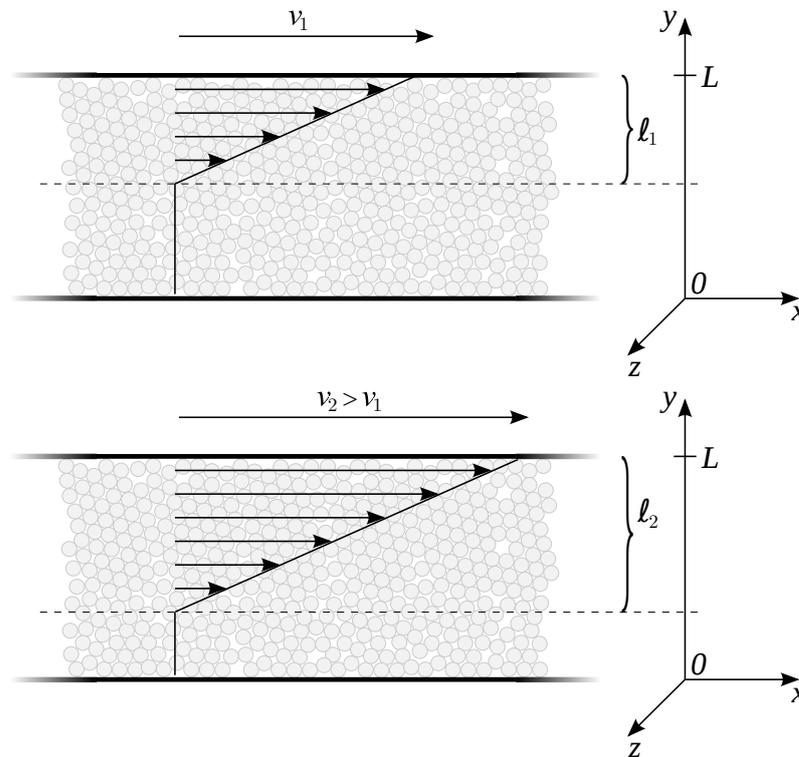


Abbildung 6.8: Die Graphiken zeigen jeweils die Scherbandlösung für verschiedene Randbedingungen der oberen Platte mit v_1 und v_2 . Eine Änderung der Plattengeschwindigkeit bewirkt eine Verschiebung der Grenzfläche, wobei sich die Scherrate des gescherten Bereichs während dieses Vorgangs nicht ändert.

doch sehr an das Verhalten eines van-der-Waals-Gases im Koexistenzbereich. Zudem entspricht es genau der experimentellen Beobachtung. So wurde in [64, 65, 68] derartiges Verhalten beobachtet. Trägt man die Scherspannung als Funktion der Plattengeschwindigkeit v_L auf, ergeben sich sogenannte Plateaus, d. h. Kurven konstanter Spannung für einen gewissen Geschwindigkeitsbereich v_L . Bei den zitierten Experimenten wurde wieder in der Zweizylindergeometrie gemessen, so dass die Ergebnisse nicht eins zu eins umgesetzt werden können. Trotzdem diskutieren die Autoren explizit, dass in diesem Plateaubereich ein Scherband zu sehen war. D. h., dass sich das theoretische Ergebnis experimentell mindestens qualitativ bestätigen lässt. In Abbildung 6.9 haben wir die Scherbandlösung und die homogene Lösung skizziert.

Es ist allerdings noch nicht geklärt, welche der beiden Lösungsmöglichkeiten stabil bzw. metastabil ist. Dies wird eine Betrachtung des geeigneten thermodynamischen Potentials erfordern. Möglich ist auch, dass der Energiebeitrag f_2 thermodynamisch instabil bezüglich T_g oder ϱ wird. f_2 ist nach Konstruktion für alle Dichten und für jedes T_g stabil. Wir vermuten aber eine energetische Instabilität nahe ϱ_{cp} , so dass das System durch eine Dichtefluktuation quasi „stecken“ bleibt. Dazu müsste

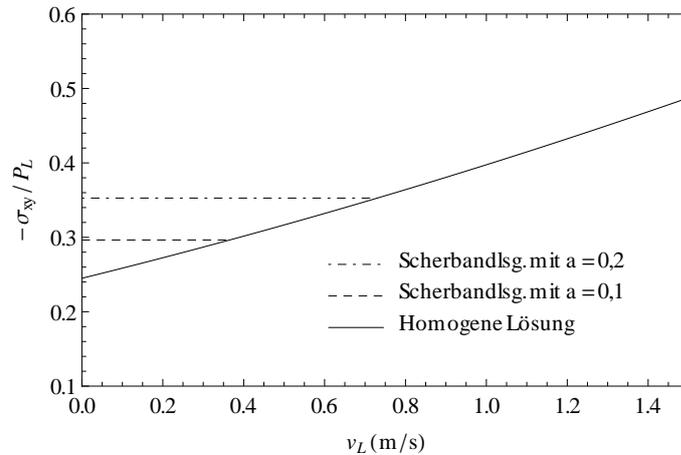


Abbildung 6.9: Skizziert ist die bekannte Scherspannungskurve eines Druckkontrollierten Experiments ohne Gravitation als Funktion der angelegten Plattengeschwindigkeit v_L . Die waagrechten Kurven zeigen die Scherbandlösung für verschiedene a . Diese Kurven sind als eine Art Koexistenzkurven aufzufassen: Am linken Rand, also für $v_L = 0$, verschwindet der gescherte Bereich und das Medium zeigt sich komplett ruhend bzw. elastisch. Am „rechten Rand“ geht die Scherbandlösung in die homogene Lösung über. Das Granulat hat ab diesem Punkt keinen ruhenden Bereich mehr. Als Werte wurden verwendet: $h_1^* = 3 \cdot 10^{-3} m$, $g_1^* = 100 \frac{1}{m}$, $\delta = 2$, $\rho_{cp} = 1000 kg/m^3$, $L = 10^{-2} m$ und $P_L = 100 Pa$.

zum Beispiel die Funktion $b(\varrho)$ modifiziert werden. Gäbe es solch eine Instabilität hätte das System keine andere Wahl als die Scherbandlösung anzunehmen.

Es ist uns gelungen durch eine qualitative Diskussion zwei wesentliche Übergangsphänomene granularer Systeme prinzipiell wiederzugeben. Zum einen konnten wir die Existenz eines Minimums in den Scherspannungskurven bezüglich der Scherrate feststellen und damit eine experimentelle Beobachtung wiedergeben. Den Effekt des Scherbands und das damit verbundene Spannungsplateau für ein Druckkontrolliertes Experiment konnte ebenso erfolgreich wiedergegeben werden. Die Feststellungen bezüglich der Scherspannungskurven Volumenkontrollierter Experimente der Abschnitte *Spannungstensor* und *Scherband* erfordern noch experimentelle Überprüfungen. Zudem gilt es vor allem die Diskussion des Scherbands um die Kriterien der Stabilität zu erweitern.

Kapitel 7

Ferrofluide

Ferrofluide sind sogenannte kolloidale Suspensionen. Diese Materialklasse umfasst zum Beispiel auch Blut oder Malerfarben. Gemeinsam ist diesen Materialien, dass sie aus einem Trägermedium und für die jeweilige Suspension spezifischen, darin gelösten Partikeln bestehen. Stellt man solch eine Suspension künstlich her, sollte das Trägermedium so wenig wie möglich Einfluss (chemisch, elektrisch, ...) auf die gelösten Teilchen haben und hauptsächlich dazu dienen, die Eigenschaften der verdünnten Partikel hervorzuheben. Für Ferrofluide werden als Trägerflüssigkeiten zum Beispiel synthetische Öle verwendet [84–86]. Wir können an dieser Schilderung schon bemerken, dass Ferrofluide reine „Kunstprodukte“ sind, d. h. sie treten unter natürlichen Bedingungen nicht auf.

Die gelösten Partikel eines Ferrofluids sind Ferro- oder Ferrimagneten (Co , Fe_3O_4 , ...), deren Durchmesser etwa 10 nm beträgt. Aufgrund der geringen Größe der Teilchen ist es eine realistische Annahme, dass die einzelnen Partikel nicht mehr in Weißsche Bezirke aufgeteilt sind, sondern homogen in Betrag und Richtung der Magnetisierung strukturiert sind [84, 86]. Oder anders ausgedrückt: Jedes Teilchen lässt sich als magnetischer Dipol ansehen. Die Teilchen werden untereinander Wechselwirkungen zeigen, d. h. magnetische Dipol- und van-der-Waals-Wechselwirkungen. Um zu verhindern, dass die Nanopartikel zu einem Klumpen zusammenfallen, muss die Suspension künstlich stabilisiert werden. Dies erreicht man mit Hilfe von langkettigen Molekülen (Polymere, Tenside mit einer Länge von $\approx 2\text{ nm}$), mit denen man die Oberflächen der Partikel beschichtet [84–87]. Es ergibt sich eine sterische Abstoßung. Überschreitet die Teilchengröße ein gewisses Mass oder werden die angelegten Magnetfelder relativ hoch, kann man trotz der Beschichtung eine gewollte oder ungewollte Agglomeration beobachten. Der Teilchendurchmesser darf auch aus anderen Gründen gewisse Werte nicht überschreiten. So muss die Suspension dauerhaft thermalisiert sein, darf also nicht sedimentieren. Dies könnte unter dem Einfluss der Gravitation oder von Magnetfeldgradienten in der Tat ein Problem sein. Diese Effekte müssen je nach Anwendungsgebiet und gelöstem Ferromaterial abgeschätzt werden [84, 87].

7.1 Merkmale und Beobachtungen

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s \left[\text{CoTanh} \left(\frac{3\chi}{1+\chi} \cdot \frac{B}{M_s} \right) - \frac{1+\chi}{3\chi} \cdot \frac{M_s}{B} \right] \quad (7.1)$$

Dabei ist $M_s = |\mathbf{M}_s|$ die Sättigungsmagnetisierung und B der Betrag des lokalen Feldes. χ ist die magnetische Suszeptibilität⁹. Entwickelt man \mathbf{M} erhält man den üblichen linearen Zusammenhang $\mathbf{M} = \chi \mathbf{B} / 1 + \chi$. Der Zusammenhang zwischen Magnetisierung und B wurde in Abbildung 7.1 dargestellt.

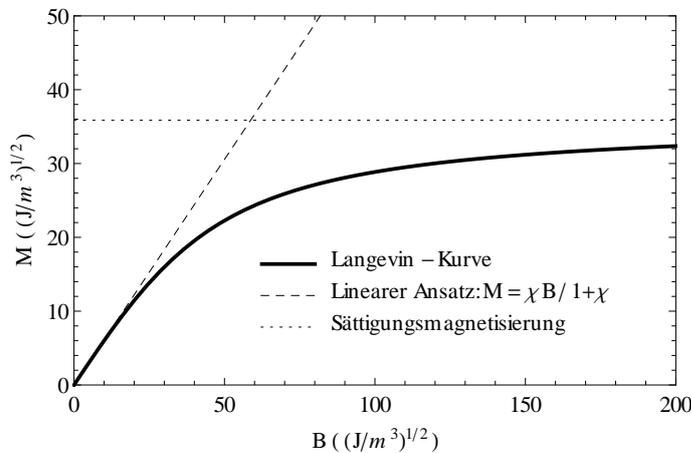


Abbildung 7.1: Typische Magnetisierungskurve eines Ferrofluids. Darstellung der Langevin-Funktion als Funktion des Feldes B . Zusätzlich wurde der lineare Ansatz $M = \chi B / 1 + \chi$ skizziert. Die Werte mit $\chi = 1,57$ und $M_s \approx 36 \sqrt{J/m^3}$ entstammen [84] für ein Ferrofluid mit der Seriennummer APG 513 A.

Ein besonders spektakulärer Effekt kann sich an der Oberfläche eines Ferrofluids ergeben. Legt man an ein Ferrofluid ein äußeres Magnetfeld an, kann es zu Strukturbildung an der Oberfläche kommen. Dies erinnert dann ziemlich an den Rücken eines Igels (Besonders schöne Strukturen lassen sich sehr einfach im *www* finden unter dem Begriff: *Ferrofluid sculptures by Sachiko Kodama*). Die Ursache ist eine energetische Instabilität an der Oberfläche des Ferrofluids, die es günstiger macht eine räumlich inhomogene Struktur zu formen. In der einschlägigen Literatur wird dies auch Rosensweig-Instabilität genannt [85, 87].

Der eben geschilderte Effekt ist nur ein Ausdruck der sehr einfachen Kontrollierbarkeit von Ferrofluiden mit moderaten Magnetfeldern. Es genügt ein einfacher Kühlschrankmagnet um ein Ferrofluid zu bewegen.

⁹Wir werden in dieser Arbeit ausschließlich das Heaviside-Lorentz-Einheitensystem verwenden. D. h. die elektromagnetischen Felder sind alle in Einheiten von $\sqrt{J/m^3}$ gegeben.

Besonders interessant ist die Variabilität der Viskosität mit angelegtem Magnetfeld. Für diese Eigenschaft ist es wichtig wie die magnetischen Dipole der Nanopartikel gegen das angelegte Feld relaxieren. Dies können sie grundsätzlich auf zwei Arten. Zum einen kann sich der Dipolvektor einfach drehen, ohne dass sich dabei das Teilchen mitdreht. Diesen Relaxationsprozess nennt man Neelsch. Falls sich der Partikel bei der Relaxation mechanisch mitdreht, spricht man von Brownscher Relaxation [84, 85]. Man nennt diese Eigenschaft der Brownschen Relaxation auch magnetisch hart. Im Allgemeinen bewegen sich die charakteristischen Relaxationszeiten dieser Prozesse im Bereich von 10^{-7} s bis 10^{-4} s. Je größer das Teilchen, umso wahrscheinlicher wird ein Brownsches Verhalten. Es ist klar, dass nur solche Teilchen mit Brownscher Relaxation zu einer Magnetfeld-induzierten Viskosität beitragen können.

Dieser Effekt ist zudem nicht nur abhängig vom Betrag des angelegten Feldes, sondern auch von der Richtung. Dies lässt sich recht simpel verstehen. Gehen wir von einer einfachen Schergeometrie aus, siehe Abbildung 4.2. Zeigt das angelegte Feld in z -Richtung, ist dies für die Viskosität völlig irrelevant: Die Rotationsachse der Nanopartikel werden parallel bzw. antiparallel zum Magnetfeld liegen und es wird keinerlei Beeinflussung der gemessenen Viskosität als Funktion des angelegten Feldes geben. Ganz anders wenn das Magnetfeld in der x - y -Ebene liegt. Die Dipole der Teilchen suchen das Gleichgewicht mit dem angelegten Feld, werden aber durch den Geschwindigkeitsgradienten ständig „herausgedreht“. Diese konkurrierenden Effekte werden zu einer Viskositätserhöhung führen, und wir verstehen auch sofort warum nur Teilchen mit Brownscher Relaxation daran beteiligt sind.

Der Effekt der Änderung der Viskosität kann für gewisse Ferrofluide sogar noch stärker ausfallen. Überwindet ein gewisser Anteil der Nanopartikel die Potentialbarriere und bildet Strukturen, vervielfacht sich der Effekt. Im Ferrofluid bilden sich längliche Strukturen, d. h. Ketten aus, die natürlich die Viskosität erheblich beeinflussen [84, 87, 88]. Man fühlt sich dabei an Polymere erinnert. Es bestehen jedoch grundsätzliche Unterschiede. Polymere sind ohne Scherung zufällig ausgerichtet und zeigen für höhere Scherraten eine Vorzugsrichtung. Die Dipolketten in Ferrofluiden werden ohne Scherung ausgerichtet sein und tendenziell für hohe Scherraten zerstört werden. Theorien, die auf Polymeren basieren, werden also völlig ungeeignet sein um Ferrofluide zu beschreiben. Der Effekt der Kettenbildung kann so stark ausfallen, dass die Ketten die Größenordnungen des experimentellen Aufbaus erreicht. Dann ergeben sich sogar elastische Effekte und man nennt solche Fluide magnetorheologische Flüssigkeiten [84]. Diese Materialklasse liegt aber außerhalb des Rahmens dieser Arbeit.

Es ergeben sich mannigfaltige technische Anwendbarkeiten für Ferrofluide. So werden Dichtungen aus Ferrofluiden für gegeneinander bewegte Komponenten hergestellt, die reibungsärmer sind als herkömmliche Lager. Bei Lautsprechern gibt es das Problem der hohen Leistungs- bzw. Wärmeentwicklung. Da ein Lautsprecher ein eigenes Magnetfeld bzw. einen Magnetfeldgradienten erzeugt, „klebt“ ein Ferrofluid von ganz allein an den relevanten Stellen eines Lautsprechers und kann so effizienter als Luft die Wärme abführen. Durch die hohe Kontrollierbarkeit mit

Magnetfeldern haben Ferrofluide auch Einzug in die Medizin gefunden. Es werden Kontrastmittel oder Wirkstoffe mit Hilfe von Ferrofluiden und Magnetfeldern kontrolliert im menschlichen Körper an die entsprechende Stelle transportiert. Auch die Automobilindustrie nutzt Ferrofluide zur Konstruktion verbesserter Dämpfersysteme, da sich, wie wir erwähnten, die Viskosität einfach regulieren lässt.

Wir haben gesehen, dass Effekte basierend auf Ferrofluiden ziemlich spannend sein können. Außerdem bemerkten wir die technische Relevanz dieser Materialien. So wird eine theoretische Beschreibung bestimmter Effekte sehr nützlich sein.

7.2 Theorie

Wir sahen die Stärke und die technische Verwendbarkeit der Effekte von Ferrofluiden. Wir werden nun eine Theorie vorstellen, die die entscheidenden Effekte von Ferrofluiden hinreichend beschreiben. An Hand eines gewöhnlichen Fluids hatten wir die Methode der Hydrodynamik aufgezeigt. Für Granulate gingen wir einen Schritt weiter und hatten noch weitere notwendige Variablen eingebaut. Wir griffen dazu auf ein bestehendes Modell zurück [6] und erweiterten einzig den dissipativen Anteil etwas. Für Ferrofluide wenden wir wieder die hydrodynamische Methode an. Die notwendige Theorie ist ebenfalls bekannt [7, 8, 89, 90].

Die Schwierigkeit von Ferrofluiden bzw. ganz allgemein für elektromagnetisch wechselwirkende Systeme, ist die Implementierung der elektromagnetischen Felder in die Hydrodynamik. Die sogenannte *Hydrodynamische Maxwell-Theorie* behandelt dabei noch ganz allgemein die Einbindung der Elektrodynamik in einen hydrodynamischen Rahmen [89, 90]. Diese Theorie ist sozusagen der „Vorlauf“ um überhaupt mit elektromagnetischen Feldern hydrodynamisch umgehen zu können. Die speziellen Erfordernisse, die ein Ferrofluid an eine Theorie stellt, werden dann zusätzlich mit der *Ferrofluididdynamik* beantwortet. Es werden Elemente aus beiden Theorien angesprochen werden und es würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen, diese Theorie mit einer ähnlichen Informationsfülle zu präsentieren, wie wir dies für die Granulate gemacht hatten. Dies ist auch nicht notwendig. So wurden die *Hydrodynamische Maxwell-Theorie* und die *Ferrofluididdynamik* bereits in großer Ausführlichkeit besprochen [7, 8, 89–91]. In den folgenden Abschnitten sollen die wesentlichen Merkmale dieser Theorien vorgestellt werden.

Neben der Theorie, die wir verwenden werden, gibt es noch andere Ansätze [84, 92]. Dabei wurde eine sogenannte inwendige Drehimpulsdichte als Variable eingeführt. Diese wurde wiederum mit der makroskopisch auftretenden Magnetisierung in Verbindung gebracht. So konnte zum Beispiel die Magnetfeld-induzierten Viskosität für verdünnte Ferrofluide erklärt werden. Für Ferrofluide ist der Ansatz über eine inwendige Drehimpulsdichte nicht ausreichend. So lässt sich der enorme Viskositätsanstieg nicht beschreiben, der auftritt falls die Ferrofluidpartikel dazu neigen Ketten zu bilden. Mit der *Ferrofluididdynamik* erhalten wir das Rüstzeug, um speziell diesen Viskositätsanstieg erklären zu können.

7.2.1 Zustandsvariablen und Bilanzgleichungen

Wir sprachen bei einem Ferrofluid von einer kolloidalen Suspension. Es lassen sich also zwei Komponenten eindeutig trennen - die Trägerflüssigkeit und die gelösten Nanopartikel. Dies lässt sich mit zwei unterschiedlichen Dichten beschreiben, eine für die Trägerflüssigkeit ϱ_1 und eine für die Nanopartikel ϱ_2 ,

$$d\varepsilon = \dots + \mu_1 d\varrho_1 + \mu_2 d\varrho_2. \quad (7.2)$$

Dementsprechend erhält man auch zwei unterschiedliche chemische Potentiale. Da beide Massen für sich erhalten sind, haben wir nun zwei Gleichungen für die Massenerhaltung. Das Wesen dieser hinzukommenden Variable, d. h. eine zweite erhaltene Masse, ist damit an einen Erhaltungssatz geknüpft und wir bekommen dadurch zusätzliche hydrodynamische Moden mit $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Man kann das Energiedifferential bzw. die Definitionen der beiden Dichten auch folgendermaßen schreiben:

$$d\varepsilon = \dots + \mu d\varrho + \mu_c d\varrho_2. \quad (7.3)$$

Hierbei ist $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$, $\mu = \mu_1$ und $\mu_c = \mu_2 - \mu_1$. Die Dichte ϱ_2 beschreibt die Nanopartikel des Ferrofluids. Im Rahmen dieser Arbeit sollen aber Konzentrationsgefälle bezüglich der Nanopartikel keine Rolle spielen bzw. nicht betrachtet werden. D. h. das Medium soll immer als homogen in der Verteilung der Nanopartikel betrachtet werden. Wir hatten bereits diskutiert, dass für Ferrofluide explizit auf die Stabilität hinsichtlich einer Sedimentierung geachtet wird. Das macht diese zweite Dichte von Natur aus zu einer recht trägen Angelegenheit. Wir werden deshalb den zusätzlichen Beitrag bzw. eine zusätzliche Bewegungsgleichung für die gelösten Teilchen nicht berücksichtigen.

Für ein makroskopisches, elektrodynamisches System kennen wir vier auftretende Felder: Die elektrischen mit \mathbf{E} , \mathbf{D} und die magnetischen mit \mathbf{H} , \mathbf{B} . Es stellt sich dabei die Frage welche dieser Größen eigentlich fundamentaler sind. Oder anders ausgedrückt: Welche der Felder sind „echte“ thermo- bzw. hydrodynamische Variablen und welche sind als Ableitungen der Energiedichte definiert. Eine Diskussion hierzu findet man in [89]. Man erhält $d\varepsilon = \dots + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$. D. h., die Felder \mathbf{D} und \mathbf{B} sind als hydrodynamische Variablen anzusehen, wohingegen \mathbf{E} und \mathbf{B} (vorerst) unbekannte Zustandsgrößen bzw. -gleichungen sind, wie zum Beispiel auch die Temperatur oder das chemische Potential eines Systems. Eine umgekehrte Wahl mit \mathbf{E} und \mathbf{H} als Variablen würde jeweils zu zeitlich divergierenden Lösungen der Felder führen.

Die Einbindung von hydrodynamischen Variablen muss sich auf eine tiefgehende physikalische Symmetrie gründen lassen, wie wir in Kapitel 2 diskutiert hatten. Im Falle der Felder \mathbf{D} und \mathbf{B} können wir die makroskopische Relevanz auf die Ladungserhaltung zurückführen [89]. Dass die Ladungen selber nicht als Variable dienen, liegt an der Form der konjugierten Variable. Dies wäre nämlich ein Potential, das durch eine Integration über den Raum ermittelt werden müsste. Da es sich aber um eine Feldtheorie handelt, kann das kein geeigneter Ansatz sein.

In linearer Ordnung und für ein (bezüglich der elektromagnetischen Wechselwirkung) isotropes Material sind uns unmittelbar die Zusammenhänge der Felder

bekannt. Dies sind dann auch gleichzeitig sogenannte konstitutive Relationen bzw. Materialgleichungen und werden angesetzt mit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_m} \mathbf{B}. \quad (7.4)$$

Dabei sind ϵ und μ_m die elektrische Permittivität bzw. magnetische Permeabilität. Es ist an dieser Stelle nicht notwendig die Magnetisierung oder die Polarisation als separate Felder einzuführen, wie das im Allgemeinen vollzogen wird. Dies würde aber hier möglicherweise den Eindruck erwecken, als wären dies zusätzliche Variablen, was aber im Allgemeinen nicht der Fall ist. Selbstverständlich ist diese zusätzliche Aufteilung der Felder nicht verboten und hat auch seine begründete Relevanz in der mikroskopischen Interpretation (Stichwort induzierte Ladungs- bzw. Stromverteilungen auf atomarer Ebene). Die Einbindung der Magnetisierung (und der Polarisation) als hydrodynamische Variable erfordert eine gesonderte Diskussion.

Die makroskopischen Bewegungsgleichungen der elektromagnetischen Felder sind allgemein bekannt mit

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\epsilon, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.5)$$

$$\partial_t \mathbf{D} = c \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}_\epsilon, \quad \partial_t \mathbf{B} = -c \nabla \times \mathbf{E} \quad (7.6)$$

Die ersten beiden stellen sozusagen die Erhaltungssätze dar und die restlichen sechs beinhalten die zeitliche Entwicklung der Felder. Die Identifizierung der elektromagnetischen Felder der Maxwell-Gleichungen mit denen der hydrodynamischen Beschreibung $d\epsilon = \dots + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ ist nicht selbstverständlich. Bindet man dissipative Effekte ein, unterscheiden sich \mathbf{E} und \mathbf{H} in den Maxwell-Gleichungen im Vergleich zu ihren hydrodynamischen Gegenstücken. Eine intensive Diskussion hierzu findet sich in [89]. Wir sehen davon ab diese Unterscheidung zu machen. Durch die noch erfolgende Einbindung der Magnetisierung als Variable erhalten wir dissipative Anteile, die die eben angesprochenen überragen werden [7, 8, 89].

Die Magnetisierung als Variable nicht mitzunehmen macht nur Sinn solange gilt: $\omega \tau \ll 1$. Die Relaxationszeit τ stellt die Zeit dar, die die Magnetisierung braucht um mit den makroskopischen Feldern \mathbf{B} bzw. \mathbf{B} in ein thermo- bzw. hydrodynamisches Gleichgewicht zu kommen. $1/\omega$ ist die Zeitskala des Labors. Solange $\omega \tau \ll 1$ erfüllt ist genügt die Beschreibung (auch bei Ferrofluiden) mit der *Hydrodynamischen Maxwell-Theorie*. Wie bereits erwähnt, beinhaltet die Beschreibung auch dissipative Anteile und Effekte. Insbesondere für Ferrofluide, deren Nanopartikel sich zu Ketten zusammensetzen, wird die Bedingung nicht mehr erfüllt sein, sondern viel eher gelten $\omega \tau \approx 1$ [89]. Das macht es notwendig die Magnetisierung \mathbf{M} in die Hydrodynamik mit einzubinden. Dasselbe würde natürlich auch für \mathbf{P} gelten, jedoch sind die Effekte eines Ferrofluids allesamt von magnetischer Natur.

Die magnetischen Felder sind ganz allgemein verbunden durch die universelle Beziehung

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{H}. \quad (7.7)$$

Die Relation aus Gleichung (7.1) und $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_m$ sind durch die Einbringung von \mathbf{M} als eigenständige Variable nur noch im Gleichgewicht gültig. Das System versucht diesen „Zustand“ herzustellen, wird aber durch die in diesem Kapitel besprochenen Scherströmungen daran gehindert.

Die Bilanzgleichung von \mathbf{M} konnte gefunden werden [7, 8, 89] mit

$$\partial_t \mathbf{M} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{M} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} = \mathbf{Y}^D. \quad (7.8)$$

Der Vektor \mathbf{Y}^D beschreibt den dissipativen Anteil, schließlich ist \mathbf{M} keine Erhaltungsgröße. Dies offenbart zugleich den Charakter dieser Variable. \mathbf{M} ist nämlich eine langsam relaxierende Variable, siehe Abschnitt 2.1. Dies können wir auch gut verstehen: Man stelle sich eine globale Änderung des angelegten Feldes vor. Für eine hydrodynamische Variable würde dies nicht zu einer Änderung führen (wegen $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$), für eine langsame Variable erleben wir hingegen einen Relaxationsprozess. So auch für die Magnetisierung, die lokal gegen das neu eingestellte Feld relaxieren wird. Mit \mathbf{M} ist offensichtlich auch eine eigene Orientierung verbunden, d. h. \mathbf{M} bricht die Symmetrie des Raumes. Es wäre aber falsch damit hydrodynamische Moden zu verbinden, da es sich um einen erzwungenen Symmetriebruch durch ein äußeres angelegtes Feld handelt und nicht um einen spontanen Symmetriebruch. Das unterscheidet \mathbf{M} zum Beispiel von der (uniaxialen) nematischen Phase eines Flüssigkristalls. Die Variable ist hierbei ein sogenannter Direktor, also ein Vektor, der die Vorzugsrichtung charakterisiert. Diese Variable zeigt aber „echten“ hydrodynamischen Charakter mit $\omega(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$, was aber für die Magnetisierung gerade nicht gilt. Dies ist der Grund weshalb man bestehende Theorien zu Flüssigkristallen nicht auf die Magnetisierung eines Ferrofluids übertragen kann [93].

Die Struktur dieser gefundenen Bewegungsgleichung lässt sich wieder mit der standardisierten Prozedur aus Abschnitt 2.3 nachprüfen [7, 8, 89]. Noch ist allerdings die konjugierte Variable der Magnetisierung völlig unklar,

$$d\varepsilon = \dots + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{M}. \quad (7.9)$$

Dieses \mathbf{h} lässt mit Hilfe einer Maxwell-Relation gewinnen. Es gilt

$$\frac{\partial H_i}{\partial M_j} = \frac{\partial h_j}{\partial B_i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial H_i}{\partial M_j} = -\delta_{ij}. \quad (7.10)$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}^{eq}(\mathbf{M}) - \mathbf{B} \quad (7.11)$$

Die Integrationskonstante \mathbf{B}^{eq} erhält man durch die Forderung, dass die Magnetisierung im Gleichgewicht als eigenständige Variable zu verschwinden hat. Siehe hierzu auch die Diskussion des nächsten Unterabschnitts. In linearer Näherung ist das Gleichgewichtsfeld $\mathbf{B}^{eq}(\mathbf{M})$ mit \mathbf{M} gerade über die magnetische Suszeptibilität χ verbunden: $\mathbf{B}^{eq} = (1 + \chi) \mathbf{M}/\chi$. Andererseits lässt sich \mathbf{B}^{eq} als Umkehrfunktion der Gleichgewichtsmagnetisierung aus Gleichung (7.1) numerisch bestimmen [91].

Es gilt die wichtige Größe des Spannungstensors bestimmen. Durch Ausführen einer zeitlichen Ableitung des Energiedifferentials, ganz analog zum gewöhnlichen Fluid

und auch zu einem Granulat, und sukzessivem Einsetzen aller Bewegungsgleichungen erhält man folgendes Resultat [7, 8, 89]

$$\sigma_{ij} = P \delta_{ij} - H_i B_j + \frac{1}{2} (h_j M_i + h_i M_j) - \sigma_{ij}^D \quad (7.12)$$

$$\text{mit } P \equiv T s + \mu \varrho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} - \varepsilon. \quad (7.13)$$

Dabei haben wir die Einbindung von elektrischen Feldern für Ferrofluide bereits vernachlässigt. Es ist öfters üblich die Anteile, die explizit nur Felder enthalten, als Maxwell'schen Spannungstensor zu bezeichnen und quasi von den anderen Teilen abzutrennen. Dies sollte man aber mit Bedacht ausführen, da zum Beispiel das chemische Potential von \mathbf{B} oder \mathbf{H} auch von der Temperatur abhängen kann. So kann man die Teile nicht als voneinander getrennte Phänomene ansehen. Von der Symmetrie des Spannungstensors kann man sich übrigens überzeugen wenn man das Verfahren wie in Anhang A für Granulate anwendet. Wir verweisen für die explizite Rechnung allerdings auf [91].

Damit wären die notwendigen Variablen eingebunden und die nötigen reaktiven Anteile der Bewegungsgleichungen geklärt. Die übrigen Bilanzgleichungen lassen sich wiederum [7, 8, 89] entnehmen, wobei wir diese im Laufe der Diskussion nicht benötigen werden.

7.2.2 Gleichgewichtsbedingungen

Wir hatten das Auffinden von den sogenannten Gleichgewichtsbedingungen als die Maximierung des Entropiefunktionalen unter Nebenbedingungen dargestellt, siehe Abschnitt 2.2. Als Zwangsbedingungen dienen hier die Gleichungen 7.5, sozusagen als Erhaltungssätze. Die Prozedur [89] führt auf

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0 \quad (\text{und } \mathbf{E}_0 = 0 \text{ für einen elektrischen Leiter}). \quad (7.14)$$

Beide Felder $\mathbf{H}_0 \approx \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}/c$ und $\mathbf{E}_0 \approx \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ sind dabei im lokalen Ruhesystem definiert [89].

Wir finden aber durch die Entropiemaximierung eine weitere Bedingung. Die Magnetisierung \mathbf{M} ist an keinerlei Zwangsbedingung geknüpft. D. h. es gibt für \mathbf{M} keinen Erhaltungssatz oder ähnliches. Beim Maximieren der Entropie spielt also die Magnetisierung sozusagen keine Rolle. Im Gleichgewicht wird dann gelten müssen [7, 8, 89]:

$$\mathbf{h} = 0. \quad (7.15)$$

Diese Eigenschaft teilt die Magnetisierung bzw. \mathbf{h} zum Beispiel mit der granularen Temperatur T_g oder auch mit dem chemischen Potential eines Photonengases. In beiden Fällen war an die entsprechende Variable keine Zwangsbedingung geknüpft, was zur Folge hat, dass die konjugierte Variable im Gleichgewicht identisch verschwindet. Die Bedingung $\mathbf{h} = 0$ entspricht der bisherigen Diskussion. Falls die

Magnetisierung mit $\omega\tau \ll 1$ im (oder sehr nahe am) Gleichgewicht ist, wird es nicht nötig sein \mathbf{M} als eigenständige Variable mitzunehmen. Zudem hatten wir \mathbf{h} als Abweichung des momentanen Feldes \mathbf{B} vom Gleichgewichtsfeld $\mathbf{B}^{eq}(\mathbf{M})$ dargestellt. D. h. wir haben eine konsistente Beschreibung zu \mathbf{h} gefunden.

Die übrigen Gleichgewichtsbedingungen lassen sich in Abschnitt 2.2 finden, die wir hier nicht explizit ein weiteres Mal diskutieren müssen.

7.2.3 Dissipation

Als letztes geben wir die dissipativen Teile der Bilanzgleichungen σ_{ij}^D und \mathbf{Y}^D an [7, 8],

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^D = & \left[\frac{\zeta}{3} v_{\ell\ell} + \left(\lambda_1 - \frac{1}{3} (\lambda_2 + \mathbf{M}^2 \lambda_3) \right) M_\ell h_\ell \right] \delta_{ij} \\ & + \eta v_{ij}^0 + \frac{1}{2} \lambda_2 (M_i h_j + M_j h_i) + \lambda_3 M_i M_j M_\ell h_\ell \\ & + \frac{1}{2} \lambda_4 (M_j (\mathbf{M} \times \mathbf{h})_i + M_i (\mathbf{M} \times \mathbf{h})_j), \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} Y_i^D = & - \left(\frac{\chi}{\tau} \delta_{ij} + \nu_{\parallel} M_i M_j + \nu_{\times} \epsilon_{ij\ell} M_\ell \right) h_j \\ & + \lambda_1 M_i v_{\ell\ell} + \lambda_2 M_j v_{ij}^0 + \lambda_3 M_i M_j M_\ell v_{j\ell}^0 + \lambda_4 \epsilon_{ikj} M_k M_\ell v_{j\ell}^0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Wir erkennen mit η und ζ die üblichen Viskositäten einer Flüssigkeit. Die Konstruktion der dissipativen Anteile erfolgte ähnlich wie für granulare Materie. Durch das Auftreten der magnetischen Felder wird die Isotropie des Raumes verletzt. Da die Magnetisierung nicht im Gleichgewicht ist, hätte man sogar mehrere definierte Richtungen im System. Es wurde jedoch mit der Richtung der Magnetisierung nur eine Vorzugsrichtung gewählt um die Theorie so einfach wie möglich zu halten. D. h. die Richtung der Magnetisierung \mathbf{M} diene als Konstruktionshilfe für die Onsagerkoeffizienten. Wir erinnern an die Verzerrungen u_{ij} mit denen man den Tensor α_{ijkl} erstellen konnte. Die Parameter λ_i sind das Resultat eines solchen Vorgehens. Beiträge $\sim \lambda_i$ sind Außerdiagonalterme der Onsagermatrix, d. h. sie treten in mehreren dissipativen Strömen auf. Mit λ_i lassen sich also zwei thermodynamische Kräfte mit v_{ij} und \mathbf{h} assoziieren. Damit sind die λ_i ein Mass für die Kopplung eines Geschwindigkeitsgradienten an eine Nichtgleichgewichtsmagnetisierung und umgekehrt. Zudem hat man mit ν_{\parallel} und ν_{\times} noch zusätzliche Diagonalbeiträge zur Onsagermatrix.

Im weiteren Verlauf werden wir allerdings nur einen Teil dieser recht großen Anzahl an Transportkoeffizienten nutzen. Die meisten werden aufgrund der gewählten Geometrie sowieso nicht mehr auftauchen. Andere Koeffizienten vernachlässigen wir um die Theorie so einfach wie möglich zu halten [89]. Wir verwenden im folgenden Kapitel nur η , χ/τ und λ_2 . Der Transportkoeffizient λ_2 wird entscheidend für die Beschreibung von kettenbildenden Ferrofluiden sein. Es konnte sogar schon ein Zusammenhang zwischen λ_2 und den Partikelketten nachgewiesen werden [94, 95].

Für den vollständigen Satz an Gleichungen verweisen wir wiederum auf die einschlägige Literatur [7, 8, 89]. Zur Beschreibung der Effekte des nächsten Kapitels genügen die angegebenen Gleichungen. Damit haben wir alle notwendigen Werkzeuge um ein Ferrofluid hinreichend gut beschreiben zu können.

Kapitel 8

Strukturviskosität und Dilatanz

In Ferrofluiden ließ sich beobachten, dass die gemessene Viskosität eine Funktion des angelegten magnetischen Feldes H^a ist. Solange man Ferrofluide betrachtet, die keine Ketten bilden, ist diese Abhängigkeit über einen großen Scherratenbereich gerade unabhängig von der Scherrate. Man konnte für die Scherspannung folgendes messen [84]:

$$\sigma_{xy} \sim (H^a)^2. \quad (8.1)$$

H^a ist dabei der Betrag des angelegten Feldes. Desweiteren konnte festgestellt werden, dass gewisse Ferrofluide noch weitere Abhängigkeiten zeigten. Wie wir bereits wissen, können die Nanopartikel unter bestimmten Umständen in gewissen Maße agglomerieren, sie bilden Ketten, die sich entlang des angelegten Feldes ausrichten. Dadurch ergibt sich für die Scherspannungskurven ein zusätzlicher Effekt. Die Scherspannung scheint keine lineare Funktion bezüglich der Scherrate zu sein. Die gemessene Viskosität ist also keine Konstante mehr hinsichtlich des angelegten Geschwindigkeitsgradienten. Es kommt zu einem Strukturviskositätseffekt: Die gemessene Viskosität nimmt mit zunehmender Scherrate ab [84, 88]. Dies lässt sich intuitiv gut verstehen, da die Ketten bei stärkeren Anregungen auseinander brechen werden.

Die experimentellen Aufbauten ähneln denen der verwendeten Messmethoden für die Granulate. Dabei wurde zum Beispiel an Geometrien mit zwei Zylindern gemessen, wobei der innere Zylinder in Rotation versetzt wird. Andererseits gab es auch alternative Aufbauten, so zum Beispiel ein *cone-plate* Rheometer, siehe hierzu [84]. Dieses Rheometer besteht aus einer (runden) Platte als unteren Abschluss und einem kegelförmigen Rotationskörper, dessen Spitze in der Mitte der runden Platte aufliegt. Wird der Konus rotiert, ergibt sich ein Geschwindigkeitsprofil, das dem der einfachen Schergeometrie ähnelt. Um die Homogenität der Scherrate zu gewährleisten, muss der Winkel, den die untere Platte mit dem Kegel einschließt, entsprechend klein gewählt werden, d. h. der Kegel erscheint recht „stumpf“. Für Ferrofluide stellt sich die zusätzliche Anforderung, dass auch ein (homogenes) Magnetfeld über die ganze Messprobe hinweg zuverlässig bereitgestellt wird. Zudem muss ausgeschlossen werden, dass eine freie Oberfläche die Messungen beeinflusst. Wie wir wissen, bilden Ferrofluide Oberflächenstrukturen aus, die bei entsprechender Größe in die Messapparatur hineinragen könnten. Diese Schwierigkeiten lassen

sich aber bewältigen, so dass wir einen guten Überblick über das Scherverhalten von Ferrofluiden bekommen können [84].

8.1 Reduzierte Viskosität in Scherströmungen

Wir werden nun die *Ferrofluidodynamik* auf ein konkretes Phänomen hin überprüfen. Es soll getestet werden, ob die Theorie die starke gemessene Scherverdünnung reproduzieren kann. Ziel wird es sein einen Ausdruck für die sogenannte effektive Viskosität zu erhalten. Die reduzierte Viskosität ist im Allgemeinen definiert als

$$\eta_{eff} \equiv -\frac{\sigma_{xy}}{v_{xy}} - \eta. \quad (8.2)$$

Die effektive Viskosität kann also auch von Größen abhängen, die nicht im Gleichgewicht sind, wie zum Beispiel der Scherrate. Wir zeigten, dass die „eigentliche“ Viskosität der Flüssigkeit η solch eine Abhängigkeit nicht zeigen kann. Zudem wäre es auch gar nicht notwendig solch eine Abhängigkeit einzuführen, schließlich lassen sich die Effekte mit den definierten Beiträgen des Spannungstensors erklären.

Als Geometrie wählen wir die einfache Schergeometrie, siehe Abbildung 4.2. Das System soll zudem stationär geschert werden und außerdem suchen wir stationäre Lösungen. Wir sehen also davon ab, so etwas wie eine einsetzende Scherströmung zu diskutieren. Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten ein (homogenes) äußeres Feld H^a anzulegen, das verschiedene qualitative Ergebnisse liefert, siehe hierzu Abbildungen 8.1. Ein Feld parallel zur z -Richtung auszurichten macht nicht viel Sinn, da dies zu keiner effektiven Viskosität führen würde, die sich von η unterscheidet. Es gilt also zwei verschiedene Versuchsgeometrien bezüglich des äußeren angelegten Feldes zu untersuchen.

8.1.1 Äußeres Feld H^a senkrecht zur Strömungsrichtung

Zuerst besprechen wir die obere Konstellation aus Abbildung 8.1. Die Randbedingungen für die Felder wurden dabei gleich mit angegeben. Dadurch ergeben sich folgende Felder (die z -Komponenten der Felder können o. B. d. A. jeweils Null gesetzt werden und wurden deshalb weggelassen):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} M_x \\ H^a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ H^a - M_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Dies können wir in die zu lösenden Gleichungen einsetzen:

$$0 = \nabla_y \sigma_{xy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(\varrho, \dot{\gamma}, \mathbf{B}, \mathbf{M}), \quad (8.4)$$

$$0 = \nabla_y \sigma_{yy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(\varrho, \dot{\gamma}, \mathbf{B}, \mathbf{M}), \quad (8.5)$$

$$\frac{1 + \lambda_2}{2} \cdot \dot{\gamma} M_y + \frac{\chi}{\tau} \cdot M_x = \frac{\chi}{\tau} \cdot B_x^{eq}(\mathbf{M}), \quad (8.6)$$

$$\frac{1 - \lambda_2}{2} \cdot \dot{\gamma} M_x = \frac{\chi}{\tau} (H^a - B_y^{eq}(\mathbf{M})). \quad (8.7)$$

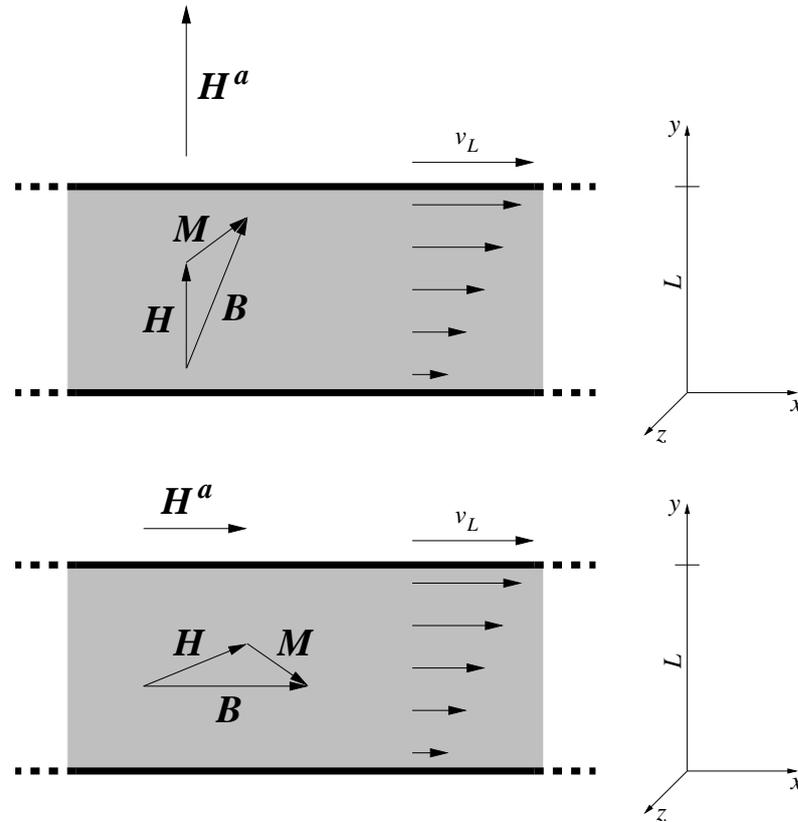


Abbildung 8.1: Dargestellt ist ein Ferrofluid in einfacher Schergeometrie zu den gleichen Bedingungen wie in Abbildung 4.2. Die Randbedingungen für die Geschwindigkeit sind dabei: $v_x(0) = 0$ und $v_x(L) = v_L$. Die Bedingungen für die Felder sind jeweils unterschiedlich. Für die obere Konstellation mit $\mathbf{H}^a = H^a \cdot \mathbf{e}_y$ hat man: $H^a = B_y$. Für den unteren Aufbau mit $\mathbf{H}^a = H^a \cdot \mathbf{e}_x$ erhält man: $H^a = H_x$. Diese Bedingungen lassen sich jeweils auf $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ bzw. $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ zurückführen.

Es handelt sich hierbei nacheinander um die x - und die y -Komponente der Impulserhaltung. Die unteren zwei Gleichungen stellen die x - und die y -Komponente der Magnetisierungsgleichung (7.8) in dieser Geometrie dar. Die Gleichung für die Massenerhaltung wird in dieser Geometrie automatisch erfüllt und ist nicht weiter zu beachten. Die Maxwell-Gleichungen haben wir nicht extra angegeben, wobei wir diese im Prinzip schon mit der Angabe der Felder eingearbeitet hatten. Wir haben dabei schon vorweg genommen, dass sich das System homogen in den Variablen lösen lässt. Man erhält demnach eine über den Plattenabstand hinweg konstante Dichte und eine konstante Scherrate $\dot{\gamma} = v_L/L$ bzw. ein lineares Geschwindigkeitsfeld $v_x = \dot{\gamma} \cdot y$. Das Problem der Magnetisierungsgleichungen besteht nun darin, dass wir keinen linearen Zusammenhang zwischen dem Gleichgewichtsfeld \mathbf{B}^{eq} und \mathbf{M} annehmen. Stattdessen verwenden wir die Langevinnäherung für die Gleichgewichtsmagnetisierung $\mathbf{M}^{eq}(\mathbf{B})$, siehe Gleichung (7.1), und bilden davon die Inverse. Dies ist leider nur numerisch möglich. Eine beispielhafte Darstellung der Magnetisierung ist in Abbildung 8.2 dargestellt.

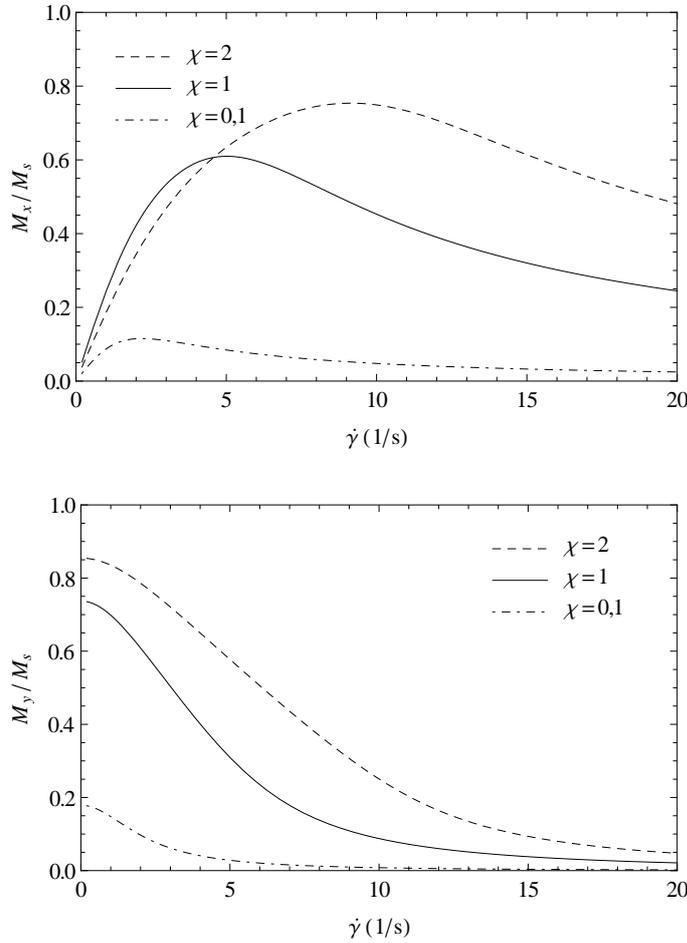


Abbildung 8.2: Magnetisierungen als Funktion der angelegten Scherrate für verschiedene Suszeptibilitäten bei senkrechtem äusseren Feld \mathbf{H}^a . Zu Beginn wird M_x „aufgebaut“ und dann genauso wie M_y durch die Scherrate sukzessive verkleinert zu werden. Dieser Effekt lässt sich auf die Zerstörung der Ketten zu höheren Scherraten interpretieren. Die Werte sind: $M_s \approx 12,6 \cdot 10^{-3} \sqrt{J/m^3}$, $H^a = 2 \cdot M_s$, $\tau = 1$ s und $\lambda_2 = 0,2$.

Für diesen Versuchsaufbau reduziert sich die effektive Viskosität auf folgendes,

$$\eta_{eff} = \frac{1}{2\dot{\gamma}} \left[(1 - \lambda_2) M_x (H^a - B_y^{eq}(\mathbf{M})) + (1 + \lambda_2) M_y (B_x^{eq}(\mathbf{M}) - M_x) \right]. \quad (8.8)$$

Dabei sind B_x^{eq} und B_y^{eq} wieder diejenigen Funktionen, die numerisch berechnet werden müssen. Das Verhalten von η_{eff} bezüglich der Scherrate zu verschiedenen Suszeptibilitäten ist in Abbildung 8.3 dargestellt.

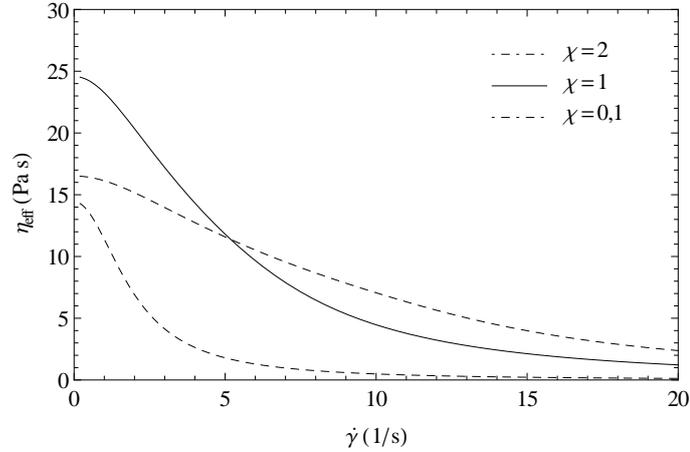


Abbildung 8.3: Effektive Viskosität als Funktion der angelegten Scherrate für verschiedene Suszeptibilitäten bei senkrechtem äusseren Feld \mathbf{H}^a . Wir erkennen, dass ein größeres χ nicht zwangsläufig zu einer größeren effektiven Viskosität für alle Scherraten führt.

8.1.2 Äußeres Feld \mathbf{H}^a parallel zur Strömungsrichtung

Es gilt noch die untere Konstellation aus Abbildung 8.1 zu besprechen. Die Randbedingungen für die Felder lassen sich wiederum der Unterschrift zur Abbildung entnehmen. Die Felder lassen sich damit schreiben als (wobei wir wieder die unwichtigen z -Komponenten der Felder weggelassen haben)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} H^a + M_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H^a \\ -M_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Dies verwenden wir ein weiteres Mal um die zu lösenden Gleichungen zu vereinfachen:

$$0 = \nabla_y \sigma_{xy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(\varrho, \dot{\gamma}, \mathbf{B}, \mathbf{M}), \quad (8.10)$$

$$0 = \nabla_y \sigma_{yy} \quad \text{mit} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(\varrho, \dot{\gamma}, \mathbf{B}, \mathbf{M}), \quad (8.11)$$

$$\frac{1 + \lambda_2}{2} \cdot \dot{\gamma} M_y + \frac{\chi}{\tau} \cdot M_x = \frac{\chi}{\tau} (B_x^{eq}(\mathbf{M}) - H^a), \quad (8.12)$$

$$\frac{\lambda_2 - 1}{2} \cdot \dot{\gamma} M_x = \frac{\chi}{\tau} \cdot B_y^{eq}(\mathbf{M}). \quad (8.13)$$

Es handelt sich hierbei wie für die vorherige Geometrie nacheinander um die x - und die y -Komponente der Impulserhaltung. Die unteren zwei Gleichungen stellen die x - und die y -Komponente der Magnetisierungsgleichung (7.8) dar. Auch hier gilt wieder, dass sich die Magnetisierungsgleichungen nur numerisch lösen lassen. Die Komponenten der Magnetisierung M_x und M_y sind in Abbildung 8.4 für bestimmte Materialparameter dargestellt.

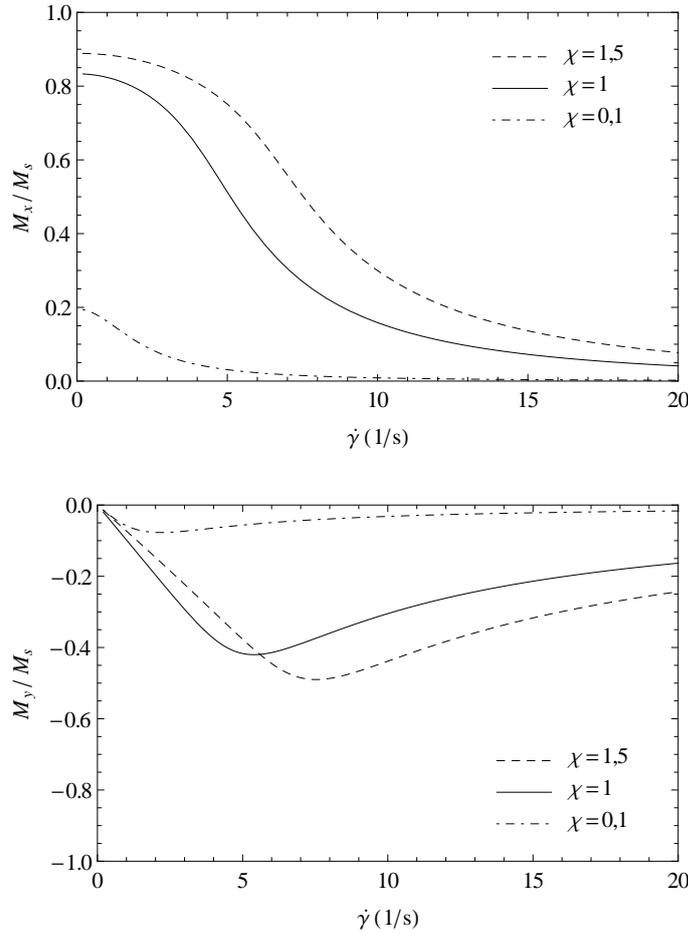


Abbildung 8.4: Magnetisierungen als Funktion der angelegten Scherrate für verschiedene Suszeptibilitäten bei parallelem äusseren Feld \mathbf{H}^a . Wie für die Konstellation mit senkrechten Feld wird M_x zuerst „aufgebaut“ und dann genauso wie M_y durch die Scherrate sukzessive verkleinert zu werden. Die Wert sind wieder: $M_s \approx 12,6 \cdot 10^{-3} \sqrt{J/m^3}$, $H^a = 2 \cdot M_s$, $\tau = 1 \text{ s}$ und $\lambda_2 = 0,2$

Die effektive Viskosität stellt sich in diesem Versuchsaufbau folgendermassen dar:

$$\eta_{eff} = \frac{1}{2\dot{\gamma}} \left[(\lambda_2 - 1) M_x B_y^{eq}(\mathbf{M}) + (1 + \lambda_2) M_y (B_x^{eq}(\mathbf{M}) - M_x - H^a) \right]. \quad (8.14)$$

Die Darstellung der numerischen Lösung für η_{eff} bezüglich der Scherrate zu verschiedenen Suszeptibilitäten ist in Abbildung 8.5 zu finden.

Eine ausführliche Diskussion aller Materialparameter findet sich in [91]. Wir haben uns hier auf die Darstellung der numerischen Lösungen zu verschiedenen Suszeptibilitäten χ beschränkt. Wir erkennen in den gefunden Kurven, dass eine stärkere Magnetisierbarkeit, d. h. ein größeres χ , nicht unbedingt zu allgemein größeren Werten führen muss. Schon in den Abbildungen zu den Magnetisierungen sehen wir, dass M_x bzw. M_y manchmal etwas „träger“ hinsichtlich der Scherrate

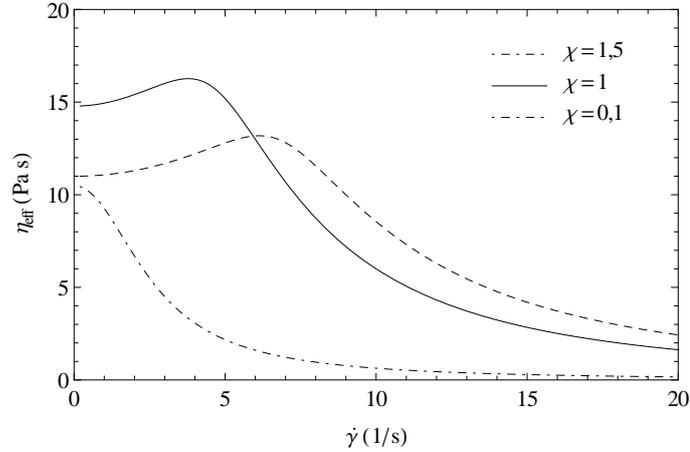


Abbildung 8.5: Effektive Viskosität als Funktion der angelegten Scherrate für verschiedene Suszeptibilitäten bei parallelem äusseren Feld \mathbf{H}^a . Es kommt für größeres χ zu einem weiteren Effekt, der Scherverdickung genannt wird. Die effektive Viskosität steigt für bestimmte χ mit der Scherrate zuerst an. Für größere Scherraten zeigen die Kurven die übliche Scherverdünnung.

für größere χ reagiert. Dies mag an folgendem liegen: Größer werdende χ bedeuten zunächst auch den Anstieg aller Ergebnisse zu M_x , M_y für alle Scherraten. Ab einem bestimmten Punkt bei relativ niedrigeren Scherraten scheint die Tendenz der Ausrichtung bezüglich des Gleichgewichtsfeldes der allgemeinen Erhöhung der Werte für $|\mathbf{M}|$ zu überwiegen. Und damit kann es vorkommen, dass M_x in einem gewissen Scherratenbereich auch mal kleiner ist für größere Suszeptibilitäten.

Die effektive Viskosität für beide Versuchsgeometrien wurde in [91] schon intensiv diskutiert. Wie erkennen den starken Abfall für größer werdende Scherraten. Dieser Scherverdünnungseffekt ist charakteristisch für Ferrofluide, die Ketten aus den Nanopartikeln bilden. Dabei sind Viskositäten dieser Größenordnung durchaus üblich [84]. Die Relaxationszeiten wurden jeweils mit $\tau = 1$ s gewählt. Dies ist eine realistische Annahme für die kettenbildenden Teilchen eines Ferrofluids, wie in [93] gezeigt werden konnte.

Das Verhalten von Ferrofluiden unter einfachen Scherbedingungen bei verschiedentlich angelegten äußeren Feldern wurden im Rahmen eines linearen Ansatzes bezüglich $\mathbf{B}^{eq}(\mathbf{M}) = (1 + \chi) \mathbf{M}/\chi$ ebenfalls schon diskutiert [36, 96]. Die analytischen Berechnungen zeigten das Ausbilden von Maxima in den Kurven der effektiven Viskosität. Es stellte sich heraus, dass diese Maxima von den Werten für χ und λ_2 abhängen. Im Rahmen des vorliegenden Abschnitts konnte zumindest für parallel angelegte äußere Felder bestätigt werden, dass auch mit einem nicht-linearen Ansatz der Gleichgewichtsmagnetisierung solche Maxima auftreten können. Ein Ferrofluid sollte neben der Strukturviskosität also auch dilatantes Verhalten zeigen. Solche Maxima deuten möglicherweise auf folgendes hin: Für größer werdende Scherraten werden zwar die Ketten im Durchschnitt kleiner sein, aber es könnte auch die von der Scherrate abhängige Ausrichtung der Ketten in der Strömung eine Rolle spielen.

8.1.3 Magnetisierung nahe am Gleichgewicht

Die berechneten Kurven sind letztlich Resultat der Annahme großer Relaxationszeiten τ bzw. $\omega\tau \approx 1$. Nur dann ist die Magnetisierung eine eigenständige Variable und es kommt zu den besprochenen Scherratenabhängigkeiten der Viskosität. Wir überprüfen nun das Ergebnis auf das Limit für kleine Relaxationszeiten τ bzw. $\omega\tau \ll 1$. Dabei ist $1/\omega$ die Zeitskala des Labors. Wir identifizieren ω mit der Scherrate $\dot{\gamma}$ für dieses Experiment. Der Übergang zu kleinen Relaxationszeiten bedeutet auch, dass wir es mit Ferrofluiden zu tun haben, die keine Ketten bilden werden. D. h. wir können $\lambda_2 = 0$ setzen. Wir betrachten zuerst die Konstellation mit senkrechtem äußeren Feld \mathbf{H}^a . In der Magnetisierungsgleichung (8.7) lässt sich mit $\dot{\gamma}\tau \ll 1$ der Term $\sim M_x$ vernachlässigen. M_x ist in dieser Näherung selbst eine kleine Größe und damit ist der Term quadratisch klein gegen die beiden anderen dieser Gleichung. Wir bekommen folgendes für die Gleichgewichtsfelder:

$$B_x^{eq} = M_x + \frac{\dot{\gamma}\tau}{2\chi} \cdot M_y, \quad (8.15)$$

$$B_y^{eq} \approx H^a. \quad (8.16)$$

Dies setzen wir in die effektive Viskosität aus Gleichung (8.8) ein und erhalten

$$\eta_{eff} \approx \frac{\tau}{4\chi} \cdot M_y^2. \quad (8.17)$$

Gehen wir noch einen Schritt weiter und nähern $B_y^{eq} \approx (1 + \chi) M_y/\chi$ ergibt sich $M_y \approx \chi H^a / (1 + \chi)$. Die effektive Viskosität ist nach dieser Näherung gerade

$$\eta_{eff} \approx \frac{\tau}{4} \cdot \frac{\chi}{(1 + \chi)^2} (H^a)^2. \quad (8.18)$$

Dieselbe Rechnung lässt sich für die Konstellation mit dem äußeren Feld parallel zur Strömungsrichtung durchführen. Diesmal können wir den Term $\sim M_y$ in der ersten der beiden Magnetisierungsgleichungen (8.12) vernachlässigen. Schließlich wird in dieser Geometrie und Näherung M_y eine kleine Größe sein und der Term wird quadratisch klein gegenüber den anderen Beiträgen sein. Wir bekommen

$$B_x^{eq} \approx M_x + H^a, \quad (8.19)$$

$$B_y^{eq} = -\frac{\dot{\gamma}\tau}{2\chi} \cdot M_x. \quad (8.20)$$

Die effektive Viskosität ergibt in dieser Näherung

$$\eta_{eff} \approx \frac{\tau}{4\chi} \cdot M_x^2. \quad (8.21)$$

Wir erkennen ein sehr ähnliches Ergebnis wie für die Geometrie mit senkrechtem Feld. Nähern wir zusätzlich $B_x^{eq} \approx (1 + \chi) M_x/\chi$ erhält man diesmal $M_x \approx \chi H^a$ und man bekommt für die effektive Viskosität

$$\eta_{eff} \approx \frac{\tau}{4} \cdot \chi (H^a)^2. \quad (8.22)$$

Die Ergebnisse für η_{eff} zu den beiden Konstellationen sind übrigens absolut äquivalent, wenn man beachtet, dass H^a wegen den Anschlussbedingungen der Maxwell-Gleichungen zu unterschiedlichen inneren Feldern „gehört“. Für das senkrechte äußere Feld hat man $H^a = B_y \approx (1 + \chi) M^{eq}/\chi$ und für das parallele Feld ergibt sich $H^a = H_x \approx M^{eq}/\chi$. In beiden Fällen lautet das Ergebnis $\eta_{eff} \approx \tau (M^{eq})^2/4\chi$. Wir erhalten also die in der Einführung erwähnte quadratische Abhängigkeit von η_{eff} für das angelegte magnetische Feld. Gleichzeitig fällt die Scherratenabhängigkeit weg, d. h. im Limes kleiner Relaxationszeiten bzw. für nicht-kettenbildende Ferrofluide wird man keine Scherverdünnung beobachten. Dies deckt sich mit den experimentellen Beobachtungen [84, 88]. Zudem haben wir das Ergebnis früherer theoretischer Arbeiten zu der feldinduzierten Viskositätserhöhung gezeigt [84, 92]. Die Näherung $\omega\tau \ll 1$ beinhaltet letztlich auch, dass die Magnetisierung als eigenständige Variable überflüssig wird. Es hätte eine Betrachtung der dissipativen Anteile der *Hydrodynamischen Maxwell-Theorie* ausgereicht um diese feldinduzierten Viskositätserhöhung zu beschreiben [89]. Nichtsdestotrotz ergibt die Bildung des Limes das identische Resultat und ist damit konsistent.

Kapitel 9

Scherwelle und der Maxwell'sche Spannungstensor

In diesem Kapitel diskutieren wir das Problem der Möglichkeit einer elastischen Welle in einem Ferrofluid bei angelegtem Magnetfeld. Wir werden uns dazu das hydrodynamische Modenspektrum genauer ansehen. Im Speziellen berechnen wir die Mode der Geschwindigkeit, d. h. wir untersuchen insbesondere den elektromagnetischen Teil des Spannungstensors (Maxwell'scher Spannungstensor). Die Geometrie kann man sich an Hand von Abbildung 9.1 klar machen. Das Ferrofluid soll in y -Richtung unendlich ausgedehnt sein und in eben diese Richtung eine Welle ausbilden. Die Anregungsgeschwindigkeit muss hierzu die x -Komponente der Geschwindigkeit v_x sein. In x -Richtung habe das Ferrofluid eine endliche Ausdehnung, wobei der genaue Wert uns nicht zu interessieren braucht. Ebenso vernachlässigen wir die Ausdehnung des Fluids in z -Richtung, so dass wir faktisch ein zweidimensionales Problem vorliegen haben. Die „Wände“ des Fluids sollen sich frei bewegen können, d. h. die Umgebung soll keinen mechanischen Einfluss auf das Fluid haben. Dies stellt natürlich gewisse Forderungen an die experimentelle Überprüfbarkeit. So könnte man als Umgebung eine Flüssigkeit wählen, deren Viskosität weit unterhalb der Viskosität des Ferrofluids mit angelegtem Magnetfeld liegt. Das angelegte magnetische Feld \mathbf{H}^a sei zudem im ganzen Raum homogen verteilt und das Ferrofluid nehmen wir als inkompessibel an, $v_{\ell\ell} = 0$. Wir sehen außerdem von einem „unteren“ und/oder einem „oberen“ Rand der Geometrie ab um weitere Randeffekte zu vermeiden. Wir wollen hier nur die prinzipielle Existenz einer Scherwelle zeigen.

Die Anschlussbedingungen der Felder wurden wie üblich mit $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ berechnet, so dass wir die Felder im um den Winkel α gedrehten Koordinatensystem angeben können:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} H_n^a \\ H_t^a + M_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_n^a - M_n \\ H_t^a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_n \\ M_t \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Die Feldkomponenten in z -Richtung haben wir Null gesetzt und weggelassen. Wir gehen davon aus, dass das „Wackeln“ an \mathbf{H} keine nennenswerten elektrischen Felder verursacht, wir machen also eine quasistationäre Näherung der Felder und Ströme werden sowieso keine fließen.

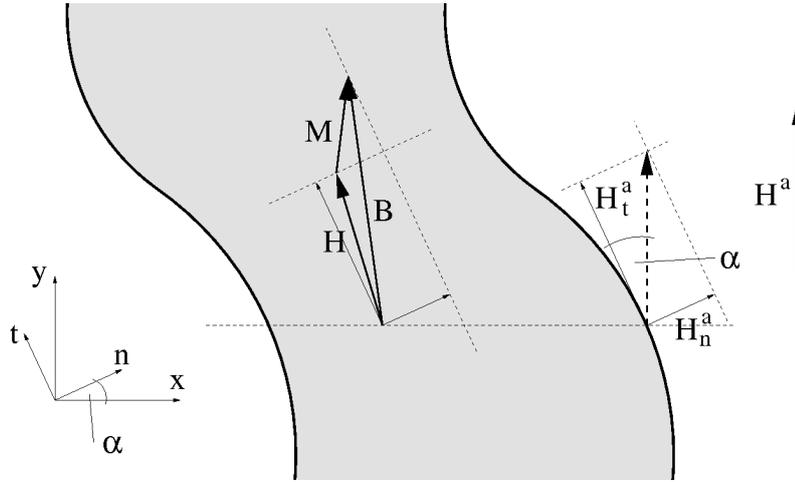


Abbildung 9.1: Ausschnitt aus der Wellenpropagation in einem Ferrofluid. Die Scherwelle bewege sich in y -Richtung wobei die Anregung in x -Richtung erfolgt. Zu sehen sind zwei Koordinatensysteme, die um den Winkel α gegeneinander gedreht sind. Der Winkel $\alpha(y)$ definiert die momentane Auslenkung der Tangente am Rand des Ferrofluids bezüglich des äußeren homogenen Feldes $\mathbf{H}^a = H^a \cdot \mathbf{e}_y$.

Die Angabe der Felder im n - t -Koordinatensystem ist leider etwas unpraktisch, da die Anregungsrichtung bezüglich x definiert wurde. So müssen wir die Felder in das ungedrehte x - y -Koordinatensystem überführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \sin \alpha (\sin \alpha \cdot M_x - \cos \alpha \cdot M_y) \\ H^a + \cos \alpha (\cos \alpha \cdot M_y - \sin \alpha \cdot M_x) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} -\cos \alpha (\sin \alpha \cdot M_y + \cos \alpha \cdot M_x) \\ H^a - \sin \alpha (\cos \alpha \cdot M_x + \sin \alpha \cdot M_y) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Wir werden nähern, dass das System bezüglich der y -Richtung für alle y im Gleichgewicht sein soll, d. h. wir betrachten nur kleine Abweichungen aller Größen in x -Richtung. Dies beinhaltet insbesondere kleine Winkel α und für die magnetischen Felder $M_y \approx \chi H^a$. Betrachtet man sich (9.2) genauer, muss mit dieser Forderung auch M_x eine kleine Größe sein. Die Kleinheit des Winkels α wird durch das Verhältnis der Amplitude der Auslenkungsgeschwindigkeit \hat{v}_x zu der Wellengeschwindigkeit (oder der maximalen Auslenkung der Anregung in x -Richtung zu der Wellenlänge) hergestellt. Dadurch ergeben sich genäherte Ausdrücke für die Felder:

$$\mathbf{B} \approx \begin{pmatrix} -\alpha \chi H^a \\ (1 + \chi) H^a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \approx \begin{pmatrix} -\alpha \chi H^a - M_x \\ H^a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} M_x \\ \chi H^a \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Die notwendigen Bewegungsgleichungen sind die x -Komponente der Impulserhaltung, wobei wir den Spannungstensor mit Gleichung (7.12) kennen. Außerdem haben wir die x -Komponente der Magnetierungsgleichungen auszuwerten. Die y -Komponente der Impulserhaltung und die Massenerhaltung wird mit den gemachten Näherungen identisch erfüllt. Zudem hatten wir $M_y \approx H^a/\chi$ gesetzt, so dass die y -Komponente der Magnetierungsgleichungen ebenfalls nicht betrachtet werden muss. Nach Auswertung der Näherungen erhält man:

$$\varrho \partial_t v_x + \nabla_y \left[-H_x B_y - \frac{1}{2} (1 + \lambda_2) h_x M_y - \frac{\eta}{2} \cdot \nabla_y v_x \right] = 0, \quad (9.4)$$

$$\partial_t M_x - \frac{1}{2} (1 + \lambda_2) M_y \nabla_y v_x = -\frac{\chi}{\tau} h_x \quad \text{mit} \quad h_x \approx \frac{1 + \chi}{\chi} \cdot M_x - B_x. \quad (9.5)$$

Wir haben für $\mathbf{B}^{eq}(\mathbf{M})$ die lineare Variante mit $\mathbf{B}^{eq} = (1 + \chi) \mathbf{M}\chi$ gewählt. Die numerische Variante kann dann für eine genauere Rechnung verwendet werden, für die auch die anderen Näherungen weggelassen werden.

Es fehlt eine Bewegungsgleichung für den Winkel $\alpha = \alpha(y)$. Eine geometrische Betrachtung führt auf (wobei $\tan \alpha \approx \alpha$ genähert wurde):

$$\partial_t \alpha = -\nabla_y v_x. \quad (9.6)$$

Als Zwischenergebnis hat man ein linearisiertes gekoppeltes Differentialgleichungssystem in den Variablen v_x , M_x und α erhalten. Wir können dieses System an Gleichungen mit Hilfe der Methode der Fourier-Transformation lösen [13], wobei für eine beliebige Größe f gilt:

$$f(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(q_y, \omega) e^{i(q_y y - \omega t)} d\omega dq \quad (9.7)$$

mit

$$\partial_t f(y, t) = -i\omega f(y, t), \quad \text{und} \quad \nabla_y f(y, t) = i q_y f(y, t). \quad (9.8)$$

Dabei ist $\tilde{f}(q_y, \omega)$ die transformierte Funktion. Für f stellen wir uns nun unsere drei Größen vor und erhalten dann drei Integralgleichungen. Durch die Linearisierung ist es möglich die Integranden als Gleichungssystem aufzufassen, das seinerseits durch die Beziehungen (9.8) jetzt von algebraischer Natur ist.

Nach einer gewissen Umformungsarbeit erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \omega^2 \tilde{v}_x &= \frac{1}{4\varrho} \left(\frac{4\chi(1+\chi)^2 + (\omega\tau)^2 \chi(3 + \lambda_2^2 + (1 - \lambda_2)^2 \chi)}{(1 + \chi)^2 + (\omega\tau)^2} \right) (H^a)^2 q_y^2 \tilde{v}_x \\ &\quad - \frac{1}{2\varrho} (1 - \lambda_2) \chi (1 + \chi) \left(\chi - \frac{1}{2} (1 + \lambda_2) (1 + \chi) \right) \\ &\quad \quad \quad \times \frac{i\omega\tau}{(1 + \chi)^2 + (\omega\tau)^2} (H^a)^2 q_y^2 \tilde{v}_x \\ &\quad - i \frac{\eta}{2\varrho} \omega q_y^2 \tilde{v}_x \end{aligned} \quad (9.9)$$

Eigentlich haben wir noch nicht das endgültige Resultat $\omega = \omega(q_y)$. Stattdessen handelt es sich um eine Gleichung vierter Ordnung in ω , die man noch lösen müsste. Wir werden das Problem aber parametrisch lösen, da Gleichung (9.9) als folgende Funktion aufgefasst werden kann: $\omega = \omega(q_y, \omega \tau)$. D. h. wir werden das Ergebnis für $\omega \tau \gg 1$ und $\omega \tau \ll 1$ auswerten.

- $\omega \tau \gg 1$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\chi}{4\rho} \left(3 + \lambda_2^2 + (1 - \lambda_2)^2 \chi \right) (H^a)^2 q_y^2 \\ &\quad - i \frac{\eta}{2\rho} \omega q_y^2 \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \pm \frac{1}{2\rho} \left(\rho \chi \left[3 + \lambda_2^2 + (1 - \lambda_2)^2 \chi \right] (H^a)^2 - \frac{\eta^2}{4} \cdot q_y^2 \right)^{1/2} q_y \\ &\quad - i \frac{\eta}{4\rho} \cdot q_y^2 \end{aligned} \quad (9.11)$$

- $\omega \tau \ll 1$

$$\omega^2 = \frac{\chi}{\rho} (H^a)^2 q_y^2 - i \frac{\eta}{2\rho} \cdot \omega q_y^2 \quad (9.12)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2\rho} \left(4\rho \chi (H^a)^2 - \frac{\eta^2}{4} \cdot q_y^2 \right)^{1/2} q_y - i \frac{\eta}{4\rho} \cdot q_y^2 \quad (9.13)$$

Solange das Argument von $()^{1/2}$ positiv ist hat die Geschwindigkeit v_x reelle Moden. Der abklingende Teil der Lösung zeigt erwartungsgemäß ein Verhalten $\sim \eta$. Die Moden sind also nicht rein diffusiv und es ist prinzipiell möglich eine propagierende Welle durch ein Ferrofluid zu beobachten. Wir erkennen, dass der Parameter λ_2 für den Grenzfall $\omega \tau \ll 1$ keine Rolle mehr spielt. In diesem Limit spielen die Suszeptibilität und das angelegte Feld H^a die entscheidende Rolle.

Wir werten beide Fälle noch weiter aus. Für hinreichend kleine q_y (hydrodynamischer Grenzfall) erhält man für die Wellengeschwindigkeit

$$c_{\omega \tau \gg 1} \approx \sqrt{\frac{\chi}{\rho}} \sqrt{3 + \lambda_2^2 + (1 - \lambda_2)^2 \chi} \cdot H^a \quad (9.14)$$

$$c_{\omega \tau \ll 1} \approx \sqrt{\frac{\chi}{\rho}} \cdot H^a. \quad (9.15)$$

Nehmen wir übliche Werte für ein Ferrofluid mit $\chi \approx 1,5$ und $\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$ erhält man für die Wellengeschwindigkeiten etwa:

$$c \approx 0,04 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{H^a}{\sqrt{J/\text{m}^3}}. \quad (9.16)$$

Das Feld H^a wird sich im Bereich $\approx 20 \sqrt{J/\text{m}^3}$ bewegen und wir können eine Wellengeschwindigkeit von circa $0,75 \text{ m/s}$ abschätzen, also durchaus in einem messbaren Bereich.

Für den Grenzfall $\omega\tau \ll 1$ bestimmen wir zudem noch die Abklinglänge ℓ_y . Diese Größe gibt an nach welcher Strecke die Welle auf $1/e$ ihrer ursprünglichen Amplitude abgesunken ist. Dazu muss die Funktion $q_y(\omega)$ durch Invertieren der oben gefundenen Lösung ermittelt werden und mit $\ell_y = 1/\text{Im}(q_y)$ ausgewertet werden,

$$\ell_y(\omega, H^a) = \frac{\left(\frac{\eta^2}{4} \cdot \omega^2 + \chi^2 (H^a)^4\right)^{1/4}}{\sqrt{\rho} \omega} \cdot \csc\left(\frac{1}{2} \arctan\left[\frac{\eta \omega}{2 \chi (H^a)^2}\right]\right). \quad (9.17)$$

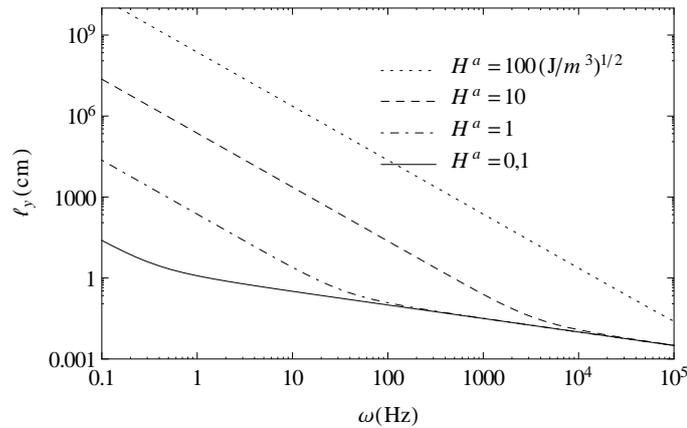


Abbildung 9.2: Abklinglänge ℓ_y als Funktion der Kreisfrequenz ω für verschiedene angelegte Felder H^a . Stärkere Felder lassen die Welle langsamer abklingen, wohingegen größere Anregungen ω zu einem stärkeren Abklingen führen.

Es konnte also eine prinzipielle Existenz einer propagierenden Welle durch ein Ferrofluid festgestellt werden. Offensichtlich ist dies nur möglich durch die Existenz elektromagnetischer Anteile im Spannungstensor, d. h. die Teile, die zusammenfassend auch Maxwell'scher Spannungstensor genannt werden. Gestützt wird die Lösung durch die hohe Suszeptibilität eines Ferrofluids mit $\chi \approx 1$. Ein kleines χ würde sehr schnell den Bereich einer propagierenden Welle einschränken, da es schwierig werden würde entsprechende q_y zu finden, die einen Realteil in $\omega(q_y)$ zulassen. Die Gültigkeit dieser Lösung ist, wie wir erwähnt hatten, auf kleine Anregungsamplituden im Vergleich zu der Wellengeschwindigkeit eingeschränkt. Ansonsten lässt sich die Kleinheit des Winkels α und der Magnetsierungs Komponente M_x im Vergleich zu M_y nicht gewährleisten.

Kapitel 10

Zusammenfassung

Der Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Anwendung bestehender hydrodynamischer Theorien auf das Fließverhalten granularer Materie und von Ferrofluiden. Wir leiten dazu die notwendigen Gleichungen ab und lösen diese zu verschiedenen Versuchsgeometrien und Randbedingungen. Ziel ist es verschiedene beobachtete Effekte mindestens qualitativ beschreiben zu können um die Güte der verwendeten Theorien herauszuarbeiten.

Zuallererst stellen wir die hydrodynamische Methode in Kapitel 2 am Beispiel eines gewöhnlichen Fluids vor. Eine hydrodynamische Ansatz ist dabei eine makroskopische Beschreibung kondensierter Materie unter Einbeziehung dissipativer Effekte im Grenzfall kleiner äußerer Anregungen, bzw. Abweichungen vom Gleichgewicht. Grundlage dieser Methodik sind dabei Erhaltungssätze und Symmetrieprinzipien. Daraus lassen sich die reaktiven Anteile der Bewegungsgleichungen gewinnen. Die irreversiblen Anteile der Bewegungsgleichungen lassen sich aus einer Maximierung der Entropie und der Konstruktion einer Koeffizientenmatrix nach dem Onsagerprinzip erhalten.

Der erste Teil der Arbeit ist den Granulaten gewidmet. Zu Beginn von Kapitel 3 geben wir eine kurze Einführung in die allgemeinen Eigenschaften dieser Materialklasse. Danach stellen wir die hydrodynamische Theorie vor, die wir in den nachfolgenden Kapiteln anwenden werden [2–6]. Wir stellen dabei explizit die „neuen“ Zustandsvariablen vor, die von M. Liu und Y. Jiang in die hydrodynamische Beschreibung für Granulate eingebunden wurden. Im Wesentlichen sind dies eine transiente Elastizität und eine mesoskopische, granulare Temperatur T_g . Die Transienz der Elastizität ist ein wesentliches Merkmal, da (trockene) Granulate bei Anregung die Tendenz haben können, mechanisch instabil zu werden. Die granulare Temperatur ist dabei ein Maß für die Energie der ungerichteten, zufälligen Bewegungen der Körner des Granulats untereinander. Beide Phänomene sind über die dissipativen Anteile ihrer Bewegungsgleichungen aneinander gekoppelt. In Abschnitt 3.2.6 werden wir die vorhandene Theorie im Einklang mit der hydrodynamischen Methode um zusätzliche dissipative Teile weiterentwickeln.

Den ersten beobachteten Effekt werden wir in Kapitel 4 besprechen. Es handelt sich hierbei um die Beobachtung einer perfekten Plastizität, solange die Verformungen, die am System geleistet werden, relativ klein sind. Im Wesentlichen heißt das,

dass die gemessene Scherspannung unabhängig von der gewählten Rate der äußeren Anregung ist. Wir sind hierbei interessiert diesen Effekt qualitativ aufzuzeigen und wählen dazu eine einfache Schergeometrie. Es folgt eine Betrachtung eines stationären Systems und lösen die Gleichungen für die elastischen Verzerrungen und beziehen die granulare Temperatur in die Betrachtung mit ein. Aus dem Zusammenspiel von Elastizität und der granularen Temperatur T_g ergeben sich elastische Verzerrungen, die ausschließlich von Materialparametern abhängen. Für den Spannungstensor bedeutet dies ebenfalls, dass man eine Lösung erhält, die unabhängig von den Raten der Anregung ist. Damit kann die perfekte Plastizität eines Granulats erklärt werden. Zudem werden wir eine einsetzende Scherströmung besprechen und diese mit gängigen experimentellen Beobachtungen vergleichen.

Nun werden Granulate auch stärkeren Verformungen, bzw. Anregungen ausgesetzt sein und die granulare Temperatur T_g wird dabei eine zentralere Rolle einnehmen. In Kapitel 5 werden wir diesen Bereich der granularen Phänomene besprechen. Solche starken Anregungen führen zu völlig anderem Verhalten der gemessenen Spannungen. Je nach experimentellem Aufbau und Randbedingung, verhalten sich die Messkurven unterschiedlich. Meist wird das Verhalten der Scherspannung in Abhängigkeit der Rate einer Scherverformung diskutiert. Das Spektrum reicht dabei von einer quadratischen bis zu einem nahezu Verschwinden der Abhängigkeit von der Rate. Wir lösen im Laufe dieses Kapitels die Bewegungsgleichungen für verschiedene Versuchsgeometrien, wobei wir sukzessive Gravitation und eine freie Oberfläche mit in die Diskussion einbeziehen werden. Zudem vergleichen wir die gewonnenen theoretischen Resultate mit experimentellen Ergebnissen um quantitative Werte für einen Teil der Materialparameter zu erhalten. Es zeigte sich, dass die Abhängigkeiten von der Rate der Anregung im Wesentlichen auf zwei unterschiedliche Randbedingung zurückzuführen sind. Allerdings ist ein gewisser Unsicherheitsfaktor die Angabe der Transportkoeffizienten als Funktion der Materialdichte. Diese sind mitentscheidend für das Verhalten der Spannungskurven. So muss der Bereich der gemachten Ansätze weiter eingeschränkt werden, wobei dies mit weiteren Berechnungen, Simulationen oder experimentellen Beobachtungen geschehen muss. Nichtsdestotrotz konnte das Verhalten qualitativ sehr gut wiedergegeben werden und eine Einteilung der Effekte nach Randbedingung gefunden werden.

Nachdem langsame und schnelle Verformungen besprochen wurden, wird in Kapitel 6 der sogenannte Zwischenbereich betrachtet. Wir lösen dafür die Bewegungsgleichungen für die elastischen Verzerrungen und die granulare Temperatur und betrachten jedoch diesmal den Spannungstensor für den gesamten Verformungsbereich. Auch hierbei ist es entscheidend welche Randbedingung man für das granulare System wählt. Für ein sogenanntes Druckkontrolliertes Experiment lässt sich ein interessanter Effekt beobachten. Für relativ kleine Verformungen haben wir ein perfekt plastisches System und für große Verformungen ein System, das in gewisser Weise von der Rate der Verformung abhängt. Es zeigt sich, dass der Übergang nicht zwingend monoton sein muss, d. h. es lässt sich eine „Einbuchtung“, d. h. ein Minimum in der berechneten Spannung beobachten. Dies entspricht den experimentellen Beobachtungen, welche wir im Rahmen dieses Kapitels beschreiben können. Zudem diskutieren wir den in Experimenten beobachtbaren Effekt des Scherbands. Dies ist

eine alternative Lösung zu einem homogenen System. Dabei entstehen zwei Bereiche der Lösung. Ein Bereich ruht und ist durch die elastischen Verzerrungen gegeben, wohingegen der zweite Bereich von der granularen Temperatur T_g dominiert ist und damit fluiden Charakter zeigt. Es zeigen sich gewisse Analogien zu einem van-der-Waals-Gas. Die beiden Bereiche lassen sich gegeneinander verschieben, ohne dass dabei die angelegte Spannung verändert wird.

Wir können feststellen, dass die verwendete hydrodynamische Theorie die Qualität hat ein umfassendes Spektrum an granularen Phänomenen zu erklären. Es gelang verschiedenste Bereiche der experimentellen Beobachtungen zu beschreiben und miteinander zu verbinden. Als Ausblick sollte die Theorie zusätzlich auf kompliziertere Geometrien angewendet werden, die es erforderlich machen das Gleichungssystem numerisch zu lösen.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Ferrofluiden, d. h. stark magnetisierbaren Flüssigkeiten. Wir geben wieder mit Kapitel 7 eine kurze Einführung in Aufbau und Phänomenologie der Ferrofluide. Ganz analog zu den Granulaten soll wiederum eine hydrodynamische Theorie verwendet werden [7, 8, 89, 90]. In diesem Kapitel erweitern wir die Hydrodynamik des gewöhnlichen Fluids um die nötigen Zustandsvariablen, die von H. W. Müller und M. Liu eingeführt wurden. Die hydrodynamische Beschreibung muss dabei um die elektromagnetischen Felder ergänzt werden. Im Allgemeinen sind die magnetischen Felder B , H und die Magnetisierung M im Gleichgewicht, so dass es nicht notwendig ist M als explizite Variable in eine Theorie einzubinden. Für die makroskopische Beschreibung der Ferrofluide wäre das aber nicht hinreichend. Die Magnetisierung M zeigt sich als eigenständige makroskopische Größe, die das Aufstellen einer unabhängigen Bewegungsgleichung notwendig macht. Wir stellen zum einen diese Bewegungsgleichung vor und skizzieren zum anderen die hydrodynamische Methode.

Für ein Ferrofluid zeigten sich erstaunliche Effekte unter dem Einfluss äußerer Magnetfelder. Wir diskutieren in Kapitel 8 die Möglichkeit eine Strukturviskosität oder auch Scherverdünnung genannt. Erhöht man die Rate der Verformung lässt sich beobachten, dass die Viskosität immer kleiner wird. Es zeigt sich im Rahmen dieses Kapitels, dass die Mitnahme der Magnetisierung M gerade diesen Effekt beschreiben kann. Es werden zwei verschiedene Feldkonstellationen in einfacher Schergeometrie berechnet und der Scherverdünnungseffekt nachvollzogen. Der Zusammenhang zwischen Magnetisierung und den übrigen magnetischen Feldern im Gleichgewicht wird dabei nicht wie üblich linear angesetzt, d. h. $M = \chi H$. Stattdessen wird dafür die Langevin-Funktion gewählt, die einen Sättigungsbereich für die Magnetisierung vorsieht. Dadurch ist es nicht mehr möglich analytische Berechnungen anzustellen und die Gleichungen werden numerisch gelöst. Es zeigt sich, dass sogar ein Scherverdickungseffekt (Dilatanz) für ein Ferrofluid möglich ist und bestätigen damit eine bereits vorhandene analytische Rechnung mit linearem Ansatz. Mit der Strukturviskosität kann ein wesentliches Merkmal der Beobachtungen an einem Ferrofluid wiedergegeben werden.

In Kapitel 9 diskutieren wir das Ausbilden einer elastischen Scherwelle in einem Ferrofluid. Dazu lösen wir den relevanten Teil des hydrodynamischen Modenspektrums und erhalten eine Dispersionsrelation für die Geschwindigkeit. Die Welle pro-

pagiert demnach senkrecht zu der Anregungsrichtung und hat dabei nicht nur die üblichen diffusiven Anteile proportional zu der Fluidviskosität. Zusätzlich ergeben sich Anteile, die auf den Maxwell'schen Spannungstensor zurückzuführen sind. Diese Teile ergeben bei entsprechend hoher Materialsuszeptibilität einen elastischen Teil in der zu Grunde liegenden Dispersionrelation.

Anhang A

Rotation des Koordinatensystems

Wir werden ein granulares System in gegeneinander rotierten Koordinatensystemen betrachten und daraus Symmetrieinformation bezüglich der Spannungen bzw. der Verzerrungen ableiten.

Es soll ein granulares System zu gegebenen s , s_g , ϱ , u_{ij} und \mathbf{g} betrachtet werden. Das Koordinatensystem in dem das System definiert ist drehen wir um einen beliebigen Winkel und weisen dieser Rotation den Vektor $\boldsymbol{\vartheta}$ zu. Der Zusammenhang zu der üblichen Rotationsmatrix $R_{\alpha i}$ lautet folgendermaßen:

$$dR_{\alpha i} = \varepsilon_{ijk} R_{\alpha j} d\vartheta_k. \quad (\text{A.1})$$

Skalare Größen verhalten sich invariant unter Rotationen des Koordinatensystems, d. h. wir können schließen:

$$d\varepsilon = d\bar{s} = ds_g = d\varrho = 0. \quad (\text{A.2})$$

Dies gilt nun nicht mehr für Tensoren höherer Stufe. Wir müssen also die Geschwindigkeit \mathbf{v} , die Spannungen π_{ij} , die Impulsdichte \mathbf{g} und die Verzerrungen u_{ij} mit Hilfe der Rotationsmatrix $R_{\alpha i}$ transformieren,

$$v_\alpha = R_{\alpha i} v_i, \quad \pi_{\alpha\beta} = R_{\alpha i} R_{\beta j} \pi_{ij}, \quad g_\alpha = R_{\alpha i} g_i, \quad u_{\alpha\beta} = R_{\alpha i} R_{\beta j} u_{ij}; \quad (\text{A.3})$$

bzw.

$$dg_\alpha = g_i dR_{\alpha i} \quad (\text{A.4})$$

$$= \varepsilon_{ijk} R_{\alpha j} g_i d\vartheta_k, \quad (\text{A.5})$$

$$du_{\alpha\beta} = u_{ij} R_{\beta j} dR_{\alpha i} + u_{ij} R_{\alpha i} dR_{\beta j} \quad (\text{A.6})$$

$$= u_{ij} \varepsilon_{ilk} R_{\alpha l} R_{\beta j} d\vartheta_k + u_{ij} \varepsilon_{jlk} R_{\beta l} R_{\alpha i} d\vartheta_k. \quad (\text{A.7})$$

Zum besseren Verständnis erinnern wir an die Eigenschaften einer Rotationsmatrix, $R_{\alpha i} R_{\alpha j} = \delta_{ij}$ und $R_{\alpha i} R_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta}$.

Diese Informationen nutzen wir für das Energiedifferential eines granularen Systems, siehe (3.11), und erhalten

$$0 = -\pi_{\alpha\beta} (u_{ij} \varepsilon_{ilk} R_{\alpha l} R_{\beta j} d\vartheta_k + u_{ij} \varepsilon_{jlk} R_{\beta l} R_{\alpha i} d\vartheta_k) + v_\alpha \varepsilon_{ijk} R_{\alpha j} g_i d\vartheta_k \quad (\text{A.8})$$

$$= -(\varepsilon_{ilk} \pi_{lj} u_{ij} + \varepsilon_{jlk} \pi_{il} u_{ij}) d\vartheta_k + \varepsilon_{ijk} v_j g_i d\vartheta_k. \quad (\text{A.9})$$

Die Impulsdichte kennen wir mit $\mathbf{g} = \rho \mathbf{v}$. Der Term $\sim v_j g_i$ wird also aufgrund der Symmetrie von $v_j v_i$ bzw. der Antisymmetrie von ε_{ijk} identisch verschwinden.

Der Drehwinkel ϑ kann beliebig gewählt werden, d. h. der Ausdruck in den runden Klammern aus (A.9) kann bereits Null gesetzt werden und wir erhalten

$$0 = \varepsilon_{lmn} (\pi_{lk} u_{mk} + \pi_{kl} u_{km}) \quad (\text{A.10})$$

oder

$$0 = \pi_{ik} u_{jk} + \pi_{ki} u_{kj} - \pi_{jk} u_{ik} - \pi_{kj} u_{ki}. \quad (\text{A.11})$$

Da wir wissen, dass u_{ij} als auch π_{ij} symmetrisch sind, reduziert sich die gefundene Relation auf

$$\pi_{ik} u_{jk} = \pi_{jk} u_{ik}. \quad (\text{A.12})$$

Anhang B

Anschluss an die elastischen Gleichungen

Wir zeigen die Notwendigkeit des Wegfalls eines in T_g konstanten Terms η_0 im Ansatz zur granularen Viskosität $\eta_g = \eta_1 T_g$. Dazu sollen die (vereinfachten) Bewegungsgleichungen zu u_{ij} allgemein gelöst werden.

Die linearen, elastischen Bewegungsgleichungen von u_{ij} und deren homogene Lösungen für gegebenes v_{ij} sind:

$$\partial_t u_{ij} = v_{ij}, \quad (\text{B.1})$$

$$\rightarrow u_{ij}(t) = u_{ij,0} + v_{ij} t. \quad (\text{B.2})$$

Es ist $u_{ij,0} \equiv u_{ij}(t = 0)$.

Nun betrachten wir die Gleichungen mit dissipativem Anteil

$$\partial_t u_{ij} = (1 - \alpha) v_{ij} - \frac{u_{ij}}{\tau} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau} = \lambda T_g. \quad (\text{B.3})$$

Der Einfachheit wegen haben wir darauf verzichtet verschiedene Materialkoeffizienten für den spurlosen und den Spuranteil zu wählen. Es soll nun eine Lösung im Bereich kleiner Anregungen $v_{ij} \rightarrow 0$ gefunden werden um untersuchen zu können ob der Anschluss an die Lösung der elastischen Gleichungen gelingt.

Wir erinnern uns an die stationäre Lösung für die granuläre Temperatur, siehe Gleichung (4.24),

$$\lambda T_g = \Lambda \Phi \left(d \sqrt{v_{kl}^2} \right) \sqrt{v_{ij}^2} \xrightarrow{d \sqrt{v_{kl}^2} \ll 1} \approx \Lambda d v_{ij}^2. \quad (\text{B.4})$$

Das war das Ergebnis falls man $\eta_g = \eta_1 T_g$ und $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 T_g$ wählt.

Wir setzen die Lösung für T_g in die Bewegungsgleichungen ein, lösen diese und entwickeln anschließend $u_{ij}(t)$ für kleine v_{ij} :

$$u_{ij}(t) = u_{ij,0} + (1 - \alpha) v_{ij} t + \mathcal{O}(v_{kl}^2) + \dots \quad (\text{B.5})$$

Daran lassen sich zwei Dinge ablesen. Um der elastischen Lösung für verschwindende Anregungen zu entsprechen muss $\alpha \sim T_g$ gelten. Der Beitrag $\sim \alpha v_{ij}$ ist dann von höherer Ordnung und wird bei der Bildung des elastischen Limes keine Rolle spielen. Zum anderen erkennen wir, dass der Ansatz mit $\eta_0 \equiv 0$ keinen Term $\sim v_{ij}$ liefert und daher in der Nähe der elastischen Lösung (mindestens) quadratisch in v_{ij} abklingt.

Jetzt soll die Variante mit $\eta_g = \eta_0 + \eta_1 T_g$ und $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 T_g$ betrachtet werden. Löst man damit die Gleichung für T_g erhält man diesmal für kleine Anregungen v_{ij} :

$$\lambda T_g \approx \lambda \sqrt{\frac{\eta_0}{\gamma_0}} v_{ij}^2. \quad (\text{B.6})$$

Wir lösen wieder die Bewegungsgleichungen von u_{ij} und erhalten für kleine v_{ij}

$$u_{ij}(t) = u_{ij,0} + (1 - \alpha) v_{ij} t - \lambda \sqrt{\frac{\eta_0}{\gamma_0}} v_{kl}^2 u_{ij,0} t + \mathcal{O}(v_{kl}^2) + \dots \quad (\text{B.7})$$

Selbst mit der Annahme, dass α im elastischen Limes verschwindet, haben wir Schwierigkeiten dieses Ergebnis in die elastische Lösung (B.2) zu überführen. Im Gegensatz zum Ansatz mit $\eta_0 \equiv 0$ liefert die Entwicklung einen in v_{ij} linearen Term, der von den Materialparametern und auch von den Anfangsbedingungen abhängt. Die Bildung des Limes liefert nicht die Lösung der kinematischen Gleichungen in u_{ij} . Der Ansatz mit $\eta_0 \neq 0$ kann nicht der richtige sein.

Damit haben wir natürlich auch die Variante $\eta_g = \eta_0$ und $\gamma = \gamma_0$ ebenfalls diskutiert. D. h. die Transportkoeffizienten überhaupt nicht in T_g anzusetzen liefert offensichtlich ebenfalls eine unzureichende Lösung.

Außerdem können wir folgern, dass auch ein Ansatz der gar keinen konstanten Term enthält, also $\eta_g = \eta_1 T_g$ und $\gamma = \gamma_1 T_g$, nicht funktioniert. Dazu müssten wir einfach in (B.7) die Materialparameter η_0, γ_0 durch η_1, γ_1 ersetzen und die Argumente beibehalten.

Zudem hätten wir zu Beginn auch umgekehrt fragen können warum der Parameter γ einen bezüglich T_g konstanten Term enthalten soll und gleichzeitig den Ansatz $\eta_g = \eta_1 T_g$ als „richtig“ vorausgesetzt hätten. Die Diskussion und das Ergebnis ist natürlich äquivalent zu obiger Vorgehensweise und den Resultaten.

Literaturverzeichnis

- [1] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI, Hydrodynamik* (Akademie-Verlag, Berlin 1991).
- [2] Y. Jiang und M. Liu, *Granular elasticity without the coulomb condition*, Phys. Rev. Lett. **91**, 144301 (2003).
- [3] Y. Jiang und M. Liu, *Energetic instability unjams sand and suspension*, Phys. Rev. Lett. **93**, 148001 (2004).
- [4] Y. Jiang und M. Liu, *From elasticity to hypoplasticity: Dynamics of granular solids*, Phys. Rev. Lett. **99**, 105501 (2007).
- [5] Y. Jiang und M. Liu, *Incremental stress-strain relation from granular elasticity: Comparison to experiments*, Phys. Rev. E **77**, 021306 (2008).
- [6] Y. Jiang und M. Liu, *Granular solid hydrodynamics*, Granular Matter **11**, 139 (2009).
- [7] H. W. Müller und M. Liu, *Structure of ferrofluid dynamics*, Phys. Rev. E **64**, 061405 (2001).
- [8] H. Müller und M. Liu, in *Ferrofluids*, herausgegeben von S. Odenbach (Springer Berlin, 2003), Bd. 594 von *Lecture Notes in Physics*, S. 112–123.
- [9] P. M. Chaikin und T. C. Lubensky, *Principles of condensed matter physics* (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
- [10] H. B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics* (John Wiley & Sons, New York 1985).
- [11] P. C. Martin, O. Parodi und P. S. Pershan, *Unified hydrodynamic theory for crystals, liquid crystals, and normal fluids*, Phys. Rev. A **6**, 2401 (1972).
- [12] P. Kostädt und M. Liu, *Three ignored densities, frame-independent thermodynamics, and broken galilean symmetry*, Phys. Rev. E **58**, 5535 (1998).
- [13] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Muehlig, *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2008).
- [14] M. Liu und K. Stierstadt, *Thermodynamics, Electrodynamics, and Ferrofluid Dynamics* (Springer, Berlin 2009).

- [15] S. R. de Groot, *Thermodynamik irreversibler Prozesse* (Bibliographisches Institut, Mannheim 1960).
- [16] S. R. de Groot und P. Mazur, *Non-equilibrium thermodynamics* (Dover Publications, New York 1984).
- [17] M. Liu, *The onsager symmetry relation and the time inversion invariance of the entropy production* (1998), [arXiv:cond-mat/9806318](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9806318).
- [18] H. M. Jaeger, S. R. Nagel und R. P. Behringer, *Granular solids, liquids, and gases*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1259 (1996).
- [19] P. G. de Gennes, *Granular matter: a tentative view*, Rev. Mod. Phys. **71**, 374 (1999).
- [20] L. P. Kadanoff, *Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows*, Rev. Mod. Phys. **71**, 435 (1999).
- [21] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VII, Elastizitätstheorie* (Akademie-Verlag, Berlin 1991).
- [22] Bild wurde überreicht von Stefan Luding (2012). Ein ähnliches Bild findet sich in: Luding, S., *Stress distribution in static two-dimensional granular model media in the absence of friction*, Phys. Rev. E **55**, 4720 (1997).
- [23] A. J. Liu und S. R. Nagel, *Jamming is not just cool any more.*, Nature **396**, 21 (1998).
- [24] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud und P. Claudin, *Jamming, force chains, and fragile matter*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1841 (1998).
- [25] K. Hutter und K. R. Rajagopal, *On flows of granular materials*, Continuum Mechanics and Thermodynamics **6**, 81 (1994).
- [26] *Persönliche Kommunikation mit Michael Mayer und Professor Dr. Mario Liu* (Tübingen 2009).
- [27] S. B. Savage, *Analyses of slow high-concentration flows of granular materials*, Journal of Fluid Mechanics **377**, 1 (1998).
- [28] P. C. Johnson und R. Jackson, *Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing*, Journal of Fluid Mechanics **176**, 67 (1987).
- [29] E. Guyon, J.-P. Hulin und L. Petit, *Hydrodynamik* (Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, Braunschweig/Wiesbaden 1997).
- [30] S. Luding, *Towards dense, realistic granular media in 2d*, Nonlinearity **22**, R101 (2009).

- [31] K. Bräuer, M. Pfitzner, D. O. Krimer, M. Mayer, Y. Jiang und M. Liu, *Granular elasticity: Stress distributions in silos and under point loads*, Phys. Rev. E **74**, 061311 (2006).
- [32] D. O. Krimer, M. Pfitzner, K. Bräuer, Y. Jiang und M. Liu, *Granular elasticity: General considerations and the stress dip in sand piles*, Phys. Rev. E **74**, 061310 (2006).
- [33] M. Mayer und M. Liu, *Propagation of elastic waves in granular solid hydrodynamics*, Phys. Rev. E **82**, 042301 (2010).
- [34] D. Forster, *Hydrodynamic fluctuations, broken symmetry, and correlation functions* (Benjamin/Cummings, Reading 1975).
- [35] H. Temmen, H. Pleiner, M. Liu und H. R. Brand, *Convective nonlinearity in non-newtonian fluids*, Phys. Rev. Lett. **84**, 3228 (2000).
- [36] O. Müller, Dissertation, Universität Tübingen (2006).
- [37] C. S. Campbell, *Rapid granular flows*, Annual Review of Fluid Mechanics **22**, 57 (1990).
- [38] Y. Jiang und M. Liu, *Incremental stress-strain relation from granular elasticity: Comparison to experiments*, Phys. Rev. E **77**, 021306 (2008).
- [39] A. N. Schofield und P. Wroth, *Critical state soil mechanics* (McGraw-Hill, New York 1968).
- [40] *Persönliche Kommunikation mit Professor Dr. Mario Liu* (Tübingen 2010).
- [41] D. M. Wood, *Soil behaviour and critical state soil mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge 1990).
- [42] D. Taylor, *Fundamentals of soil mechanics* (J. Wiley & Sons, New York 1948).
- [43] C. P. Wroth, *Soil behaviour during shear*, Engineering **186**, 409 (1958).
- [44] S. B. Savage, *The mechanics of rapid granular flows*, Adv. Appl. Mech. **24**, 289 (1984).
- [45] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band V, Statistische Physik* (Akademie-Verlag, Berlin 1987).
- [46] R. M. Nedderman, *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge University Press, 1992).
- [47] R. A. Jewell, *Direct shear tests on sand*, Géotechnique **39**, 309 (1989).
- [48] A. Simoni und G. Houlsby, *The direct shear strength and dilatancy of sand-gravel mixtures*, Geotechnical and Geological Engineering **24**, 523 (2006).

- [49] O. Masanobu und K. Junichi, *Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear*, Soils and Foundations **14**, 25 (1974).
- [50] K. Been und M. G. Jefferies, *A state parameter for sands*, Géotechnique **35**, 99 (1985).
- [51] K. Lu, E. E. Brodsky und H. P. Kavehpour, *A thermodynamic unification of jamming*, Nature **4**, 404 (2008).
- [52] K. Lu, E. E. Brodsky und H. P. Kavehpour, *Shear-weakening of the transitional regime for granular flow*, Journal of Fluid Mechanics **587**, 347 (2007).
- [53] J. A. Dijksman, G. H. Wortel, L. T. H. van Dellen, O. Dauchot und M. van Hecke, *Jamming, yielding, and rheology of weakly vibrated granular media*, Phys. Rev. Lett. **107**, 108303 (2011).
- [54] R. Daniel, A. Poloski und A. Sáez, *Vane rheology of cohesionless glass beads*, Powder Technology **181**, 237 (2008).
- [55] G. Gudehus, *Physical Soil Mechanics*, Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics (Springer, Berlin 2011).
- [56] *Persönliche Kommunikation mit Dr. Dmitry O. Krimer* (Tübingen 2011).
- [57] S. Mahle, Y. Jiang und M. Liu, *The critical state and the steady-state solution in granular solid hydrodynamics* (2010), [arXiv:1006.5131](https://arxiv.org/abs/1006.5131).
- [58] R. A. Bagnold, *Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **225**, 49 (1954).
- [59] S. B. Savage und M. Sayed, *Stresses developed by dry cohesionless granular materials sheared in an annular shear cell*, Journal of Fluid Mechanics **142**, 391 (1984).
- [60] D. M. Hanes und D. L. Inman, *Observations of rapidly flowing granular-fluid materials*, Journal of Fluid Mechanics **150**, 357 (1985).
- [61] G. Bossis, Y. Grasselli und O. Volkova, *Granular rheology in zero gravity*, Journal of Physics: Condensed Matter **16**, 3279 (2004).
- [62] P. K. Haff, *Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon*, Journal of Fluid Mechanics **134**, 401 (1983).
- [63] L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T. C. Lubensky und J. P. Gollub, *Granular shear flow dynamics and forces: Experiment and continuum theory*, Phys. Rev. E **65**, 011307 (2001).
- [64] GDR MiDi, *On dense granular flows*, The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics **14**, 341 (2004).

- [65] F. Da Cruz, F. Chevoir, D. Bonn und P. Coussot, *Viscosity bifurcation in granular materials, foams, and emulsions*, Phys. Rev. E **66**, 051305 (2002).
- [66] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux und F. m. c. Chevoir, *Rheo-physics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows*, Phys. Rev. E **72**, 021309 (2005).
- [67] G. I. Tardos, S. McNamara und I. Talu, *Slow and intermediate flow of a frictional bulk powder in the couette geometry*, Powder Technology **131**, 23 (2003).
- [68] G. Tardos, M. Khan und D. Schaeffer, *Forces on a slowly rotating, rough cylinder in a couette device containing a dry, frictional powder*, Physics of Fluids **10**, 335 (1998).
- [69] P. Coussot, *Rheometry of Pastes, Suspensions, and Granular Materials: Applications in Industry and Environment* (John Wiley & Sons, Hoboken 2005).
- [70] W. Losert, L. Bocquet, T. C. Lubensky und J. P. Gollub, *Particle dynamics in sheared granular matter*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1428 (2000).
- [71] D. M. Mueth, *Measurements of particle dynamics in slow, dense granular couette flow*, Phys. Rev. E **67**, 011304 (2003).
- [72] R. Behringer, D. Howell, L. Kondic, S. Tennakoon und C. Veje, *Predictability and granular materials*, Physica D: Nonlinear Phenomena **133**, 1 (1999).
- [73] C. Ancey, *Dry granular flows down an inclined channel: Experimental investigations on the frictional-collisional regime*, Phys. Rev. E **65**, 011304 (2001).
- [74] J. Rajchenbach, *Dense, rapid flows of inelastic grains under gravity*, Phys. Rev. Lett. **90**, 144302 (2003).
- [75] C. Cassar, M. Nicolas und O. Pouliquen, *Submarine granular flows down inclined planes*, Physics of Fluids **17**, 103301 (2005).
- [76] O. Pouliquen, C. Cassar, P. Jop, Y. Forterre und M. Nicolas, *Flow of dense granular material: towards simple constitutive laws*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **7**, P07020 (2006).
- [77] W. Bi, R. Delannay, P. Richard und A. Valance, *Experimental study of two-dimensional, monodisperse, frictional-collisional granular flows down an inclined chute*, Physics of Fluids **18**, 123302 (2006).
- [78] T. S. Komatsu, S. Inagaki, N. Nakagawa und S. Nasuno, *Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1757 (2001).
- [79] S. Edwards und R. Oakeshott, *Theory of powders*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **157**, 1080 (1989).
- [80] J. T. Jenkins und S. B. Savage, *A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles*, Journal of Fluid Mechanics **130**, 187 (1983).

-
- [81] Y. Forterre und O. Pouliquen, *Flows of dense granular media*, Annual Review of Fluid Mechanics **40**, 1 (2008).
- [82] Y. F. P. Jop und O. Pouliquen, *A constitutive law for dense granular flows*, Nature **441**, 727 (2006).
- [83] P. Schall und M. van Hecke, *Shear bands in matter with granularity*, Annual Review of Fluid Mechanics **42**, 67 (2010).
- [84] S. Odenbach, *Magnetoviscous Effects in Ferrofluids* (Springer, Berlin 2002).
- [85] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge 1985).
- [86] E. Blums, A. Cebers und M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (Walter de Gruyter, Berlin 1996).
- [87] S. Odenbach, *Ferrofluide — ihre Grundlagen und Anwendungen: Magnetische Flüssigkeiten kontrollieren*, Physik in unserer Zeit **32**, 122 (2001).
- [88] L. M. Pop und S. Odenbach, *Investigation of the microscopic reason for the magnetoviscous effect in ferrofluids studied by small angle neutron scattering*, Journal of Physics: Condensed Matter **18**, S2785 (2006).
- [89] M. Liu und K. Stierstadt, in *Colloidal Magnetic Fluids*, herausgegeben von S. Odenbach (Springer Berlin, 2009), Bd. 763 von *Lecture Notes in Physics*, S. 1–74.
- [90] M. Liu, *Hydrodynamic theory of electromagnetic fields in continuous media*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3580 (1993).
- [91] S. Mahle, Diplomarbeit, Universität Tübingen (2006).
- [92] M. I. Shliomis, *Effective viscosity of magnetic suspensions*, Sov. Phys.-JETP **34**, 1291 (1972).
- [93] S. Mahle, P. Ilg und M. Liu, *Hydrodynamic theory of polydisperse chain-forming ferrofluids*, Phys. Rev. E **77**, 016305 (2008).
- [94] S. Odenbach und H. W. Müller, *Stationary off-equilibrium magnetization in ferrofluids under rotational and elongational flow*, Phys. Rev. Lett. **89**, 037202 (2002).
- [95] S. Odenbach und H. Müller, *On the microscopic interpretation of the coupling of the symmetric velocity gradient to the magnetization relaxation*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials **289**, 242 (2005).
- [96] O. Müller, D. Hahn und M. Liu, *Non-newtonian behaviour in ferrofluids and magnetization relaxation*, Journal of Physics: Condensed Matter **18**, S2623 (2006).

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Stefan Mahle
Geburtsdatum: 29.05.1979
Geburtsort: Kirchheim unter Teck
Familienstand: Ledig, ein Kind

Schulbildung:

09/85 - 07/89 Gartenschule, Wendlingen
09/89 - 07/95 Johannes-Kepler-Realschule, Wendlingen
09/98 - 06/00 Philipp-Matthäus-Hahn-Schule, Nürtingen
06/00 Fachgebundene Hochschulreife

Berufsausbildung:

09/95 - 07/98 Ausbildung zum Bauzeichner (Hochbau) durch die Firma Gustav Essig, Wendlingen

Hochschulausbildung:

10/00 - 04/06 Physikstudium an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
04/05 - 04/06 Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik unter Anleitung von Prof. Dr. M. Liu zum Thema:
Hydrodynamische Beschreibung von nicht-Newtonischen Scherströmungen in Ferrofluiden
04/06 Erlangung des akademischen Grades Diplom-Physiker
05/06 - 02/12 Doktorarbeit am Institut für Theoretische Physik unter Anleitung von Prof. Dr. M. Liu zum Thema:
Rheologie von granularer Materie und Ferrofluiden

Beschäftigungen:

09/95 - 08/98 Bauzeichner im Architekturbüro Gustav Essig, Wendlingen
05/05 - 04/06 Studentische Hilfskraft an der Universität Tübingen, Institut für Theoretische Physik
05/06 - 12/06 Wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Tübingen, Institut für Theoretische Physik
Seit 01/07 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Tübingen, Institut für Theoretische Physik

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Mario Liu, der mir diese Doktorarbeit ermöglicht hat. Herausstellen möchte ich dabei die ununterbrochene Bereitschaft zur Diskussion und Betreuung. Ohne die fachliche und überfachliche Hilfestellung wäre das Erstellen dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Ein besonderer Dank geht an Herrn Prof. Dr. Nils Schopohl, der es mir ermöglicht hat am Lehrstuhl zu arbeiten und meine Doktorarbeit fortzuführen. Dabei konnte ich viele wertvolle Erfahrungen in der Organisation des Übungsbetriebs sammeln.

Ein Dankeschön geht auch an meine langjährigen Mitarbeiter Dr. Michael Mayer, Dr. Dmitry Krimer und Andreas Länge für viele lebhafte Diskussionen.

Zudem möchte ich mich bei Dr. Dmitry Krimer, Andreas Länge und Alexander Markowsky für das Korrekturlesen meiner Arbeit bedanken.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppen Liu und Schopohl danke ich für die gute Atmosphäre und das jederzeit freundschaftliche Miteinander.