KA-homogene partielle Ordnungen

DISSERTATION

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
vorgelegt

von
Claudia Döhler
aus Essen

Tübingen
2011

Tag der mündlichen Qualifikation:	13.12.2011
Dekan:	Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Ulrich Felgner
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Wolfgang Knapp

Danksagungen

Mein Dank gilt an allererster Stelle Herrn Prof. Dr. Ulrich Felgner, der diese Arbeit betreut hat. Er investierte viel Zeit in ausführliche Gespräche – vor allem aber stellte er die entscheidende Frage, von der die ganze Arbeit ihren Ausgang nahm.

Ganz allgemein möchte ich mich bei all denen bedanken, die mir in den letzten Jahren ein offenes Ohr schenkten oder meine Gedanken in andere Bahnen lenkten.

Ganz besonders danke ich meinem Mann, der nicht nur all meine Launen ertragen und mich immer wieder ins Gleichgewicht gebracht hat, sondern mir darüber hinaus als kritischer Leser sprachlich und teχnisch zur Seite stand.

Vorwort

Ketten und Antiketten sind die beiden Extreme unter den partiell geordneten Mengen: In Ketten, auch lineare Ordnungen genannt, sind je zwei Elemente vergleichbar; die Elemente einer Antikette hingegen sind paarweise unvergleichbar. Vergleichbarkeit und ihre Negation, die Unvergleichbarkeit, sind die wesentlichen Eigenschaften, die die Beziehung zwischen Elementen oder Teilmengen charakterisieren.

Betrachten wir nun eine beliebige partielle Ordnung $(P, \leq)$. Wir können in gewisser Hinsicht sagen, dass maximale Ketten die Vergleichbarkeits-Relation und maximale Antiketten die Unvergleichbarkeits-Relation in ihrer Größe messen. Oder anders: Maximale Ketten bestimmen die *Höhe* und maximale Antiketten die *Breite* von $(P, \leq)$. Wählen wir in $(P, \leq)$ eine maximale Kette K und eine maximale Antikette A, so sehen wir bildlich A als horizontale und K als vertikale *Achse* von P vor uns – zumal jedes Element von P mit mindestens einem Element aus A vergleichbar und (sofern es nicht selbst in K enthalten ist) mit mindestens einem Element aus K unvergleichbar ist.

Im Geiste Descartes lässt sich darum fragen: Können wir maximale Ketten und Antiketten einer partiell geordneten Menge in einem geeigneten Sinne als ihre *Koordinaten* auffassen?

In Bezug auf $\aleph_0$-Homogenität führt diese Betrachtungsweise zu folgender Frage: Falls jeder endliche Isomorphismus in $(P, \leq)$, dessen Definitionsbereich in eine Kette und eine Antikette zerlegbar ist, sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen lässt, ist $(P, \leq)$ dann bereits homogen?

Ob es einen geeigneten Sinn gibt, in dem maximale Ketten und Antiketten als Koordinaten partieller Ordnungen aufgefasst werden können, sei dahingestellt. Auf jeden Fall führt dieses Bild hinsichtlich der Homogenität in die Irre. Wir werden (in erster Linie für abzählbare partielle Ordnungen) zeigen, dass die letzte Frage zu verneinen ist: Weder *Kreuz-Homogenität* noch *Ketten- und Antiketten-Homogenität* (Definition 1.1.1) implizieren Homogenität.

Die beiden ersten Teile dieser Arbeit behandeln abzählbar unendliche partielle Ordnungen.

In Teil I betrachten wir der Homogenität ähnliche, aber etwas schwächere Eigenschaften: Als KA^n_m-homogen bezeichnen wir eine abzählbare partielle Ordnung, in der all diejenigen endlichen Isomorphismen zu Automorphismen fortsetzbar sind, deren Definitionsbereich in

n Ketten und m Antiketten zerlegt werden kann. Die Klasse der KA-homogenen partiellen Ordnungen umfasst sämtliche Klassen KA^n_m-homogener partieller Ordnungen (Definition 1.3.2).

In Kapitel 1 charakterisieren wir diese Klasse weitestgehend. Dabei orientieren wir uns an einer Arbeit von James H. Schmerl [Schm], in der die Isomorphie-Typen höchstens abzählbarer homogener partieller Ordnungen bestimmt werden.

In Kapitel 2 geben wir ein Kriterium für die Homogenität partieller Ordnungen an. Ausgehend von den Arbeiten von Michael H. Albert und Stanley N. Burris [AlBu] und von Manfred Droste und H. Dugald Macpherson [DrMcP] zeigen wir, dass wir lediglich sechs *signifikante Lagen* (Definitionen 2.2.7 und 2.3.3) untersuchen müssen, um die Homogenität einer partiellen Ordnung zu überprüfen.

In Teil II konstruieren wir abzählbare nicht-homogene partielle Ordnungen, die sowohl KA^1_0- als auch KA^0_1-homogen (d.h. *Ketten- und Antiketten-homogen*) oder sogar KA^1_1-homogen (d.h. *Kreuz-homogen*) sind. In solchen partiellen Ordnungen lässt sich jeder endliche Isomorphismus, dessen Definitionsbereich eine Kette oder eine Antikette bzw. die Union einer Kette und einer Antikette ist, zu einem Automorphismus fortsetzen – für beliebige endliche Isomorphismen gilt dies aber nicht. Somit implizieren weder Ketten- und Antiketten-Homogenität (Korollar 5.5.2) noch Kreuz-Homogenität (Korollar 5.8.5) die Homogenität.

Insgesamt erhalten wir mit unserer Konstruktionsmethode genau vier Isomorphie-Typen abzählbarer nicht-homogener, jedoch Ketten- und Antiketten-homogener partieller Ordnungen (Bemerkung 5.6.1 und Korollar 5.7.4).

In Teil III übertragen wir für überabzählbare reguläre Kardinalzahlen κ mit $\kappa = 2^{<\kappa}$ das zentrale Ergebnis auf κ-mächtige partielle Ordnungen. Auch hier konstruieren wir, das Verfahren aus dem abzählbaren Fall leicht variierend, eine Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnung, die nicht homogen ist.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Teil I

Grundlagen der KA-Homogenität

Kapitel 0

Einige Begriffe und Notationen

0.1 Mengen- und Logik-Notationen

Ordinalzahlen sind ($\in$-transitive) Mengen. Für Ordinalzahlen μ und ν sind die Ausdrücke $\mu < \nu$ und $\mu \in \nu$ daher gleichwertig.

Mit ω notieren wir die kleinste unendliche Ordinalzahl und mit $\aleph_0$ die kleinste unendliche Kardinalzahl.

Mit ***abzählbar*** meinen wir *abzählbar unendlich* – andernfalls sagen wir *höchstens abzählbar* bzw. *endlich*.

Sei M eine beliebige Menge und κ eine beliebige (endliche oder unendliche) Kardinalzahl. Wir notieren mit

$\mathfrak{P}_e(M)$	die Menge der endlichen Teilmengen von M; mit
$\mathfrak{P}_\kappa(M)$	die Menge der κ-mächtigen Teilmengen von M; mit
$\mathfrak{P}_{\leq\kappa}(M)$	die Menge der höchstens κ-mächtigen Teilmengen von M; und mit
$\mathfrak{P}_{<\kappa}(M)$	die Menge der Teilmengen von M, deren Mächtigkeit echt kleiner als κ ist.

Seien κ und ν unendliche Kardinalzahlen. Dann gilt:

$$\nu^{<\kappa} := \mathrm{Sup}\{\nu^\mu \mid \mu \in \kappa\} \quad \& \quad 2^{<\kappa} := \mathrm{Sup}\{2^\mu \mid \mu \in \kappa\}$$

Für $2^{<\kappa}$, die ***schwache Potenz*** von κ , gilt dabei: $2^{<\kappa} = \kappa^{<\kappa}$

Sei $(A, \leq_A)$ eine beliebige linear geordnete Menge und $(B, \leq_B)$ eine Substruktur von $(A, \leq_A)$. Wir sagen, B liegt ***konfinal*** in A, falls es für jedes Element $a \in A$ ein Element $b \in B$ gibt mit $a \leq b$.

Eine Kardinalzahl κ bezeichnen wir als ***regulär***, falls κ (als Menge von Ordinalzahlen, durch $\in$ geordnet) keine Teilmenge I mit $|I| < \kappa$ besitzt, die konfinal in κ liegt.

Sei Φ ein Ausdruck (Term oder Formel bzw. Aussage) in einer Sprache $\mathfrak{L}$ und t_0, t_1 seien $\mathfrak{L}$-Terme. Dann erhalten wir den $\mathfrak{L}$-Ausdruck $\Phi_{[t_0/t_1]}$ aus Φ, indem wir jedes Vorkommen von t_0 durch den Term t_1 ersetzen.

0.2 Partielle Ordnungen

Partiell geordnete Mengen nennen wir kurz auch ***partielle Ordnungen***.

In diesem Kapitel sei immer $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung; Q und Q' seien Teilmengen von P.

0.2.1 Notation Mit der ***(partiell) geordneten Menge Q*** meinen wir die Substruktur $(Q, \leq \cap (Q \times Q))$ – diese notieren wir kurz durch $(Q, \leq)$.

Die Relationen $<$, $>$ und $\geq$ werden von $\leq$ kanonisch induziert. Sind p und q Elemente von P, so dass $p \not\leq q$ und $p \not\geq q$ gilt, dann sagen wir, p und q seien ***unvergleichbar***, und notieren $p \parallel q$.

Sei $\sharp$ eine der Relationen $<, \leq, >, \geq, \parallel$.

1.) Falls $q \sharp q'$ gilt für alle $q \in Q$ und für alle $q' \in Q'$, so notieren wir $Q \sharp Q'$.

    Dabei erlauben wir es, einelementige Mengen nur mit ihrem Element zu notieren, also z.B. $q \parallel Q'$.

2.) Sei q ein Element von P. Wir setzen

$$P^{\sharp q} := \{p \in P \mid p \sharp q\} \quad \& \quad P^{\sharp Q} := \{p \in P \mid p \sharp Q\}$$

0.2.2 Definition *(Ketten und Antiketten)* Eine Teilmenge K von P bezeichnen wir als ***Kette***, falls $(K, \leq)$ linear geordnet ist.

Eine Teilmenge A von P bezeichnen wir als ***Antikette***, falls die Elemente von A bezüglich $\leq$ paarweise unvergleichbar sind.

0.2.3 Definition Wir definieren

$$Q^{\uparrow} := \{p \in P \mid \text{ es gibt ein } q \in Q \text{ mit } q \leq p\}$$

als den ***oberen Schatten*** von Q (in P). Entsprechend definieren wir

$$Q^{\downarrow} := \{p \in P \mid \text{ es gibt ein } q \in Q \text{ mit } q \geq p\}$$

als den ***unteren Schatten*** von Q (in P).

Dabei ist zu beachten, dass die Ausdrücke $Q^{\uparrow}$ und $Q^{\downarrow}$ nur in Bezug auf eine vorgegebene partielle Ordnung $(P, \leq)$ definiert sind – diese muss aus dem Kontext hervorgehen. (Die präzisere Notation $Q_P^{\uparrow}$ bzw.$Q_P^{\downarrow}$ erscheint unter dem Aspekt der Lesbarkeit nicht wünschenswert.)

Falls Q einelementig ist, $Q = \{q\}$, so notieren wir auch $q^{\uparrow}$ und $q^{\downarrow}$ anstelle von $\{q\}^{\uparrow}$ und $\{q\}^{\downarrow}$.

0.2.4 Definition Sei q ein Element von Q. Wir nennen q ein ***minimales Element*** von Q, falls Q kein Element q' enthält mit $q' < q$. Die Menge der minimalen Elemente von Q bezeichnen wir mit $\mathrm{Min}(Q)$.

Entsprechend nennen wir q ein ***maximales Element*** von Q, falls Q kein Element q' enthält mit $q < q'$. Die Menge der maximalen Elemente von Q bezeichnen wir mit $\mathrm{Max}(Q)$.

0.2.5 Definition Sei S eine Antikette in P. Wir nennen S eine ***obere Schranke*** von Q, falls $Q \subseteq S^{\downarrow}$. Falls S einelementig ist, $S = \{s\}$, so sagen wir auch von dem Element s, es sei eine obere Schranke von Q. In diesem Fall ist $Q \leq s$ und wir sagen auch, s sei ein ***oberes Element*** für die Elemente $q \in Q$.

Falls je zwei unvergleichbare Elemente aus P ein gemeinsames oberes Element in P besitzen, so sagen wir, $(P, \leq)$ sei ***nach oben gerichtet***. Insbesondere enthält P dann für jede endliche Teilmenge eine obere Schranke.

Falls Q keine obere Schranke besitzt, sagen wir, Q sei ***nach oben unbeschränkt***.

Entsprechend nennen wir S eine ***untere Schranke*** von Q, falls $Q \subseteq S^{\uparrow}$. Falls S einelementig ist, $S = \{s\}$, so sagen wir auch von dem Element s, es sei eine untere Schranke von Q. In diesem Fall ist $Q \geq s$ und wir sagen auch, s sei ein ***unteres Element*** der Elemente $q \in Q$.

Falls je zwei unvergleichbare Elemente aus P ein gemeinsames unteres Element in P besitzen, so sagen wir, $(P, \leq)$ sei ***nach unten gerichtet***. Insbesondere enthält P dann für jede endliche Teilmenge eine untere Schranke.

Falls Q keine untere Schranke besitzt, sagen wir, Q sei ***nach unten unbeschränkt***.

Nun folgen zwei Definitionen, die bei der Konstruktion partieller Ordnungen hilfreich sind:

0.2.6 Definition Sei M eine höchstens abzählbare Menge und R eine zweistellige antisymmetrische Relation auf M. Wir können R wie folgt zu einer Ordnungsrelation auf M erweitern:

1.) Für jedes $m \in M$ erweitere R um das Paar (m, m). Mit $R' := R \cup \{(m, m) \mid m \in M\}$ erhalten wir eine reflexive (und weiterhin antisymmetrische) Relation auf M.

2.) Für jedes $n \in \omega$ und jede Folge $(m_i)_{i \in (n+2)} \in M^{(n+2)}$ erweitere R' um das Paar (m_0, m_{n+1}), falls $(m_i, m_{i+1}) \in R'$ für jedes $i \in (n + 1)$. Die so erhaltene Relation R'' ist transitiv, reflexiv und offenbar auch antisymmetrisch – also eine Ordnungsrelation auf M.

Wir nennen R'' die ***reflexive und transitive Hülle von R*** (in M) und notieren sie mit $\mathrm{rt}(R)$.

0.2.7 Definition Sei μ eine beliebige Ordinalzahl und $(P_\nu, \leq_\nu)_{\nu \in \mu}$ eine aufsteigende Folge partieller Ordnungen (d.h., für $\eta \in \nu \in \mu$ ist $(P_\eta, \leq_\eta)$ eine Substruktur von $(P_\nu, \leq_\nu)$ bzw. $(P_\nu, \leq_\nu)$ ist eine Erweiterung von $(P_\eta, \leq_\eta)$). Dann nennen wir $(P_\nu, \leq_\nu)_{\nu \in \mu}$ einen ***Turm (partieller Ordnungen)*** und bezeichnen

$$(P, \leq) := \Big(\bigcup_{\nu \in \mu} P_\nu, \bigcup_{\nu \in \mu} \leq_\nu \Big)$$

als seinen ***Limes***.

Schließlich wollen wir noch ein paar Notationen von Ordnungsrelationen angeben:

0.2.8 Notation Mit $\dot{\leq}$ notieren wir die ***kanonische (lineare) Ordnungsrelation*** auf $\mathbb{Q}$, der Menge der rationalen Zahlen. Auch die Einschränkungen dieser Relation auf die Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) oder auf die Menge der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) notieren wir mit $\dot{\leq}$.

Seien $(Q, \leq)$ eine beliebige partielle Ordnung und κ eine beliebige Kardinalzahl. Auf dem cartesischen Produkt $Q \times \kappa$ definieren wir mit

$$\leq_{\pi_1} := \{((q, \mu), (p, \nu)) \in (Q \times \kappa)^2 \mid q \leq p\}$$

eine Ordnungsrelation, die nur die erste Komponente der Paare berücksichtigt. Jedes Element von Q wird hier gewissermaßen durch eine κ-elementige Antikette ersetzt. Mit

$$\leq_{\mathrm{id}_2} := \{((q, \mu), (p, \nu)) \in (Q \times \kappa)^2 \mid \mu = \nu \;\&\; q \leq p\}$$

eine Ordnungsrelation, die nur Paare mit identischer zweiter Komponete enthält und dann die erste Komponente berücksichtigt. Hier werden also κ Kopien von $(Q, \leq)$ unvergleichbar nebeneinander gesetzt.

In den Notationen $\leq_{\pi_1}$ und $\leq_{\mathrm{id}_2}$ ist nicht angegeben, welche Mengen (genauer: welche cartesischen Produkte zweier partieller Ordnungen) durch sie geordnet werden. Das heißt, eine Ordnungsrelation bezeichnen diese Ausdrücke erst im Kontext $(Q \times \kappa, \leq_{\pi_1})$ etc.

0.3 Abbildungen

0.3.1 Definition

1.) Sei $(P', \leq')$ eine beliebige partielle Ordnung. Eine Abbildung Φ von P' nach P, die die Ordnungsrelation erhält (d.h. es ist $p \leq' q$ genau dann, wenn $\Phi(p) \leq \Phi(q)$) nennen wir einen ***Homomorphismus*** von $(P', \leq')$ nach $(P, \leq)$.

2.) Falls φ ein Homomorphismus zwischen zwei Substrukturen von $(P, \leq)$ ist, so nennen wir φ einen ***(partiellen) Homomorphismus innerhalb von*** $\boldsymbol{(P, \leq)}$ oder kürzer einen ***(partiellen) Homomorphismus* in** $\boldsymbol{(P, \leq)}$.

   Den Zusatz *partiell* lassen wir der Kürze halber gelegentlich weg – er soll nur unterstreichen, dass Definitions- und Bildbereich von φ *echte* Teilmengen von P sein können.

   Entsprechend nennen wir φ einen ***(partiellen) Isomorphismus in*** $\boldsymbol{(P, \leq)}$, falls φ ein Isomorphismus zwischen zwei Substrukturen von $(P, \leq)$ ist.

3.) Bei Homomorphismen mit endlichem Definitonsbereich sprechen wir von ***endlichen Homomorphismen***.

4.) Sei $(P', \leq')$ eine beliebige partielle Ordnung. Einen injektiven Homomorphismus nennen wir ***Monomorphismus***. Einen Monomorphismus von $(P', \leq')$ in $(P, \leq)$ bezeichnen wir als eine ***Einbettung*** von $(P', \leq')$ in $(P, \leq)$. Entsprechend sagen wir, $(P', \leq')$ sei in $(P, \leq)$ ***einbettbar***, falls es einen Monomorphismus von $(P', \leq')$ in $(P, \leq)$ gibt.

0.3.2 Notation Mit $\mathrm{Sub}\,(P, \leq)$ bezeichnen wir die Klasse der endlichen, in $(P, \leq)$ einbettbaren partiellen Ordnungen.

0.3.3 Notation Ist φ eine endliche Abbildung, gegeben durch die Vorschrift $\varphi(x_i) = y_i$ für alle $i \in n$ und ein geeignetes $n \in \omega$, so notieren wir φ auch wie folgt:

$$\varphi = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} \end{pmatrix}$$

0.3.1 Homogenität und Universalität

Betrachten wir nun die zentralen Begriffe der Homogenität, Transitivität und Universalität. Die Definition von ζ-Transitivität bzw. ζ-Homogenität für endliche Kardinalzahlen ζ unterscheidet sich geringfügig von der Definition für unendliche ζ. Unter systematischen Gesichtspunkten ist diese Uneinheitlichkeit zwar nicht wünschenswert, jedoch geben die Definitionen so den üblichen Gebrauch der Begriffe wieder (siehe [DrMcP] für endliche und [CK] für unendliche Kardinalzahlen ζ).

0.3.4 Definition *(Homogenität und Transitivität)* Sei $n \in \omega$ und κ sei eine unendliche Kardinalzahl.

1.) Wir sagen, $(P, \leq)$ sei ***n-transitiv***, falls es für jedes $m \leq n$ zu je zwei isomorphen m-elementigen Substrukturen $(Q, \leq)$ und $(Q', \leq)$ von $(P, \leq)$ einen Automorphismus auf $(P, \leq)$ gibt, der Q auf Q' abbildet.

2.) Wir sagen, $(P, \leq)$ sei ***κ-transitiv***, falls es für jedes $\nu \in \kappa$ zu je zwei isomorphen ν-elementigen Substrukturen $(Q, \leq)$ und $(Q', \leq)$ von $(P, \leq)$ einen Automorphismus auf $(P, \leq)$ gibt, der Q auf Q' abbildet.

3.) Wir sagen, $(P, \leq)$ sei ***n-homogen***, falls jeder partielle Isomorphismus φ in $(P, \leq)$ mit $|\,\mathrm{Dom}(\varphi)| \leq n$ zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortgesetzt werden kann.

4.) Wir sagen, $(P, \leq)$ sei ***κ-homogen***, falls jeder partielle Isomorphismus φ in $(P, \leq)$ mit $|\,\mathrm{Dom}(\varphi)| \in \kappa$ zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortgesetzt werden kann.

5.) Falls $(P, \leq)$ eine unendliche partielle Ordnung und $|P|$-homogen ist, sagen wir kurz, $(P, \leq)$ sei ***homogen***.

0.3.5 Definition ***(Universalität)*** Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und $\mathfrak{S}$ sei eine Menge von partiellen Ordnungen.

1.) Wir sagen, $(P, \leq)$ sei ***κ-universell***, falls für jede Kardinalzahl ν mit $\nu \in \kappa$ jede ν-elementige partielle Ordnung in $(P, \leq)$ einbettbar ist.

2.) Falls $(P, \leq)$ eine unendliche partielle Ordnung und $|P|$-universell ist, sagen wir kurz, $(P, \leq)$ sei ***universell***.

3.) Wir sagen, $(P, \leq)$ sei $\mathfrak{S}$-universell, falls jede partielle Ordnung aus $\mathfrak{S}$ in $(P, \leq)$ einbettbar ist.

0.3.6 Definition Eine partielle Ordnung $(P, \leq)$, die universell und homogen ist, nennen wir ***universell-homogen***.

0.3.7 Notation ***(nach James H. Schmerl)*** Für einige Isomorphie-Typen elementarer partieller Ordnungen wollen wir kurze Notationen in Gestalt von Skizzen einführen:

1.) Mit notieren wir den Isomorphie-Typ einer zweielementigen Kette.

2.) Mit • • notieren wir den Isomorphie-Typ einer zweielementigen Antikette.

3.) Mit  notieren wir den Isomorphie-Typ einer dreielementigen partiellen Ordnung $(\{p, q, b\}, \leq)$ mit $p \parallel q$ und $b < \{p, q\}$.

4.) Mit  notieren wir den Isomorphie-Typ einer dreielementigen partiellen Ordnung $(\{p, q, t\}, \leq)$ mit $p \parallel q$ und $\{p, q\} < t$.

5.) Mit • notieren wir den Isomorphie-Typ einer dreielementigen partiellen Ordnung $(\{x, y, u\}, \leq)$ mit $x < y$ und $\{x, y\} \parallel u$.

Entsprechend sagen wir beispielsweise von einer partiellen Ordnung $(P, \leq)$, sie sei {,  •}-universell, wenn sie Substrukturen der Isomorphie-Typen  und  • enthält, wenn also die oben angegebenen partiellen Ordnungen $(\{p, q, b\}, \leq)$ und $(\{x, y, u\}, \leq)$ in $(P, \leq)$ einbettbar sind.

0.3.2 Das Zick-Zack-Verfahren

Für eine allgemeine Darstellung des ***Hausdorff'schen Zick-Zack-Verfahrens*** – in der englischen Literatur als *back and forth construction* oder auch *back and forth argument* bezeichnet – verweisen wir auf [CK] und [Haus]. An dieser Stelle nur so viel:

Wollen wir einen partiellen Isomorphismus φ in einer partiellen Ordnung $(P, \leq)$ mit Hilfe des Zick-Zack-Verfahrens zu einem Automorphismus auf $(P, \leq)$ fortsetzen, so gehen wir wie folgt vor:

Wir zählen die Mengen $P - \mathrm{Dom}(\varphi)$ und $P - \mathrm{Im}(\varphi)$ ab und erhalten für eine geeignete Kardinalzahl κ die Mengen

$$P - \mathrm{Dom}(\varphi) = \{p_\nu \mid \nu \in \kappa\} \quad \& \quad P - \mathrm{Im}(\varphi) = \{q_\nu \mid \nu \in \kappa\} .$$

Wir müssen nun für p_0 ein Element $q_\nu \in P - \mathrm{Im}(\varphi)$ wählen mit den Eigenschaften

$$\varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)^{<p_0}) < q_\nu < \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)^{>p_0}) \quad \& \quad q_\nu \parallel \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)^{\parallel p_0}) \, .$$

Das heißt, q_ν muss in $\mathrm{Im}(\varphi)$ liegen wie p_0 in $\mathrm{Dom}(\varphi)$.

Enthält $P - \mathrm{Im}(\varphi)$ kein solches Element q_ν, so ist φ nicht zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzbar – weder mit dem Zick-Zack-Verfahren noch auf andere Weise.

Andernfalls wählen wir als Bild von p_0 das bezüglich der Abzählung minimale Element $q_{\nu_0} =: q'_0$ und setzen φ fort zu $\varphi_0 := \varphi \cup \{(p_0, q'_0)\}$.

Nun setzen wir φ_0^{-1} fort, indem wir q'_1, dem bezüglich der Abzählung minimalen Element von $\{q_\nu \mid \nu \in \kappa\} - \{q'_0\}$ ein Element p'_1 in $\{p_\nu \mid 1 \leq \nu \in \kappa\}$ zuordnen, so dass p'_1 in $\mathrm{Im}(\varphi_0^{-1}) = \mathrm{Dom}(\varphi_0)$ liegt wie q'_1 in $\mathrm{Dom}(\varphi_0^{-1}) = \mathrm{Im}(\varphi_0)$. Falls dies nicht möglich ist, ist φ_0^{-1} (und damit auch φ_0) nicht zu einem Automorphismus auf $(P, \leq)$ fortsetzbar. Andernfalls wähle p'_1 der Abzählung nach minimal und setze $\varphi_1 := \varphi_0 \cup \{(p'_1, q'_1)\}$.

Nun setzen wir φ_1 fort, indem wir – analog zum vorletzten Schritt – ein geeignetes Bild für p'_2 finden, wobei p'_2 minimal in $\{p_\nu \mid \nu \in \kappa\} - \{p_0, p'_1\}$ ist – und so weiter.

Bei Bedarf berücksichtigen wir bei der Konstruktion der Fortsetzung neben den Lage-Eigenschaften auch andere Eigenschaften der Elemente (z.B. Separiertheit der Lagen um diese Elemente – siehe Teil II).

Kapitel 1

Klassifikationen

1.1 Die Ausgangs-Frage

Wir betrachten eine abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$. Falls sich jeder endliche Isomorphismus, dessen Definitionsbereich eine Kette oder Antikette ist, zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen lässt, folgt dann bereits, dass *jeder* endliche Isomorphismus in $(P, \leq)$ zu einem Automorphismus fortsetzbar ist?[1)] Sofort schließt sich die Frage an, ob die Homogenität von $(P, \leq)$ zumindest dann folgt, wenn sich jeder endliche Isomorphismus, dessen Definitionsbereich die *Union* einer Kette und einer Antikette ist, zu einem Automorphismus auf $(P, \leq)$ fortsetzen lässt.

Es scheint nicht unplausibel, wenigstens die zweite Frage zu bejahen: Betrachten wir einen Isomorphismus Φ in $(P, \leq)$ mit endlichem Definitionsbereich P' und setzen voraus, dass für jede maximale Antikette $A \subseteq P'$ und jede maximale Kette $K \subseteq P'$ die Einschränkung von φ auf $A \cup K$ zu einem Automorphismus Ψ_{AK} fortgesetzt werden kann, könnte man vermuten, dass diese Automorphismen auch als Fortsetzung von Φ gewählt werden können.

Um die Fragen präzise formulieren zu können, führen wir folgende Begriffe ein, die wir in Abschnitt 1.3 verallgemeinern werden:

1.1.1 Definition Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung.

1.) Falls sich jeder endliche Isomorphismus in $(P, \leq)$, dessen Definitionsbereich eine Kette ist, zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen lässt, so sagen wir, $(P, \leq)$ sei ***Ketten-homogen***.

2.) Falls sich jeder endliche Isomorphismus in $(P, \leq)$, dessen Definitionsbereich eine Antikette ist, zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen lässt, so sagen wir, $(P, \leq)$ sei ***Antiketten-homogen***.

3.) Falls sich jeder endliche Isomorphismus in $(P, \leq)$, dessen Definitionsbereich die Union einer Kette und einer Antikette ist, zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$

[1)] Diese Frage stellte Herr Prof. Felgner, womit er den Grundstein für diese Arbeit legte.

fortsetzen lässt, so sagen wir, $(P, \leq)$ sei ***Kreuz-homogen***.

Die Fragen lauten nun:

1.) Ist jede abzählbare partielle Ordnung, die zugleich Ketten- und Antiketten-homogen ist, bereits homogen?

2.) Ist jede abzählbare partielle Ordnung, die Kreuz-homogen ist, bereits homogen?

Oder anders: Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung.

1.) Impliziert Ketten- und Antiketten-Homogenität bereits Homogenität?

2.) Impliziert Kreuz-Homogenität bereits Homogenität?

In Teil II werden wir zeigen, dass beide Fragen zu verneinen sind. Wir konstruieren dort (Abschnitt 4.2) abzählbare partielle Ordnungen, die zugleich Ketten- und Antiketten-homogen sind (Abschnitt 5.2 weist diese Eigenschaft nach). Dann sehen wir (Abschnitt 5.8 zusammen mit dem Konstruktions-Schema aus Abschnitt 4.2), wie wir abzählbare Kreuz-homogene partielle Ordnungen konstruieren können, die ebenfalls nicht homogen sind.

1.2 Die Schmerl'sche Klassifikation

Zunächst möchten wir eine Bestimmung der abzählbaren *homogenen* partiellen Ordnungen betrachten. Später (in den Abschnitten 1.4 und 1.5) werden wir versuchen, die Ergebnisse so weit wie möglich unter anderem auf die abzählbaren Ketten- und Antiketten-homogenen partiellen Ordnungen zu übertragen.

James H. Schmerl gibt in [Schm] eine Klassifikation der höchstens abzählbaren homogenen partiellen Ordnungen an. Diese Klassifikation besagt, dass jede höchstens abzählbare homogene partielle Ordnung zu einem der folgenden Isomorphie-Typen gehört:

(T1) der ν-elementigen Antikette A_ν mit $\nu \in \omega + 1$

(T2) $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\mathrm{id}_2})$ mit $\nu \in \omega + 1$

(T3) $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\pi_1})$ mit $\nu \in \omega + 1$

(T4) dem Isomorphie-Typ der universell-homogenen abzählbaren partiellen Ordnung

Wir wollen den Begriff der Homogenität dahingehend abschwächen, dass er Eigenschaften wie Ketten- und Antiketten-Homogenität einfängt.

Ganz allgemein müssen wir, um schwächere Eigenschaften als die Homogenität zu erhalten, die Menge der zu Automorphismen fortsetzbaren partiellen Isomorphismen einschränken. Zwei Möglichkeiten fallen dabei ins Auge:

Die erste besteht darin, die *Kardinalität* der Definitionsbereiche klein zu halten. Genau das geschieht, wenn man sich auf n-Homogenität beschränkt. Den Zusammenhang zwischen n-Homogenität und Homogenität haben (neben anderen) bereits Manfred Droste und Dugald Macpherson (z.B. in [DrMcP]) untersucht; dazu mehr in Kapitel 2.

Wir werden uns jedoch mit der zweiten Möglichkeit befassen, nämlich die *Struktur* – im Sinne einer geeigneten Zerlegung in Ketten und Antiketten – der Definitionsbereiche der fortzusetzenden partiellen Isomorphismen zu betrachten und dort Einschränkungen zu machen.

1.3 KA-Homogenität

Wir möchten einen Homogenitäts-Begriff formulieren, der nicht *nur* die Ketten-, Antiketten- und Kreuz-Homogenität umfasst.

Das Kriterium dafür, ob ein endlicher partieller Isomorphismus fortsetzbar sein muss, soll nicht mehr die Kardinalität seines Definitionsbereichs sein, sondern die (minimale) Anzahl von Ketten und Antiketten, in die dieser zerlegt werden kann:

1.3.1 Definition Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung. Sei $\mathfrak{F} = \{(P_i, \leq_i) \mid i \in I\}$ eine Familie von Substrukturen von $(P, \leq)$, wobei I eine beliebige Indexmenge sei. Wir sagen, $\mathfrak{F}$ ***überdeckt*** $\boldsymbol{(P, \leq)}$, falls $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ ist.

Seien n, m beliebige Kardinalzahlen. $(P, \leq)$ heißt $\boldsymbol{(n, m)}$***-zerlegbar***, falls es eine Familie $\mathfrak{F}$, bestehend aus n Ketten und m Antiketten in $(P, \leq)$, gibt, die $(P, \leq)$ überdeckt.

1.3.2 Definition ***(*KA*-Homogenität)*** Seien $n, m \in \omega$ beliebig. Eine abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$ heißt $\mathbf{KA}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{m}}$***-homogen***, falls jeder endliche partielle Isomorphismus in $(P, \leq)$, dessen geordneter Definitionsbereich (n, m)-zerlegbar ist, zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortgesetzt werden kann.

Eine partielle Ordnung heißt **KA*-homogen***[2], falls sie KA^n_m-homogen ist für mindestens ein Paar $(n, m) \in \omega^2$ mit $n + m \geq 1$.

Eine partielle Ordnung heißt ***stark* KA*-homogen***, falls sie KA^n_m-homogen ist für mindestens ein Paar $(n, m) \in \omega^2$ mit $n + m \geq 2$ oder falls sie zugleich KA^1_0- und KA^0_1-homogen ist.

Eine partielle Ordnung heißt ***sehr stark* KA*-homogen***, falls sie KA^n_m-homogen ist für mindestens ein Paar $(n, m) \in \omega^2$ mit $n + m \geq 2$ und $(n, m) \neq (2, 0)$ oder falls sie zugleich KA^1_0- und KA^0_1-homogen ist.

Eine partielle Ordnung heißt ***schwach* KA*-homogen***, falls sie KA-homogen, nicht aber stark KA-homogen ist.

[2] KA-Homogenität ein Oberbegriff für verschiedene Varianten des Homogenitäts-Begriffs. Den Begriffen der KA^n_m-Homogenität ist gemeinsam, dass sie die Forderung der Fortsetzbarkeit eines endlichen Isomorphismus davon abhängig machen, ob sein Definitionsbereich durch eine bestimmte Anzahl von **K**etten und **A**ntiketten überdeckt werden kann – darum sprechen wir von **KA**-Homogenität.

Eine partielle Ordnung heißt ***schwach Ketten-homogen***, falls sie schwach KA-homogen und Ketten-homogen ist.

Eine partielle Ordnung heißt ***schwach Antiketten-homogen***, falls sie schwach KA-homogen und Antiketten-homogen ist.

1.3.3 Bemerkung

1.) Offensichtlich sind abzählbare homogene partielle Ordnungen KA^n_m*-homogen für jedes Paar* $(n, m) \in \omega^2$.

2.) Stark KA*-homogene partielle Ordnungen sind* 2*-homogen, schwach* KA*-homogene sind es hingegen im Allgemeinen nicht.*

3.) KA^n_m*-homogene partielle Ordnungen sind* $(n + m)$*-homogen.*

4.) KA^1_1*-homogene partielle Ordnungen sind* 3*-homogen, da sich jede höchstens dreielementige partielle Ordnung in eine Kette und eine Antikette zerlegen lässt.*

Außerdem sehen wir sofort:

1.3.4 Bemerkung

1.) KA^1_0*-Homogenität ist Ketten-Homogenität.*

2.) KA^0_1*-Homogenität ist Antiketten-Homogenität.*

3.) KA^1_1*-Homogenität ist Kreuz-Homogenität.*

Wir werden in dieser Arbeit vor allem die zugleich KA^1_0- und KA^0_1-homogenen sowie die KA^1_1-homogenen partiellen Ordnungen betrachten.

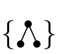
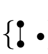
1.3.1 Zerlegung der Schmerl'schen Klassifikation

Zunächst einmal wollen wir aber die Schmerl'sche Klassifikation so weit wie möglich auf (sehr) stark KA-homogene partielle Ordnungen übertragen. Dazu zerlegen wir die Klassifikation in drei Teile:

1.3.5 Satz *(Die Schmerl'sche Klassifikation – erster Teil)* *Sei* $(P, \leq)$ *eine höchstens abzählbare homogene partielle Ordnung.*

1.) Falls $(P, \leq)$ *nicht* {} *- universell ist, so ist* $(P, \leq)$ *isomorph zu* A_ν *für ein* $\nu \in \omega + 1$.

2.) Falls $(P, \leq)$ *zwar* {} *- universell, nicht jedoch* {} *- universell ist, so ist* $(P, \leq)$ *isomorph zu* $(\mathbb{Q}, \leq)$.

3.) Falls $(P, \leq)$ *zwar* {} *- universell, nicht jedoch* {} *- universell ist, so ist* $(P, \leq)$ *isomorph zu* $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\pi_1})$ *für ein* $\nu \in \omega + 1$.

4.) Falls $(P, \leq)$ zwar $\{\,\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\;\bullet\,\}$ - universell, nicht jedoch $\{\bigwedge\}$ - universell ist, so ist $(P, \leq)$ isomorph zu $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\mathrm{id}_2})$ für ein $\nu \in \omega + 1$.

Dieser Teil lässt sich auf die stark KA-homogenen partiellen Ordnungen übertragen – wir werden das mit Satz 1.4.1 formulieren.

1.3.6 Satz *(Die Schmerl'sche Klassifikation – zweiter Teil)* *Sei $(P, \leq)$ eine höchstens abzählbare homogene partielle Ordnung. Falls $(P, \leq)$ $\{\bigwedge, \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{|}}\;\bullet\}$ - universell ist, so ist $(P, \leq)$ bereits universell.*

Diese Aussage gilt auch für die sehr stark KA-homogenen partiellen Ordnungen. Wir geben diesen Sachverhalt mit Satz 1.5.4 wieder.

1.3.7 Satz *(Die Schmerl'sche Klassifikation – dritter Teil)* *Es gibt bis auf Isomorphie nur eine abzählbare universell-homogene partielle Ordnung.*

Diese Aussage lässt sich *nicht* auf die Klasse der KA-homogenen partiellen Ordnungen übertragen: Wir konstruieren in Teil II Beispiele sowohl für (abzählbare) Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnungen, die nicht Kreuz-homogen sind, als auch für (abzählbare) Kreuz-homogene partielle Ordnungen, die nicht homogen sind.

1.3.2 Schwache KA-Homogenität

Bevor wir daran gehen, Teile der Schmerl'schen Klassifikation zu übertragen, wollen wir einen Blick auf die nur schwach KA-homogenen partiellen Ordnungen werfen. Wir werden sehen, dass sie sehr unterschiedliche Isomorphie-Typen besitzen.

Zunächst führen wir den Begriff des *Pentagons* ein:

1.3.8 Notation *(Droste und Macpherson)* Mit Pen (siehe Abbildung 1.1) bezeichnen wir die partielle Ordnung

$$\begin{aligned} (\{b, l_0, l_1, t, r\}, \leq) \quad \text{mit} \quad & b < l_0 < l_1 < t \\ \& \quad & b < r < t \\ \& \quad & r \parallel \{l_0, l_1\} \,. \end{aligned}$$

Jede zu Pen isomorphe partielle Ordnung nennen wir ein ***Pentagon*** (siehe auch [DrMcP]). Wir sagen von einer partiellen Ordnung $(P, \leq)$, sie ***enthalte ein Pentagon*** oder sie sei ***eine partielle Ordnung mit Pentagon***, wenn Pen in $(P, \leq)$ einbettbar ist.

(Schwache) Antiketten-Homogenität

Zunächst betrachten wir eine Universalitäts-Eigenschaft Antiketten-homogener partieller Ordnungen.

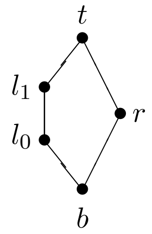


Abbildung 1.1: Das Pentagon „Pen“

1.3.9 Bemerkung *Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare Antiketten-homogene partielle Ordnung.*

Zunächst bemerken wir, dass $(P, \leq)$ genau dann $\{\Lambda\}$ - universell ist, wenn $(P, \leq)$ $\{V\}$ - universell ist.

$(P, \leq)$ ist also $\{\Lambda, \vdots\ \bullet\}$ - universell genau dann, wenn $(P, \leq)$ ein Pentagon enthält.

Mit den folgenden Beispielen wollen wir die Vielfalt der Isomorphie-Typen schwach Antiketten-homogener partieller Ordnungen zeigen.

1.3.10 Beispiele ***(schwache Antiketten-Homogenität)*** Wir konstruieren nun einige abzählbare Antiketten-homogene partielle Ordnungen, die nicht Ketten-homogen sind. Die in 1 bis 3 gegebenen partiellen Ordnungen sind nicht universell. Mit Korollar 1.4.2 (aus dem nächsten Abschnitt) sind sie somit nur schwach KA-homogen (insbesondere nicht KA_2^0-homogen), da sie andernfalls homogen (insbesondere Ketten-homogen) oder universell sein müssten. Für die in 4 gegebene universelle Ordnung zeigen wir explizit, dass sie nur schwach KA-homogen ist.

1.) Wir erhalten eine schwach Antiketten-homogene $\{\Lambda\}$ - universelle Ordnung, die nicht $\{\vdots\ \bullet\}$ - universell ist, indem wir (für ein beliebiges $\nu \in (\omega + 1) - \{0\}$) die partielle Ordnung $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\pi_1})$ kanonisch auf $\mathbb{Z} \times \nu$ einschränken:

$$(\mathbb{Z} \times \nu, \leq_{\pi_1}) \quad \text{mit} \quad \leq_{\pi_1} = \{((k,i),(m,j)) \mid k \dot{\leq} m\}$$

Ist φ ein beliebiger endlicher Antiketten-Isomorphismus, so ist $\mathrm{Dom}(\varphi) \subseteq \{k\} \times \nu$ und $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \{m\} \times \nu$ für geeignete $k, m \in \mathbb{Z}$. Wir bilden nun $(\{k\} \times \nu) - \mathrm{Dom}(\varphi)$ beliebig auf $(\{m\} \times \nu) - \mathrm{Im}(\varphi)$ ab. Außerdem bilden wir für jedes $l \in \mathbb{Z}$ die Teilmenge $\{l\} \times \nu$ beliebig auf $\{m + (l - k)\} \times \nu$ ab. Damit erhalten wir eine Fortsetzung von φ zu einem Automorphismus auf ganz $(\mathbb{Z} \times \nu, \leq_{\pi_1})$.

Umgekehrt ist z.B. der Ketten-Isomorphismus

$$\phi := \begin{pmatrix} (0,0) & (2,0) \\ (0,0) & (1,0) \end{pmatrix}$$

nicht auf ganz $\mathbb{Z} \times \nu$ fortsetzbar, denn wir können dem Element $(1,0)$ kein Bild zuordnen, da $(0,0) = \phi((0,0))$ und $(1,0) = \phi((2,0))$ direkt benachbart sind.

2.) Wir erhalten eine schwach Antiketten-homogene $\{\,{:}\;\bullet\}$ - universelle Ordnung, die nicht $\{\wedge\}$ - universell ist, indem wir (für ein beliebiges $\nu \in (\omega+1) - \{0\}$) die partielle Ordnung $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\mathrm{id}_2})$ kanonisch auf $\mathbb{Z} \times \nu$ einschränken:

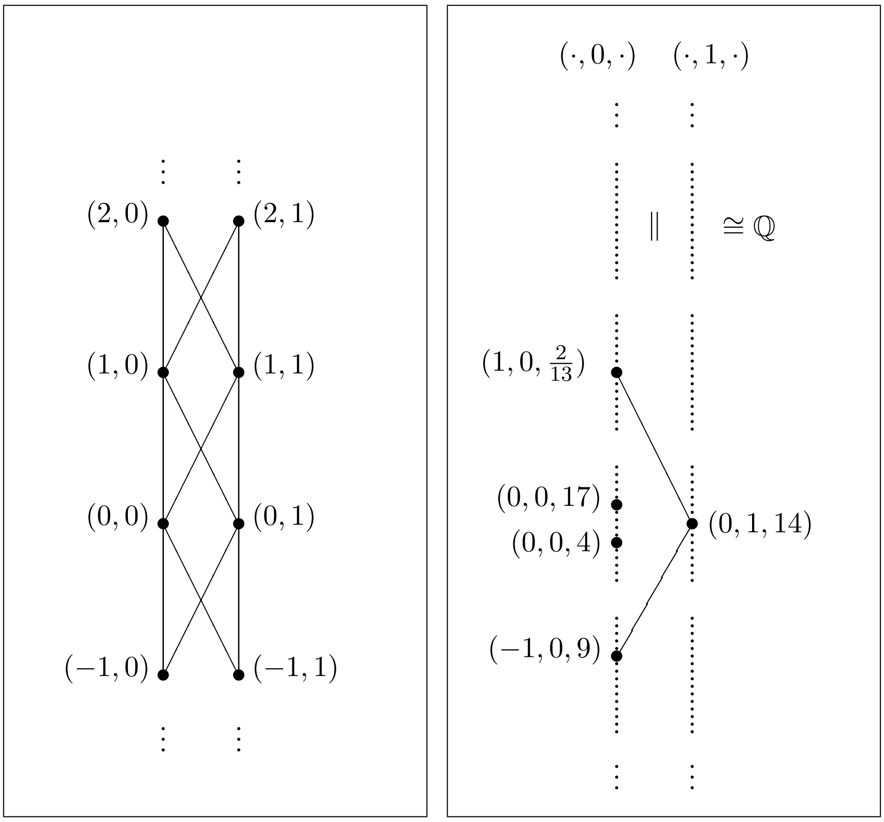
$$(\mathbb{Z} \times \nu, \leq_{\mathrm{id}_2}) \quad \text{mit} \quad \leq_{\mathrm{id}_2} = \{((k,i),(m,j)) \mid i = j \;\&\; k \,\dot{\leq}\, m\}$$

3.) *(Abbildung 1.2)* Eine $\{\wedge, {:}\;\bullet\}$ - universelle Ordnung (und damit eine mit Pentagon), die schwach Antiketten-homogen und nicht universell ist, erhalten wir, indem wir in $(\mathbb{Z}\times 2, \leq_{\pi_1})$ jedes Element $(k,i) \in \mathbb{Z}\times 2$ durch eine isomorphe Kopie von $\mathbb{Q}$, ersetzen.

Die so erhaltene Ordnung ist isomorph zu $(\mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}, \dot{\leq}_{\pi_1})$, wobei $\dot{\leq}_{\pi_1}$, salopp gesprochen, eine lexikographische Erweiterung von $\leq_{\pi_1}$ um die kanonische Ordnung $\dot{\leq}$ auf $\mathbb{Q}$ ist: Für alle Elemente $(k,i,p),(m,j,q) \in \mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}$ gilt

$$(k,i,p) \;\dot{\leq}_{\pi_1}\; (m,j,q) \Leftrightarrow \Big((k,i) \leq_{\pi_1} (m,j) \vee \big((k,i) = (m,j) \wedge p \;\dot{\leq}\; q\big)\Big) \,.$$

Mit anderen Worten: Zwei Elemente $(k,i,p),(m,j,q) \in \mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}$ sind genau dann unvergleichbar, wenn (k,i) und (m,j) bezüglich $\leq_{\pi_1}$ unvergleichbar sind, wenn also $k = m$ und $i = 1 - j$ gilt.



(a) $(\mathbb{Z} \times 2, \leq_{\pi_1})$

(b) $(\mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}, \dot{\leq}_{\pi_1})$

Abbildung 1.2: Die Strukturen $(\mathbb{Z} \times 2, \leq_{\pi_1})$ und $(\mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}, \dot{\leq}_{\pi_1})$

$(\mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}, \dot{\leq}_{\pi_1})$ ist offenbar Antiketten-homogen. Hingegen lässt sich der Ketten-Isomorphismus

$$\varphi = \begin{pmatrix} (0,0,4) & (0,0,17) \\ (0,0,4) & (1,0,\frac{2}{13}) \end{pmatrix}$$

z.B. nicht auf $(0,1,21)$ fortsetzen, da $(0,1,21) \parallel \{(0,0,4),(0,0,17)\}$ ist, es aber kein $p \in \mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}$ gibt mit $q \parallel \{(0,0,4),(1,0,\frac{2}{13})\}$. Somit ist $(\mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}, \dot{\leq}_{\pi_1})$ nicht Ketten-homogen.

Da die maximalen Antiketten in dieser Ordnung nur zweielementig sind, ist $(\mathbb{Z} \times 2 \times \mathbb{Q}, \dot{\leq}_{\pi_1})$ nicht universell, enthält mit

$$(\{(0,0,4),(0,0,17),(1,0,\frac{2}{13}),(-1,0,9),(0,1,14)\}, \dot{\leq}_{\pi_1})$$

aber ein Pentagon.

4.) Eine universelle, jedoch nicht Ketten-homogene Ordnung erhalten wir, indem wir zwei disjunkte abzählbare universell-homogene partielle Ordnungen $(P_b, \leq_b)$ und $(P_t, \leq_t)$ in folgendem Sinne übereinandersetzen:

$$(P_A, \leq_A) := (P_b \cup P_t, \leq_b \cup \leq_t \cup (P_b \times P_t))$$

Jeder endliche Antiketten-Isomorphismus φ in $(P_A, \leq_A)$ ist ein Antiketten-Isomorphismus in $(P_b, \leq_b)$ oder in $(P_t, \leq_t)$ und kann entsprechend zu einem Automorphismus φ' auf $(P_b, \leq_b)$ oder auf $(P_t, \leq_t)$ fortgesetzt werden. Auf ganz $(P_A, \leq_A)$ lässt sich φ' dann durch die Identität auf $P_A - \mathrm{Dom}(\varphi')$ fortsetzen.

Sind jedoch $a, b \in P_b$ mit $a < b$ und $c \in P_t$ beliebig, so ist der Ketten-Isomorphismus

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$$

nicht auf ganz P_A fortsetzbar, da es Elemente $q \in P_t \subset P_A$ gibt mit $q \parallel \{a, b\}$, jedoch keine Elemente $q' \in P_A$ mit $q' \parallel \{a, c\}$. Aus der Nicht-Fortsetzbarkeit von ϕ folgt nicht nur, dass $(P_A, \leq_A)$ nicht Ketten-homogen ist, sondern auch, dass $(P_A, \leq_A)$ nicht 2-homogen und damit insbesondere nicht KA_2^0-homogen ist.

(Schwache) Ketten-Homogenität

Betrachten wir als erstes eine Universalitäts-Eigenschaft Ketten-homogener partieller Ordnungen.

1.3.11 Bemerkung *Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare Ketten-homogene partielle Ordnung, die nicht $\{$$\}$ - universell ist.*

Falls $(P, \leq)$ nicht $\{$$\}$ - universell ist, so ist $(P, \leq)$ eine Antikette oder eine Kette vom Isomorphie-Typ $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Falls $(P, \leq)$ $\{\wedge\}$ *- universell ist, so ist* $(P, \leq)$ *eine schwache Ordnung, d.h., für beliebige Elemente* $a, b, c \in P$ *mit* $a \parallel b$ *und* $b \parallel c$ *ist immer auch* $a \parallel c$ *oder* $a = c$*. Da* $(P, \leq)$ 1*-transitiv ist, ist* $(P, \leq)$ *isomorph zu* $(K \times \nu, \leq_{\pi_1})$ *für ein* $\nu \in \omega + 1$ *und eine geeignete Kette* $(K, \leq_K)$*. Da* $(P, \leq)$ *Ketten-homogen ist, muss dabei* $(K, \leq_K) \cong (\mathbb{Q}, \dot{\leq})$ *sein – also ist* $(P, \leq)$ *vom Isomorphie-Typ (T3).*

So erhalten wir – für abzählbare Ketten-homogene partielle Ordnungen $(P, \leq)$*, die nicht* $\{\mid\ \bullet\}$ *- universell sind – die Äquivalenz folgender Aussagen:*

1.) $(P, \leq)$ *ist* $\{\wedge\}$ *- universell.*

2.) $(P, \leq)$ *ist* $\{\vee\}$ *- universell.*

3.) $(P, \leq)$ *ist vom Isomorphie-Typ (T3).*

Ketten-homogene partielle Ordnungen, die ein Pentagon enthalten, enthalten auch eine unendliche *Dreiecksstruktur* in folgendem Sinne:

Sei $(P, \leq)$ eine höchstens abzählbare Ketten-homogene partielle Ordnung, die ein Pentagon $\{b_1, b_0, a_0, a_1, c_0\}$ enthält mit $b_1 < b_0 < a_0 < a_1$ und $b_1 < c_0 < a_1$ und $\{b_0, a_0\} \parallel c_0$. Die Kette $\{a_0, a_1\}$ lässt sich in $(P, \leq)$ zu einer abzählbaren echt aufsteigenden Folge $(a_n)_{n\in\omega}$ erweitern; ebenso lässt sich die Kette $\{b_0, b_1\}$ zu einer abzählbaren echt absteigenden Folge $(b_n)_{n\in\omega}$ erweitern:

Für jedes $n \in \omega$ sei $\widehat{\varPhi}_n$ der partielle Ketten-Isomorphismus mit

$$\widehat{\varPhi}_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ a_n & a_{n+1} & b_n & b_{n+1} \end{pmatrix} .$$

Wir setzen $\widehat{\varPhi}_n$ zu einem Automorphismus $\varPhi_n$ auf P fort. Für $n = 0$ ist $\widehat{\varPhi}_0$ die Identität auf $\{a_1, a_0, b_0, b_1\}$; sei o.B.d.A. $\varPhi_0(c_0) = c_0$.

Für die Bilder $c_n := \varPhi_n(c_0)$ von c_0 unter den $\varPhi_n$ gilt:

$$a_n, b_n \parallel c_n \quad \& \quad a_{n+1} > c_n > b_{n+1} .$$

Damit sind die c_n *paarweise unvergleichbar*: Seien $m, k \in \omega$ beliebig mit $k \neq 0$.

1.) Angenommen, $c_m < c_{m+k}$, dann ist $b_{m+k} \leq b_{m+1} < c_m < c_{m+k}$, im Widerspruch zu $b_{m+k} \parallel c_{m+k}$.

2.) Angenommen, $c_m > c_{m+k}$, dann ist $c_{m+k} < c_m < a_{m+1} \leq a_{m+k}$, im Widerspruch zu $c_{m+k} \parallel a_{m+k}$.

Für jedes $m \in \omega$ setzen wir

$$C_m := \{c_n \mid n \in m\}$$

und erhalten so für jedes $i \in \omega$

$$b_{m+i} < C_m < a_{m+i} .$$

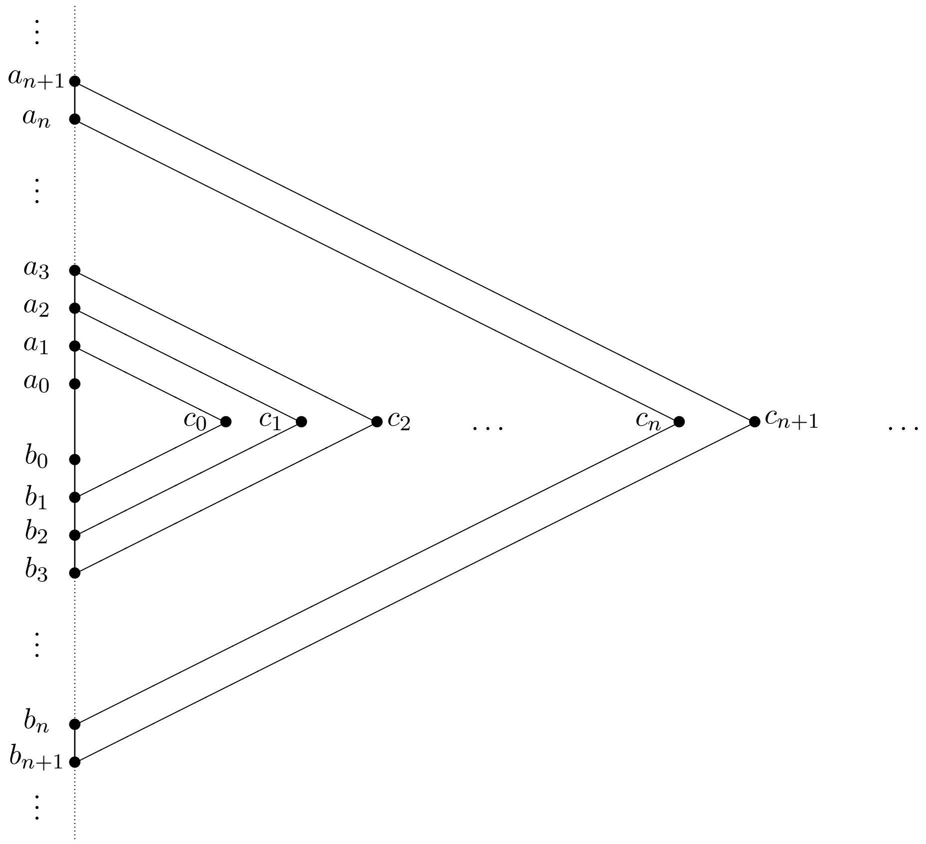


Abbildung 1.3: Die unendliche Dreiecksstruktur Δ_ω

1.3.12 Definition Die konstruierte Substruktur

$$(\{a_n \mid n \in \omega\} \cup \{b_n \mid n \in \omega\} \cup \{c_n \mid n \in \omega\}, \leq)$$

wollen wir eine ***unendliche Dreiecksstruktur*** nennen, da die Skizze an unendlich viele verschachtelte Dreiecke erinnert. Es erscheint uns nützlich, eine bestimmte unendliche Dreiecksstruktur auszuzeichnen, darum notieren wir die oben konstruierte Dreiecksstruktur mit Δ_ω (siehe Abbildung 1.3).

1.3.13 Bemerkung *Ketten-homogene partielle Ordnungen, die ein Pentagon enthalten, enthalten eine unendliche Dreiecksstruktur und damit auch unendliche Antiketten. Enthält eine Ketten-homogene partielle Ordnung also nur endliche Antiketten, so gehört sie zu einem der Isomorphie-Typen (T1), (T2) oder (T3).*

Mit den folgenden Beispielen wollen wir die Vielfalt der Isomorphie-Typen schwach Ketten-homogener partieller Ordnungen zeigen.

1.3.14 Beispiele *(schwache Ketten-Homogenität)* Wir konstruieren nun einige abzählbare Ketten-homogene partielle Ordnungen, die nicht Antiketten-homogen sind. Die in 1 bis 4 angegebenen partiellen Ordnungen sind nicht universell. Mit Korollar 1.4.2 (aus dem nächsten Abschnitt) sind sie somit nur schwach KA-homogen (insbesondere nicht KA_0^2-homogen), da sie andernfalls homogen (insbesondere Antiketten-homogen) oder universell sein müssten. Für die in 5 gegebene universelle Ordnung zeigen wir explizit, dass sie nur schwach KA-homogen ist.

1.) Zunächst konstruieren wir $(T_2^\omega, \leq_\omega)$, eine abzählbare $\{\bigvee, \vdots\ \bullet\}$ - universelle partielle Ordnung, die weder Antiketten-homogen noch $\{\bigwedge\}$ - universell ist (und insbesondere kein Pentagon enthält).

Sei $(T, \leq)$ der abzählbar unendliche binäre Baum mit Wurzel w.

Wir setzen

$$(T_{(0)}, \leq_{(0)}) := (T, \leq) \ .$$

Als erstes fügen wir zwischen je zwei in $(T_{(0)}, \leq_{(0)}))$ direkt benachbarte Elemente a, b (mit $a < b$) ein Element $c := c(a, b)$ ein und erweitern $(T_{(0)}, \leq_{(0)})$ entsprechend zu $(T^+_{(0)}, \leq^+_{(0)})$. Für alle $p \in T_{(0)}$ gilt dann:

$$p \leq^+_{(0)} c \Leftrightarrow p \leq_{(0)} a \quad \& \quad c \leq^+_{(0)} p \Leftrightarrow b \leq_{(0)} p \ .$$

Nun erweitern wir $(T^+_{(0)}, \leq^+_{(0)})$ zu einer isomorphen Kopie von $(T, \leq)$ (dazu fügen wir über jedem neuen Element eine Kopie von $(T, \leq)$ ein) und erhalten so $(T_{(1)}, \leq_{(1)})$.

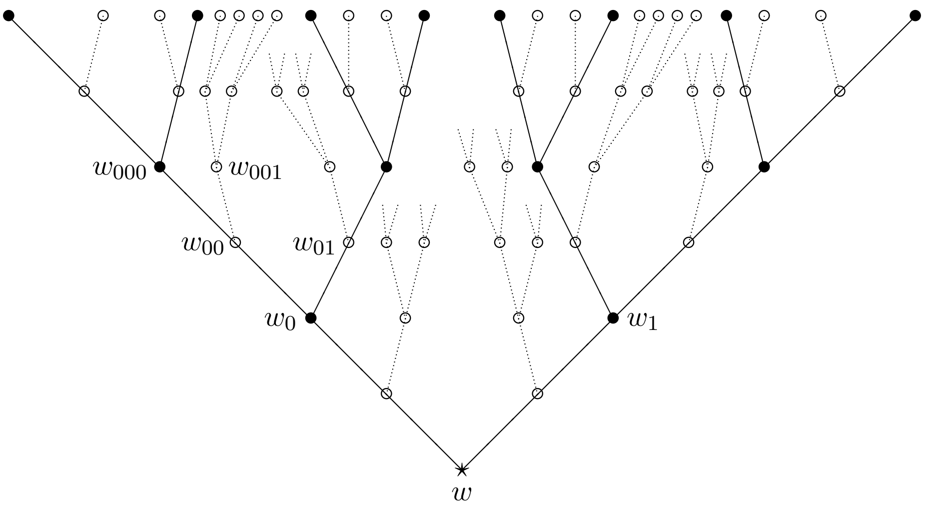


Abbildung 1.4: Konstruktion von $(T_{(1)}, \leq_{(1)})$ aus $(T_{(0)}, \leq_{(0)})$
– Andeutung der untersten sieben bzw. vier Schichten

Dieses Verfahren setzen wir rekursiv fort und erhalten so für jedes $n \in \omega$ den Baum $(T_{(n)}, \leq_{(n)})$, der zu $(T, \leq)$ isomorph ist.

Schließlich setzen wir

$$(T^{(\eta)}, \leq^{(\eta)}) := \Big((\bigcup_{n\in\omega} T_{(n)}) - \{w\}, \bigcup_{n\in\omega} \leq_{(n)} \Big) \ .$$

Alle maximalen Ketten in $(T^{(\eta)}, \leq^{(\eta)})$ sind isomorph zu $(\mathbb{Q}, \dot{\leq})$. Wir sehen leicht, dass $(T^{(\eta)}, \leq^{(\eta)})$ Ketten-homogen ist. Offenbar ist $(T^{(\eta)}, \leq^{(\eta)})$ $\{\vee\}$ - universell (und $\{:\ \bullet\}$ - universell, nicht jedoch $\{\wedge\}$ - universell). Betrachten wir nocheinmal den ursprünglichen Baum $(T, \leq)$ und setzen $\{w_0, w_1\} := \mathrm{Min}(T - \{w\})$. Dann ist $(\{w_0, w_1\}, \leq^{\eta})$ auch eine Antikette in $T^{(\eta)}$. Da w_0 und w_1 jedoch kein gemeinsames unteres Element in $T^{(\eta)}$ besitzen, ist $(T^{(\eta)}, \leq^{(\eta)})$ nicht Antiketten-homogen (beachte, dass w nicht in $T^{(\eta)}$ enthalten ist).

Wir sehen leicht, dass $T^{(\eta)}$ die Union folgender beiden Substrukturen ist:

$$T_V^{(\eta)} := \{q \in T^{(\eta)} \mid T^{(\eta)} \cap q^{\downarrow} \cap w_0^{\downarrow} \neq \emptyset\} \widehat{T}_V^{(\eta)} \quad := \{q \in T^{(\eta)} \mid T^{(\eta)} \cap q^{\downarrow} \cap w_1^{\downarrow} \neq \emptyset\}$$

Da $w_0^{\downarrow} \cap w_1^{\downarrow} = \{w\}$ gilt und w nicht in $T^{(\eta)}$ enthalten ist, ist $T^{(\eta)}$ die *disjunkte* Union der beiden Strukturen.

2.) Wir betrachten nun die partielle Ordnung $(T_V^{(\eta)}, \leq^{(\eta)})$.

$(T_V^{(\eta)}, \leq^{(\eta)})$ *ist nach unten gerichtet*: Seien a, b zwei unvergleichbare Elemente aus $T_V^{(\eta)}$. Als Elemente von $T^{(\eta)} \cup \{w\}$ besitzen sie ein größtes gemeinsames unteres Element c. Angenommen, $c = w$. Dann ist $\{a, b\} = \{w_0, w_1\}$. Da jedoch w_1 nicht in $T_V^{(\eta)}$ enthalten ist, ist dies ein Widerspruch. Angenommen, c liegt in $T^{(\eta)} - T_V^{(\eta)}$. Dann ist

$$T^{(\eta)} \cap c^{\downarrow} \cap w_1^{\downarrow} \neq \emptyset \, .$$

Insbesondere gilt damit:

$$T^{(\eta)} \cap a^{\downarrow} \cap w_1^{\downarrow} \neq \emptyset \neq T^{(\eta)} \cap b^{\downarrow} \cap w_1^{\downarrow}$$

Folglich sind auch $a, b \in \widehat{T}_V^{(\eta)} = T^{(\eta)} - T_V^{(\eta)}$ – ein Widerspruch. Folglich besitzen a und b ein (größtes) gemeinsames unteres Element in $T_V^{(\eta)}$.

Dennoch ist sie nicht Antiketten-homogen, wie folgende Überlegung zeigt:

Betrachten wir zunächst

$$(T^{\geq w_0}, \leq) \, ,$$

eine Substruktur des Baumes $(T, \leq)$. Seien w_{00} und w_{01} die direkten oberen Nachbarn von w_0 in $(T, \leq)$. Entsprechend seien w_{000} und w_{001} die direkten oberen Nachbarn von w_{00} in $(T, \leq)$. (Offenbar sind w_{00}, w_{01}, w_{000} und w_{001} in $T_V^{(\eta)}$ enthalten.) Wir erhalten:

$$w_{00} = \mathrm{Max}(T^{\leq w_{000}} \cap T^{\leq w_{001}})$$
$$w_0 = \mathrm{Max}(T^{\leq w_{000}} \cap T^{\leq w_{01}})$$

Da bei der Konstruktion von $(T^{(\eta)}, \leq^{(\eta)})$ aus $(T, \leq)$ unterhalb zweier unvergleichbarer Elemente aus T keine neuen Elemente eingefügt werden, gilt auch:

$$w_{00} = \mathrm{Max}((T^{(\eta)})^{\leq w_{000}} \cap (T^{(\eta)})^{\leq w_{001}})$$
$$w_0 = \mathrm{Max}((T^{(\eta)})^{\leq w_{000}} \cap (T^{(\eta)})^{\leq w_{01}})$$

Die Abbildung

$$\varphi := \begin{pmatrix} w_{000} & w_{001} & w_{01} \\ w_{000} & w_{01} & w_{001} \end{pmatrix}$$

ist ein Antiketten-Isomorphismus, der nicht auf ganz $T_V^{(\eta)}$ fortsetzbar ist. Denn angenommen, Φ wäre eine solche Fortsetzung, dann ist

$$\begin{aligned} \Phi(w_{00}) &= \mathrm{Max}((T^{(\eta)})^{\leq \Phi(w_{000})} \cap (T^{(\eta)})^{\leq \Phi(w_{001})} \\ &= \mathrm{Max}((T^{(\eta)})^{\leq w_{000}} \cap (T^{(\eta)})^{\leq w_{01}} \\ &= w_0 \\ \text{und} \quad \Phi(w_0) &= \mathrm{Max}((T^{(\eta)})^{\leq \Phi(w_{000})} \cap (T^{(\eta)})^{\leq \Phi(w_{01})} \\ &= \mathrm{Max}((T^{(\eta)})^{\leq w_{000}} \cap (T^{(\eta)})^{\leq w_{001}} \\ &= w_{00} \;. \end{aligned}$$

Es ist also $w_0 \leq^{(\eta)} w_{00}$ aber $\Phi(w_{00}) \leq^{(\eta)} \Phi(w_0)$ (und dabei $w_0 \neq w_{00}$) – ein Widerspruch.

3.) Versehen wir $T_V^{(\eta)}$ mit der zu $\leq^\eta$ inversen Ordnungsrelation $(\leq^\eta)^*$ (d.h., für alle $p, q \in T^{(\eta)}$ ist $p \leq^\eta q$ genau dann, wenn $q(\leq^\eta)^* p$), so erhalten wir eine abzählbare $\{\Lambda, \mathrm{I}\,\bullet\}$-universelle partielle Ordnung, die weder Antiketten-homogen noch $\{\mathrm{V}\}$-universell ist.

4.) Sei $((T^\eta)^*, (\leq^\eta)^{**})$ eine isomorphe Kopie von $(T^\eta, (\leq^\eta)^*)$ mit $T^\eta \cap (T^\eta)^* = \emptyset$. Die partielle Ordnung $(T^\eta \cup (T^\eta)^*, \leq^\eta \cup (\leq^\eta)^{**})$ ist offenbar $\{\mathrm{V}, \Lambda, \mathrm{I}\,\bullet\}$-universell, enthält aber kein Pentagon – und ist auch nicht Antiketten-homogen.

5.) Ein Beispiel für eine *universelle* Ketten-homogene partielle Ordnung, die nicht Antiketten-homogen ist, erhalten wir, indem wir zwei disjunkte abzählbare universell-homogene partielle Ordnungen $(P_l, \leq_l)$ und $(P_r, \leq_r)$ in folgendem Sinne nebeneinandersetzen:

$$(P_K, \leq_K) := (P_l \cup P_r, \leq_l \cup \leq_r)$$

Jeder endliche Ketten-Isomorphismus φ in $(P_K, \leq_K)$ ist ein Ketten-Isomorphismus in $(P_l, \leq_l)$ oder in $(P_r, \leq_r)$ und kann entsprechend zu einem Automorphismus φ' auf $(P_l, \leq_l)$ oder auf $(P_r, \leq_r)$ fortgesetzt werden. Auf ganz $(P_K, \leq_K)$ lässt sich φ' dann durch die Identität auf $P_K - \mathrm{Dom}(\varphi')$ fortsetzen.

Sind jedoch $a, b \in P_l$ unvergleichbar und $c \in P_r$ beliebig, so ist der Antiketten-Isomorphismus

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix}$$

nicht auf ganz P_K fortsetzbar, da a und b in P_K gemeinsame obere Elemente besitzen, a und c jedoch nicht. Aus der Nicht-Fortsetzbarkeit von ϕ folgt nicht nur, dass $(P_K, \leq_K)$ nicht Antiketten-homogen ist, sondern auch, dass $(P_K, \leq_K)$ nicht 2-homogen und damit insbesondere nicht KA_0^2-homogen ist.

Aus zwei Gründen werden wir nur schwach KA-homogene partielle Ordnungen im Folgenden nicht mehr betrachten:

Erstens suchen wir eine der Homogenität ähnliche Eigenschaft, von der man vermuten könnte, dass sie bereits Homogenität impliziert – ohne dass dies tatsächlich der Fall ist. Die schwache KA-Homogenität erweckt gar nicht erst den Anschein, alleine bereits Homogenität zu implizieren – wir haben gerade gesehen, dass Beispiele nicht homogener, jedoch schwach KA-homogener partieller Ordnungen auf der Hand liegen. Der Begriff der schwachen KA-Homogenität ist also für unsere Zwecke ungeeignet.

Zweitens haben die Beispiele gezeigt, dass eine Klassifikation der schwach KA-homogenen partiellen Ordnungen nicht trivial ist. Eine Untersuchung der Klasse der schwach KA-homogenen partiellen Ordnungen mag für sich interessant sein, aber im Rahmen dieser Arbeit kann ihr der wohl nötige Raum nicht geboten werden.

1.4 Übertragung – erster Teil

Indem wir den ersten Teil der Schmerl'schen Klassifikation auf stark KA-homogene partielle Ordnungen übertragen, erhalten wir:

1.4.1 Satz *Sei $(P,\leq)$ eine (höchstens abzählbare) stark* KA*-homogene partielle Ordnung.*

1.) *Falls $(P,\leq)$ nicht $\{\updownarrow\}$ - universell ist, so ist $(P,\leq)$ isomorph zu A_ν für ein $\nu \in \omega+1$.*

2.) *Falls $(P,\leq)$ zwar $\{\updownarrow\}$ - universell, nicht jedoch $\{\bullet\ \ \bullet\}$ - universell ist, so ist $(P,\leq)$ isomorph zu $(\mathbb{Q},\leq)$.*

3.) *Falls $(P,\leq)$ zwar $\{\wedge\}$ - universell, nicht jedoch $\{\updownarrow\ \bullet\}$ - universell ist, so ist $(P,\leq)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}\times\nu,\leq_{\pi_1})$ für ein $\nu\in\omega+1$.*

4.) *Falls $(P,\leq)$ zwar $\{\updownarrow\ \bullet\}$ - universell, nicht jedoch $\{\wedge\}$ - universell ist, so ist $(P,\leq)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}\times\nu,\leq_{\mathrm{id}_2})$ für ein $\nu\in\omega+1$.*

5.) *Falls $(P,\leq)$ $\{\wedge,\updownarrow\ \bullet\}$ - universell ist, so enthält $(P,\leq)$ ein Pentagon.*

Beweis In *Schmerls* Beweis werden zwei Voraussetzungen gemacht:

Sei $(P,\leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung.

(V1) Jeder partielle Isomorphismus φ in $(P,\leq)$ mit einem dreielementigen Definitionsbereich, der weder eine Kette noch eine Antikette in $(P,\leq)$ ist, lässt sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P,\leq)$ fortsetzen.

(V2) $(P,\leq)$ ist 2-homogen.

Aus der 2-Homogenität folgen bereits die Punkte 1 bis 3 von Satz 1.3.5.

Aus beiden Voraussetzungen (V1) und (V2) zusammen folgt:

(1.1) $(P, \leq)$ ist {} - universell genau dann, wenn $(P, \leq)$ {} - universell ist.

Jedoch folgt (1.1) auch aus der Antiketten-Homogenität alleine. Damit gilt (1.1) sowohl für KA^n_m-homogene partielle Ordnungen mit $n+m \geq 2$ – denn diese erfüllen die Voraussetzungen (V1) und (V2) – als auch für beliebige Antiketten-homogene partielle Ordnungen. In allen stark KA-homogenen partiellen Ordnungen gilt also (1.1).

Aus (1.1) und der 2-Homogenität folgt dann 4.

Aus der 2-Homogenität folgt, dass $(P, \leq)$ ein Pentagon enthält, falls $(P, \leq)$ {, } - universell ist.

Sei nun $(P, \leq)$ eine stark KA-homogene partielle Ordnung. Damit ist $(P, \leq)$ 2-homogen, erfüllt also Voraussetzung (V2). $(P, \leq)$ ist außerdem KA^n_m-homogen mit $n+m \geq 2$ (womit Voraussetzung (V1) erfüllt ist) oder Antiketten-homogen. Damit folgt die Behauptung. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

1.4.2 Korollar *Sei $(P, \leq)$ eine stark* KA*-homogene partielle Ordnung. Dann enthält $(P, \leq)$ entweder ein Pentagon oder ist homogen und zu einer der Strukturen (T1) bis (T3) isomorph.*

1.5 Übertragung – zweiter Teil

Satz 1.3.6 besagt, dass die höchstens abzählbaren homogenen partiellen Ordnungen, die ein Pentagon enthalten, universell sind. Im Beweis benutzt Schmerl, dass für jede höchstens abzählbare homogene partielle Ordnung $(P, \leq)$ die Klasse $\mathrm{Sub}\,(P, \leq)$ die ***Amalgamierungs-Eigenschaft*** im folgenden Sinne besitzt:

Seien $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$ und $(C, \leq_C)$ endliche, in $(P, \leq)$ einbettbare homogene partielle Ordnungen mit der Eigenschaft

$$A = B \cap C \quad \& \quad \leq_A = \leq_B \cap A^2 = \leq_C \cap A^2 .$$

(Insbesondere ist $(A, \leq_A)$ eine Substruktur sowohl von $(B, \leq_B)$ als auch von $(C, \leq_C)$.)

Dann gibt es eine höchstens abzählbare homogene partielle Ordnung $(D, \leq_D)$ sowie Einbettungen $\varphi_B : B \hookrightarrow D$ und $\varphi_C : C \hookrightarrow D$ mit

$$\varphi_B \upharpoonright A = \varphi_C \upharpoonright A .$$

Für sehr stark KA-homogene partielle Ordnungen $(P, \leq)$ wissen wir nicht, ob die Klasse $\mathrm{Sub}\,(P, \leq)$ die Amalgamierungs-Eigenschaft besitzt. Um zu zeigen, dass auch die sehr stark KA-homogenen partiellen Ordnungen universell sind, müssen wir folglich anders vorgehen als Schmerl.

Mit Proposition 1.5.1 werden wir sogleich sehen, dass $(P, \leq)$ bereits homogen ist, falls $(P, \leq)$ ein Pentagon enthält und KA^n_m-homogen ist für ein Paar $(n, m) \in \omega^2$ mit $n + m \geq 3$. Insbesondere ist $(P, \leq)$ dann universell. Mit Satz 1.5.4 werden wir zeigen, dass auch partielle Ordnungen, die Antiketten- und 2-homogen sind, stets universell sind.

1.5.1 Proposition *Seien $n, m \in \omega$ mit $n + m \geq 3$ und sei $(P, \leq)$ eine KA^n_m-homogene partielle Ordnung. Dann ist $(P, \leq)$ bereits homogen.*

Beweis Mit Korollar 1.4.2 brauchen wir nur den Fall betrachten, dass $(P, \leq)$ ein Pentagon enthält.

$(P, \leq)$ erfülle die Voraussetzungen der Proposition. Nach Bemerkung 1.3.3 ist $(P, \leq)$ dann 3-homogen. Wegen $n + m \geq 3$ ist $n \geq 2$ oder $m \geq 2$. Also ist $(P, \leq)$ insbesondere KA^2_0- oder KA^0_2-homogen.

$(P, \leq)$ enthält ein Pentagon; sei o.B.d.A. $\mathrm{Pen} \subseteq P$. Sei ϕ der Isomorphismus in $(P, \leq)$, der b auf t abbildet $(\mathrm{Dom}(\phi) = \{b\})$, und sei Φ eine Fortsetzung von ϕ auf ganz P. Wir setzen

$$x_l := l_1\,, \quad x_r := r\,, \quad c := t = \Phi(b)\,, \quad y_l := \Phi(l_0)\,, \quad y_r := \Phi(r)\,.$$

Dann ist

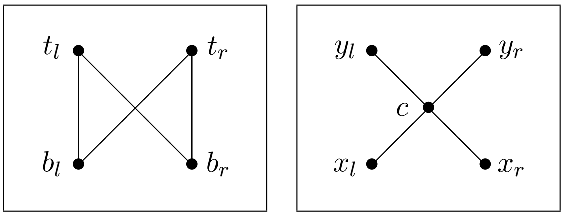
$$X := \{x_l, x_r, c, y_l, y_r\}\ ,$$

mit der von $(P, \leq)$ induzierten Ordnung eine Substruktur von $(P, \leq)$ (und nach Definition 2.3.6 ein *gefüllter Stern*).

Sei $(S, \leq)$ eine beliebige Substruktur von $(P, \leq)$ vom Isomorphie-Typ

$$(\{t_l, t_r, b_l, b_r\}\ ,\ \mathrm{rt}(\{(b_l, t_l), (b_l, t_r), (b_r, t_l), (b_r, t_r)\}))\ .$$

(Nach Definition 2.3.6 ist $(S, \leq)$ ein *Stern*.)



(a) Ein Stern (b) Ein gefüllter Stern

Abbildung 1.5: Sterne

Wir betrachten den Isomorphismus

$$\phi = \begin{pmatrix} x_l & x_r & y_l & y_r \\ b_l & b_r & t_l & t_r \end{pmatrix}\ .$$

Falls $(P, \leq)$ KA^2_0-homogen ist, so ist ϕ zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzbar, da $(X - \{c\}, \leq)$ von zwei Ketten überdeckt wird (nämlich von $(\{x_l, y_l\}, \leq)$ und

$(\{x_r, y_r\}, \leq))$. Falls $(P, \leq)$ KA_2^0-homogen ist, so ist ϕ zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzbar, da $(X - \{c\}, \leq)$ von zwei Antiketten überdeckt wird (nämlich von $(\{x_l, x_r\}, \leq)$ und $(\{y_l, y_r\}, \leq))$.

Folglich enthält P mit $\phi(c)$ ein Element, das zwischen $\{b_l, b_r\}$ und $\{t_l, t_r\}$ liegt.

Da der Stern $(S, \leq)$ beliebig war, ist $(P, \leq)$ in der Sprechweise von Droste und Macpherson *Stern-dicht* (siehe Definition 1.5.2). Droste und Macpherson haben gezeigt ([DrMcP], Theorem 1.1; hier zitiert als Satz 2.2.1), dass in abzählbaren partiellen Ordnungen mit Pentagon aus Stern-Dichte und 3-Homogenität zusammen bereits Homogenität folgt. □

1.5.2 Definition ***(Droste und Macpherson)*** Eine partielle Ordnung $(P, \leq)$ heißt ***Stern-dicht***, wenn für je zwei zweielementige Antiketten A_1, A_2 in $(P, \leq)$ mit $A_1 < A_2$ ein Element $q \in P$ existiert mit $A_1 < q < A_2$. (Das heißt, in Stern-dichten partiellen Ordnungen sind vergleichbare zweielementige Antiketten immer *separiert*.)

Mit dieser Sprechweise ergibt sich aus dem Beweis von Proposition 1.5.1 direkt folgende Aussage:

1.5.3 Korollar KA_0^2- *oder* KA_2^0*-homogene partielle Ordnungen mit Pentagon sind Stern-dicht.*

1.5.4 Satz *Sehr stark* KA*-homogene partielle Ordnungen, die ein Pentagon enthalten, sind universell.*

Um den Satz zu beweisen, führen wir zunächst einige Begriffe ein.

1.5.5 Definition Sei $(P, \leq)$ eine beliebige endliche partielle Ordnung.

1.) Wir können P von unten her wie folgt in Schichten zerlegen:

$$\begin{aligned} S_0(P) &:= \mathrm{Min}(P) \\ S_1(P) &:= \mathrm{Min}(P - S_0(P)) \\ &\vdots \\ S_{n+1}(P) &:= \mathrm{Min}(P - \bigcup_{i=0}^{n} S_i(P)) \end{aligned}$$

Mit $(S_n(P))_{n\in\omega}$ erhalten wir dann die ***Schichtung*** von $(P, \leq)$. Da $(P, \leq)$ endlich ist, gibt es ein $n \in \omega$, so dass alle Schichten $S_m(P)$ mit $m \geq n$ leer sind.

2.) Wir definieren die ***Höhe*** von $(P, \leq)$ (in Zeichen $h(P)$) als die Anzahl der nicht-leeren Schichten:

$$h(P) := |\{n \in \omega \mid S_n(P) \neq \emptyset\}|$$

3.) Wir nennen $(P, \leq)$ ***gesättigt***, wenn jede maximale Kette K in $(P, \leq)$ mit $|K| = k$ eine Transversale durch die Familie $\{S_n(P) \mid n \in k\}$ ist – wenn also für jedes $n \in k$ gilt:

$$|K \cap S_n(P)| = 1$$

Offensichtlich ist für alle $m \geq k$ dann $|K \cap S_m(P)| = 0$.

1.5.6 Bemerkung *Jede endliche partielle Ordnung $(P, \leq)$ kann zu einer endlichen gesättigten partiellen Ordnung $(P^*, \leq^*)$ erweitert werden.*

Beweis Sind $p \in S_n(P)$ und $q \in S_m(P)$ (mit $p < q$) direkt benachbart (d.h., es gibt kein $z \in P$ mit $p < z < q$), n und m jedoch nicht (also $n + 1 < m$), so fügen wir eine Kette $\{x_i \mid i \in \omega, n < i < m\}$ in P ein und erweitern die Ordnungsrelation $\leq$ um die Paare $(p, x_{n+1}), (x_{m-1}, q)$ und (x_i, x_{i+1}) für $n < i < m - 1$. Dieses Verfahren wiederholen wir für alle direkt benachbarten Elemente in P, die in nicht direkt benachbarten Schichten liegen. Die Erweiterung von P durch die neuen Elemente nennen wir P^*. Die durch die Hinzunahme der neuen Paare erhaltene Relation schließen wir nun reflexiv und transitiv ab und erhalten eine (partielle) Ordnungsrelation $\leq^*$ auf der Menge P^*. Offensichtlich ist $(P^*, \leq^*)$ gesättigt und eine Erweiterung von $(P, \leq)$. Wegen

$$|P^*| \leq |P \times P| \cdot |P| < \aleph_0$$

ist die Erweiterung $(P^*, \leq^*)$ endlich. $\square$

1.5.7 Hilfssatz *Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare 2-homogene partielle Ordnung mit Pentagon. Zu jedem Paar $(n, m) \in \omega^2$ enthält P eine n-elementige Antikette A_n, ein Element a_n und eine zu A_n disjunkte m-elementige Antikette A_n^m mit den Eigenschaften:*

1.) $A_n \dot\cup A_n^m$ ist eine $n + m$-elementige Antikette und

2.) $A_n > a_n \parallel A_n^m$.

Beweis Da $(P, \leq)$ {} - universell und 2-homogen ist, besitzen je zwei unvergleichbare Elemente ein gemeinsames oberes Element in P. Per Induktion folgt daraus, dass jede endliche Teilmenge von P eine obere Schranke in P besitzt. Da $(P, \leq)$ auch {} - universell ist, sehen wir analog, dass jede endliche Teilmenge von P auch eine untere Schranke in P besitzt.

Wir sehen sofort, dass P zu jeder endlichen Teilmenge Q ein unvergleichbares Element q enthält (also $q \parallel Q$): Sei $t \in P$ eine obere Schranke von Q und $b \in P$ eine untere Schranke von Q. Da $(P, \leq)$ {} - universell und 2-homogen ist, gibt es ein $q \in P$ mit $q \parallel \{t, b\}$ und damit $q \parallel Q$.

(Alternativ verweisen wir für die obigen Existenz-Aussagen auf [DrMcP], Theorem 2.1.)

Daraus folgt direkt, dass $(P, \leq)$ Antiketten beliebiger endlicher Größe enhält.

Sei also A_n eine beliebige n-elementige Antikette in $(P, \leq)$. Weiterhin sei $a_n \in P$ eine untere Schranke von A_n. Wir setzen

$$A := A_n \cup \{a_n\} .$$

Nun wählen wir Elemente $c_n(i)$ mit $i \in \omega$ wie folgt:

$$\begin{aligned} c_n(0) &\parallel A \\ c_n(1) &\parallel A \cup \{c_n(0)\} \\ &\vdots \\ c_n(i+1) &\parallel A \cup \{c_n(j) \mid j \leq i\} \end{aligned}$$

Wir setzen schließlich

$$A_n^m := \{c_n(i) \mid i \in m\}.$$

Offenbar sind A_n und A_n^m disjunkt, ihre Union ist eine Antikette und aus der Konstruktion folgt $A_n > a_n \parallel A_n^m$. □

Beweis von Satz 1.5.4 Sei $(P, \leq)$ eine sehr stark KA-homogene partielle Ordnung mit Pentagon. $(P, \leq)$ ist also KA_m^n-homogen mit $n \geq 3$ oder $m \geq 1$.

Falls $n \geq 3$ ist, so folgt mit Proposition 1.5.1, dass $(P, \leq)$ homogen und insbesondere universell ist.

Betrachten wir darum den Fall, dass $(P, \leq)$ Antiketten- und 2-homogen ist.

Jede endliche partielle Ordnung lässt sich mit Bemerkung 1.5.6 in eine endliche gesättigte partielle Ordnung einbetten. Um zu beweisen, dass $(P, \leq)$ universell ist, reicht es somit zu zeigen, dass jede endliche gesättigte partielle Ordnung in $(P, \leq)$ eingebettet werden kann.

Wir beweisen diese Behauptung durch vollständige Induktion über die Mächtigkeit der einzubettenden Struktur. Offensichtlich sind beliebige (höchstens abzählbare) Antiketten in $(P, \leq)$ einbettbar. Insbesondere sind einelementige partielle Ordnungen einbettbar. Wir setzen nun voraus, dass alle höchstens n-elementigen gesättigten partiellen Ordnungen in $(P, \leq)$ einbettbar sind, und betrachten eine beliebige gesättigte partielle Ordnung $(P', \leq)$ der Mächtigkeit $n + 1$.

Falls $(P', \leq)$ eine Antikette ist, ist P' offensichtlich in P einbettbar.

Andernfalls ist $h(P') = k + 1$ für ein $k \in \omega$. Dann ist $P'' := P' - \mathrm{Min}(P') = P' - S_0(P')$ in P einbettbar, da $|P' - S_0(P')| \leq n$ ist. Sei Φ ein Einbettungs-Homomorphismus von P'' in P.

Seien für geeignete $k, m \in \omega$

$$\mathrm{Min}(P'') = S_1(P') =: \{y_i \mid i \in k\}$$

und

$$\mathrm{Min}(P') = S_0(P') =: \{x_j \mid j \in m\} .$$

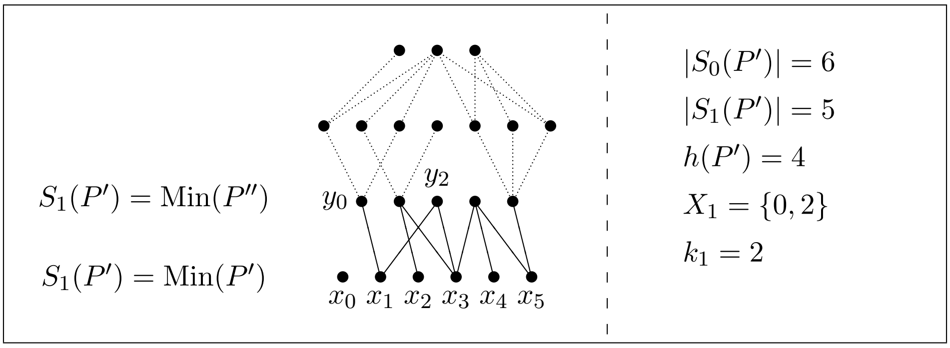


Abbildung 1.6: Eine gesättigte partielle Ordnung $(P', \leq)$

Außerdem setzen wir für jedes $j \in m$

$$X_j := \{i \in k \mid x_j < y_i\} \quad \& \quad k_j := |X_j| \, .$$

1.5.8 Zwischenbemerkung *Da P' gesättigt ist, liegen direkte Nachbarn in P' stets in direkt benachbarten Schichten. Für beliebige $x \in S_0(P')$ und $y \in P''$ ist deshalb $x < y$ genau dann, wenn es ein $y' \in S_1(P') = \mathrm{Min}(P'')$ gibt mit $x \leq y' < y$ (andernfalls ist $y \parallel x$).*

Wir müssen also für jedes $j \in m$ ein Element $q_j \in P$ finden, so dass gilt:

$$q_j < \{\Phi(y_i) \mid i \in X_j\} \tag{1.2}$$

$$q_j \parallel \{\Phi(y_i) \mid i \in k - X_j\} \tag{1.3}$$

Außerdem müssen die q_j (mit $j \in m$) paarweise unvergleichbar sein, d.h., $\{q_j \mid j \in m\}$ muss eine Antikette sein. Dann ergibt sich mit Zwischenbemerkung 1.5.8, dass

$$\Phi \cup \{(x_j, q_j) \mid j \in m\}$$

eine Einbettung von P' in P ist.

Um die gewünschten Elemente q_j zu finden, erweitern wir zunächst

$$\Phi(\mathrm{Min}(P'')) = \{\Phi(y_i) \mid i \in k\}$$

um eine k-elementige Antikette

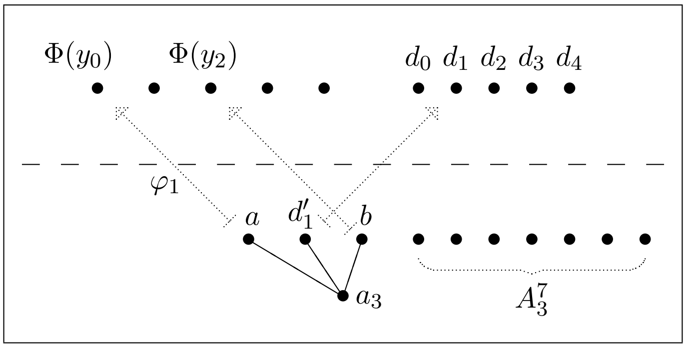
$$D := \{d_i \mid i \in k\} \quad \text{mit} \quad D \parallel \Phi(P'')$$

wie folgt: Im Beweis von Hilfssatz 1.5.7 sehen wir, dass $(P, \leq)$ zu jeder endlichen Teilmenge M ein unvergleichbares Element enthält. Sei also

$$d_0 \parallel \Phi(\mathrm{Min}(P''))$$

und für $1 \leq i \in k$ sei

$$d_i \parallel \Phi(\mathrm{Min}(P'')) \cup \{d_j \mid j \in i\} \, .$$



Der Antiketten-Isomorphismus φ_1 – anskizziert

Damit haben wir die Antikette D definiert.

Für jedes $j \in m$ gehen wir nun wie folgt vor:

Nach Hilfssatz 1.5.7 enthält P disjunkte Antiketten

$$A_{k_j+1} \quad \& \quad A_{k_j+1}^{2k-k_j-1} \quad \text{mit} \quad |A_{k_j+1}| = k_j + 1 \quad \& \quad |A_{k_j+1}^{2k-k_j-1}| = 2k - k_j - 1$$

und ein Element a_{k_j+1} mit

$$A_{k_j+1} > a_{k_j+1} \parallel A_{k_j+1}^{2k-k_j-1} .$$

Sei $d'_j \in A_{k_j+1}$ beliebig.

Wir definieren nun einen Isomorphismus φ_j, der die Antikette $A_{k_j+1} \cup A_{k_j+1}^{2k-k_j-1}$ wie folgt auf $\Phi(\mathrm{Min}(P'')) \cup D$ abbildet:

$$\varphi_j(A_{k_j+1} - \{d'_j\}) = \{\Phi(y_i) \mid i \in X_j\} \tag{1.4}$$

$$\varphi_j(d'_j) = d_j \tag{1.5}$$

$$\varphi_j(A_{k_j+1}^{2k-k_j-1}) = \{\Phi(y_i) \mid i \in k - X_j\} \cup (D - \{d_j\}) \tag{1.6}$$

Da $(P, \leq)$ Antiketten-homogen ist, können wir φ_j zu einem Automorphismus $\widehat{\varphi_j}$ auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen. Wir setzen nun

$$q_j := \widehat{\varphi_j}(a_{k_j+1}) .$$

Offenbar ist

$$q_j = \widehat{\varphi_j}(a_{k_j+1}) < \widehat{\varphi_j}(A_{k_j+1}) = \varphi_j(A_{k_j+1}) \overset{1.4,1.5}{=} \{\Phi(y_i) \mid i \in X_j\} \cup \{d_j\} \tag{1.7}$$

$$q_j = \widehat{\varphi_j}(a_{k_j+1}) \parallel \widehat{\varphi_j}(A_{k_j+1}^{2k-k_j-1}) = \varphi_j(A_{k_j+1}^{2k-k_j-1}) \overset{1.6}{=} \{\Phi(y_i) \mid i \in k - X_j\} \cup (D - \{d_j\}) \tag{1.8}$$

Für beliebige $i, j \in m$ mit $i \neq j$ erhalten wir insbesondere

$$q_j \overset{1.7}{<} \{\Phi(y_i) \mid i \in X_j\} \qquad \& \qquad q_j \overset{1.8}{\parallel} \{\Phi(y_i) \mid i \in k - X_j\} \tag{1.9}$$

$$q_j \overset{1.7}{<} d_j \qquad \& \qquad q_j \overset{1.8}{\parallel} d_i \tag{1.10}$$

Mit (1.9) erfüllen die q_j die Bedingungen (1.2) und (1.3). Mit (1.10) ist $\{q_j \mid j \in m\}$ eine Antikette.

Für jedes $j \in m$ setzen wir

$$\widehat{\Phi}(x_j) := q_j \ .$$

Damit ist

$$\widehat{\Phi} = \Phi \cup \{(x_j, q_j) \mid j \in m\}$$

eine Einbettung von P' in P.

$\square$

Der wesentliche *Unterschied* zwischen der Schmerl'schen Klassifikation und der Klassifikation der höchstens abzählbaren (sehr) stark KA-homogenen partiellen Ordnungen ist dieser:

Setzen wir anstelle von Homogenität nur sehr starke KA-Homogenität voraus, so erhalten wir verschiedene Isomorphie-Typen universeller Strukturen. Denn neben dem Typ der universellen homogenen abzählbaren partiellen Ordnung gibt es auch Isomorphie-Typen nicht-homogener, jedoch universeller (und sehr stark KA-homogener) partieller Ordnungen – Beispiele konstruieren wir in Teil II.

Sehr starke KA*-Homogenität impliziert also nicht die Homogenität.*
Lediglich für höchstens abzählbare partielle Ordnungen, die kein Pentagon enthalten, sind Homogenität und sehr starke KA-Homogenität äquivalent.

Die Frage, ob KA_0^2-Homogenität alleine Homogenität impliziert, ist weiter offen.

Kapitel 2

Minimale unseparierte Substrukturen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Frage, wie sich die Homogenität einer partiellen Ordnung charakterisieren lässt. Da wir endliche partielle Isomorphismen fortsetzen wollen – im Allgemeinen mit dem Hausdorff'schen Zick-Zack-Verfahren –, liegt es nahe, Ein-Punkt-Erweiterungen endlicher Substrukturen zu betrachten. Aufbauend auf den Arbeiten von Michael H. Albert und Stanley N. Burris [AlBu] sowie von Droste und Macpherson [DrMcP] zeigen wir, dass für die Homogenität bereits die Fortsetzbarkeit einiger weniger partieller Isomorphismen auf bestimmte Ein-Punkt-Erweiterungen notwendig und hinreichend ist. Einerseits lässt sich so vergleichsweise einfach überprüfen, ob eine partielle Ordnung homogen ist (siehe z.B. Proposition 2.4.1), andererseits ist uns damit ein Werkzeug an die Hand gegeben, verschiedene (nicht isomorphe) partielle Ordnungen zu konstruieren – auch verschiedene partielle Ordnungen, die nicht homogen, wohl aber sehr stark KA-homogen sind (siehe z.B. Bemerkung 5.6.1).

2.1 Grundüberlegungen zur Fortsetzbarkeit partieller Isomorphismen

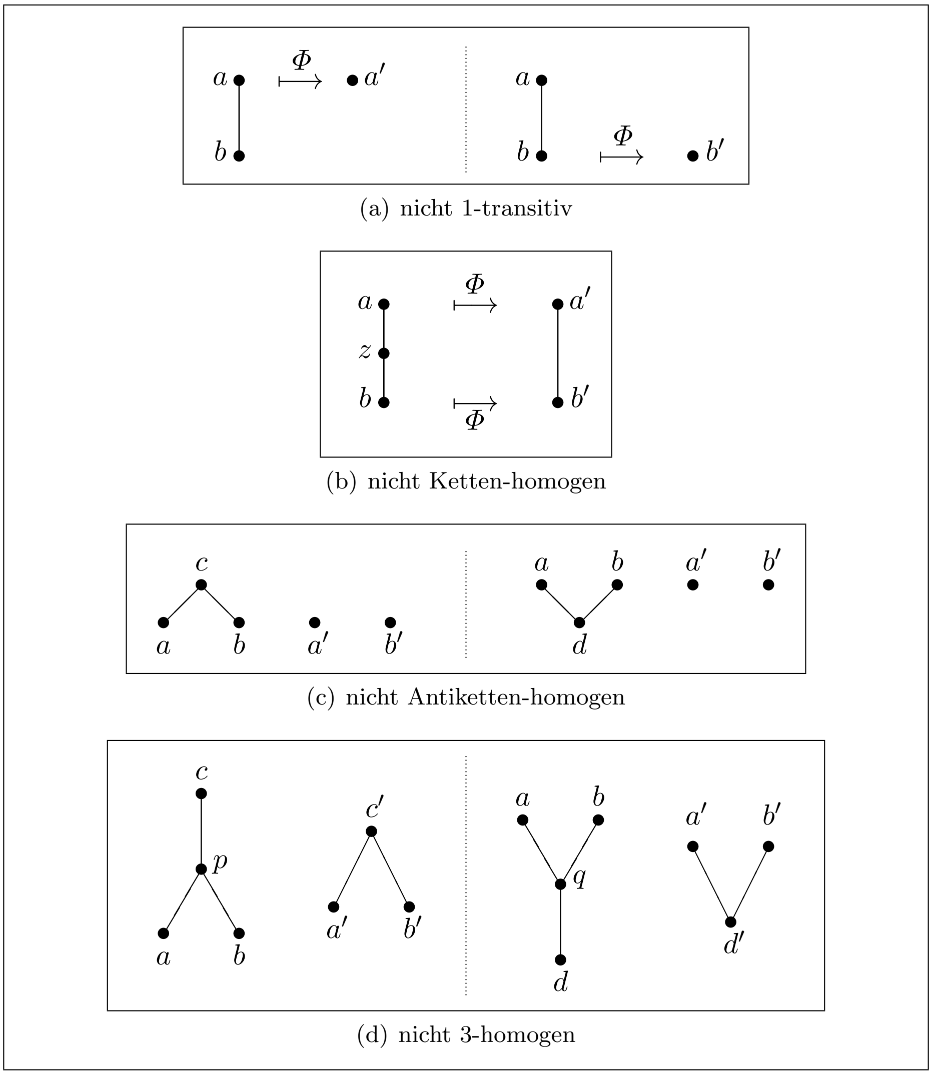
Als erstes möchten wir ein Gefühl dafür entwickeln, unter welchen Voraussetzungen – sowohl an die partielle Ordnung als auch an den partiellen Isomorphismus – sich ein endlicher Isomorphismus in einer höchstens abzählbaren partiellen Ordnung $(P, \leq)$ zu einem Automorphismus auf ganz P fortsetzen lässt.

Schauen wir uns dazu zunächst Beispiele an, in denen der Isomorphismus *nicht* fortgesetzt werden kann:

2.1.1 Beispiele [siehe Abbildung 2.1]

1.) Falls $(P, \leq)$ eine zweielementige Kette $\{a, b\}$ (mit $a > b$) und

   a) ein minimales Element a' oder



(a) nicht 1-transitiv

(b) nicht Ketten-homogen

(c) nicht Antiketten-homogen

(d) nicht 3-homogen

Abbildung 2.1: Beispiele für nicht-homogene Strukturen

b) ein maximales Element b'

enthält, so ist

a) Φ mit $\Phi(a) = a'$ nicht auf P fortsetzbar, da dem Element b kein Bild zugeordnet werden kann; bzw.

b) Φ mit $\Phi(b) = b'$ nicht auf P fortsetzbar, da dem Element a kein Bild zugeordnet werden kann.

Eine solche partielle Ordnung ist nicht 1-transitiv und damit insbesondere weder Ketten- noch Antiketten-homogen.

2.) Seien $A := \{a, b\}$ und $A' := \{a', b'\}$ mit $a > b$ und $a' > b'$ zweielementige Ketten in $(P, \leq)$.

Falls P ein Element z mit $a > z > b$ enthält, jedoch kein Element z' mit $a' > z' > b'$, so kann der Ketten-Isomorphismus Φ mit $\Phi(a) = a'$ und $\Phi(b) = b'$ nicht auf P fortgesetzt werden, da dem Element z kein Bild zugeordnet werden kann.

Eine solche partielle Ordnung ist nicht Ketten-homogen.

3.) Seien $A := \{a, b\}$ und $A' := \{a', b'\}$ zweielementige Antiketten in $(P, \leq)$. Falls nun

   a) A eine obere Schranke c in $(P, \leq)$ besitzt, A' jedoch nach oben unbeschränkt ist, bzw.

   b) A eine untere Schranke d in $(P, \leq)$ besitzt, A' jedoch nach unten unbeschränkt ist,

   so ist

   a) Φ mit $\Phi(a) = a'$ und $\Phi(b) = b'$ nicht auf P fortsetzbar, da dem Element c kein Bild zugeordnet werden kann; bzw.

   b) Φ mit $\Phi(a) = a'$ und $\Phi(b) = b'$ nicht auf P fortsetzbar, da dem Element d kein Bild zugeordnet werden kann.

   Eine solche partielle Ordnung ist nicht Antiketten-homogen.

4.) Seien $\{a, b, c\}$ und $\{a', b', c'\}$ dreielementige Substrukturen von $(P, \leq)$ mit

$$a \parallel b\ , \quad a' \parallel b' \quad \& \quad \{a, b\} < c\ , \quad \{a', b'\} < c'\ .$$

Falls es nun ein Element $p \in P$ gibt mit $\{a, b\} < p < c$, jedoch kein Element $p' \in P$ mit $\{a', b'\} < p' < c'$, dann lässt sich der Isomorphismus

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

nicht auf ganz P fortsetzen, da dem Element p kein Bild zugeordnet werden kann.

Eine solche partielle Ordnung ist nicht 3-homogen, insbesondere nicht homogen.

Analog sehen wir für dreielementige Substrukturen $\{a, b, d\}$ und $\{a', b', d'\}$ mit

$$a \parallel b\ , \quad a' \parallel b' \quad \& \quad \{a, b\} > d\ , \quad \{a', b'\} > d'\ :$$

Falls es ein Element $q \in P$ gibt mit $\{a, b\} > q > d$, jedoch kein Element $q' \in P$ mit $\{a', b'\} > q' > d'$, dann lässt sich der Isomorphismus

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \end{pmatrix}$$

nicht auf ganz P fortsetzen, da dem Element q kein Bild zugeordnet werden kann.

Auch eine solche partielle Ordnung ist nicht 3-homogen und damit nicht homogen.

Allgemeiner lässt sich sagen:

2.1.2 Satz *(Fortsetzbarkeit 1)*

1.) Ein partieller Isomorphismus $\Phi : P' \to P''$ in einer höchstens abzählbaren partiellen Ordnung $(P, \leq)$ lässt sich genau dann auf einem beliebigen Element von P (bzw. auf einer beliebigen Ein-Punkt-Erweiterung von $(P', \leq)$ in $(P, \leq)$) fortsetzen, wenn für alle Teilmengen X, Y, Z von P' gilt:

Es gibt genau dann ein Element $q \in P$ mit

$$X < q < Y \quad \& \quad q \parallel Z \ ,$$

wenn es ein Element $q' \in P$ gibt mit

$$\Phi(X) < q' < \Phi(Y) \quad \& \quad q' \parallel \Phi(Z) \ .$$

2.) Eine höchstens abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$ ist genau dann homogen, wenn für alle endlichen Teilmengen X, Y, Z von P gilt:

Es gibt genau dann ein Element $q \in P$ mit

$$X < q < Y \quad \& \quad q \parallel Z \ ,$$

wenn es für jede Einbettung Φ von $(X \cup Y \cup Z, \leq)$ in $(P, \leq)$ ein Element $q' \in P$ gibt mit

$$\Phi(X) < q' < \Phi(Y) \quad \& \quad q' \parallel \Phi(Z) \ .$$

(Jeder endliche partielle Isomorphismus kann dann auf ganz P mit dem Hausdorff'schen Zick-Zack-Verfahren fortgesetzt werden.)

2.2 Ein-Punkt-Erweiterungen und existentielle Abgeschlossenheit

Wir suchen Kriterien für die Homogenität abzählbarer Ketten- und Antiketten-homogener partieller Ordnungen mit Pentagon. Für beliebige abzählbare partielle Ordnungen $(P, \leq)$, die ein Pentagon enthalten, haben Droste und Macpherson gezeigt, dass $(P, \leq)$ genau dann homogen (und damit nach der Schmerl'schen Klassifikation universell) ist, wenn $(P, \leq)$ 3-homogen und Stern-dicht ist.

Vollständig lautet der soeben skizzierte Satz ([DrMcP], Theorem 1.1):

2.2.1 Satz *(Droste und Macpherson, 1991)* *Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung mit Pentagon. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.) $(P, \leq)$ ist 3-homogen und Stern-dicht.

2.) $(P, \leq)$ ist 4-transitiv.

3.) $(P, \leq)$ ist die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) abzählbare universell-homogene partielle Ordnung.

Im Beweis dieses Satzes wird eine Überlegung verwendet, die Albert und Burris in [AlBu] benutzen, um eine (endliche) Axiomatisierung der Klasse der existentiell-abgeschlossenen partiellen Ordnungen anzugeben. Wie wir in diesem Abschnitt ausführen, erhalten wir aus der genannten Axiomatisierung unmittelbar eine Axiomatisierung der Klasse der abzählbaren homogenen partiellen Ordnungen.

2.2.2 Definition Sei $\mathfrak{L}$ die Sprache (erster Stufe) der partiellen Ordnungen und für jede Menge M sei $\mathfrak{L}_M$ die Erweiterung von $\mathfrak{L}$ um Konstanten-Symbole $\dot{c}_m$ (für jedes $m \in M$).

Eine partielle Ordnung $(P, \leq)$ heißt ***existentiell-abgeschlossen (in der Klasse der partiellen Ordnungen)***, wenn für jede partielle Ordnung $(Q, \leq)$, die $(P, \leq)$ als Substruktur enthält, gilt: Jede Existenz-Aussage aus $\mathfrak{L}_P$, die in $(Q, \leq)$ erfüllt ist, ist auch in $(P, \leq)$ erfüllt.

Albert und Burris geben folgende Charakterisierung der existentiellen Abgeschlossenheit an ([AlBu], S. 172, Folgerung aus Theorem 1.1):

$(P, \leq)$ ist genau dann existentiell-abgeschlossen, wenn sich jeder Monomorphismus von einer endlichen partiellen Ordnung $(S, \leq')$ in $(P, \leq)$ für jede Ein-Punkt-Erweiterung $(S \cup \{q\}, \leq')$ zu einem Monomorphismus von $(S \cup \{q\}, \leq')$ in $(P, \leq)$ fortsetzen lässt.

Einen Zusammenhang zwischen existentieller Abgeschlossenheit und Homogenität zeigen die folgenden beiden Propositionen auf:

2.2.3 Proposition *Abzählbare existentiell-abgeschlossene partielle Ordnungen sind homogen und enthalten ein Pentagon.*

Beweis Offensichtlich sind existentiell-abgeschlossene partielle Ordnungen $\aleph_0$-homogen: Partielle Isomorphismen sind im Zick-Zack-Verfahren zu Automorphismen (anstatt lediglich zu Monomorphismen) fortzusetzen.

Wir sehen auch schnell, dass existentiell-abgeschlossene partielle Ordnungen $\aleph_0$-universell sind: Sei $(P, \leq)$ eine existentiell-abgeschlossene partielle Ordnung und sei $(Q, \leq')$ mit $Q = \{q_i \mid i \in n\}$ mit $n \in \omega$ eine beliebige partielle Ordnung. Für jedes $j \in n + 1$ sei

$$Q_j := \{q_i \mid i \in j\} .$$

Die leere partielle Ordnung $(\emptyset, \leq') = (Q_0, \leq')$ kann trivialerweise in $(P, \leq)$ eingebettet werden. Da $(Q_{j+1}, \leq')$ eine Ein-Punkt-Erweiterung von $(Q_j, \leq')$ ist, erhalten wir aus der existentiellen Abgeschlossenheit rekursiv eine Einbettung von $(Q, \leq')$ in $(P, \leq)$.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich für *abzählbare* partielle Ordnungen die Behauptung. □

Umgekehrt sehen wir:

2.2.4 Proposition *Abzählbare homogene partielle Ordnungen, die ein Pentagon enthalten, sind existentiell-abgeschlossen.*

Beweis Wir wissen bereits, dass abzählbare homogene partielle Ordnungen, die ein Pentagon enthalten, universell sind. Dass sie auch existentiell-abgeschlossen sind, sehen wir wie folgt:

Sei $(P, \leq)$ eine homogene und universelle abzählbare partielle Ordnung. Sei φ ein Monomorphismus von einer beliebigen endlichen partiellen Ordnung $(S, \leq')$ in $(P, \leq)$. Sei nun $(S \cup \{q\}, \leq')$ eine Ein-Punkt-Erweiterung von $(S, \leq')$. Da $(P, \leq)$ universell ist, gibt es auch eine Einbettung ϕ von $(S \cup \{q\}, \leq')$ in $(P, \leq)$. Die Abbildung

$$\psi := \varphi \circ (\phi^{-1} \restriction \phi(S))$$

ist ein Isomorphismus von $(\phi(S), \leq)$ auf $(\varphi(S), \leq)$. Da $(P, \leq)$ homogen ist, lässt sich ψ zu einem Automorphismus $\varPhi$ auf $(P, \leq)$ fortsetzen. Damit ist $\varPhi \circ \phi$ eine Einbettung von $(S \cup \{q\}, \leq')$ in $(P, \leq)$, die φ fortsetzt, denn

$$(\varPhi \circ \phi) \restriction S \;=\; \psi \circ (\phi \restriction S) \;=\; \varphi \circ (\phi^{-1} \restriction \phi(S)) \circ (\phi \restriction S) \;=\; \varphi$$

$\square$

Aus den Propositionen 2.2.3 und 2.2.4 folgt:

2.2.5 Korollar *Die Axiomatisierung der Klasse der existentiell-abgeschlossenen partiellen Ordnungen ist, eingeschränkt auf die abzählbaren partiellen Ordnungen, zugleich eine Axiomatisierung der Klasse der abzählbaren homogenen partiellen Ordnungen mit Pentagon.*

Daraus erhalten wir:

2.2.6 Satz *(Fortsetzbarkeit 2)* *Eine abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$, die ein Pentagon enthält, ist genau dann homogen, wenn sich jeder endliche Monomorphismus von einer partiellen Ordnung $(S, \leq')$ in $(P, \leq)$ für jede Ein-Punkt-Erweiterung $(S \cup \{q\}, \leq')$ zu einem Monomorphismus von $(S \cup \{q\}, \leq')$ in $(P, \leq)$ fortsetzen lässt.*

Es folgt eine Begriffsbildung, die wir in Teil II wieder aufgreifen und differenzieren werden.

2.2.7 Definition Sind X und Y endliche Antiketten in $(P, \leq)$ mit $X < Y$ und Z ist eine Teilmenge von P mit

$$X^{\downarrow} \cap Z = \emptyset = Y^{\uparrow} \cap Z\ ,$$

so bezeichnen wir (X, Y, Z) als eine ***Lage*** in $(P, \leq)$. Die Menge der Lagen in $(P, \leq)$ notieren wir mit $\mathbb{L}(P)$.

Der Begriff der *Konfiguration* reduziert Lagen – grob gesprochen – auf die Kardinalitäten ihrer Komponenten:

2.2.8 Definition ***(Albert und Burris)*** In [AlBu] wird $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ mit $|Z| < \aleph_0$ als ***(x, y, z)-Konfiguration*** bezeichnet, wenn $x = |X|$, $y = |Y|$ und $z = |Z|$ ist. Wir wollen jedoch auch erlauben, dass Z (bzw. z) unendlich ist. Das Tripel (x, y, z) nennen wir die ***Konfiguration*** von (X, Y, Z).

Wir sagen von einer Konfiguration $(x, y, z) \in \omega^3$, sie sei ***n-elementig***, wenn $n = x+y+z$ gilt. Eine Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ bezeichnen wir als ***n-elementig***, wenn ihre Konfiguration n-elementig ist.

Nun führen wir den Begriff der *Separiertheit* ein – auch ihn werden wir in Teil II erweitern.

2.2.9 Definition Eine ***Lage*** $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ nennen wir ***separiert***, falls es ein $q \in P$ gibt mit

$$X < q < Y \quad \& \quad q \parallel Z \; .$$

Wir sagen dann auch, dass q die Lage (X, Y, Z) ***separiert***. Eine nicht separierte Lage bezeichnen wir als ***unsepariert***.

Zur Axiomatisierung der Klasse der existentiell-abgeschlossenen partiellen Ordnungen formulieren Albert und Burris folgende Axiome:

2.2.10 Notation ***(Albert und Burris)*** Sei $\mathfrak{L}$ die Sprache erster Stufe der partiell geordneten Mengen. Für $(x, y, z) \in \omega^3$ sei

$${}_z\Phi_x^y$$

folgende $\mathfrak{L}$-Aussage:

Jede Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ mit der Konfiguration (x, y, z) ist separiert.

Durch Konjunktion von Aussagen dieses Typs erhalten wir mit

$${}_{\leq z}\Phi_{\leq x}^{\leq y}$$

folgende $\mathfrak{L}$-Aussage: *Jede Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ mit*

$$|X| \leq x \; , \quad |Y| \leq y \quad \& \quad |Z| \leq z$$

ist separiert.

Die Axiome für partielle Ordnungen zusammen mit sämtlichen Aussagen

$${}_z\Phi_x^y \quad \text{mit} \quad (x, y, z) \in \omega^3$$

axiomatisieren die Klasse der existentiell-abgeschlossenen partiellen Ordnungen ([AlBu], Proposition 2.1).

Für abzählbare partielle Ordnungen ergibt sich daraus mit Korollar 2.2.5:

2.2.11 Satz ***(Fortsetzbarkeit 3)*** *Eine abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$, die ein Pentagon enthält, ist genau dann homogen, wenn alle Lagen $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ separiert sind.*

Albert und Burris zeigen, dass die Aussage ${}_{\leq 1}\Phi^{\leq 2}_{\leq 2} \wedge {}_2\Phi^1_1$ bereits jede der Aussagen ${}_z\Phi^y_x$ (mit $(x, y, z) \in \omega^3$) impliziert und erhalten ([AlBu], Theorem 2.2):

2.2.12 Satz ***(Albert und Burris, 1986)*** *Die Klasse der existentiell-abgeschlossenen partiellen Ordnungen ist endlich axiomatisiert durch die Axiome für partielle Ordnungen und die Aussage*

$$ {}_{\leq 1}\Phi^{\leq 2}_{\leq 2} \;\wedge\; {}_2\Phi^1_1 \;. $$

Droste und Macpherson weisen in [DrMcP] darauf hin, dass sich daraus ein Kriterium für die Homogenität abzählbarer partieller Ordnungen ergibt:

2.2.13 Satz ***(Fortsetzbarkeit 4)*** *Eine abzählbare partielle Ordnung* $(P, \leq)$ *mit Pentagon ist genau dann homogen, wenn alle Lagen* $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ *der Konfigurationen* $(1, 1, 2)$ *oder* (x, y, z) *mit* $x \leq 2$, $y \leq 2$ *und* $z \leq 1$ *separiert sind.*

Insbesondere ist eine abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$ mit Pentagon genau dann homogen, wenn jede höchstens 5-elementige Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ separiert ist ([AlBu], Korollar 2.3).

Die Axiome vom Typ ${}_z\Phi^y_x$ motivieren folgende Begriffsbildung:

2.2.14 Definition Eine partielle Ordnung $(P, \leq)$, in der alle Lagen der Konfiguration (x, y, z) separiert sind, wollen wir ***(x, y, z)-separiert*** nennen.

2.2.15 Notation Ist $(P, \leq)$ nicht existentiell-abgeschlossen, so sei $\mu(P)$ die kleinste Kardinalzahl, für die es eine unseparierte Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ gibt mit $|X| + |Y| + |Z| = \mu(P)$. Also:

$$ \mu(P) := \mathrm{Min}\{x + y + z \mid (P, \leq) \text{ ist nicht } (x, y, z)\text{-separiert}\} $$

2.2.16 Bemerkung *Für eine abzählbare partielle Ordnung mit Pentagon ist* $\mu(P)$ *genau dann definiert, wenn* $(P, \leq)$ *nicht homogen ist.*

Korollar 2.3 aus [AlBu] können wir nun folgendermaßen formulieren:

Sei $(P, \leq)$ *eine abzählbare partielle Ordnung* $(P, \leq)$ *mit Pentagon. Falls* $(P, \leq)$ *nicht homogen ist, so ist* $\mu(P) \leq 5$.

Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass diese Aussage auch mit $\mu(P) \leq 4$ gilt. Der Fall $5 \leq \mu(P) \in \omega$ kann also nicht auftreten.

Zur Illustration von Definition 2.2.14 geben wir noch ein paar Beispiele an.

2.2.17 Beispiel und Bemerkung Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung, die ein Pentagon enthält.

1.) Falls $(P, \leq)$ Ketten- und Antiketten-homogen ist, so ist jede Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$, wobei $X \cup Y \cup Z$ eine Antikette ist (insbesondere $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$), separiert:

Sei o.B.d.A. $X = \emptyset$, $|Y| = n$ und $|Z| = m$. Da $(P, \leq)$ Ketten-homogen ist, ist Δ_ω in $(P, \leq)$ einbettbar – o.B.d.A. sei Δ_ω eine Substruktur von $(P, \leq)$.

Sei φ ein partieller Antiketten-Isomorphismus mit

$$\varphi(C_n) = Y \quad \& \quad \varphi(C_{n+m} - C_n) = Z \, .$$

Da $(P, \leq)$ Antiketten-homogen ist, können wir φ zu einem Automorphismus Φ auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen. Mit $\Phi(b_n)$ erhalten wir ein $(\emptyset, Y, Z)$ separierendes Element.

2.) Falls $(P, \leq)$ Ketten-homogen ist, so ist jede Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$, wobei $X \cup Y \cup Z$ eine Kette ist, separiert:

Das Pentagon Pen ist in $(P, \leq)$ einbettbar; o.B.d.A. sei Pen eine Substruktur von $(P, \leq)$.

Wir definieren nun wie folgt einen Ketten-Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \varphi(b) &:= \mathrm{Max}(X)\,, \quad \text{falls } X \neq \emptyset \\ \varphi(t) &:= \mathrm{Min}(Y)\,, \quad \text{falls } Y \neq \emptyset \\ \varphi(l_0) &:= \mathrm{Min}(Z)\,, \quad \text{falls } Z \neq \emptyset \\ \varphi(l_1) &:= \mathrm{Max}(Z)\,, \quad \text{falls } |Z| \geq 2 \end{aligned}$$

Sei Φ eine Fortsetzung von φ auf ganz $(P, \leq)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(r) &> X \\ \Phi(r) &< Y \\ \Phi(r) &\parallel Z \end{aligned}$$

Also separiert $\Phi(r)$ die Lage (X, Y, Z).

2.3 Separiertheit und Homogenität

In diesem Abschnitt geben wir ein Homogenitäts-Kriterium an, bei dem lediglich sechs Lagen zu betrachten sind: Die *homogenen* abzählbaren partiellen Ordnungen mit Pentagon sind dadurch charakterisiert, dass sie jede dieser sechs *signifikanten* Lagen separieren. Da jede signifikante Lage höchstens vierelementig ist, handelt es sich um eine Verschärfung von Korollar 2.3 in [AlBu] – dort wird nur $\mu(P) \leq 5$ gefolgert.

2.3.1 Proposition *Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung mit Pentagon. Falls $(P, \leq)$ nicht homogen ist, so ist $\mu(P)$ definiert und es gilt:*

1.) $1 \leq \mu(P) \leq 4$

2.) Falls außerdem $\mu(P) \geq 3$ ist, so gilt eine der folgenden Aussagen:

a) Es ist $\mu(P) = 3$ *und* $(P, \leq)$ *enthält eine unseparierte Lage* $(\{x_0\}, \{y_0\}, \{z_0\})$ *mit* $x_0 \leq z_0 \leq y_0$.
Insbesondere ist $(P, \leq)$ *weder* $(1, 1, 1)$*-separiert noch Ketten-homogen.*

b) Es ist $\mu(P) = 3$ *und* $(P, \leq)$ *enthält eine unseparierte Lage* $(\emptyset, \{y_0, y_1\}, \{z_0\})$, *wobei* $\{y_0, y_1, z_0\}$ *eine dreielementige Antikette ist.*
Insbesondere ist $(P, \leq)$ *weder* $(0, 2, 1)$*-separiert noch Ketten- und Antiketten-homogen.*

c) Es ist $\mu(P) = 3$ *und* $(P, \leq)$ *enthält eine unseparierte Lage* $(\{x_0, x_1\}, \emptyset, \{z_0\})$, *wobei* $\{x_0, x_1, z_0\}$ *eine dreielementige Antikette ist.*
Insbesondere ist $(P, \leq)$ *weder* $(2, 0, 1)$*-separiert noch Ketten- und Antiketten-homogen.*

d) Es ist $\mu(P) = 3$ *und* $(P, \leq)$ *ist nicht* $(1, 2, 0)$*-separiert.*

e) Es ist $\mu(P) = 3$ *und* $(P, \leq)$ *ist nicht* $(2, 1, 0)$*-separiert.*

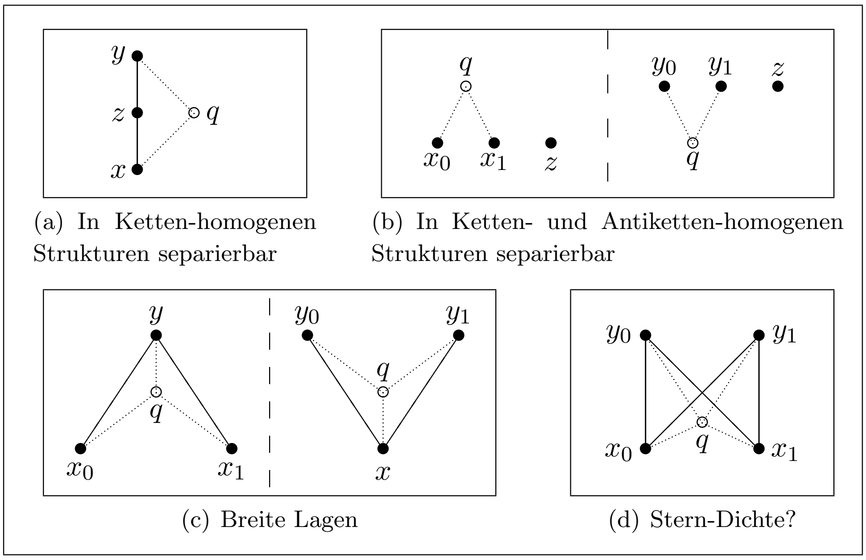
f) Es ist $\mu(P) = 4$ *und* $(P, \leq)$ *ist nicht* $(2, 2, 0)$*-separiert.*

3.) Falls $(P, \leq)$ *Ketten- und Antiketten-homogen ist, so gilt eine der folgenden Aussagen:*

a) Es ist $\mu(P) = 3$ *und* $(P, \leq)$ *ist nicht* $(1, 2, 0)$*-separiert.*

b) Es ist $\mu(P) = 3$ *und* $(P, \leq)$ *ist nicht* $(2, 1, 0)$*-separiert.*

c) Es ist $\mu(P) = 4$ *und* $(P, \leq)$ *ist nicht* $(2, 2, 0)$*-separiert.*



(a) In Ketten-homogenen Strukturen separierbar
(b) In Ketten- und Antiketten-homogenen Strukturen separierbar
(c) Breite Lagen
(d) Stern-Dichte?

Abbildung 2.2: Die signifikanten Lagen – sind sie separierbar, so ist $(P, \leq)$ homogen.

2.3.2 Definition Seien $(P, \leq)$ und $(P', \leq')$ partielle Ordnungen. Wir sagen von zwei ***Lagen*** $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ und $(X', Y', Z') \in \mathbb{L}(P')$ sie seien ***isomorph***, wenn sie dieselbe Konfiguration besitzen und die zugehörigen partiellen Ordnungen $(X \cup Y \cup Z, \leq)$ und $(X' \cup Y' \cup Z', \leq')$ isomorph sind.

2.3.3 Definition Eine ***Lage*** nennen wir ***signifikant***, wenn sie zu einer der folgenden Lagen isomorph ist:

1.) $(\{x_0\}, \{y_0\}, \{z_0\})$ mit $x_0 \leq z_0 \leq y_0$

2.) $(\{x_0, x_1\}, \emptyset, \{z_0\})$ oder $(\emptyset, \{y_0, y_1\}, \{z_0\})$ wobei $\{x_0, x_1\} \cup \{z_0\}$ und $\{y_0, y_1\} \cup \{z_0\}$ dreielementige Antiketten sind

3.) $(\{x_0, x_1\}, \{y_0\}, \emptyset)$ oder $(\{x_0\}, \{y_0, y_1\}, \emptyset)$ mit $x_0 \neq x_1$ und $y_0 \neq y_1$

4.) $(\{x_0, x_1\}, \{y_0, y_1\}, \emptyset)$

Eine ***Konfiguration*** nennen wir ***signifikant***, wenn sie die Konfiguration einer signifikanten Lage ist.

2.3.4 Bemerkung *Die signifikanten Konfigurationen sind somit folgende:*

$$(2,1,0) \qquad (1,2,0) \qquad (2,2,0) \qquad (1,1,1) \qquad (2,0,1) \qquad (0,2,1)$$

Als Korollar zu Proposition 2.3.1 erhalten wir folgendes Homogenitäts-Kriterium:

2.3.5 Satz *(Fortsetzbarkeit 5)* *Eine abzählbare partielle Ordnung mit Pentagon ist genau dann homogen, wenn sie jede signifikante Lage separiert.*

Eine partielle Ordnung ist genau dann Stern-dicht, wenn sie $(2,2,0)$-separiert ist. Das führt uns zu folgender Begriffsbildung:

2.3.6 Definition *[Siehe auch Abbildung 1.5.]* Eine 4-elementige partielle Ordnung $(S, \leq)$ nennen wir einen ***Stern***, falls $|\operatorname{Max}(S)| = 2 = |\operatorname{Min}(S)|$ und $\operatorname{Min}(S) < \operatorname{Max}(S)$ gilt. Eine Ein-Punkt-Erweiterung $(S \cup \{q\}, \leq)$ eines Sterns $(S, \leq)$ nennen wir einen ***gefüllten Stern***, falls $\operatorname{Min}(S) < q < \operatorname{Max}(S)$ gilt.

Beweis der Proposition Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung, die ein Pentagon enthält und nicht homogen ist. Aus der Nicht-Homogenität folgt mit Satz 2.2.13, dass $(P, \leq)$ eine unseparierte Lage einer der Konfigurationen $(1,1,2)$ oder (x,y,z) mit $x \leq 2$, $y \leq 2$ und $z \leq 1$ enthält. Somit existiert $\mu(P)$ und wir sehen direkt (oder mit [AlBu], Korollar 2.3), dass $\mu(P) \leq 5$ ist. Wir setzen $\mu := \mu(P)$.

Wir zeigen, dass sogar $\mu \leq 4$ gilt.

Die Lage $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ wird von jedem $q \in P$ separiert. Da $(P, \leq)$ abzählbar – und damit insbesondere nicht leer – ist, erhalten wir, dass $\mu \geq 1$ ist.

Falls $\mu = 1$ ist, so ist $(P, \leq)$ nicht 1-transitiv; falls $\mu = 2$ ist, so ist $(P, \leq)$ nicht 2-homogen. (Dabei ist zu beachten, dass $(P, \leq)$ ein Pentagon enthält!)

Falls $(P, \leq)$ 2-homogen ist – insbesondere falls $(P, \leq)$ Ketten- und Antiketten-homogen ist –, erhalten wir somit, dass $\mu \geq 3$ gilt.

Sei nun also $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ eine unseparierte Lage der Konfiguration (x, y, z) mit $x + y + z = \mu \geq 3$. Wir zeigen:

1.) $\mu \leq 4$.

2.) Falls $\mu = 4$ ist, so enthält $(P, \leq)$ auch eine unseparierte Lage der Konfiguration $(2, 2, 0)$ – d.h., $(P, \leq)$ ist nicht Stern-dicht.

3.) Falls $\mu = 3$ ist, so enthält $(P, \leq)$ auch eine unseparierte Lage (X, Y, Z) mit einer der Konfigurationen $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$ oder $(2, 1, 0)$, wobei $X \cup Y \cup Z$ entweder eine Kette oder eine Antikette ist.

4.) Falls $\mu = 3$ und $(P, \leq)$ Ketten- und Antiketten-homogen ist, so enthält $(P, \leq)$ auch eine unseparierte Lage mit einer der Konfigurationen $(1, 2, 0)$ oder $(2, 1, 0)$.

Dabei machen wir häufig von der Tatsache Gebrauch, dass alle Lagen $(X', Y', Z') \in \mathbb{L}(P)$ mit $|X'| + |Y'| + |Z'| < \mu$ separiert sind.

Zunächst sehen wir:

Es ist $x \leq 2$ und $y \leq 2$.

Denn nehmen wir o.B.d.A. an, es ist $x \geq 3$. Seien $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$. Dann enthält P Elemente q_0, q_1 mit

$$X - \{x_0\} < q_0 < Y \quad \& \quad q_0 \parallel Z \ ,$$
$$X - \{x_1\} < q_1 < Y \quad \& \quad q_1 \parallel Z \ .$$

Wegen $|\{q_0, q_1\} \cup Y \cup Z| < \mu$ gibt es ein $q \in P$ mit

$$\{q_0, q_1\} < q < Y \quad \& \quad q \parallel Z \ .$$

Insbesondere ist

$$X < q < Y \quad \& \quad q \parallel Z \ ,$$

ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass (X, Y, Z) unsepariert ist.

Z enthält keine dreielementigen Ketten.

Angenommen, Z enthält doch eine dreielementige Kette. Dann ist

$$|\operatorname{Max}(Z) \cup \operatorname{Min}(Z)| < z \ ;$$

damit enthält P ein Element q mit $X < q < Y$ und $q \parallel \operatorname{Max}(Z) \cup \operatorname{Min}(Z)$. Offenbar ist dann aber bereits $q \parallel Z$ – im Widerspruch zur Voraussetzung, dass (X, Y, Z) unsepariert ist.

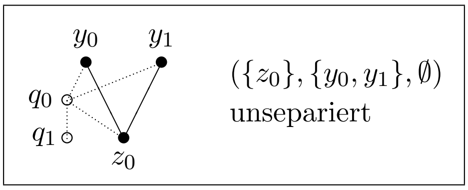
Falls $z = 0$ ist, erhalten wir mit $x \leq 2$, $y \leq 2$ und $\mu \geq 3$, dass (x, y, z) eine der Konfigurationen $(1, 2, 0)$, $(2, 1, 0)$ oder $(2, 2, 0)$ ist – und wir müssen weiter nichts zeigen. Sei also $z \geq 1$.

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle: Z ist einelementig, Z enthält echte Ketten, Z ist eine echte Antikette.

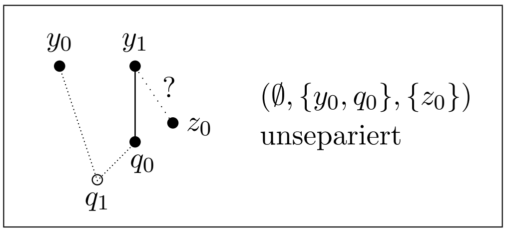
1.) *Betrachten wir zuerst den Fall $z = 1$.*

a) *Sei* $x = 0$.
Wegen $\mu \geq 3$ und $y \leq 2$ ist somit $y = 2$ und $\mu = 3$. Sei $Y = \{y_0, y_1\}$.

(i) *Sei* $Y > Z$. Dann ist bereits $(Z, Y, \emptyset)$ unsepariert: Denn angenommen, es gibt ein $q_0 \in P$ mit $Z < q_0 < Y$, dann gibt es auch ein $q_1 \in P$ mit $q_1 < q_0$ und $q_1 \parallel Z$, da $(P, \leq)$ $(0,1,1)$-separiert ist. q_1 separiert aber auch $(\emptyset, Y, Z)$ – im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist $(P, \leq)$ nicht $(1,2,0)$-separiert.



(ii) *Sei* $y_0 \parallel Z$. Wegen $\mu > 2$ enthält P ein Element q_0 mit $q_0 < y_1$ und $q_0 \parallel Z$. Da q_0 nach Voraussetzung nicht $(\emptyset, Y, Z)$ separiert, ist $q_0 \parallel y_0$. Angenommen, es gibt ein $q_1 \in P$, das $(\emptyset, \{y_0, q_0\}, Z)$ separiert. Dann separiert q_1 auch $(X, Y, Z$, womit wir einen Widerspruch erhalten.
Also ist $(P, \leq)$ nicht $(0,2,1)$-separiert und es gibt in $(P, \leq)$ eine unseparierte Lage $(\emptyset, \{y_0, q_0\}, \{z_0\})$, wobei $\{y_0, q_0, z_0\}$ eine dreielementige Antikette ist. Falls $(P, \leq)$ Ketten- und Antiketten-homogen ist, so kann dieser Fall nach Bemerkung 2.2.17.1 nicht auftreten.



b) *Sei* $y = 0$.
Wegen $\mu \geq 3$ und $x \leq 2$ ist somit $x = 2$ und $\mu = 3$.

(i) *Sei* $X < Z$. Analog zu Fall 1.a erhalten wir: $(P, \leq)$ ist nicht $(2,1,0)$-separiert.

(ii) *Sei* $x_0 \parallel Z$. Analog zu Fall 1.a erhalten wir: $(P, \leq)$ ist nicht $(2,0,1)$-separiert und es gibt in $(P, \leq)$ eine unseparierte Lage $(\{x_0, q\}, \emptyset, \{z_0\})$, wobei $\{x_0, q, z_0\}$ eine dreielementige Antikette ist. Insbesondere ist $(P, \leq)$ nicht Ketten- und Antiketten-homogen.

c) *Sei* $x = y = 1$ *und damit* $\mu = 3$.

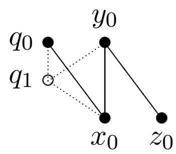
(i) *Falls* $X \parallel Z$ *und* $Y \parallel Z$ *ist,* so gibt es ein $q \in P$ mit $X < q < Y$. Für jedes solche Element q ist bereits $q \parallel Z$. Also ist (X, Y, Z) separiert – im Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) *Falls* $X < Z < Y$ *ist,* so ist $(P, \leq)$ nicht $(1,1,1)$-separiert und (X, Y, Z) selbst ist eine unseparierte Lage der Konfiguration $(1,1,1)$.
Falls $(P, \leq)$ Ketten-homogen ist, so kann nach Bemerkung 2.2.17.2 dieser Fall nicht auftreten.

(iii) *Falls* $X \parallel Z < Y$ *ist,* so existiert ein $q_0 \in P$ mit $X < q_0 \parallel Z$. Damit ist $q_0 \not> Y$. Da q_0 nach Voraussetzung nicht (X, Y, Z) separiert, ist $q_0 \parallel Y$. Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(1,2,0)$-separiert. Dann existiert ein $q_1 \in P$ mit

$$X < q_1 < \{q_0\} \cup Y .$$

Wegen $X \cup \{q_0\} \parallel Z$ ist $q_1 \parallel Z$. Somit separiert q_1 die Lage (X, Y, Z) – ein Widerspruch.
Also ist $(P, \leq)$ nicht $(1,2,0)$-separiert.



$(\{x_0\}, \{q_0, y_0\}, \emptyset)$
unsepariert

(iv) *Falls* $X < Z \parallel Y$ *ist,* sehen wir analog: $(P, \leq)$ ist nicht $(2,1,0)$-separiert.

d) *Sei* $x = 2$ *und* $y = 2$ *und damit* $\mu = 5$.
Dann existiert ein $q_0 \in P$ mit $X < q_0 < Y$. Da q_0 nach Voraussetzung nicht (X, Y, Z) separiert, ist $q_0 \not\parallel Z$, o.B.d.A. $q_0 < Z$. Wegen $|\{q_0\} \cup Y \cup Z| < \mu$ existiert ein $q_1 \in P$ mit

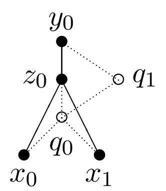
$$q_0 < q_1 < Y \quad \& \quad q_1 \parallel Z .$$

Nun separiert q_1 jedoch auch (X, Y, Z) – ein Widerspruch.
Also kann dieser Fall nicht auftreten.

e) *Sei* $x = 2$ *und* $y = 1$ *und damit* $\mu = 4$.

(i) *Sei* $X < Z$.

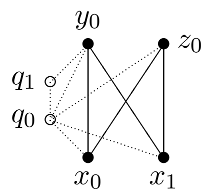
I. *Sei* $Z < Y$. Dann existiert ein $q_0 \in P$ mit $X < q_0 < Z$. Außerdem existiert dann ein $q_1 \in P$ mit $q_0 < q_1 < Y$ und $q_1 \parallel Z$ (beachte: $|Z| = |Y| = 1$). Offensichtlich separiert q_1 auch (X, Y, Z) – ein Widerspruch.



↯
q_1 separiert
(X, Y, Z)

II. *Sei* $Z \parallel Y$. Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(2,2,0)$-separiert. Dann gibt es ein $q_0 \in P$ mit $X < q_0 < Y \cup Z$. Wegen $\mu = 4 > |\{q_0\} \cup Y \cup Z|$ gibt es ein

$q_1 \in P$ mit $q_0 < q_1 < Y$ und $q_1 \parallel Z$. Dieses q_1 separiert (X, Y, Z) – ein Widerspruch.
Folglich ist $(P, \leq)$ nicht $(2, 2, 0)$-separiert, also nicht Stern-dicht.

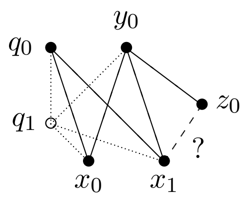


$(\{x_0, x_1\}, \{y_0, z_0\}, \emptyset\})$
unsepariert

(ii) *Sei $X \not< Z$.* Damit ist $Z < Y$, da andernfalls jedes $q \in P$ mit $X < q < Y$ bereits (X, Y, Z) separiert. Sei $X = \{x_0, x_1\}$ und $x_0 \parallel Z$.
Dann existiert ein $q_0 \in P$ mit $X < q_0 \parallel Z$. Damit ist $q_0 \not> Y$. Da q_0 nicht (X, Y, Z) separiert, ist $q_0 \parallel Y$. Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(2, 2, 0)$-separiert. Dann gibt es ein $q_1 \in P$ mit

$$X < q_1 < \{q_0\} \cup Y \ .$$

Wegen $\{x_0, q_0\} \parallel Z$ ist auch $q_1 \parallel Z$, d.h., q_1 separiert (X, Y, Z) – ein Widerspruch.
Folglich ist $(P, \leq)$ nicht $(2, 2, 0)$-separiert, also nicht Stern-dicht.



$(\{x_0, x_1\}, \{q_0, y_0\}, \emptyset)$
unsepariert

f) *Sei $x = 1$ und $y = 2$ und damit $\mu = 4$.*
Analog zu Fall 1.e sehen wir: $(P, \leq)$ ist nicht $(2, 2, 0)$-separiert, also nicht Stern-dicht.

2.) *Betrachten wir nun den Fall, dass Z eine zweielementige Kette enthält.*

Seien also $z_0, z_1 \in Z$ mit $z_0 < z_1$. (Beachte: Es ist $x \leq 2$ und $y \leq 2$.)

Angenommen, es ist $z \geq 3$. Dann gibt es $t, b \in P$ mit

$$\begin{aligned} Z - \{z_0\} < t \parallel Y \qquad & \text{und damit auch} \quad t > Z \ ; \\ X \parallel b < Z - \{z_1\} \qquad & \text{und damit auch} \quad b < Z \ . \end{aligned}$$

Nun ist $|X \cup Y \cup \{b, t\}| < \mu$, so dass ein $q \in P$ existiert mit

$$X < q < Y \quad \& \quad q \parallel \{b, t\} \quad \text{und damit } q \parallel Z \ .$$

Somit separiert q auch (X, Y, Z) – ein Widerspruch.

Es ist also $z = 2$ und damit $Z = \{z_0, z_1\}$. Wegen $\mu \geq 3$ ist nicht $x = y = 0$.

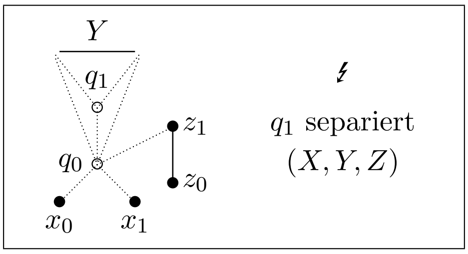
a) *Sei* $x = 2$. Nun gibt es ein $q_0 \in P$ mit

$$X < q_0 < Y \quad \& \quad q_0 \parallel Z - \{z_1\} \ .$$

Offensichtlich ist $q_0 \not> z_1 > z_0$. Da q_0 nicht (X, Y, Z) separiert, ist also $q_0 < z_1$. Dann ist $|\{q_0\} \cup Y \cup Z| < \mu$ und $(\{q_0\}, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$, so dass es ein $q_1 \in P$ gibt mit

$$q_0 < q_1 < Y \quad \& \quad q_1 \parallel Z \ .$$

Dieses q_1 separiert dann auch (X, Y, Z) – ein Widerspruch.



b) Ebenso erhalten wir aus $y = 2$ einen Widerspruch.

c) *Sei* $x = y = 1$ *und somit* $\mu = 4$. Nun gibt es $q_0, q_1 \in P$ mit

$$X < q_0 < Y \quad \& \quad q_0 \parallel z_0 \ ;$$
$$q_0 < q_1 < Y \quad \& \quad q_1 \parallel z_1 \ .$$

Wieder sehen wir:

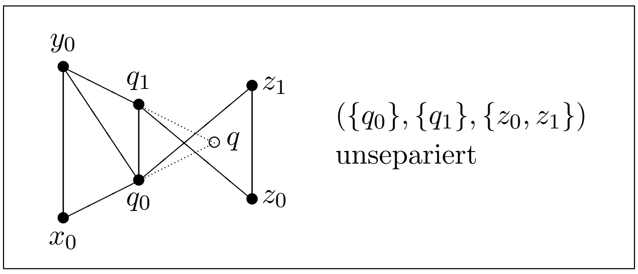
$$q_0 < z_1 \quad \& \quad q_1 > z_0$$

Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(1, 1, 2)$-separiert. Dann gibt es ein $q \in P$ mit

$$q_0 < q < q_1 \quad \& \quad q \parallel \{z_0, z_1\} \ .$$

Wegen $x_0 < q_0 < q < q_1 < y_0$ und $q \parallel Z$ separiert q die Lage (X, Y, Z) – ein Widerspruch.
Also ist $(P, \leq)$ nicht $(1, 1, 2)$-separiert und besitzt eine unseparierte Lage

$$(\{q_0\}, \{q_1\}, \{z_0, z_1\}) \quad \text{mit} \quad z_0 < z_1 \quad \& \quad z_0 \parallel q_0 < z_1 \quad \& \quad z_0 < q_1 \parallel z_1 \ .$$



Wir zeigen, dass $(P, \leq)$ dann auch nicht $(2,2,0)$-separiert ist: Es existieren $q_2, q_3 \in P$ mit

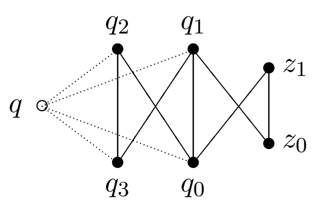
$$q_0 < q_2 \parallel Z \quad \text{und damit } q_2 \parallel q_1 \ ;$$
$$q_1 > q_3 \parallel Z \quad \text{und damit } q_3 \parallel q_0 \quad \& \quad q_2 \not< q_3 \ .$$

Unterscheiden wir nun folgende Fälle:

(i) *Sei* $q_3 < q_2$. Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(2,2,0)$-separiert. Dann gibt es ein $q \in P$ mit

$$\{q_0, q_3\} < q < \{q_1, q_2\} \ .$$

Wegen $\{q_2, q_3\} \parallel Z$ ist dann auch $q \parallel Z$ und somit separiert q die Lage $(\{q_0\}, \{q_1\}, \{z_0, z_1\})$ – ein Widerspruch.
Also ist $(P, \leq)$ nicht $(2,2,0)$-separiert.



$\{q_0, q_3\}, \{q_1, q_2\}, \emptyset)$
unsepariert

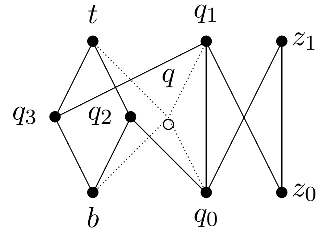
(ii) *Sei* $q_2 \parallel q_3$. Dann existieren $t, b \in P$ mit

$$\{q_2, q_3\} < t \parallel z_0 \quad \text{und damit } t \parallel \{z_1, q_1\} \quad \& \quad t > q_0 \ ;$$
$$\{q_2, q_3\} > b \parallel z_1 \quad \text{und damit } b \parallel \{z_0, q_0\} \quad \& \quad b < q_1 \ .$$

Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(2,2,0)$-separiert. Dann gibt es ein $q \in P$ mit

$$\{b, q_0\} < q < \{t, q_1\} \ .$$

Wegen $\{b, t\} \parallel Z$ ist dann auch $q \parallel Z$ und somit separiert q die Lage $(\{q_0\}, \{q_1\}, \{z_0, z_1\})$ – ein Widerspruch.
Also ist $(P, \leq)$ nicht $(2,2,0)$-separiert.



$(\{q_0, b\}, \{q_1, t\}, \emptyset)$
unsepariert

$(P, \leq)$ ist somit nicht $(2,2,0)$-separiert, d.h. nicht Stern-dicht.

d) *Sei* $x = 0$ *und* $y = 1$ *und somit* $\mu = 3$. Sei $Y = \{y_0\}$.

(i) *Sei* $y_0 \parallel Z$. Dann gibt es ein $q \in P$ mit $q < y_0$ und $q \parallel z_1$. Wegen $y_0 \not> z_0$ ist auch $q \not> z_0$. Und wegen $z_1 \not> q$ ist auch $z_0 \not> q$. Also ist $q \parallel z_0$. Somit separiert q die Lage $(\emptyset, Y, Z)$ – ein Widerspruch.

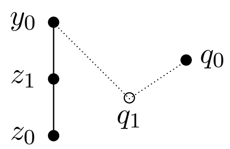
(ii) *Sei* $y_0 > Z$. Nach Bemerkung 2.2.17.2 ist $(P, \leq)$ dann nicht Ketten-homogen. Da $(P, \leq)$ 2-homogen ist, gibt es (siehe [DrMcP], Theorem 2.1) ein $q_0 \in P$ mit

$$q_0 \parallel \{y_0, z_0, z_1\} .$$

Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(0, 2, 1)$-separiert. Dann gibt es ein $q_1 \in P$ mit

$$z_1 \parallel q_1 < \{y_0, q_0\} .$$

Damit ist auch $q_1 \parallel z_0$. Somit separiert q_1 doch $(\emptyset, Y, Z)$ – ein Widerspruch. Also ist $(P, \leq)$ nicht $(0, 2, 1)$-separiert und wir befinden uns in Fall 1.

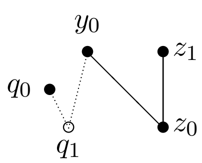


$(\emptyset, \{y_0, q_0\}, \{z_1\})$
unsepariert
$\to$ Fall 1

(iii) *Sei* $z_1 \parallel y_0 > z_0$. Da $(P, \leq)$ 2-homogen ist, gibt es (siehe [DrMcP], Theorem 2.1) ein $q_0 \in P$ mit $q_0 \parallel \{y_0, z_0, z_1\}$. Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(0, 2, 1)$-separiert oder Antiketten-homogen. Dann gibt es (bei Antiketten-Homogenität: gemäß Bemerkung 2.2.17.1) ein $q_1 \in P$ mit

$$z_1 \parallel q_1 < \{y_0, q_0\} .$$

Dann ist $q_1 \parallel z_0$. Somit separiert q_1 doch $(\emptyset, Y, Z)$ – ein Widerspruch. Folglich ist $(P, \leq)$ weder Antiketten-homogen noch $(0, 2, 1)$-separiert – und wegen letzterem befinden wir uns in Fall 1.



$(\emptyset, \{q_0, y_0\}, \{z_1\})$
unsepariert
$\to$ Fall 1

e) *Sei* $x = 1$ *und* $y = 0$ *und somit* $\mu = 3$.

Analog zu Fall 2.d.iii erhalten wir: $(P, \leq)$ ist weder $(2, 0, 1)$-separiert noch Ketten- und Antiketten-homogen – und wir befinden uns in Fall 1.

Falls Z eine zweielementige Kette enthält sehen wir also, dass $(P, \leq)$ nicht Sterndicht ist oder wir uns in Fall 1 befinden

3.) *Sei nun Z eine echte Antikette.*

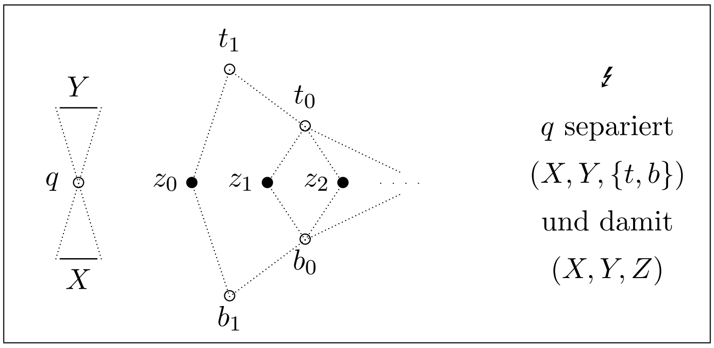
Angenommen, es ist $z \geq 3$ und $z_0 \in Z$. Dann gibt es $t', b' \in P$ mit

$$Z - \{z_0\} < t' \parallel Y \quad \& \quad X \parallel b' < Z - \{z_0\} .$$

Wegen $|X \cup Y \cup \{b', z_0\}| = |X \cup Y \cup \{t', z_0\}| < \mu$ gibt es ebenso $t, b \in P$ mit

$$\{t', z_0\} < t \parallel Y \quad \& \quad X \parallel b < \{b', z_0\} .$$

Nun ist $|X \cup Y \cup \{b, t\}| < \mu$, so dass ein $q \in P$ existiert mit $X < q < Y$ und $q \parallel \{b, t\}$ und damit $q \parallel Z$. Somit separiert q auch (X, Y, Z) – ein Widerspruch.



Als Antikette ist Z höchstens zweielementig

Also ist $z = 2$. Sei also $Z = \{z_0, z_1\}$. Aus $x \leq 2$ und $y \leq 2$ zusammen mit $\mu \geq 3$ folgt, dass nicht $x = y = 0$ gilt.

a) *Sei $x \neq 0 \neq y$.*
Dann existieren $t \in P$ mit $Z < t \parallel Y$ und $b \in P$ mit $X \parallel b < Z$. Jedes Element, das $(X, Y, \{t, b\})$ separiert, separiert auch (X, Y, Z). Mit (X, Y, Z) ist somit auch $(X, Y, \{t, b\})$ unsepariert. Wir befinden uns damit in Fall 2.

b) *Sei nun $x = 0$ und $y \neq 0$.*

(i) *Sei $Z \parallel Y$.* Mit Bemerkung 2.2.17.1 ist $(P, \leq)$ dann nicht Ketten- und Antiketten-homogen. Nun gibt es $q_0, q_1 \in P$ mit

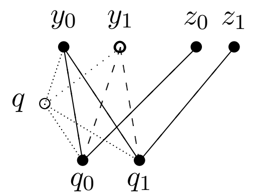
$$z_1 \parallel q_0 < Y \quad \& \quad z_0 \parallel q_1 < Y .$$

Da q_0 und q_1 nicht (X, Y, Z) separieren, erhalten wir zudem:

$$q_0 < z_0 \quad \& \quad q_1 < z_1 .$$

Die Lage $(\{q_0, q_1\}, Y, \emptyset)$ ist unsepariert, denn andernfalls gibt es ein $q \in P$ mit $\{q_0, q_1\} < q < Y$. Wegen $Y \parallel Z$ und $q_0 \parallel z_1$ und $q_1 \parallel z_0$ ist damit $q \parallel Z$, d.h., q separiert (X, Y, Z) – ein Widerspruch.
Daraus folgt:

I. *Falls $y = 1$ ist,* so ist $(P, \leq)$ nicht $(2, 1, 0)$-separiert.



$(\{q_0, q_1\}, Y, \emptyset)$
unsepariert

II. *Falls $y = 2$ ist,* so ist $(P, \leq)$ nicht $(2, 2, 0)$-separiert, also nicht Sterndicht.

(ii) *Sei $y = 1$ und $Z < Y$.*

I. Falls $(P, \leq)$ $(2, 1, 0)$-separiert ist, ist weiter nichts zu zeigen.

II. Sei $(P, \leq)$ nun $(2, 1, 0)$-separiert. Dann gibt es ein $t \in P$ mit $Z < t < Y$. Des Weiteren gibt es ein $b \in P$ mit $b < Z$. Jedes $q \in P$ mit $\{t, b\} \parallel q < Y$ separiert auch (X, Y, Z). Mit (X, Y, Z) ist somit auch $(\emptyset, Y, \{t, b\})$ unsepariert. Wir befinden uns dann in der Situation von Fall 2.

(iii) *Sei $y = 1$ und $z_1 \parallel Y > z_0$.*

I. Falls $(Z, \emptyset, Y)$ separiert ist, gibt es ein $t \in P$ mit $Z < t \parallel Y$ – und natürlich existiert ein $b \in P$ mit $b < Z$. Jedes Element, das $(\emptyset, Y, \{b, t\})$ separiert, separiert auch (X, Y, Z). Mit (X, Y, Z) ist somit auch $(\emptyset, Y, \{b, t\})$ unsepariert. Damit sind wir wieder im Fall 2.

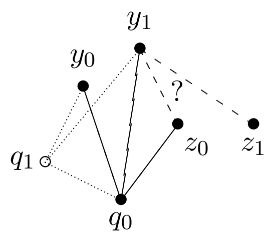
II. Andernfalls ist $(P, \leq)$ nicht $(2, 0, 1)$-separiert. Damit befinden wir uns in Fall 1.

(iv) *Sei $y = 2$ und $Y = \{y_0, y_1\}$.*

I. *Sei $y_0 \parallel Z$.* Dann existiert ein $q_0 \in P$ mit $z_1 \parallel q_0 < Y$. Es ist $q_0 \not> z_0$, da sonst auch $y_0 > z_0$ ist; und es ist $q_0 \nparallel z_0$, da sonst q_0 auch (X, Y, Z) separiert. Also ist $q_0 < z_0$.
Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(1, 2, 1)$-separiert. Dann gibt es ein $q_1 \in P$ mit

$$q_0 < q_1 < Y \quad \& \quad q_1 \parallel z_0 \; .$$

Wegen $\{q_0, y_0\} \parallel z_1$ ist dann $q_1 \parallel z_1$. Somit separiert q_1 auch (X, Y, Z) – ein Widerspruch.
Also ist $(P, \leq)$ nicht $(1, 2, 1)$-separiert und wir befinden uns in Fall 1.



$(\{q_0\}, \{y_0, y_1\}, \{z_0\})$
unsepariert
$\to$ Fall 1

II. *Sei $y_0 > Z$.* Dann gibt es ein $t \in P$ mit $Z < t < y_0$ (wegen $\mu = 4$) und ein $b \in P$ mit $b < Z$. Jedes $q \in P$, das $(\emptyset, Y, \{b, t\})$ separiert,

separiert auch (X, Y, Z). Mit (X, Y, Z) ist auch $(\emptyset, Y, \{b, t\})$ in $(P, \leq)$ unsepariert, so dass wir wie im Fall 2.b einen Widerspruch erhalten.

III. *Sei* $z_0 < Y$. Dann gibt es ein $q_0 \in P$ mit $z_0 < q_0 < Y$. Offenbar ist $q_0 \not< z_1$. Darum ist $(\emptyset, \{q_0\}, Z)$ eine Lage. Wegen $\mu = 4$ existiert ein Element $q_1 \in P$, das diese separiert. Allerdings separiert q_1 auch die Lage (X, Y, Z) – ein Widerspruch. Also tritt dieser Fall nicht auf.

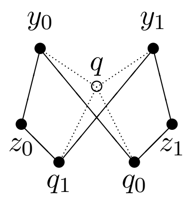
IV. *Sei schließlich* $z_1 \parallel y_0 > z_0$ *und* $z_0 \parallel y_1 > z_1$. Wegen $\mu = 4$ existieren $q_0, q_1 \in P$ mit

$$\{q_0, q_1\} < Y \quad \& \quad q_0 \parallel z_0 \quad \& \quad q_1 \parallel z_1 \; .$$

Es ist $q_0 \not> z_1$, da sonst auch $y_0 > z_1$ wäre. Analog sehen wir, dass $q_1 \not> z_0$ ist. Da weder q_0 noch q_1 die Lage (X, Y, Z) separieren, gilt zudem $q_0 \nparallel z_1$ und $q_1 \nparallel z_0$. Daraus erhalten wir

$$q_0 < z_1 \quad \& \quad q_1 < z_0 \quad \& \quad q_0 \parallel q_1 \; .$$

Angenommen, $(P, \leq)$ ist $(2, 2, 0)$-separiert. Dann gibt es ein $q \in P$ mit $\{q_0, q_1\} < q < Y$. Für jedes $z \in Z$ ist $\{q_0, q_1\} \not< z \not< Y$. Somit ist $q \parallel Z$. Nun separiert q aber auch die Lage (X, Y, Z) – ein Widerspruch. Folglich ist $(P, \leq)$ nicht $(2, 2, 0)$-separiert, also nicht Stern-dicht.



$(\{q_0, q_1\}, \{y_0, y_1\}, \emptyset)$
unsepariert

Zusammenfassend erhalten wir im *Fall* $x = 0 \neq y$, dass mindestens eine der folgenden Aussagen gilt:

(i) $(P, \leq)$ ist nicht $(2, 2, 0)$-separiert und $\mu = 4$.
(ii) $(P, \leq)$ ist nicht $(2, 1, 0)$-separiert und $\mu = 3$.
(iii) Wir befinden uns in Fall 1 oder in Fall 2.

c) *Im Fall* $x \neq 0$ *und* $y = 0$ sehen wir analog, dass mindestens eine der folgenden Aussagen gilt:

(i) $(P, \leq)$ ist nicht $(2, 2, 0)$-separiert und $\mu = 4$.
(ii) $(P, \leq)$ ist nicht $(1, 2, 0)$-separiert und $\mu = 3$.
(iii) Wir befinden uns in Fall 1 oder in Fall 2.

Falls Z eine echte Antikette ist, erhalten somit, dass $(P, \leq)$ nicht Stern-dicht oder nicht $(2, 1, 0)$-separiert oder nicht $(1, 2, 0)$-separiert ist oder wir uns in Fall 1 oder in Fall 2 befinden.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass eine der Aussagen 2.a–2.f der Proposition gilt.

In jedem Fall sehen wir, dass $\mu \leq 4$ ist. □

Proposition 2.3.1 ist ein gutes Hilfsmittel, um partielle Ordnungen auf Homogenität zu prüfen.

2.3.7 Korollar *Sei* $(P, \leq)$ *eine abzählbare partielle Ordnung mit Pentagon. Falls* $(P, \leq)$ *Ketten- und Antiketten-homogen und* $(2, 2, 0)$*-separiert ist, so ist* $(P, \leq)$ *auch* $(1, 2, 0)$*- und* $(2, 1, 0)$*-separiert und (mit Proposition 2.3.1) damit homogen.*

Beweis Sei also $(P, \leq)$ eine abzählbare Ketten- und Antiketten-homogene Stern-dichte partielle Ordnung mit Pentagon. Wir betrachten mit

$$(\{x_0, x_1\}, \{y_0\}, \emptyset) \in \mathbb{L}(P)$$

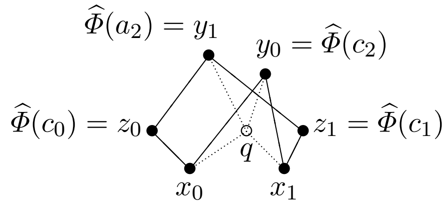
o.B.d.A. eine beliebige Lage der Konfiguration $(2, 1, 0)$.

Wegen $\mu(P) > 2$ gibt es Elemente $z_0, z_1 \in P$ mit

$$\begin{aligned} x_0 < z_0 \parallel y_0 \text{ , insbesondere } z_0 \not< x_1 \quad \& \\ x_1 < z_1 \parallel y_0 \text{ , insbesondere } z_1 \not< x_0 \text{ .} \end{aligned}$$

Falls $z_0 > x_1$ oder $z_1 > x_0$ ist, so erhalten wir aus der Stern-Dichte die Existenz eines auch $(\{x_0, x_1\}, \{y_0\}, \emptyset)$ separierenden Elementes – ein Widerspruch. Also ist

$$z_0 \parallel x_1 \quad \& \quad z_1 \parallel x_0 \quad \& \quad z_0 \parallel z_1 \text{ .}$$



$(\{x_0, x_1\}, \{y_0\}, \emptyset)$ von q separiert

Als Ketten-homogene partielle Ordnung enthält $(P, \leq)$ nach Bemerkung 1.3.13 mit einem Pentagon immer auch eine unendliche Dreiecksstruktur. Sei o.B.d.A. Δ_ω in $(P, \leq)$ enthalten. Da $(P, \leq)$ Antiketten-homogen ist, können wir

$$\Phi := \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ z_0 & z_1 & y_0 \end{pmatrix}$$

zu einem Automorphismus $\widehat{\Phi}$ auf ganz P fortsetzen. Wir erhalten

$$y_0 \parallel \widehat{\Phi}(a_2) > \{z_0, z_1\}$$

und damit

$$y_0 \parallel \widehat{\Phi}(a_2) > \{x_0, x_1\} \ .$$

Wir setzen $y_1 := \widehat{\Phi}(a_2)$. Dann ist

$$(\{x_0, x_1, y_0, y_1\}, \leq)$$

ein Stern. $(P, \leq)$ ist nach Voraussetzung $(2,2,0)$-separiert, also existiert ein Element $q \in P$ mit

$$\{x_0, x_1\} < q < \{y_0, y_1\} \ .$$

Insbesondere separiert q auch die Lage $(\{x_0, x_1\}, \{y_0\}, \emptyset)$.

Analog sehen wir, das in $(P, \leq)$ jede Lage der Konfiguration $(1,2,0)$ separiert ist. □

2.3.8 Bemerkung *Wie wir in Kapitel 5 in den Abschnitten 5.6 und 5.8 sehen werden, gibt es umgekehrt jedoch abzählbare Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnungen mit Pentagon, die* $(1,2,0)$*- und* $(2,1,0)$*-separiert, nicht jedoch* $(2,2,0)$*-separiert sind. Beispiele sind die* $\Diamond$*-separativ konstruierten partiellen Ordnungen aus Bemerkung 5.6.1. Diese partiellen Ordnungen sind mit Korollar 5.8.4 Kreuz-homogen, nicht jedoch homogen.*

Aus Proposition 2.3.1 und Korollar 2.3.7 ergibt sich, Satz 2.2.1 ergänzend, direkt folgende Aussage:

2.3.9 Satz *Sei* $(P, \leq)$ *eine abzählbare partielle Ordnung, die ein Pentagon enthält und Stern-dicht ist. Dann sind die drei folgenden Aussagen äquivalent:*

1.) $(P, \leq)$ *ist Ketten- und Antiketten-homogen.*

2.) $(P, \leq)$ *ist homogen.*

3.) $(P, \leq)$ *ist* 3*-homogen.*

Beweis Satz 2.2.1 beinhaltet bereits die Äquivalenz von 2 und 3. Dass Ketten- und Antiketten-Homogenität aus Homogenität folgt, ist trivial. Zu zeigen ist nur, dass umgekehrt unter den Voraussetzungen des Satzes Homogenität aus Ketten- und Antiketten-Homogenität folgt.

Jede Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnung mit Pentagon, die Stern-dicht (also $(2,2,0)$-separiert) ist, ist mit Korollar 2.3.7 bereits $(2,1,0)$- und $(1,2,0)$-separiert. Nach Proposition 2.3.1.3 ist $(P, \leq)$ damit homogen. □

2.4 Geeignete Kandidaten

In Kapitel 1 haben wir begründet, warum wir uns für KA-Homogenität interessieren: Wir suchen eine Eigenschaft partieller Ordnungen, die der Homogenität nahekommt, ohne sie jedoch zu implizieren.

Den Ansatz, die *Kardinalität* der Definitionsbereiche der partiellen Isomorphismen einzuschränken, haben unter anderen schon Droste und Macpherson mit dem Begriff der n-Homogenität verfolgt. Wir wollen hingegen die *Struktur* der Definitionsbereiche einschränken. Eine naheliegende Möglichkeit besteht darin, nur die Fortsetzbarkeit derjenigen partiellen Isomorphismen zu fordern, deren Definitionsbereich von höchstens n Ketten und m Antiketten überdeckt wird – hierzu haben wir den Begriff der KA_m^n-Homogenität eingeführt.

Dass wir uns *nicht* für *schwache* KA-*Homogenität* interessieren, haben wir in Abschnitt 1.3.2 damit begründet, dass dieser Begriff partielle Ordnungen vieler sehr unterschiedlicher Isomorphie-Typen umfasst. Insbesondere ist er offensichtlich weit davon entfernt, Homogenität zu implizieren.

Mit *starker* KA-*Homogenität* befassen wir uns, da sich hier die Frage aufdrängt, ob sie nicht bereits Homogenität impliziert. Weite Teile der Schmerl'schen Klassifikation der höchstens abzählbaren homogenen partiellen Ordnungen lassen sich für stark KA-homogene partielle Ordnungen übertragen (siehe Abschnitt 1.4): Gehören sie nicht zu einem der Isomorphie-Typen (T1) bis (T3), so enthalten sie ein Pentagon. Sehr stark KA-homogene partielle Ordnungen mit Pentagon sind sogar universell (siehe Abschnitt 1.5).

Dieser Sachverhalt legt die Vermutung nahe, auch der letzte Teil der Schmerl'schen Klassifikation ließe sich übertragen – dann wären alle abzählbaren (sehr) stark KA-homogenen partiellen Ordnungen mit Pentagon vom selben Isomorphie-Typ und damit insbesondere homogen.

Gestützt wird diese Vermutung in weiten Teilen von der Anschauung: Wäre es nicht plausibel, dass jeder beliebige endliche Isomorphismus in einer partiellen Ordnung $(P, \leq)$ zu einem Automorphismus auf $(P, \leq)$ fortsetzbar ist, wenn dies für jeden endlichen Isomorphismus in $(P, \leq)$ gilt, dessen Definitionsbereich von einer Kette und einer Antikette überdeckt wird?

Ob es plausibel wäre oder nicht – es stimmt nicht: In Abschnitt 5.8 geben wir ein Beispiel einer abzählbaren Kreuz-homogenen partiellen Ordnung an, die nicht homogen ist. Von KA_0^2-homogenen partiellen Ordnungen hingegen wissen wir im Allgemeinen nicht, ob sie homogen sind. Das Interesse an starker KA-Homogenität ist also durchaus begründet.

Es stellt sich jedoch die Frage, *welche* stark KA-homogenen partiellen Ordnungen interessant sind. Bereits in Proposition 1.5.1 sahen wir, dass KA_m^n-homogene partielle Ordnungen homogen sind, falls $n + m \geq 3$ ist. Weiter sehen wir:

2.4.1 Proposition *Jede* KA_2^0*-homogene partielle Ordnung ist homogen.*

Beweis Sei $(P, \leq)$ eine KA_2^0-homogene partielle Ordnung. Mit Korollar 1.4.2 brauchen wir nur den Fall betrachten, dass $(P, \leq)$ ein Pentagon enthält.

Nach Satz 1.5.4 ist $(P, \leq)$ universell. Damit sind auf Grund der KA_2^0-Homogenität alle Lagen der Konfigurationen $(2, 1, 0), (1, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 0, 1)$ und $(0, 2, 1)$ separiert, da sie sich jeweils als Union von höchstens zwei Antiketten darstellen lassen. Zu zeigen bleibt nach Proposition 2.3.1, dass $(P, \leq)$ auch jede Lage $(\{x\}, \{y\}, \{z\})$ mit $x < z < y$ separiert.

Seien also $x, y, z \in P$ gegeben mit $x < z < y$. Wir müssen zeigen, dass P ein Element q mit $x < q < y$ und $q \parallel z$ enthält.

Da $(P, \leq)$ universell und 2-homogen ist, gibt es Elemente

$$\begin{aligned} q_0 \in P \quad & \text{mit} \quad z \parallel q_0 < y \quad \& \\ q_1 \in P \quad & \text{mit} \quad x < q_1 \parallel z \, . \end{aligned}$$

Falls zudem $q_0 > x$ oder $q_1 < y$ gilt, so haben wir bereits das gewünschte Element gefunden.

Seien also $q_0 \parallel x$ und $q_1 \parallel y$. Offenbar ist damit $q_1 \not\leq q_0$.

Falls $q_0 < q_1$ gilt, so ist $(\{x, q_0, y, q_1\}, \leq)$ ein Stern. Da $(P, \leq)$ Stern-dicht (d.h. $(2, 2, 0)$-separiert) ist, existiert ein $q \in P$ mit

$$\{x, q_0\} < q < \{y, q_1\} \, .$$

Wegen $\{q_0, q_1\} \parallel z$ ist auch $q \parallel z$. Somit separiert q die Lage $(\{x\}, \{y\}, \{z\})$.

Andernfalls ist $q_0 \parallel q_1$ und es gibt (da $(P, \leq)$ universell und Antiketten-homogen ist) Elemente

$$\begin{aligned} q_2 \in P \quad & \text{mit} \quad z \parallel q_2 > \{q_0, q_1\} \quad \text{(und damit insbesondere } q_2 > x) \quad \text{sowie} \\ q_3 \in P \quad & \text{mit} \quad z \parallel q_3 < \{q_0, q_1\} \quad \text{(und damit insbesondere } q_3 < y) \, . \end{aligned}$$

(Beachte: $\{z, q_0, q_1\}$ ist eine Antikette in $(P, \leq)$.)

Falls $q_2 < y$ oder $q_3 > x$ gilt, so haben wir das gewünschte Element gefunden.

Andernfalls ist $(\{x, q_3, y, q_2\}, \leq)$ ein Stern. Also gibt es ein separierendes Element $q \in P$ mit

$$\{x, q_3\} < q < \{y, q_2\} \, .$$

Wegen $\{q_2, q_3\} \parallel z$ ist auch $q \parallel z$. Somit separiert q die Lage $(\{x\}, \{y\}, \{z\})$. □

Die Propositionen 1.5.1 und 2.4.1 zusammen ergeben:

2.4.2 Bemerkung *Eine* KA*-homogene partielle Ordnung mit Pentagon ist homogen, falls sie*

1.) KA^n_m*-homogen mit* $n + m \geq 3$ *oder*

2.) KA^0_2*-homogen*

ist.

Wir suchen KA-homogene partielle Ordnungen, die ein ein Pentagon enthalten und nicht homogen sind. Solche Strukturen dürfen also höchstens KA^1_0-homogen, KA^2_0-homogen, KA^0_1-homogen oder KA^1_1-homogen sein – oder eine Kombination daraus.

Im Folgenden untersuchen wir, welche Kombinationen nicht die Homogenität implizieren. Zunächst halten wir fest:

2.4.3 Bemerkung *Ist $n \geq n'$ und $m \geq m'$, so ist jede KA^n_m-homogene partielle Ordnung auch $\mathrm{KA}^{n'}_{m'}$-homogen.*

2.4.4 Definition Seien $n, m, n', m' \in \omega$.

1.) Ist eine partielle Ordnung sowohl KA^n_m- als auch $\mathrm{KA}^{n'}_{m'}$-homogen, so sagen wir auch, sie sei $(\mathbf{KA}^{n}_{m} \wedge \mathbf{KA}^{n'}_{m'})$***-homogen***. Derartige ***Kombinationen zweier* KA*-Homogenitäts-Eigenschaften*** notieren wir in der Form

$$\mathrm{KA}^n_m \wedge \mathrm{KA}^{n'}_{m'} \;;$$

dabei betrachten wir $\mathrm{KA}^n_m \wedge \mathrm{KA}^{n'}_{m'}$ und $\mathrm{KA}^{n'}_{m'} \wedge \mathrm{KA}^n_m$ als dieselbe Kombination.

Entsprechend verfahren wir für beliebige (endliche) Kombinationen.

2.) Falls $n \leq n'$ und $m \leq m'$ ist, so sagen wir (auf Grund von Bemerkung 2.4.3), die Kombination $\mathrm{KA}^n_m \wedge \mathrm{KA}^{n'}_{m'}$ sei ***reduzierbar*** auf $\mathrm{KA}^{n'}_{m'}$.

Eine nicht reduzierbare Kombination bezeichnen wir als ***echte Kombination***.

2.4.5 Proposition *Sei $(P, \leq)$ eine stark* KA*-homogene partielle Ordnung mit Pentagon, die nicht homogen ist. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

*1.) $(P, \leq)$ ist $(\mathrm{KA}^1_0 \wedge \mathrm{KA}^0_1)$-homogen,
und für kein $(n, m) \in \omega^2 - \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ ist $(P, \leq)$ KA^n_m-homogen.*

*2.) $(P, \leq)$ ist KA^1_1-homogen,
und für kein $(n, m) \in \omega^2$ mit $\mathrm{Max}(n, m) \geq 2$ ist $(P, \leq)$ KA^n_m-homogen.*

*3.) $(P, \leq)$ ist KA^2_0-homogen,
und für kein $(n, m) \in \omega^2$ mit $n \geq 3$ oder $m \geq 1$ ist $(P, \leq)$ KA^n_m-homogen.*

Beweis Nach Korollar 1.4.2 ist $(P, \leq)$ universell.

$(P, \leq)$ sei $(\bigwedge_{i \in k} \mathrm{KA}^{n_i}_{m_i})$ -homogen für ein $k \in \omega$ und Folgen $(n_i)_{i \in k}, (m_i)_{i \in k} \in \omega^k$. Da $(P, \leq)$ nicht homogen ist, sind mit Bemerkung 2.4.2 die Komponenten $\mathrm{KA}^{n_i}_{m_i}$ alle in $\{\mathrm{KA}^1_0, \mathrm{KA}^2_0, \mathrm{KA}^0_1, \mathrm{KA}^1_1\}$ enthalten.

Wir betrachten zunächst die echten Kombinationen zweier Struktur-Homogenitäts-Eigenschaften aus $\{\mathrm{KA}^1_0, \mathrm{KA}^2_0, \mathrm{KA}^0_1, \mathrm{KA}^1_1\}$:

1.) $\mathrm{KA}^1_0 \wedge \mathrm{KA}^0_1$

2.) $\mathrm{KA}^2_0 \wedge \mathrm{KA}^0_1$

3.) $\mathrm{KA}^2_0 \wedge \mathrm{KA}^1_1$

Sterne sind $(2, 0)$-zerlegbar. KA^2_0-homogene partielle Ordnungen sind somit Stern-dicht, falls sie einen gefüllten Stern enthalten. Da die KA^2_0-homogenen partiellen Ordnungen mit Pentagon nach Korollar 1.4.2 universell sind, sind sie somit auch Stern-dicht. Die

$(\mathrm{KA}_0^2 \wedge \mathrm{KA}_1^0)$- oder $(\mathrm{KA}_0^2 \wedge \mathrm{KA}_1^1)$-homogenen partiellen Ordnungen mit Pentagon sind also Ketten- und Antiketten-homogen und außerdem Stern-dicht. Mit Satz 2.3.9 sind sie dann homogen.

Kombinationen dreier KA-Homogenitäts-Eigenschaften implizieren somit direkt Homogenität, falls sie die Gestalt $\mathrm{KA}_0^2 \wedge \mathrm{KA}_1^0 \wedge \mathrm{KA}_m^n$ oder $\mathrm{KA}_0^2 \wedge \mathrm{KA}_1^1 \wedge \mathrm{KA}_m^n$ haben. Kombinationen dreier KA-Homogenitäts-Eigenschaften der Gestalt $\mathrm{KA}_0^1 \wedge \mathrm{KA}_1^0 \wedge \mathrm{KA}_m^n$ sind äquivalent zu $\mathrm{KA}_1^0 \wedge \mathrm{KA}_m^n$ (falls $n \geq 1$) oder zu $\mathrm{KA}_0^1 \wedge \mathrm{KA}_m^n$ (falls $m \geq 1$) – womit wir wieder bei den (echten) Kombinationen zweier KA-Homogenitäts-Eigenschaften sind.

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir haben damit sehr stark eingegrenzt, welche KA-homogenen partiellen Ordnungen für uns von Interesse sind – nämlich

1.) die $(\mathrm{KA}_1^0 \wedge \mathrm{KA}_0^1)$-homogenen (also die zugleich Ketten- und Antiketten-homogenen),

2.) die KA_1^1-homogenen (also die Kreuz-homogenen) und

3.) die KA_0^2-homogenen

partiellen Ordnungen.

Wie schon am Ende von Abschnitt 1.5 erwähnt, wissen wir über die KA_0^2-homogenen partiellen Ordnungen nicht viel mehr, als dass sie die Voraussetzungen von Satz 1.4.1 erfüllen. Insbesondere ist unklar, ob KA_0^2-Homogenität bereits Homogenität impliziert. Dass Kreuz-homogene – und insbesondere Ketten- und Antiketten-homogene – partielle Ordnungen im Allgemeinen nicht homogen sind, zeigen wir im folgenden Kapitel.

Teil II

Abgrenzung der KA-Homogenität gegen die Homogenität

Kapitel 3

Lagen und Separiertheit

Bevor wir mit der Konstruktion beginnen, wollen wir unsere bisherigen Begriffsbildungen ausbauen.

Falls nicht explizit anderes gesagt wird, sei im Folgenden immer $(P, \leq)$ eine beliebige partielle Ordnung; Q sei eine Teilmenge von P und $q \in P$ ein beliebiges Element ($q \in Q$ soll ebenso möglich sein wie $q \in P - Q$).

3.1 Der Lage-Begriff

Unter welchen Voraussetzungen lässt sich ein partieller Isomorphismus

$$\Phi : P' \to P''$$

in einer höchstens abzählbaren partiellen Ordnung $(P, \leq)$ zu einem Automorphismus auf ganz P fortsetzen? – Wir müssen jedem beliebigen Element $q \in P - P'$ ein Element $q' \in P - P''$ zuordnen können, das so zu P'' liegt, wie q zu P' liegt. Das Tripel

$$((P')^{<q}, (P')^{>q}, (P')^{\|q})$$

gibt die Lage[3)] von q zu P' an – wir müssen also ein Element $q' \in P - P''$ finden mit

$$\Phi((P')^{<q}) = (P'')^{<q'} \quad \& \quad \Phi((P')^{>q}) = (P'')^{>q'} \quad \& \quad \Phi((P')^{\|q}) = (P'')^{\|q'} \; .$$

Umgekehrt muss es auch zu jedem beliebigen Element $q' \in P - P''$ ein Element $q'' \in P - P'$ geben, das so zu P' liegt, wie q' zu P'' liegt.

Wir wollen zunächst den Begriff der *Lage eines Elementes zu einer Struktur* einführen:

[3)] Der Ausdruck *Lage* wird an dieser Stelle noch umgangssprachlich und nicht in dem anschließend definierten Sinne gebraucht – dazu müssten wir die erste Komponente durch die Menge ihrer maximalen Elemente und die zweite Komponente durch die Menge ihrer minimalen Elemente ersetzen.

3.1.1 Definition Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung, Q und Q_0 seien Teilmengen von P und p sei ein Element von P. Falls gilt

$$\begin{aligned} (\mathrm{Max}(Q^{<p}))^{\downarrow} &= Q^{<p} \;, \\ (\mathrm{Min}(Q^{>p}))^{\uparrow} &= Q^{>p} \quad \text{und} \\ |\,\mathrm{Max}(Q^{<p}) \cup \mathrm{Min}(Q^{>p})| &< \aleph_0 \;, \end{aligned}$$

so definieren wir durch

$$\mathrm{L}_Q(p) := (\mathrm{Max}(Q^{<p}), \mathrm{Min}(Q^{>p}), Q^{\|p})$$

die ***Lage von p in Q*** (falls $p \in Q$ ist) bzw. die ***Lage von p zu Q*** (falls $p \notin Q$ ist). Da die dritte Komponente $Q^{\|p}$ sich durch

$$Q^{\|p} = Q - (\{p\} \cup Q^{<p} \cup Q^{>p})$$

aus den beiden anderen Komponenten ergibt, notieren wir der Kürze halber auch

$$\mathrm{L}_Q(p) = (\mathrm{Max}(Q^{<p}), \mathrm{Min}(Q^{>p})) \;.$$

Falls für jedes p aus Q_0 die Lage $\mathrm{L}_{Q-Q_0}(p)$ definiert ist und diese Lagen paarweise identisch sind, so ist die ***Lage von Q_0 zu Q*** wohldefiniert durch

$$\mathrm{L}_Q(Q_0) = \mathrm{L}_{Q-Q_0}(p)$$

für ein beliebiges $p \in Q_0$.

3.1.2 Bemerkung *Für die Lage (X, Y, Z) eines Elementes p aus P zu einer Teilmenge Q von P erhalten wir somit*

$$X < p < Y \quad \& \quad p \parallel Z \;.$$

Insbesondere gilt:

$$X < Y \quad \& \quad X^{\downarrow} \cap Z = \emptyset = Y^{\uparrow} \cap Z$$

Dies rechtfertigt die in Abschnitt 2.2 gegebene Definition der Lage *(Definition 2.2.7).*

Es erscheint nicht unbedingt natürlich, in Definition 3.1.1 $\mathrm{Max}(Q^{<p})$ und $\mathrm{Min}(Q^{>p})$ anstelle von $Q^{<p}$ und $Q^{>p}$ zu verwenden. Da wir jedoch *Lagen* als *Lagen von Elementen* (ggf. einer geeigneten Erweiterung) auffassen wollen, müssen die beiden ersten Komponenten Antiketten sein – was unsere Definition der Lage eines Elementes rechtfertigt. Allenfalls ließe sich einwenden, dass die Definition von Lagen selbst nicht sehr glücklich sei – wir könnten ja jedes Tripel (X, Y, Z) von (endlichen) Teilmengen von P als Lage bezeichnen, sofern $X < Y$ ist und $X^{\downarrow} \cap Z = \emptyset = Y^{\uparrow} \cap Z$ gilt. Für überabzählbare partielle Ordnungen werden wir auch entsprechend verfahren (Teil III); bis dahin wählen wir aus technischen Gründen jedoch die Antiketten für die Definition.

3.1.3 Notation Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung. Sind X und Y endliche Antiketten in $(P, \leq)$ mit der Eigenschaft $X < Y$, so führen wir folgende Kurzschreibweise für Lagen ein:

$$(X, Y) := (X, Y, P - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow}))$$

3.1.4 Bemerkung *Wir erhalten somit*

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(P) =& \{(X, Y, Z) \in \mathfrak{P}(P)^3 && \mid X < Y \ \& \ X, Y \textit{ sind endliche Antiketten} \\
& && \ \& \ X^{\downarrow} \cap Z = \emptyset = Y^{\uparrow} \cap Z\} \\
\supseteq& \{(X, Y, P - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow})) \in \mathfrak{P}(P)^3 && \mid X < Y \ \& \ X, Y \textit{ sind endliche Antiketten } \} \\
=& \{(X, Y) \in \mathfrak{P}(P)^2 && \mid X < Y \ \& \ X, Y \textit{ sind endliche Antiketten } \}
\end{aligned}$$

3.1.5 Bemerkung *Für eine beliebige Teilmenge X von P sind äquivalent:*

1.) X *ist eine Antikette in* $(P, \leq)$.

2.) $X = \mathrm{Max}(X)$

3.) $X = \mathrm{Min}(X)$

3.1.6 Bemerkung *Sei (X, Y, Z) bzw. (X, Y) eine Lage in $(P, \leq)$. Dann erhalten wir mit $(P \cup \{e\}, \leq')$, gegeben durch $\leq \cup (X^{\downarrow} \times \{e\}) \cup (\{e\} \times Y^{\uparrow}) \cup \{(e, e)\}$ eine Ein-Punkt-Erweiterung von $(P, \leq)$ mit $\mathrm{L}_P(e) = (X, Y, Z)$ bzw. kurz $\mathrm{L}_P(e) = (X, Y)$.*

3.1.7 Bemerkung *Sind $(X, Y), (X', Y') \in \mathbb{L}(P)$ mit $X^{\downarrow} \cap (Y')^{\uparrow} \neq \emptyset$, so ist $Y^{\uparrow} \cap (X')^{\downarrow} = \emptyset$.*

Beweis Sei $p \in X^{\downarrow} \cap (Y')^{\uparrow}$. Angenommen, es gibt ein $q \in Y^{\uparrow} \cap (X')^{\downarrow}$. Dann ist einerseits $p \in X^{\downarrow} < Y^{\uparrow} \ni q$, also $p < q$, und andererseits $q \in (X')^{\downarrow} < (Y')^{\uparrow} \ni p$, also $q < p$ – ein Widerspruch. □

3.2 Der Separiertheits-Begriff

Nun erweitern wir den in Definition 2.2.9 eingeführten *Separiertheits*-Begriff.

3.2.1 Definition Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und seien P_B und P_S Teilmengen von P.

Wir sagen, eine Lage $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}(P)$ sei ***durch P_S separiert***, wenn es ein Element $q \in P_S$ gibt, das (X, Y, Z) separiert (d.h., $X < q < Y$ und $q \parallel Z$).

Von zwei endlichen Antiketten X und Y in $(P, \leq)$ sagen wir sie seien ***durch P_S separiert*** – in Zeichen: $X \prec\!\!\prec^{P_S} Y$ – , wenn es ein Element $q \in P_S$ gibt mit $X < q < Y$.

Anstatt für zwei separierte Antiketten X und Y zu fordern, dass ein Element q zwischen ihnen liegt, könnten wir auch fordern, dass eine beliebige nicht-leere Substruktur zwischen ihnen liegt. Die Forderungen sind äquivalent. Im Hinblick auf den als nächstes einzuführenden Begriff der *exakten Separiertheit* bietet es sich jedoch an, beliebige nicht-leere separierende Mengen zuzulassen.

3.2.2 Definition Seien die Voraussetzungen von Definition 3.2.1 gegeben. Von zwei endlichen Antiketten X und Y in $(P, \leq)$ sagen wir sie seien ***durch P_S bezüglich P_B exakt separiert*** – in Zeichen: $X \ll_{P_B}^{P_S} Y$ – , wenn es eine nicht-leere Menge $Q \subseteq P_S$ gibt mit $\mathrm{L}_{P_B}(Q) = (X, Y)$ – oder mit anderen Worten: wenn Q bzw. jedes $q \in Q$ die Lage $(X, Y, P_B - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow} \cup Q))$ separiert.

Die exakt separierende Menge Q darf einelementig sein – womit wir eine stärkere Analogie zum Begriff der *Separiertheit* erhalten. Ist P_S selbst einelementig, $P_S = \{q\}$, so notieren wir auch kurz $\ll_{P_B}^{q}$ bzw. $\prec\!\!\prec^{q}$ anstelle von $\ll_{P_B}^{\{q\}}$ bzw. $\prec\!\!\prec^{\{q\}}$.

3.2.3 Bemerkung *Ist $X \prec\!\!\prec^{q} Y$, so folgt aus $(X')^{\downarrow} \subseteq X^{\downarrow}$ und $(Y')^{\uparrow} \subseteq Y^{\uparrow}$ bereits $X' \prec\!\!\prec^{q} Y'$:*

$X \prec\!\!\prec^{q} Y$ bedeutet per Definition, dass $X < q < Y$ ist. Daraus folgt, dass auch $X^{\downarrow} < q < Y^{\uparrow}$ gilt. Wegen $(X')^{\downarrow} \subseteq X^{\downarrow}$ und $(Y')^{\uparrow} \subseteq Y^{\uparrow}$ ist dann insbesondere $(X')^{\downarrow} < q < (Y')^{\uparrow}$ und damit auch $X' < q < Y'$, also per Definition $X' \prec\!\!\prec^{q} Y'$.

3.2.4 Notation Seien die Voraussetzungen von Definition 3.2.1 gegeben; zudem sei auch Q eine Teilmenge von P. Wir wollen folgende Mengen von Paaren (exakt) separierter endlicher Antiketten in $(P, \leq)$ auszeichnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sep}(Q, P_S) &:= \{(X, Y) \in \mathbb{L}(Q) \mid X \prec\!\!\prec^{P_S} Y\} \\ \mathrm{Ex}(Q, P_S, P_B) &:= \{(X, Y) \in \mathbb{L}(Q) \mid X \ll_{P_B}^{P_S} Y\} \end{aligned}$$

Im Fall $P_S = Q$ notieren wir im Argument nur Q anstelle von Q, P_S.
Im Fall $P_B = Q = P_S$ notieren wir im Argument nur Q anstelle von Q, P_S, P_B.

3.2.5 Bemerkung *Offenbar ist* $\mathrm{Ex}(Q) \subseteq \mathrm{Sep}(Q)$.

3.3 Mengen ausgewählter Lagen

Wir können Lagen nicht nur über ihre Separiertheits-Eigenschaften, sondern auch allein über ihre Gestalt charakterisieren. Von besonderem Interesse für uns sind dabei diejenigen Lagen (X, Y), für die $X \cup Y$ eine Kette oder Antikette ist. Wir sprechen dann von *linearen Lagen* bzw. von *Randlagen*.

3.3.1 Definition Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

1.) Eine Lage $(X, Y) \in \mathbb{L}(P)$ mit $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$ nennen wir eine ***Randlage*** von $(P, \leq)$. Die ***Menge der Randlagen*** in $(P, \leq)$ notieren wir mit $\mathbf{Rand}(\boldsymbol{P})$.

2.) Eine Lage $(X, Y) \in \mathbb{L}(P)$ mit $|X| = |Y| = 1$ nennen wir eine ***lineare Lage*** von $(P, \leq)$. Die ***Menge der linearen Lagen*** in $(P, \leq)$ notieren wir mit $\mathbf{Lin}(\boldsymbol{P})$.

3.) Eine Lage $(X, Y) \in \mathbb{L}(P)$, die weder Randlage noch lineare Lage ist, bezeichnen wir als ***breite Lage*** von $(P, \leq)$. Die ***Menge der breiten Lagen*** in $(P, \leq)$ notieren wir mit

$$\mathbb{L}_{\triangle}(P) := \mathbb{L}(P) - (\mathrm{Lin}(P) \cup \mathrm{Rand}(P)) \; .$$

3.3.2 Bemerkung *Partielle Ordnungen, die breite Lagen enthalten, sind* $\{\mathsf{V}\}$ *- oder* $\{\Lambda\}$ *- universell. Mit dem Beweis von Satz 1.4.1 sehen wir, dass sie sogar* $\{\mathsf{V}, \Lambda\}$ *- universell sind, falls sie Antiketten-homogen oder stark* KA*-homogen sind.*

Wir erhalten folgende Partition der Menge der Lagen in $(P, \leq)$:

$$\mathbb{L}(P) = \mathbb{L}_{\triangle}(P) \,\dot\cup\, \mathrm{Lin}(P) \,\dot\cup\, \mathrm{Rand}(P)$$

Beobachtung Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare Ketten-homogene und $\{\,:\,\}$ - universelle partielle Ordnung. Dann gibt es erstens zu jedem $x \in P$ Elemente $y, z \in P$ mit $y < x < z$. Zweitens gibt es zu je zwei Elementen $x, y \in P$ mit $x < y$ ein $z \in P$ mit $x < z < y$.

Maximale Ketten in $(P, \leq)$ sind folglich η_0-Ketten (d.h. isomorph zu $(\mathbb{Q}, \dot\leq)$).

Beobachtung Sei $(P, \leq)$ Antiketten-homogen. Dann gelten folgende Aussagen:

1.) Ist $(P, \leq)$ $\{\Lambda\}$ - universell, so besitzt jede endliche Antikette eine obere Schranke – d.h. $(P, \leq)$ ist nach oben gerichtet.

2.) Ist $(P, \leq)$ $\{\mathsf{V}\}$ - universell, so besitzt jede endliche Antikette eine untere Schranke – d.h. $(P, \leq)$ ist nach unten gerichtet.

3.4 Homogenität und Separiertheit

Am Ende von Abschnitt 2.1 gaben wir mit den Fortsetzbarkeits-Aussagen 2.1.2 zum einen eine (zugleich notwendige und hinreichende) Bedingung an, unter der sich ein partieller Isomorphismus in einer höchstens abzählbaren partiellen Ordnung $(P, \leq)$ auf jeder Ein-Punkt-Erweiterung von $(P, \leq)$ fortsetzen lässt. Zum anderen nannten wir dort eine (ebenfalls notwendige und hinreichende) Bedingung für die Homogenität einer höchstens abzählbaren partiellen Ordnung. Mit den Fortsetzbarkeits-Aussagen 2.2.6, 2.2.11 und 2.2.13 in Abschnitt 2.2 erhielten wir Kriterien für die Homogenität partieller Ordnungen mit Pentagon. Mit Hilfe des Lage-Begriffs formulieren wir nun die Fortsetzbarkeits-Aussagen 2.1.2 neu – diesmal nur für *endliche* Isomorphismen:

3.4.1 Satz *(Fortsetzbarkeit 6)*

1.) Sei Φ *ein* endlicher *partieller Isomorphismus in einer höchstens abzählbaren partiellen Ordnung* $(P, \leq)$,

$$\Phi : P' \to P'' \; .$$

Φ *lässt sich genau dann auf jeder Ein-Punkt-Erweiterung von* $(P', \leq)$ *in* $(P, \leq)$ *fortsetzen, wenn für jede Lage* $(X, Y) \in \mathbb{L}(P')$ *gilt:*

Es gibt ein $q \in P$ mit $\mathrm{L}_{P'}(q) = (X, Y)$ genau dann, wenn es ein $q' \in P$ gibt mit $\mathrm{L}_{P''}(q') = (\Phi(X), \Phi(Y))$ – in Zeichen:

$$X \ll^{P}_{P'} Y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X) \ll^{P}_{P''} \Phi(Y) \tag{3.1}$$

2.) Eine höchstens abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$ ist genau dann homogen, wenn für jede Lage $(X, Y) \in \mathbb{L}(P)$, für jede endliche Teilmenge P' von P mit $X \cup Y \subseteq P'$ und für jede Einbettung Φ von $(P', \leq)$ in $(P, \leq)$ gilt:

Es gibt ein $q \in P$ mit $\mathrm{L}_{P'}(q) = (X, Y)$ genau dann, wenn es ein $q' \in P$ gibt mit $\mathrm{L}_{\Phi(P')}(q') = (\Phi(X), \Phi(Y))$ – in Zeichen:

$$X \ll^{P}_{P'} Y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X) \ll^{P}_{\Phi(P')} \Phi(Y) \tag{3.2}$$

Beweis Für beliebige endliche Teilmengen $X, Y, P' \subseteq P$ sind (mit $Z := P' - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow})$) folgende Aussagen äquivalent:

1.) Es gibt ein $q \in P$ mit $\mathrm{L}_{P'}(q) = (X, Y)$.

2.) Es gibt ein $q \in P$ mit $X < q < Y$ und $q \parallel Z$.

Aus der Fortsetzbarkeits-Aussage 2.1.2 folgen die Behauptungen somit direkt. □

3.4.2 Bemerkung *In homogenen partiellen Ordnungen* mit Pentagon *sind mit der Fortsetzbarkeits-Aussage 2.2.11 immer beide Seiten der Äquivalenzen (3.1) und (3.2) erfüllt.*

Der Beweis von Satz 3.4.1 weist auf einen Zusammenhang zwischen Separiertheits-Eigenschaften von Lagen in Paar- und Tripel-Notation hin, den wir wie folgt formulieren möchten:

3.4.3 Bemerkung *Sei $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung. P_S und P_B seien beliebige Teilmengen von P, X und Y seien endliche Antiketten in $(P, \leq)$. Wir setzen $Z := P_B - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow})$. Dann sind äquivalent:*

1.) Es gibt ein $q \in P_S$ mit $X < q < Y$ und $q \parallel Z$.

2.) Es gibt ein $q \in P_S$ mit $\mathrm{L}_{P_B}(q) = (X, Y, Z)$.

3.) Es gibt ein $q \in P_S$ mit $\mathrm{L}_{P_B}(q) = (X, Y)$.

4.) X und Y sind durch P_S bezüglich P_B exakt separiert.

Kapitel 4

Konstruktion per „Einladung“

4.1 Die Idee der Konstruktion

Wir werden in Abschnitt 4.2 zwei abzählbare partielle Ordnungen konstruieren[4)], die Ketten- und Antiketten-homogen, nicht aber homogen sind. Die Konstruktionsverfahren sind einander ähnlich und unterscheiden sich – grob gesagt – durch ihre *Erzeugenden-Systeme*. Wir werden jedoch nicht von Erzeugenden-Systemen, sondern von *Einladungen in partielle Ordnungen* sprechen. Beginnend mit einer abzählbaren Antikette wird jeweils rekursiv ein ω-Turm abzählbarer partieller Ordnungen konstruiert. In beiden Fällen erhalten wir die gewünschte partielle Ordnung $(P, \leq)$ als Limes des jeweiligen Turms $(P_n, \leq_n)_{n\in\omega}$. In Abschnitt 5.7 zeigen wir, dass die so erhaltenen partiellen Ordnungen aber isomorph sind (Korollar 5.7.3).

Die partiellen Ordnungen, die wir konstruieren wollen, sollen abzählbar und sowohl Ketten- als auch Antiketten-homogen (also insbesondere 1-transitiv) sein, nicht jedoch homogen. Nach Korollar 1.4.2 enthalten sie dann ein Pentagon und nach Satz 1.5.4 sind sie dann universell und enthalten eine unendliche Dreiecksstruktur. Wie wir in Beispiel 2.1.1.1 sahen, folgt aus der 1-Transitivität nun, dass sie weder maximale noch minimale Elemente enthalten. Aus der Ketten-Homogenität folgt dann mit Beobachtung 3.3 (siehe auch Beispiel 2.1.1.2), dass maximale Ketten in diesen Ordnungen immer η_0-Ketten sind.

Um als Limes eine Ketten-homogene Struktur zu erhalten, fügen wir im Konstruktionsschritt von $(P_n, \leq_n)$ zu $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ zwischen je zwei vergleichbaren Elementen neue Elemente ein. Das heißt, $\mathrm{Lin}(P_n)$ wird in der Einladung in $(P_n, \leq_n)$ enthalten sein.

Um Antiketten-Homogenität zu erhalten, fügen wir in jedem Konstruktionsschritt ober-

[4)] Anstatt solche partiellen Ordnungen zu *konstruieren*, könnten wir auch entsprechende Substrukturen der abzählbaren universell-homogenen partiellen Ordnung *auswählen*. Wollten wir lediglich die *Existenz* dieser Strukturen erhalten, wäre das sicher einfacher, da wir die Elemente und Teilmengen nicht so genau (und aufwendig) bezeichnen müssten. Da wir jedoch auch *Eigenschaften* dieser partiellen Ordnungen untersuchen wollen, müssen wir sehr präzise über einzelne Elemente und Teilmengen sprechen können. An dieser Stelle brauchen wir die (zuvor eingesparten) Bezeichnungen nun doch. Mit dem konstruktiven Ansatz orientieren wir uns an der Entstehungsgeschichte dieser Arbeit.

und unterhalb jeder endlichen Antikette neue Elemente ein. Das heißt, auch $\text{Rand}(P_n)$ wird in der Einladung in $(P_n, \leq_n)$ enthalten sein.

Damit für alle breiten Lagen von Schritt zu Schritt die gewünschten Separiertheits-Eigenschaften erhalten bleiben, dürfen in jeder Einladung außer den linearen Lagen und den Randlagen von $(P_n, \leq_n)$ nur noch die Paare separierter bzw. exakt separierter endlicher Antiketten aus $(P_n, \leq_n)$ enthalten sein. Je nach Konstruktionsart werden wir eine der beiden folgenden Mengen als Einladung in $(P_n, \leq_n)$ betrachten:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n) &:= \text{Lin}(P_n) \cup \text{Rand}(P_n) \cup \text{Sep}(P_n)\\ \mathbb{E}_{\text{ex}}(P_n) &:= \text{Lin}(P_n) \cup \text{Rand}(P_n) \cup \text{Ex}(P_n)\end{aligned}$$

Später (in Abschnitt 5.6.1) beschränken wir uns darauf, die Separiertheit derjenigen breiten Lagen zu erhalten, die keine der Konfigurationen $(2, 1, \omega)$ oder $(1, 2, \omega)$ besitzen. Dann können wir die Einladungen um Lagen mit eben diesen Konfigurationen erweitern.

Anmerkung Noch ein Wort zum Begriff der Einladung: Eine Einladung in P_n enthält *Lagen* in P_n, mittels derer wir neue Elemente in P_n einfügen und so P_{n+1} erhalten. Genauer gesagt, fügen wir für jede Lage (X, Y, Z) aus der Einladung neue Elemente zwischen X und Y (und unvergleichbar mit Z) ein. In diesem Sinne sind die Lagen, mit den Worten von Herrn Prof. Felgner, *einladend*.
(Von einem Erzeugenden-System von P_n hingegen würde man wohl eher verlangen, dass es *Elemente* aus P_n enthält und P_n erzeugt.)

4.2 Die Konstruktion

Konstruktions-Anfang

Wir beginnen die Konstruktion, indem wir $(P_0, \leq_0)$ als eine abzählbare Antikette wählen.

Seien nun für ein $n \in \omega$ für alle $m \leq n$ abzählbare partielle Ordnungen $(P_m, \leq_m)$ so konstruiert, dass $(P_m, \leq_m)_{m \leq n}$ ein Turm ist.

Konstruktions-Schritt – erster Teil

Sei im Folgenden $\mathbb{E}(P_n)$ eine der Einladungen $\mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ oder $\mathbb{E}_{\text{ex}}(P_n)$.

4.2.1 Definition Falls wir bei der Konstruktion von $(P, \leq)$ in jedem Schritt $\mathbb{E}(P_n) = \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ wählen, nennen wir $(P, \leq)$ ***separativ konstruiert***. Falls wir stattdessen bei der Konstruktion in jedem Schritt $\mathbb{E}(P_n) = \mathbb{E}_{\text{ex}}(P_n)$ wählen, nennen wir $(P, \leq)$ ***exakt-separativ konstruiert***.

Zur Konstruktion von $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ aus $(P_n, \leq_n)$ fügen wir zu jeder Lage $(X, Y) \in \mathbb{E}(P_n)$ eine abzählbare Antikette

$$A_n(X, Y) = \{x_n^i(X, Y) \mid i \in \omega\} \quad \text{mit} \quad \text{L}_{P_n}(A_n(X, Y)) = (X, Y)$$

ein. Das heißt, die neuen Elemente haben die jeweils gewünschte Lage (X,Y) zu P_n. (Das Einfügen der Antiketten kann simultan geschehen.)

Wir setzen nun

$$P'_{n+1} := P_n \cup \bigcup_{(X,Y)\in\mathbb{E}(P_n)} A_n(X,Y)\ .$$

P'_{n+1} wird partiell geordnet durch $\leq'_{n+1}$, gegeben durch den reflexiven und transitiven Abschluss von

$$\leq_n \cup \bigcup_{(X,Y)\in\mathbb{E}(P_n)} ((X \times A_n(X,Y)) \cup (A_n(X,Y) \times Y))\ .$$

Exkurs

Hinsichtlich ihrer Lage zu P_{n+1} sollen sich die Elemente einer solchen Antikette voneinander jedoch unterscheiden. Zu diesem Zweck fügen wir (ebenfalls im Schritt von $(P_n, \leq_n)$ zu $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$) weitere Elemente hinzu. An welchen Kriterien orientieren wir uns dabei?

Wir sahen bereits, dass wir zur Fortsetzung eines partiellen Isomorphismus nicht nur die Lage des neuen Urbildpunktes berücksichtigen müssen, sondern auch Separiertheits-Eigenschaften in der Oberstruktur zu beachten haben. Wenn wir nun ein neues Element x zwischen X und Y einfügen, stellt sich beispielsweise die Frage, ob in $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$, der neuen Oberstruktur, X separiert unter x und ob x separiert unter Y liegen soll. Allgemeiner stellt sich für jedes Element x, das im Schritt von $(P_n, \leq_n)$ zu $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ mit der Lage $\mathrm{L}_{P_n}(x) = (X,Y)$ eingefügt werden soll, und für jede Lage $(X',Y') \in \mathbb{L}(P_n \cup \{x\})$ mit $x \in X' \cup Y'$ die Frage, ob X' und Y' in P_{n+1} separiert sein sollen. Falls ja, müssen im Allgemeinen zwischen X' und Y' weitere Elemente eingefügt werden. Was ist dabei zu beachten?

Wir wollen $(P,\leq)$ so konstruieren, dass jede Lage $(X,Y) \in \mathbb{L}(P_n)$, die nicht in $\mathbb{E}(P_n)$ enthalten ist, entweder in $(P,\leq)$ unsepariert ist oder bereits in der kleinsten Struktur $(P_k, \leq_k)$ separiert ist, die $X \cup Y$ enthält.
Es soll also für jedes $(X,Y) \in \mathbb{L}(P_n) - (\mathrm{Lin}(P_n) \cup \mathrm{Rand}(P_n))$ gelten:

$$X \prec\!\!\prec^{P_n} Y \;\Leftrightarrow\; X \prec\!\!\prec^{P_{n+1}} Y$$

Das bedeutet, wir dürfen zwischen X' und Y' (mit den obigen Bezeichnungen) nur neue Elemente einfügen, falls dabei keine Lagen aus $\mathbb{L}(P_n)$ separiert werden, die weder in $(P_n, \leq_n)$ separiert noch in $\mathbb{E}(P_n)$ enthalten sind. Gilt also

$$x \in X' \quad \& \quad (\mathrm{Max}((X' - \{x\}) \cup X), Y') \notin (\mathrm{Sep}(P_n) \cup \mathbb{E}(P_n))\ ,$$

so dürfen keine Elemente zwischen X' und Y' eingefügt werden. Entsprechendes gilt für $x \in Y'$.

Um die Konstruktionen ein wenig zu vereinheitlichen, wollen wir – unabhängig davon, ob wir $(P,\leq)$ über die Einladungen $\mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$ oder $\mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n)$ konstruieren – wie folgt vorgehen:

Zwischen X' und Y' fügen wir genau dann neue Elemente ein, falls dabei keine Lagen aus $\mathbb{L}(P_n)$ separiert werden, die bezüglich $\mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ nicht einladend sind. Gilt also

$$\begin{array}{lll} x \in X' & \& & (\mathrm{Max}((X' - \{x\}) \cup X), Y') \notin \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n) \quad \text{oder} \\ x \in Y' & \& & (X', \mathrm{Min}((Y' - \{x\}) \cup Y)) \notin \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n) \ , \end{array}$$

so fügen wir keine Elemente zwischen X' und Y' ein. Andernfalls fügen wir neue Elemente ein.

4.2.2 Bemerkung *Auf diese Weise stellen wir sicher, dass die partielle Ordnung* $(P, \leq)$ *unseparierte Lagen enthält und somit nicht homogen ist. (Siehe Proposition 4.2.6.7.)*

Wir wollen nun präziser angeben, zu welchen Lagen (außer denen aus $\mathbb{E}(P_n)$) neue Elemente eingefügt werden. Dazu müssen wir einen Blick auf die Sprache der partiellen Ordnungen werfen:

Sei $\mathfrak{L}(n)$ die Sprache zweiter Stufe der partiellen Ordnungen, erweitert um Namen für die Elemente aus P_n und Namen für die endlichen Teilmengen von P_n. Namen und ihre Interpretationen wollen wir der Einfachheit halber gleich notieren.

Alle Element-Namen und Element-Variablen seien Element-Terme der Sprache; v sei eine Element-Variable in $\mathfrak{L}(n)$. Alle Mengen-Namen und Mengen-Variablen seien Mengen-Terme der Sprache. Weitere Mengen-Terme erhalten wir wie folgt:

1.) Ist X ein Mengen-Term, so auch $X \cup \{v\}$.

2.) Sind X und Y Mengen-Terme, so auch (X, Y).

4.2.3 Definition Sei $(X, Y) \in \mathbb{E}(P_n)$. Wir definieren folgende Mengen von $\mathfrak{L}(n)$-Termen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{>v}(P_n, (X, Y)) := \{(X' \cup \{v\}, Y') \mid\ & (X', Y') \in \mathbb{L}(P_n), \\ & X' \subseteq P_n - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow})\,,\ Y' \subseteq Y^{\uparrow}, \\ & (\mathrm{Max}(X' \cup X), Y') \in \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{<v}(P_n, (X, Y)) := \{(X', Y' \cup \{v\}) \mid\ & (X', Y') \in \mathbb{L}(P_n), \\ & X' \subseteq X^{\downarrow}\,,\ Y' \subseteq P_n - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow}), \\ & (X', \mathrm{Min}(Y' \cup Y)) \in \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)\} \end{aligned}$$

Wir bezeichnen

$$\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y)) := \mathbb{E}_{>v}(P_n, (X, Y)) \ \cup\ \mathbb{E}_{<v}(P_n, (X, Y))$$

als die ***Menge der separierbaren v-Lagen über*** $\boldsymbol{(P_n, \leq_n)}$.

Für jede endliche Teilmenge $T \subseteq \mathbb{E}_v(P_n, (X, Y))$ definieren wir mit

$$\begin{aligned} t(T) := \{X < v < Y\} \cup \{X' \ll^{P_{n+1}}_{P_{n+1}} Y' \mid (X', Y') \in T\} \\ \cup \{\neg(X' \ll^{P_{n+1}}_{P_{n+1}} Y') \mid (X', Y') \in \mathbb{E}_v(P_n, (X, Y)) - T\} \end{aligned}$$

einen partiellen 1-Typ. Dabei sind Ausdrücke der Gestalt $X' \ll_{P_n}^{P_{n+1}} Y'$ zwar keine $\mathfrak{L}(n)$-Formeln, können aber mit

$$\exists v_1 : X' < v_1 < Y' \wedge \forall v_2 : (v_2 \parallel v_1 \vee (\exists v_3 : v_3 \in X' \wedge v_2 \leq v_3) \vee (\exists v_4 : v_4 \in Y' \wedge v_2 \geq v_4))$$

als $\mathfrak{L}(n)$-Formeln ausgedrückt werden.

4.2.4 Notation Sei $(P', \leq)$ eine partiell geordnete Menge und P'' eine Teilmenge von P'. Ersetzen wir in der Definition von $\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y))$ die Einladung $\mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ durch die Menge

$$\mathbb{E}_{\text{sep}}(P', P'') := \text{Lin}(P') \cup \text{Rand}(P') \cup \text{Sep}(P', P'') ,$$

dann notieren wir die so erhaltene Menge mit

$$\mathbb{E}_v(P', P'', (X, Y)) .$$

Mit P_n ist auch $\mathbb{L}(P_n)$ und somit $\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y))$ abzählbar. Folglich ist auch

$$|\mathfrak{P}_e(\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y)))| = \aleph_0$$

und wir zählen darum ab:

$$\mathfrak{P}_e(\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y))) =: \{ T_n^i(X, Y; v) \mid i \in \omega \}$$

Dabei setzen wir

$$T_n^0(X, Y; v) := \emptyset .$$

Ist $T \in \mathfrak{P}_e(\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y)))$, so bezeichnen wir mit $x_n^T(X, Y)$ dasjenige $x_n^i(X, Y)$, für welches $T = T_n^i(X, Y; v)$ ist. Insbesondere ist

$$x_n^{\emptyset}(X, Y) = x_n^0(X, Y) .$$

Weiterhin setzen wir

$$t_n^i(X, Y; v) := t(T_n^i(X, Y; v)) .$$

4.2.5 Bemerkung *Die Elemente aus $\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y))$ sind streng genommen keine Lagen, sondern $\mathfrak{L}(n)$-Terme mit einer freien Variablen v. Wir wollen sie der Einfachheit halber dennoch als* v-Lagen *oder sogar* Lagen *bezeichnen, da sie durch Ersetzung von v durch ein $x_n^i(X, Y)$ und kanonische Interpretation der Namen durch ihre Elemente mit Lagen in $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ zu identifizieren sind.*

In $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ wollen wir die zu den endlichen Teilmengen $T \subseteq \mathbb{E}_v(P_n, (X, Y))$ gehörigen partiellen 1-Typen $t(T)$ realisieren. In diesem Sinne können wir die Teilmengen T oder auch die zugehörigen partiellen 1-Typen $t(T)$ als ***Lage-Beschreibungen*** (des $t(T)$ realisierenden Elementes) bezeichnen.

Dass es sich bei den $t(T)$ überhaupt um konsistente Formelmengen handelt, sogar um solche, die sich in einer Erweiterung von $(P_n, \leq_n)$ realisieren lassen, erscheint plausibel – wir werden es beweisen, indem wir eine Erweiterung angeben (nämlich $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$), in der die $t(T)$ (durch Elemente $x_n^T(X, Y) \in A_n(X, Y)$) realisiert werden.

Konstruktions-Schritt – zweiter Teil

Wählen wir nun eine beliebige Lage $(X, Y) \in \mathbb{E}(P_n)$ fest und betrachten $A_n(X, Y)$. Für jedes $i \in \omega$ soll $x_n^i(X, Y)$ in $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ den partiellen 1-Typ $t(T_n^i(X, Y; v))$ realisieren. Dazu fügen wir oberhalb und unterhalb jedes Elementes $x_n^i(X, Y)$ aus $A_n(X, Y)$ entsprechend der Lagen aus $T_n^i(X, Y; v)$ einzelne Elemente ein. (Auch diese Elemente können für alle $(X, Y) \in \mathbb{E}(P_n)$ und alle $i \in \omega$ simultan eingefügt werden.)

Sei also $x_n^i(X, Y) \in A_n(X, Y)$ beliebig, aber fest gewählt.

Für jede Lage $(X', Y') \in T_n^i(X, Y; v)$ fügen wir ein Element $z_n^i(X, Y; (X', Y'))$ ein, so dass

$$\mathrm{L}_{P'_{n+1}}(z_n^i(X, Y; (X', Y'))) = (X'_{[v/x_n^i(X,Y)]}, Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]})$$

die Lage von $z_n^i(X, Y; (X', Y'))$ zu P'_{n+1} ist. Das heißt, $z_n^i(X, Y; (X', Y'))$ liegt genau zwischen $X'_{[v/x_n^i(X,Y)]}$ und $Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]}$. Hingegen fügen wir kein Element zwischen $X'_{[v/x_n^i(X,Y)]}$ und $Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]}$ ein, falls $(X', Y') \in \mathbb{E}_v(P_n, (X, Y)) - T_n^i(X, Y; v)$ ist.

(Zur Erinnerung: Wir erhalten $X'_{[v/x_n^i(X,Y)]}$, indem wir in X' jedes Vorkommen von v durch $x_n^i(X, Y)$ ersetzen.)

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} P_{n+1} :=& P_n \cup \bigcup_{(X,Y)\in\mathbb{E}(P_n)} \Big(A_n(X, Y) \cup \bigcup_{i\in\omega} \{z_n^i(X, Y; (X', Y')) \mid (X', Y') \in T_n^i(X, Y; v)\}\Big) \\ =& P'_{n+1} \cup \bigcup_{((X,Y),i)\in\mathbb{E}(P_n)\times\omega} \{z_n^i(X, Y; (X', Y')) \mid (X', Y') \in T_n^i(X, Y; v)\} \,. \end{aligned}$$

Die Ordnung $\leq_{n+1}$ auf P_{n+1} sei gegeben durch den reflexiven und transitiven Abschluss von

$$\begin{aligned} &\leq'_{n+1} \cup \bigcup_{(X,Y)\in\mathbb{E}(P_n)} \bigcup_{i\in\omega} \\ &\Bigg(\Bigg(\bigcup_{(X',Y'\cup\{v\})\in T_n^i(X,Y;v)} \big(X' \times \{z_n^i(X, Y; (X', Y' \cup \{v\}))\}\big) \quad \cup \\ &\qquad \big(\{z_n^i(X, Y; (X', Y' \cup \{v\}))\} \times (Y' \cup \{x_n^i(X, Y)\})\big)\Bigg) \quad \cup \\ &\Bigg(\bigcup_{(X'\cup\{v\},Y')\in T_n^i(X,Y;v)} \big((X' \cup \{x_n^i(X, Y)\}) \times \{z_n^i(X, Y; (X' \cup \{v\}, Y'))\}\big) \quad \cup \\ &\qquad \big(\{z_n^i(X, Y; (X' \cup \{v\}, Y'))\} \times Y'\big)\Bigg)\Bigg) \,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathrm{L}_{P_{n+1}}(z_n^i(X, Y; (X', Y'))) = (X'_{[v/x_n^i(X,Y)]}, Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]})$$

sogar in P_{n+1} die Lage von $z_n^i(X, Y; (X', Y'))$.

Offenbar ist mit $(P_n, \leq_n)$ auch $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ eine partielle Ordnung: Wenn wir die neuen Elemente (aus $P_{n+1} - P_n$) *einzeln* nacheinander einfügen (in abzählbar vielen Schritten), so erhalten wir in jedem Schritt eine partielle Ordnung, da wir die neuen Elemente immer nur zwischen Lagen in der bisherigen partiellen Ordnung einfügen.

Typen-Realisierung

Wir setzen

$$t_n^i(X,Y;v) := t(\,T_n^i(X,Y;v))$$

und zeigen, dass $x_n^i(X,Y)$ den Typ $t_n^i(X,Y;v)$ in $(P_{n+1},\leq_{n+1})$ realisiert:

Seien also $(X,Y)\in\mathbb{E}(P_n)$ und $i\in\omega$ fest gewählt. Für $(X',Y')\in\mathbb{E}_v(P_n,(X,Y))$ ist nach Konstruktion von $(P_{n+1},\leq_{n+1})$ offenbar:

$$\begin{aligned}(X',Y')\in T_n^i(X,Y;v) &\Leftrightarrow X'_{[v/x_n^i(X,Y)]} \ll_{P_{n+1}}^{z_n^i(X,Y;(X',Y'))} Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]}\\ &\Leftrightarrow X'_{[v/x_n^i(X,Y)]} \ll_{P_{n+1}}^{P_{n+1}} Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]}\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} X'_{[v/x_n^i(X,Y)]} \ll_{P_{n+1}}^{P_{n+1}} Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]}\ , &\quad \text{falls} \quad (X',Y')\in T_n^i(X,Y;v)\ ,\\ \neg\,(X'_{[v/x_n^i(X,Y)]} \ll_{P_{n+1}}^{P_{n+1}} Y'_{[v/x_n^i(X,Y)]})\ , &\quad \text{falls} \quad (X',Y')\in \mathbb{E}_v(P_n,(X,Y)) - T_n^i(X,Y;v)\end{aligned}$$

und

$$X <_{n+1} x_n^i(X,Y) <_{n+1} Y\ .$$

Somit realisiert $x_n^i(X,Y)$ den Typ $t_n^i(X,Y;v)$.

$(P,\leq)$ erhalten wir als die abzählbare Union der $(P_n,\leq_n)$:

$$(P,\leq) := \Big(\bigcup_{n\in\omega} P_n, \bigcup_{n\in\omega} \leq_n\Big)$$

Anders gesagt: $(P,\leq)$ ist der Limes des Turms $(P_n,\leq_n)_{n\in\omega}$.

Eigenschaften

Wir wollen noch einige Eigenschaften von $(P,\leq)$ und den Substrukturen $(P_n,\leq_n)$ festhalten:

4.2.6 Proposition *Sei $(P,\leq)$ wie oben als Limes des Turms $(P_n,\leq_n)_{n\in\omega}$ konstruiert. Es gelten folgende Aussagen:*

1.) $(P,\leq)$ ist abzählbar.

2.) Separiertheit ist eine Eigenschaft von Lagen, die im Verlauf der Konstruktion nicht verloren geht.

3.) Jede echte nicht-leere Teilmenge $Q \subsetneq P$, deren Elemente bezüglich $P-Q$ ununterscheidbar sind, ist einelementig.

4.) Exakte Separiertheit bleibt von Schritt zu Schritt erhalten, jedoch mit immer anderen exakt separierenden Mengen bzw. Elementen.

5.) *Für kein $n \in \omega$ gibt es nicht-leere Lagen in P_n, die bezüglich P exakt separiert sind. Lediglich $(\emptyset, \emptyset)$ ist (durch P) bezüglich P exakt separiert.*

6.) *Unseparierte breite Lagen bleiben im Verlauf der Konstruktion unsepariert.*

7.) *$(P, \leq)$ besitzt unseparierte Lagen der Konfigurationen $(1, 2, 0)$ und $(2, 1, 0)$.*

8.) *$(P, \leq)$ enthält ein Pentagon.*

Beweis

1.) Offensichtlich.

2.) Klar, da die Ordnungsrelation immer nur erweitert wird. Sind also $X, Y \subseteq P_n$ mit $X \prec\!\!\prec^q Y$ für ein $q \in P_n$, so ist $X <_n q <_n Y$ und damit auch $X <_{n+1} q <_{n+1} Y$.

3.) Sei $Q \subsetneqq P$ eine nicht-leere Menge, deren Elemente bezüglich $P - Q$ ununterscheidbar sind. Wir nehmen an, Q enthält mindestens zwei Elemente, q_1 und q_2. Sei $p \in P - Q$ und sei $q_1 < q_2$ oder $q_1 \parallel q_2$ (und insbesondere $q_1 \neq q_2$). Sei $n \in \omega$ beliebig mit $p, q_1, q_2 \in P_n$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

   a) Gilt $Q < p$, so ist $x := x_n^{\emptyset}(\{q_1\}, \emptyset) \in P_{n+1}$. Wegen $p, q_2 \notin q_1^{\downarrow}$ ist $x \parallel \{p, q_2\}$. Aus $x \parallel p$ und $Q < p$ folgt $x \notin Q$. Somit ist $q_1 < x$ und $q_2 \parallel x$.
   b) Gilt $p < Q$, so ist $x := x_n^{\emptyset}(\emptyset, \{q_2\}) \in P_{n+1}$. Wegen $p, q_1 \notin q_2^{\uparrow}$ ist $x \parallel \{p, q_1\}$. Aus $p \parallel x$ und $p < Q$ folgt $x \notin Q$. Somit ist $x < q_2$ und $x \parallel q_1$.
   c) Gilt $p \parallel Q$, so ist $x := x_n^{\emptyset}(\{p, q_1\}, \emptyset) \in P_{n+1}$. Wegen $q_2 \notin q_1^{\downarrow}$ ist $x \parallel q_2$. Aus $p < x$ und $p \parallel Q$ folgt $x \notin Q$. Somit ist $q_1 < x$ und $q_2 \parallel x$.

   In jedem Fall erhalten wir einen Widerspruch zur Ununterscheidbarkeit der Elemente von Q bezüglich $P - Q$.

4.) Seien X,Y endliche Antiketten in $(P_n, \leq_n)$. X und Y seien durch P_n bezüglich P_n exakt separiert ($X \ll_{P_n}^{P_n} Y$). Dann gibt es ein $Q \subseteq P_n$ mit $\mathrm{L}_{P_n}(Q) = (X, Y)$.

   Angenommen, Q separiert X und Y auch exakt bezüglich P_{n+1}. Dann sind die Elemente von Q bezüglich $P_{n+1} - Q$ ununterscheidbar, $\mathrm{L}_{P_{n+1}}(Q)$ ist wohldefiniert und wir erhalten
$$\mathrm{L}_{P_{n+1}}(Q) = (X, Y) \ .$$
   Sei nun $q \in Q$ beliebig. Wir setzen
$$x := x_n^0(\{q\}, \emptyset) \ .$$
   Damit ist $x > q$. Wegen $Q \subseteq P_n$ und $x \in P_{n+1} - P_n$ ist $x \notin Q$. Da die Elemente von Q bezüglich $P_{n+1} - Q$ ununterscheidbar sind, ist $x > Q$ und damit $x \in Y^{\uparrow}$. Für alle $y \in Y$ ist jedoch $y \notin q^{\downarrow}$ und somit $x \not\geq y$. Also ist $x \notin Y^{\uparrow}$ – ein Widerspruch. Damit sind X und Y bezüglich P_{n+1} durch Q nicht mehr exakt separiert.

   Es ist jedoch $(X, Y) \in \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n) \cap \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$ und somit existiert $x_n^0(X, Y) \in P_{n+1}$, welches X und Y bezüglich P_{n+1} exakt separiert.

5.) Ähnlich sehen wir für jede Lage $(X, Y) \neq (\emptyset, \emptyset)$, dass X und Y nicht (durch P) bezüglich P exakt separiert werden können:

Angenommen, $Q \subseteq P$ separiert X und Y exakt, d.h. $\mathrm{L}_{P-Q}(Q) = (X, Y)$. Dann ist per Definition $Q \neq \emptyset$ und wegen $\emptyset \neq X \cup Y \subseteq P - Q$ auch $Q \neq P$. Die Elemente von Q sind (ebenfalls per Definition) ununterscheidbar bezüglich $P - Q$. Mit 3.) ist Q dann einelementig und somit enthalten in P_n für ein $n \in \omega$ mit $X \cup Y \subseteq P_n$. Dann ist aber Q auch eine exakt separierende Menge von X und Y bezüglich P_{n+1} – im Widerspruch zum Beweis von 4.).

Falls $(X, Y) = (\emptyset, \emptyset)$, so ist P selbst die (bezüglich P) exakt separierende Menge, d.h. $\mathrm{L}_P(P) = (\emptyset, \emptyset)$.

6.) Seien X und Y endliche Antiketten in $(P_n, \leq_n)$, die durch P_n nicht separiert werden. Falls zudem $(X, Y) \notin \mathrm{Lin}(P_n) \cup \mathrm{Rand}(P_n)$ gilt, so ist $(X, Y) \notin \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$, also werden zwischen X und Y keine neuen Elemente eingefügt und X und Y sind auch in $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ unsepariert.

Ebenso werden ober- und unterhalb unendlicher Antiketten, sowie oberhalb nach oben unbeschränkter (unendlicher) Ketten und unterhalb nach unten unbeschränkter (unendlicher) Ketten keine neuen Elemente eingefügt.

7.) Für $p, q \in P_0$ mit $p \neq q$ setzen wir

$$x := x_0^0(\emptyset, \{p, q\}) \quad \& \quad y := x_0^0(\{p, q\}, \emptyset) \ .$$

Mit $(\{x\}, \{p, q\}, \emptyset)$ erhalten wir eine unseparierte Lage der Konfiguration $(1, 2, 0)$ und mit $(\{p, q\}, \{y\}, \emptyset)$ eine unseparierte Lage der Konfiguration $(2, 1, 0)$.

8.) Wir wählen p, q, x, y wie oben und setzen

$$z := x_1^0(\{p\}, \{y\}) \ .$$

Dann ist

$$x < p < z < y \quad \& \quad x < q < y \quad \& \quad q \parallel \{p, z\} \ .$$

Also ist $(\{p, q, x, y, z\}, \leq)$ ein Pentagon in $(P, \leq)$.

$\square$

Unser Ziel war es, eine nicht homogene Struktur zu konstruieren. Wir sehen nun:

4.2.7 Korollar $(P, \leq)$ *ist nicht homogen.*

Beweis $(P, \leq)$ ist abzählbar und enthält nach Proposition 4.2.6.8 ein Pentagon. Zugleich enthält $(P, \leq)$ aber auch unseparierte Lagen, beispielsweise der Konfigurationen $(1, 2, 0)$ und $(2, 1, 0)$ (nach Proposition 4.2.6.7). Nach den Fortsetzungs-Aussagen 2.2.11 und 2.2.13 ist $(P, \leq)$ damit nicht homogen. $\square$

Zu zeigen bleibt noch, dass $(P, \leq)$ Ketten- und Antiketten-homogen ist. Wir erhalten diese Aussage in Kapitel 5 als Korollar zu dem etwas allgemeineren Satz 5.2.5.

Kapitel 5

Separiert-homogene Strukturen

5.1 Typen als Mengen exakt separierter p-Lagen

Zunächst wollen wir für beliebige partielle Ordnungen $(P, \leq)$ Teilmengen von $\mathrm{Sep}(P)$ und von $\mathrm{Ex}(P)$ auszeichnen.

5.1.1 Definition Sei $Q \subseteq P_S \subseteq P$ und $p \in P$ (aber nicht unbedingt $p \in Q$).

Eine Lage $(X, Y) \in \mathbb{L}(P)$ mit $p \in X \cup Y$ nennen wir eine ***p-Lage***. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Sep}(Q, P_S \,|\, p) := \{(X, Y) \in \mathrm{Sep}(Q \cup \{p\}, P_S) \mid X \cup Y \ni p\}$$

die ***Menge der durch P_S separierten p-Lagen über Q*** und mit

$$\mathrm{Ex}(Q, P_S \,|\, p) := \{(X, Y) \in \mathrm{Ex}(Q \cup \{p\}, P_S, Q) \mid X \cup Y \ni p\}$$

die ***Menge der durch P_S bezüglich $Q \cup \{p\}$ exakt separierten p-Lagen über Q***.

Ist $Q = P_S$, so notieren wir im Index jeweils nur Q anstelle von Q, P_S.

Offenbar ist $\mathrm{Ex}(Q, P_S \,|\, p) \subseteq \mathrm{Sep}(Q, P_S \,|\, p)$.

Folgende Bemerkung ist zentral für den Beweisgedanken des Hauptsatzes (Satz 5.2.5):

5.1.2 Bemerkung *Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.2 erhalten wir für jedes $n \in \omega$ und jedes $i \in \omega$:*

$$\mathrm{Ex}(P_{n+1} \,|\, x_n^i(X, Y)) = T_n^i(X, Y; v)_{[v/x_n^i(X,Y)]} \tag{5.1}$$

Somit realisiert $x_n^i(X, Y)$ den partiellen 1-Typ $t_n^i(X, Y; v)$.

Für $(X', Y') \in T_n^i(X, Y; v)_{[v/x_n^i(X,Y)]}$ sind dabei konstruktionsgemäß X' und Y' bezüglich P_{n+1} durch $z_n^i(X, Y; (X', Y'))$ exakt separiert.

Wollen wir einen partiellen Isomorphismus $\Phi : P' \to P''$ auf einem Element $q \in P - P'$ fortsetzen, so interessieren wir uns nicht nur für die Lage von q zu P', sondern auch für die Separiertheits-Eigenschaften der q-Lagen über P'. (Wir werden voraussetzen, dass Φ diese Eigenschaften erhält.)

Als Bildpunkt sind somit Elemente der Gestalt $x_n^i(X,Y)$ prädestiniert: Übersetzen wir die Lage von q und die Separiertheits-Eigenschaften in einen partiellen 1-Typ über P' (indem wir q durch die freie Variable v ersetzen), so bildet Φ diesen partiellen Typ kanonisch auf einen partiellen 1-Typ über P'' ab. Das realisierende Element kommt dann als Bildelement in Betracht.

Den soeben skizzierten Zusammenhang präzisiert folgende Proposition:

5.1.3 Proposition *Sei $(P,\leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung, seien $P' \subseteq P'' \subseteq P$ und $q \in (P - P')$ mit $\mathrm{L}_{P'}(q) \in \mathbb{L}(P')$, v sei eine freie Variable. Mit $(X,Y) := \mathrm{L}_{P'}(q)$ ist*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(P',P''\,|\,q)_{[q/v]} &\subseteq \mathrm{Sep}(P',P''\,|\,q)_{[q/v]}\\ &\subseteq \mathbb{E}_v(P',P'',(X,Y))\ .\end{aligned}$$

Beweis Wir sahen bereits, dass $\mathrm{Ex}(P',P''\,|\,q) \subseteq \mathrm{Sep}(P',P''\,|\,q)$ gilt; damit ist auch

$$\mathrm{Ex}(P',P''\,|\,q)_{[q/v]} \subseteq \mathrm{Sep}(P',P''\,|\,q)_{[q/v]}\ .$$

Es bleibt also die zweite Inklusion zu zeigen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v(P',P'',(X,Y)) = \{(X'\cup\{v\},Y') \mid\ & (X',Y') \in \mathbb{L}(P'),\\ & X' \subseteq P' - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow}),\ Y' \subseteq Y^{\uparrow},\\ & (\mathrm{Max}(X'\cup X),Y') \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P',P'')\}\\ \cup\quad \{(X',Y'\cup\{v\}) \mid\ & (X',Y') \in \mathbb{L}(P'),\\ & X' \subseteq X^{\downarrow},\ Y' \subseteq P' - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow}),\\ & (X',\mathrm{Min}(Y'\cup Y)) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P',P'')\}\end{aligned}$$

Sei $(\widetilde{X},\widetilde{Y}) \in \mathrm{Sep}(P',P''\,|\,q)$ und o.B.d.A. $q \in \widetilde{X}$. (Für $q \in \widetilde{Y}$ folgt die Behauptung analog.)
Es ist $(\widetilde{X},\widetilde{Y})_{[q/v]} = (X'\cup\{v\},Y')$ mit

$$X' = \widetilde{X} - \{q\} \quad \& \quad Y' = \widetilde{Y}\ .$$

Wegen $(\widetilde{X},\widetilde{Y}) \in \mathbb{L}(P'\cup\{q\})$ ist $(X',Y') \in \mathbb{L}(P')$. Da $\widetilde{X}$ eine Antikette ist, gilt $q \parallel X'$. Zudem ist $\mathrm{L}_{P'}(q) = (X,Y)$ und damit $X' \subseteq P' - (X^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow})$. Wegen $q < \widetilde{Y}$ ist somit auch $Y' \subseteq Y^{\uparrow}$. Aus $(\widetilde{X},\widetilde{Y}) \in \mathrm{Sep}(P',P''\,|\,q)$ folgt per Definition, dass es ein $z \in P''$ gibt mit $\widetilde{X} < z < \widetilde{Y}$. Insbesondere ist dann $\mathrm{Max}(X'\cup X) < z < Y'$.
Wir erhalten $(\widetilde{X},\widetilde{Y}) \in \mathbb{E}_v(P',P'',(X,Y))$.

□

Damit ist es uns – kurz gesagt – möglich, zu jeder separierten Lage

$$(X,Y) \in \mathbb{L}(P_n)$$

und jeder endlichen *Lage-Beschreibung*

$$T_n^i(X,Y;v) \in \mathfrak{P}_e(\mathbb{E}_v(P_n,(X,Y)))$$

ein diese erfüllendes Element in P_{n+1} zu wählen – nämlich $x_n^i(X,Y)$ –, denn es gilt

$$T_n^i(X,Y;v)_{[v/x_n^i(X,Y)]} = \mathrm{Ex}(P_{n+1} \,|\, x_n^i(X,Y)) \ .$$

5.2 Der Hauptsatz

Wir betrachten nun die beiden in Abschnitt 4.2 konstruierten partiellen Ordnungen. Der Hauptsatz (Satz 5.2.5) besagt, dass jeder endliche partielle Isomorphismus in diesen Ordnungen, der die Separiertheit endlicher Antiketten respektiert, zu einem Automorphismus auf der ganzen Ordnung fortgesetzt werden kann. Mit Bemerkung 5.2.2 lässt sich damit insbesondere jeder endliche Ketten- oder Antiketten-Isomorphismus zu einem Automorphismus auf der ganzen Ordnung fortsetzen.

5.2.1 Definition Sei $\Phi : P' \to P''$ ein partieller Isomorphismus in einer beliebigen partiellen Ordnung $(P,\leq)$.

1.) Wir sagen, ***Φ erhält die Separiertheit in $(P,\leq)$***, falls Φ die Relation $\prec\!\!\prec^P$ erhält, d.h., wenn für alle Lagen $(X',Y') \in \mathbb{L}(P')$ gilt:

$$X' \prec\!\!\prec^P Y' \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X') \prec\!\!\prec^P \Phi(Y') \tag{5.2}$$

2.) Wir sagen, ***Φ erhält die exakte Separiertheit in $(P,\leq)$***, falls Φ die Relation $\ll^P_{P'}$ auf $\ll^P_{P''}$ abbildet, d.h., wenn für alle Lagen $(X',Y') \in \mathbb{L}(P')$ gilt:

$$X' \ll^P_{P'} Y' \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(X') \ll^P_{P''} \Phi(Y') \tag{5.3}$$

5.2.2 Bemerkung *Sei $(P,\leq)$ eine (wie in Abschnitt 4.2) separativ oder exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung. Damit ist $(P,\leq)$ der abzählbare Limes eines Turms abzählbarer partieller Ordnungen $(P_n,\leq_n)_{n\in\omega}$.*

Für alle $n \in \omega$ gilt:

$$\mathrm{Lin}(P_n) \cup \mathrm{Rand}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$$

Also sind für jeden endlichen Ketten- oder Antiketten-Isomorphismus Φ in $(P,\leq)$ immer beide Seiten der Äquivalenzen (5.2) und (5.3) erfüllt – insbesondere erhält Φ sowohl die Separiertheit als auch die exakte Separiertheit in $(P,\leq)$.

5.2.3 Proposition *Sei $(P,\leq)$ eine separativ oder exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung. Ein endlicher partieller Isomorphismus in $(P,\leq)$ erhält genau dann die Separiertheit in $(P,\leq)$, wenn er die exakte Separiertheit in $(P,\leq)$ erhält.*

5.2.4 Hilfssatz *Sei $(P,\leq)$ eine separativ oder exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung.*

1.) Für jede endliche Teilmenge $Q \subseteq P$ ist

$$\mathrm{Sep}(Q,P) = \mathrm{Ex}(Q,P) \ .$$

2.) Für jedes Element $q \in P$ und jede endliche Teilmenge $Q \subseteq P$ ist

$$\mathrm{Sep}(Q,P\,|\,q) = \mathrm{Ex}(Q,P\,|\,q) \ .$$

Beweis des Hilfssatzes

1.) Sei $(X,Y) \in \mathrm{Sep}(Q,P)$. Da Q endlich ist, gibt es ein $n \in \omega$ mit $Q \subseteq P_n$. Offenbar gilt dann

$$(\emptyset, Y) \in \mathrm{Rand}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n) \ .$$

Wegen

a) $(X,Y) \in \mathbb{L}(P_n)$,

b) $X \subseteq P_n - (\emptyset^{\downarrow} \cup Y^{\uparrow}) = P_n - Y^{\uparrow}$,

c) $Y \subseteq Y^{\uparrow}$ und

d) $(\mathrm{Max}(X \cup \emptyset), Y) = (X,Y) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$

erhalten wir

$$(X \cup \{v\}, Y) \in \mathbb{E}_v(P_n, (\emptyset, Y)) \ .$$

Also gibt es ein $i \in \omega$ mit $T_n^i(\emptyset, Y; v) = \{(X \cup \{v\}, Y)\}$. Wir setzen

$$x := x_n^i(\emptyset, Y) \in P_{n+1} \quad \& \quad z := z_n^i(\emptyset, Y; (X \cup \{v\}, Y)) \subseteq P_{n+1} \ .$$

Wir erhalten $X \cup \{x\} \ll^{\{z\}}_{P_{n+1}} Y$. Insbesondere ist $X \cup \{x\} \ll^{P_{n+1}}_{P_n \cup \{x\}} Y$ und somit auch $X \ll^{\{z\}}_{P_{n+1}} Y$. Also ist $(X,Y) \in \mathrm{Ex}(Q,P)$.

Die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich.

2.) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sep}(Q,P\,|\,q) &= \{(X,Y) \in \mathrm{Sep}(Q \cup \{q\}, P) \mid X \cup Y \ni q\} \\
&\overset{1.)}{=} \{(X,Y) \in \mathrm{Ex}(Q \cup \{q\}, P) \mid X \cup Y \ni q\} \\
&= \mathrm{Ex}(Q,P\,|\,q) \ ,
\end{aligned}$$

wobei die erste und die letzte Gleichheit direkt aus der Definition von $\mathrm{Sep}(Q,P\,|\,q)$ und $\mathrm{Ex}(Q,P\,|\,q)$ folgen.

$\square$

Beweis von Proposition 5.2.3 Mit Hilfssatz 5.2.4.1 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sep}(P', P) &= \mathrm{Ex}(P', P) \\
\mathrm{Sep}(P'', P) &= \mathrm{Ex}(P'', P)
\end{aligned}$$

Für $(X', Y') \in \mathbb{L}(P')$ und $(X'', Y'') \in \mathbb{L}(P'')$ gilt somit:

$$X' \prec\!\prec^P Y' \;\Leftrightarrow\; X' \ll^P_{P'} Y'$$
$$X'' \prec\!\prec^P Y'' \;\Leftrightarrow\; X'' \ll^P_{P''} Y''$$

Damit folgt die Behauptung. □

Anmerkung Einen (partiellen) Isomorphismus in einer partiellen Ordnung $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält, könnten wir auch als (partiellen) Isomorphismus in $(P, \leq, \prec\!\prec)$ betrachten.

Im Gegensatz zur Theorie der partiellen Ordnungen lässt sich jedoch die Theorie der partiellen Ordnungen mit Separiertheitsrelation nicht in der Logik erster Stufe formulieren, da $\prec\!\prec$ eine Relation zwischen Teilmengen des Grundbereichs ist. Aus diesem Grund wollen wir die ursprüngliche Sprechweise beibehalten.

5.2.5 Hauptsatz *Sei $(P, \leq)$ eine separativ oder exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung. Jeder endliche partielle Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält, lässt sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen.*

Allgemein wollen wir abzählbare partielle Ordnungen mit dieser Eigenschaft unter einen Begriff fassen:

5.2.6 Definition Eine abzählbare partielle Ordnung $(P, \leq)$ nennen wir ***separiert-homogen***, falls jeder endliche Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält, zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortgesetzt werden kann.

In Abschnitt 5.1 haben wir bereits gesehen, dass die im Konstruktionsschritt von $(P_n, \leq_n)$ zu $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$ eingefügten Elemente jede endlich formulierbare Lage- und Separiertheits-Beschreibung über $(P_n, \leq_n)$ realisieren, die mit den Struktur- und Separiertheits-Eigenschaften von $(P_n, \leq_n)$ verträglich ist. In den nun folgenden Abschnitten beweisen wir den Hauptsatz – zuerst für separativ, dann für exakt-separativ konstruierte partielle Ordnungen.

5.3 Beweis des Hauptsatzes für separativ konstruierte partielle Ordnungen

In diesem Abschnitt sei $(P, \leq)$ eine wie in Abschnitt 4.2 separativ konstruierte partielle Ordnung.

Sei $\Phi : P' \to P''$ ein endlicher partieller Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält. Wir setzen:

$$P - P' =: \{p_n \mid n \in \omega\}$$
$$P - P'' =: \{q_n \mid n \in \omega\}$$

Wir werden Φ rekursiv mit dem Hausdorff'schen Zickzack-Verfahren fortsetzen. Zuerst ordnen wir dem Element p_0 ein Bild q_0' in $P - P''$ zu; in den weiteren Schritten verfahren wir dann analog.

Wir setzen $\Phi_0 := \Phi$.

Sei $n \in \omega$ mit $P' \cup P'' \subseteq P_n$. Weiter setzen wir:

$$\begin{aligned}(X', Y') &:= \mathrm{L}_{P'}(p_0)\\ (X'', Y'') &:= (\Phi_0(X'), \Phi_0(Y'))\end{aligned}$$

Nun ist $X' \prec\!\!\prec^P Y'$ und nach Voraussetzung dann auch $X'' \prec\!\!\prec^P Y''$. Wegen $X'' \cup Y'' \subseteq P_n$ gilt gemäß der Konstruktion von $(P, \leq)$ bereits

$$X'' \prec\!\!\prec^{P_n} Y'' \quad \text{oder} \quad (X'', Y'') \in \mathrm{Lin}(P_n) \cup \mathrm{Rand}(P_n)\ .$$

Da $\mathrm{Lin}(P_n) \cup \mathrm{Rand}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$ gilt, ist in jedem Fall $(X'', Y'') \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$.

Wir werden darum $q_0' \in A_n(X'', Y'')$ wählen. Welches Element aus $A_n(X'', Y'')$ wir auswählen, hängt von der Menge der durch P separierten p_0-Lagen über P' ab. Diese ist gegeben durch

$$\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0) = \{(X, Y) \in \mathbb{L}(P' \cup \{p_0\}) \mid X \cup Y \ni p_0,\ X \prec\!\!\prec^P Y\}\ .$$

Mit Proposition 5.1.3 ist

$$\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]} \subseteq \mathbb{E}_v(P' \subseteq P, (X', Y'))\ . \tag{5.4}$$

Es ist zu beachten, dass es sich bei den Elementen von $\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)$ um Lagen in $\mathbb{L}(P' \cup \{p_0\})$ handelt, während die Objekte aus $\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}$ Terme in $\mathfrak{L}(n)$ sind.

Wir können Φ_0 aber auch kanonisch auf $\mathfrak{L}(n)$-Termen operieren lassen, indem wir

$$\begin{aligned}&\Phi_0(v) := v \quad \text{und}\\ &\Phi_0(\dot{p}) := \dot{q} \quad \text{für } p \in P' \text{ mit } \Phi_0(p) = q\end{aligned}$$

setzen.

(Im Allgemeinen notieren wir Namen und ihre Interpretationen der Einfachheit halber gleich. Lediglich um Φ als Abbildung zwischen Mengen von $\mathfrak{L}(n)$-Termen zu etablieren, haben wir hier die Namen von Elementen $q \in P_n$ mit $\dot{q}$ notiert. Im Folgenden werden wir aber in der Notation wieder keinen Unterschied zwischen Namen und ihren Interpretationen, den Elementen und Teilmengen von P_n, machen.)

Also können wir $\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}$ und $\mathbb{E}_v(P', P, (X', Y'))$ durch Φ_0 abbilden und erhalten

$$\Phi_0(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) \overset{(5.4)}{\subseteq} \Phi_0(\mathbb{E}_v(P', P, (X', Y')))\ . \tag{5.5}$$

Wir betrachten die Menge $\mathbb{E}_v(P' \subseteq P, (X', Y'))$ – und hierzu die Charakterisierung ihrer Elemente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_v(P' \subseteq P, (X', Y')) \;=\; & \{(X \cup \{v\}, Y) \mid (X, Y) \in \mathbb{L}(P'), \\
& \qquad X \subseteq P' - ((X')^{\downarrow} \cup (Y')^{\uparrow}),\ Y \subseteq (Y')^{\uparrow}, \\
& \qquad (\mathrm{Max}(X \cup X'), Y) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P' \subseteq P)\} \\
\cup\; & \{(X, Y \cup \{v\}) \mid (X, Y) \in \mathbb{L}(P'), \\
& \qquad X \subseteq (X')^{\downarrow},\ Y \subseteq P' - ((X')^{\downarrow} \cup (Y')^{\uparrow}), \\
& \qquad (X, \mathrm{Min}(Y \cup Y')) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P' \subseteq P)\}
\end{aligned}$$

Wir behaupten:

$$\Phi_0(\mathbb{E}_v(P' \subseteq P, (X', Y'))) = \mathbb{E}_v(P'' \subseteq P, (X'', Y'')) \tag{5.6}$$

Zum Beweis betrachten wir das Verhalten von Φ_0 auf $\mathbb{E}_v(P' \subseteq P, (X', Y'))$:

1.) Da Φ_0 die Ordnung erhält, ist

$$\Phi_0(\mathbb{L}(P')) = \mathbb{L}(\Phi_0(P')) = \mathbb{L}(P'') \ .$$

2.) Für beliebige Lagen $(X, Y) \in \mathbb{L}(P')$ gilt:

$$\begin{aligned}
X \subseteq P' - ((X')^{\downarrow} \cup (Y')^{\uparrow}) &\;\Leftrightarrow\; \Phi_0(X) \subseteq P'' - ((X'')^{\downarrow} \cup (Y'')^{\uparrow}) \\
Y \subseteq (Y')^{\uparrow} &\;\Leftrightarrow\; \Phi_0(Y) \subseteq (Y'')^{\uparrow} \\
X \subseteq (X')^{\downarrow} &\;\Leftrightarrow\; \Phi_0(X) \subseteq (X'')^{\downarrow} \\
Y \subseteq P' - ((X')^{\downarrow} \cup (Y')^{\uparrow}) &\;\Leftrightarrow\; \Phi_0(Y) \subseteq P'' - ((X'')^{\downarrow} \cup (Y'')^{\uparrow})
\end{aligned}$$

3.) Da Φ_0 die Separiertheit in $(P, \leq)$ erhält, ist $\Phi_0(\mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P' \subseteq P)) = \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P'' \subseteq P)$ und damit (für beliebige Lagen $(X, Y) \in \mathbb{L}(P')$)

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{Max}(X \cup X'), Y) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P' \subseteq P) \\
\Leftrightarrow\; & (\mathrm{Max}(\Phi_0(X) \cup X''), \Phi_0(Y)) = \Phi_0((\mathrm{Max}(X \cup X'), Y)) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P'' \subseteq P)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& (X, \mathrm{Min}(Y \cup Y')) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P' \subseteq P) \\
\Leftrightarrow\; & (\Phi_0(X), \mathrm{Min}(\Phi_0(Y) \cup Y'')) = \Phi_0((X, \mathrm{Min}(Y \cup Y'))) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P'' \subseteq P) \ .
\end{aligned}$$

Damit ist (5.6) bewiesen. Wir zeigen nun:

$$\mathbb{E}_v(P'' \subseteq P, (X'', Y'')) \subseteq \mathbb{E}_v(P_n, (X'', Y'')) \tag{5.7}$$

Wir sehen sofort, dass wegen $P'' \subseteq P_n$ insbesondere $\mathbb{L}(P'') \subseteq \mathbb{L}(P_n)$ ist. Die jeweiligen Mengeninklusionen bleiben ebenfalls erhalten. Zu zeigen bleibt:

$$\mathbb{E}_{\text{sep}}(P'' \subseteq P) \subseteq \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$$

Dies folgt unmittelbar aus den Inklusionen

$$P'' \subseteq P_n \quad \& \quad \text{Lin}(P'') \cup \text{Rand}(P'') \subseteq \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$$

sowie der Eigenschaft breiter Lagen in P'' (und somit in P_n), entweder bereits durch P_n oder auch nicht durch P separiert zu sein. Damit ist (5.7) gezeigt.

Da P' und damit $\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)$ endlich ist, ist auch $\Phi_0(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]})$ endlich. Aus (5.5), (5.6) und (5.7) erhalten wir somit:

$$\Phi_0(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) \;\in\; \mathfrak{P}_e(\mathbb{E}_v(P_n, (X'', Y''))) \;\cap\; \mathfrak{P}_e((\mathfrak{P}_e(P'' \cup \{v\}))^2)$$

Also existiert ein $i \in \omega$ mit

$$T_n^i(X'', Y''; v) = \Phi_0(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) \; .$$

Wir setzen

$$T := T_n^i(X'', Y''; v) \quad \& \quad q_0' := x_n^i(X'', Y'')$$

und erweitern Φ_0 via

$$\Phi_1 := \Phi_0 \cup \{(p_0, q_0')\} \; .$$

Identifizieren wir Abbildungen in $(P_n, \leq_n)$ mit den zugehörigen Abbildungen in der Menge der Element-Namen von $\mathfrak{L}(n)$, so erhalten wir

$$\Phi_1 = (v \mapsto q_0') \circ \Phi_0 \circ (p_0 \mapsto v) \; .$$

Damit ist

$$\Phi_1(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \;=\; (\Phi_0(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}))_{[v/q_0']} \;=\; T_{[v/q_0']} \overset{(5.1)}{=} \text{Ex}(P_{n+1} \,|\, q_0') \; .$$

Wir behaupten:

$$\Phi_1(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)) = \text{Sep}(P'', P \,|\, q_0') \tag{5.8}$$

Zum Beweis zeigen wir die beiden Inklusionen.

Sei also $(X, Y) \in \Phi_1(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0))$. Wegen $\Phi_1(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)) = \text{Ex}(P_{n+1} \,|\, q_0')$ sind X und Y in und durch P_{n+1} exakt separiert – insbesondere sind sie in P separiert.

Wegen $T \subseteq (\mathfrak{P}_e(P'' \cup \{v\}))^2$ und $\Phi_1(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)) = T_{[v/q_0']}$ ist $(X, Y) \in \mathbb{L}(P'' \cup \{q_0'\})$. Außerdem ist $q_0' \in X \cup Y$ und somit $(X, Y) \in \text{Sep}(P'', P \,|\, q_0')$. Damit erhalten wir

$$\Phi_1(\text{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \subseteq \text{Sep}(P'', P \,|\, q_0') \; .$$

Sei nun umgekehrt $(X,Y) \in \mathrm{Sep}(P'', P \,|\, q_0')$. Es ist also $q_0' \in X \cup Y$ und $(X,Y) \in \mathbb{L}(P'')$; außerdem sind X und Y in $(P, \leq)$ separiert. Offensichtlich ist

$$p_0 \in \Phi_1^{-1}(X) \cup \Phi_1^{-1}(Y) \; .$$

Da Φ_1 die Ordnungsrelation erhält, ist

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathbb{L}(P' \cup \{p_0\}) \; .$$

Zu zeigen bleibt, dass $\Phi_1^{-1}(X)$ und $\Phi_1^{-1}(Y)$ durch P separiert werden.

Wir unterscheiden die Fälle, ob (X,Y) eine breite Lage ist oder nicht:

Sei (X,Y) keine breite Lage. Dann ist

$$(X,Y) \in \mathrm{Lin}(P'' \cup \{q_0'\}) \cup \mathrm{Rand}(P'' \cup \{q_0'\})$$

und somit ist auch $(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y))$ keine breite Lage. Wir erhalten darum für ein $m \in \omega$ mit $P' \cup \{p_0\} \subseteq P_m$:

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Lin}(P' \cup \{p_0\}) \cup \mathrm{Rand}(P' \cup \{p_0\}) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_m)$$

Somit ist

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)$$

und folglich

$$(X,Y) = \Phi_1((\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y))) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \; .$$

Sei nun (X,Y) eine breite Lage. Da X und Y in P separiert sind, erhalten wir dann aus $X \cup Y \subseteq P_{n+1}$ bereits

$$X \prec\!\!\prec^{P_{n+1}} Y \; .$$

Insbesondere sind $X - \{q_0'\}$ und $Y - \{q_0'\}$ durch P_{n+1} separiert.

Sei o.B.d.A. $q_0' \in X$. Wir setzen

$$(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := (X - \{q_0'\}, Y) \; .$$

Wir unterscheiden die Fälle, ob es ein X und Y separierendes Element bereits in P'', erst in $P_n - P''$ oder nur in $P_{n+1} - P_n$ gibt:

1.) Es gibt ein $z \in P''$, das X und Y separiert. Dann ist

$$z' := \Phi_1^{-1}(z) \in P'$$

und z' separiert $\Phi_1^{-1}(X)$ und $\Phi_1^{-1}(Y)$. Es ist also

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Sep}(P' \,|\, p_0) \subseteq \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)$$

und damit

$$(X,Y) = \Phi_1(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \; .$$

2.) X und Y werden durch P'' nicht separiert, wohl aber durch P_n *(Abbildung 5.1)*. Wegen $q_0' \in X$ und $\mathrm{L}_{P_n}(q_0') = (X'', Y'')$ gibt es also ein

$$z \in ((Y'')^{\uparrow} \cap P_n) - P'' \ ,$$

das X und Y separiert. Da $z \notin P''$ und insbesondere $z \notin Y''$ ist, gibt es wegen $z \in (Y'')^{\uparrow}$ ein

$$z' \in Y'' \quad \text{mit} \quad q_0' < z' < z \ .$$

Wir setzen nun

$$\bar{Y} := \{z'\} \cup (\widetilde{X} - (\widetilde{X} \cap \{z'\}^{\downarrow})) \ .$$

Offensichtlich ist $\bar{Y}$ eine Antikette in $(P'', \leq)$. Es gilt:

$$\bar{Y} \prec\!\!\prec^z \widetilde{Y} \quad \& \quad \bar{Y} \cup \widetilde{Y} \subseteq P'' \quad \& \quad X = \widetilde{X} \cup \{q_0'\} \subseteq \bar{Y}^{\downarrow}$$

Da Φ_0 die Separiertheit erhält, ist

$$\Phi_1^{-1}(\bar{Y}) = \Phi_0^{-1}(\bar{Y}) \prec\!\!\prec^P \Phi_0^{-1}(\widetilde{Y}) = \Phi_1^{-1}(\widetilde{Y}) \ .$$

Wegen $X \subseteq \bar{Y}^{\downarrow}$ erhalten wir somit

$$\Phi_1^{-1}(X) \prec\!\!\prec^P \Phi_1^{-1}(\widetilde{Y}) = \Phi_1^{-1}(Y) \ ,$$

also $(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)$ und damit

$$(X, Y) = \Phi_1((\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y))) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \ .$$

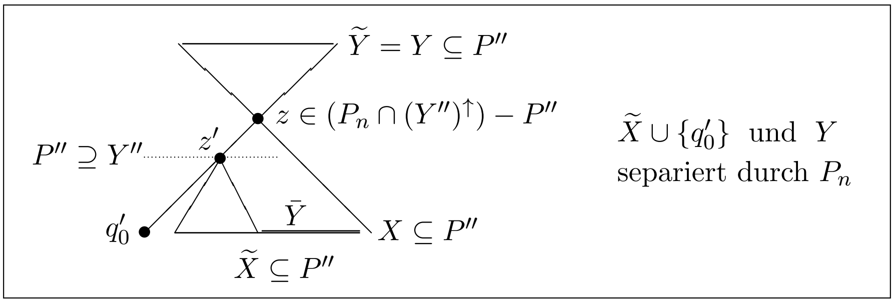


Abbildung 5.1: Zum Beweis von $(\widetilde{X} \cup \{q_0'\}, Y) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0))$

3.) X und Y werden nicht durch P_n, jedoch durch ein $z \in P_{n+1} - P_n$ separiert.

a) Sei $z = x_n^j(X_0, Y_0)$ für geeignete $j \in \omega$ und $(X_0, Y_0) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$.
Dann ist nach Konstruktion von $x_n^j(X_0, Y_0)$ wegen $\widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \subseteq P_n$ bereits $\widetilde{X} \subseteq X_0^{\downarrow}$ und $\widetilde{Y} \subseteq Y_0^{\uparrow}$. Nach Konstruktion von $q_0' = x_n^i(X'', Y'')$ und $z = x_n^j(X_0, Y_0)$ gibt es wegen $z > q_0'$ ein $x_0 \in X_0$ mit $q_0' < x_0 < z$ – insbesondere ist $X_0 \neq \emptyset$. Zusammen ergibt sich:

(5.9) $$X \subseteq X_0^{\downarrow} \quad \& \quad Y \subseteq Y_0^{\uparrow}$$

Angenommen, (X_0, Y_0) ist eine Randlage. Wegen $X_0 \neq \emptyset$ ist dann $Y_0 = \emptyset$ und damit $Y = \emptyset$ – ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass (X, Y) eine breite Lage ist.

Angenommen, (X_0, Y_0) ist eine lineare Lage. Dann ist $X_0 = \{x_0\}$ für ein geeignetes $x_0 \in P_n$. Dann ist $x_0 > q_0'$ und somit $x_0 \notin \widetilde{X}$. Wegen $X \subseteq X_0^{\downarrow}$ ist dann $x_0 > X$. Somit separiert x_0 bereits X und Y – im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass X und Y nicht durch P_n separiert sind.

Da $(X_0, Y_0) \in \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ ist, sind X_0 und Y_0 somit durch ein Element $z' \in P_n$ separiert. Wegen (5.9) separiert z' auch X und Y – ein Widerspruch.

b) Sei $z = z_n^j(X_0, Y_0; (X_1, Y_1 \cup \{v\}))$ für geeignete $j \in \omega$, $(X_0, Y_0) \in \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ und $(X_1, Y_1 \cup \{v\}) \in \mathbb{E}_v(P_n, (X_0, Y_0))$.
Dann ist nach Konstruktion von $z_n^j(X_0, Y_0; (X_1, Y_1 \cup \{v\}))$ wegen $\widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \subseteq P_n$ bereits $\widetilde{X} \subseteq X_1^{\downarrow}$ und $\widetilde{Y} \subseteq (Y_1 \cup \{x_n^j(X_0, Y_0)\})^{\uparrow}$. Aus $z, q_0' \in P_{n+1} - P_n$ und $q_0' < z$ erhalten wir nach Konstruktion, dass auch $q_0' \in X_1^{\downarrow}$ gilt. Außerdem folgt für jedes $y \in Y$ mit $y > x_n^j(X_0, Y_0)$ wegen $y \in P_n$ bereits, dass $y \in Y_0^{\uparrow}$ ist. So erhalten wir

$$X \subseteq X_1^{\downarrow} \quad \& \quad Y \subseteq \operatorname{Min}(Y_1 \cup Y_0)^{\uparrow}\,. \tag{5.10}$$

Wegen $(X_1, Y_1 \cup \{v\}) \in \mathbb{E}_v(P_n, (X_0, Y_0))$ ist $(X_1, \operatorname{Min}(Y_1 \cup Y_0)) \in \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$. Da (X, Y) eine breite Lage ist, erhalten wir $\emptyset \neq Y \subseteq \operatorname{Min}(Y_1 \cup Y_0)^{\uparrow}$ und $\emptyset \neq X \subseteq X_1^{\downarrow}$. Somit ist $(X_1, \operatorname{Min}(Y_1 \cup Y_0))$ keine Randlage.

Angenommen, $(X_1, \operatorname{Min}(Y_1 \cup Y_0))$ ist eine lineare Lage. Dann ist $X_1 = \{x_1\}$ für ein $x_1 \in P_n$ und $\operatorname{Min}(Y_1 \cup Y_0) = \{y_1\}$ für ein $y_1 \in P_n$. Falls $x_1 \notin X$, so separiert x_1 die Mengen X und Y – ein Widerspruch. Andernfalls ist $X = X_1$ und da (X, Y) eine breite Lage ist, ist dann $|Y| > 1$. Somit ist $y_1 \notin Y$, da sonst auch $Y = \{y_1\}$ gilt. Also separiert y_1 die Mengen X und Y – ein Widerspruch.

Also sind X_1 und $\operatorname{Min}(Y_1 \cup Y_0)$ durch ein Element $z' \in P_n$ separiert. Wegen (5.10) separiert z' auch X und Y – ein Widerspruch.

c) Sei $z = z_n^j(X_0, Y_0; (X_1 \cup \{v\}, Y_1))$ für geeignete $j \in \omega$, $(X_0, Y_0) \in \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ und $(X_1 \cup \{v\}, Y_1) \in \mathbb{E}_v(P_n, (X_0, Y_0))$. Dann ist

$$X \subseteq \operatorname{Max}(X_1 \cup \{x_n^j(X_0, Y_0)\})^{\downarrow} \quad \& \quad Y \subseteq Y_1^{\uparrow}\,. \tag{5.11}$$

Wegen $x_n^i(X'', Y'') \in X$ ist somit entweder $x_n^i(X'', Y'') = x_n^j(X_0, Y_0)$ oder $X \subseteq \operatorname{Max}(X_1 \cup X_0)^{\downarrow}$.

(i) Sei zunächst $X \subseteq \operatorname{Max}(X_1 \cup X_0)^{\downarrow}$.
Wegen $(X_1 \cup \{v\}, Y_1) \in \mathbb{E}_v(P_n, (X_0, Y_0))$ ist $(\operatorname{Max}(X_1 \cup X_0), Y_1) \in \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$. Da (X, Y) eine breite Lage ist, erhalten wir $\emptyset \neq X \subseteq \operatorname{Max}(X_1 \cup X_0)^{\downarrow}$. Somit ist $(\operatorname{Max}(X_1 \cup X_0), Y_1)$ keine Randlage.
Angenommen, $(\operatorname{Max}(X_1 \cup X_0), Y_1)$ ist eine lineare Lage. Dann ist $\operatorname{Max}(X_1 \cup X_0) = \{x_1\}$ für ein $x_1 \in P_n$. Wegen $|Y| = 1$ ist $|X| > 1$, denn (X, Y) ist eine breite Lage. Darum ist x_1 nicht in der Antikette X enthalten und separiert X und Y – ein Widerspruch.

Also sind $\mathrm{Max}(X_1 \cup X_0)$ und Y_1 durch ein Element $z' \in P_n$ separiert. Wegen (5.11) separiert z' auch X und Y – ein Widerspruch.

(ii) Sei nun $x_n^i(X'', Y'') = x_n^j(X_0, Y_0)$.
Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_{P_{n+1}}(z) &= \mathrm{L}_{P_{n+1}}(z_n^i(X'', Y''; (X_1 \cup \{v\}, Y_1))) \\ &= (X_1 \cup \{x_n^i(X'', Y'')\}, Y_1) \ . \end{aligned}$$

Das heißt,

$$(X_1 \cup \{x_n^i(X'', Y'')\}, Y_1) \in \mathrm{Ex}(P_{n+1} \,|\, x_n^i(X'', Y'')) = \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \ .$$

Also sind $\Phi_1^{-1}(X_1 \cup \{x_n^i(X'', Y'')\})$ und $\Phi_1^{-1}(Y_1)$ durch P separiert. Wegen $\widetilde{X} \subseteq X_1^{\downarrow}$ und $Y = \widetilde{Y} \subseteq Y_1^{\uparrow}$ sind auch $\Phi_1^{-1}(X)$ und $\Phi_1^{-1}(Y)$ durch P separiert, d.h.

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \ .$$

Daraus folgt nun

$$(X, Y) = \Phi_1(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \ .$$

In jedem Fall ist somit $(X, Y) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0))$.

Insgesamt erhalten wir die Inklusion

$$\Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \supseteq \mathrm{Sep}(P'', P \,|\, q_0') \ .$$

Damit ist (5.8) gezeigt.

Wir zeigen nun, dass Φ_1 die Separiertheit erhält.

Aus

$$\Phi_1(p_0) = q_0' \quad \& \quad \Phi_1(\mathbb{L}(P' \cup \{p_0\})) = \mathbb{L}(P'' \cup \{q_0'\})$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} p_0 \in X \cup Y \ &\Leftrightarrow \ q_0' \in \Phi_1(X) \cup \Phi_1(Y) \\ (X, Y) \in \mathbb{L}(P' \cup \{p_0\}) \ &\Leftrightarrow \ (\Phi_1(X), \Phi_1(Y)) \in \mathbb{L}(P'' \cup \{q_0'\}) \end{aligned}$$

Sei also $(X, Y) \in \mathbb{L}(P' \cup \{p_0\})$ beliebig. Wir müssen zeigen:

$$X \prec\!\prec^P Y \ \Leftrightarrow \ \Phi_1(X) \prec\!\prec^P \Phi_1(Y)$$

Wir unterscheiden die Fälle $p_0 \in X \cup Y$ und $p_0 \notin X \cup Y$:

1.) Für $p_0 \notin X \cup Y$ ist $\Phi_1(X) = \Phi_0(X)$ und $\Phi_1(Y) = \Phi_0(Y)$. Da wir vorausgesetzt haben, dass Φ_0 die Separiertheit erhält, ergibt sich:

$$\begin{aligned} X \prec\!\prec^P Y \ &\Leftrightarrow \ \Phi_0(X) \prec\!\prec^P \Phi_0(Y) \\ &\Leftrightarrow \ \Phi_1(X) \prec\!\prec^P \Phi_1(Y) \end{aligned}$$

2.) Für $p_0 \in X \cup Y$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} X \prec\!\!\prec^P Y &\Leftrightarrow (X, Y) \in \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0) \\ &\Leftrightarrow (\Phi_1(X), \Phi_1(Y)) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) \overset{(5.8)}{=} \mathrm{Sep}(P'', P \,|\, q_0') \\ &\Leftrightarrow \Phi_1(X) \prec\!\!\prec^P \Phi_1(Y) \end{aligned}$$

Mit Φ_1 erhält auch

$$\Phi_1^{-1} : \; P'' \cup \{q_0'\} \to P' \cup \{p_0\}$$

die Separiertheit in $(P, \leq)$ und wir können nun ebenso Φ_1^{-1} zu einem partiellen Isomorphismus Φ_2^{-1} von $P'' \cup \{q_0'\} \cup \{q_{m_1}\}$ in $(P, \leq)$ fortsetzen (wobei $m_1 := \mathrm{Min}\{k \in \omega \mid q_k \neq q_0'\}$ sei). Mit dem Hausdorff'schen Zickzack-Verfahren erhalten wir auf diese Art in abzählbar vielen Schritten eine Fortsetzung von Φ zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$.

□

5.4 Beweis des Hauptsatzes für exakt-separativ konstruierte partielle Ordnungen

Sei in diesem Abschnitt $(P, \leq)$ eine wie in Abschnitt 4.2 exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung.

Wie im Beweis für separativ konstruierte partielle Ordnungen sei $\Phi : P' \to P''$ ein endlicher partieller Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit (und damit auch die exakte Separiertheit) erhält. Wir setzen wieder:

$$\begin{aligned} P - P' &=: \{p_n \mid n \in \omega\} \\ P - P'' &=: \{q_n \mid n \in \omega\} \end{aligned}$$

Auch hier werden wir Φ rekursiv mit dem Zickzack-Verfahren fortsetzen und dabei zuerst dem Element p_0 ein Bild in $P - P''$ zuordnen.

Sei $\Phi_0 = \Phi$ und $n \in \omega$ mit $P' \cup P'' \subseteq P_{n-1} \subseteq P_n$. Weiter setzen wir:

$$\begin{aligned} (X', Y') &:= \mathrm{L}_{P'}(p_0) \\ (X'', Y'') &:= (\Phi_0(X'), \Phi_0(Y')) \end{aligned}$$

Wir müssen nun – anders als bei den separativ konstruierten partiellen Ordnungen – die Fälle unterscheiden, ob (X'', Y'') in $\mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n)$ liegt oder nicht:

1.) Sei $(X'', Y'') \notin \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n)$; insbesondere ist (X'', Y'') dann eine breite Lage. Aus $X' \ll_{P'}^{p_0} Y'$ erhalten wir $X' \ll_{P'}^{P} Y'$ und somit nach Voraussetzung auch $X'' \ll_{P''}^{P} Y''$. Insbesondere werden X'' und Y'' durch P separiert. Da (X'', Y'') eine separierte *breite* Lage in $(P_{n-1}, \leq)$ ist, werden X'' und Y'' bereits durch P_{n-1} separiert. Wir erhalten somit:

$$(X'', Y'') \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_{n-1})$$

Es ist $(\emptyset, Y'') \in \mathrm{Rand}(P_{n-1}) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_{n-1})$. Also ist $A_{n-1}(\emptyset, Y'')$ definiert. Des Weiteren ist

$$(X'' \cup \{v\}, Y'') \in \mathbb{E}_v(P_{n-1}, (\emptyset, Y'')) \ ,$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Max}(X'' \cup \emptyset), Y'') = (X'', Y'') &\in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_{n-1}) \\ X'' &\subseteq P_{n-1} - (Y'')^{\uparrow} \\ Y'' &\subseteq (Y'')^{\uparrow}\end{aligned}$$

Es gibt also ein $i \in \omega$ mit $T^i_{n-1}(\emptyset, Y''; v) = \{(X'' \cup \{v\}, Y'')\}$.

Damit sind $X'' \cup \{x^i_{n-1}(\emptyset, Y'')\}$ und Y'' in und bezüglich P_n durch die Menge $\{z^i_n(\emptyset, Y''; (X'' \cup \{v\}, Y''))\}$ exakt separiert. Wir erhalten somit

$$(\bar{X}'', \bar{Y}'') := (X'' \cup \{x^i_{n-1}(\emptyset, Y'')\}, Y'') \in \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n) \ .$$

Als Lage von $A_n(\bar{X}'', \bar{Y}'')$ zu P'' erhalten wir dann (wie gewünscht)

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{P''}(A_n(\bar{X}'', \bar{Y}'')) &= \Big(\mathrm{Max}\left(P'' \cap (X'' \cup \{x^i_{n-1}(\emptyset, Y'')\})^{\downarrow}\right), \mathrm{Min}\left(P'' \cap (Y'')^{\uparrow}\right)\Big) \\ &= \Big(\mathrm{Max}\left((P'' \cap (X'')^{\downarrow}) \cup (P'' \cap \{x^i_{n-1}(\emptyset, Y'')\})^{\downarrow}\right), Y''\Big) \\ &= \Big(\mathrm{Max}\left((P'' \cap (X'')^{\downarrow}) \cup \emptyset\right), Y''\Big) \\ &= (X'', Y'') \ .\end{aligned}$$

2.) Falls $(X'', Y'') \in \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n)$ gilt (z.B. $(X'', Y'') \in \mathrm{Lin}(P_n) \cup \mathrm{Rand}(P_n)$), so können wir $\Phi_1(p_0)$ in $A_n(X'', Y'')$ wählen. Um die Notation einheitlich zu halten, setzen wir hier $(\bar{X}'', \bar{Y}'') := (X'', Y'')$.

Als Bild von p_0 unter der Fortsetzung Φ_1 wählen wir nun ein Element von $A_n(\bar{X}'', \bar{Y}'')$ aus.

Die Menge der durch P exakt separierten p_0-Lagen in P' ist gegeben durch

$$\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0) = \{(X, Y) \in \mathbb{L}(P' \cup \{p_0\}) \mid X \cup Y \ni p_0,\ X \ll^P_{P' \cup \{p_0\}} Y\} \ .$$

Mit Proposition 5.1.3 ist

$$\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]} \subseteq \mathbb{E}_v(P' \subseteq P, (X', Y')) \ .$$

Es ist wieder zu beachten, dass es sich bei den Elementen von $\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)$ um Lagen in $\mathbb{L}(P' \cup \{p_0\})$ handelt, während die Objekte aus $\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}$ Terme der Sprache $\mathfrak{L}(n)$ sind. Aber auch hier können wir Φ_0 kanonisch auf $\mathfrak{L}(n)$-Termen operieren lassen. Wie im Beweis für separativ konstruierte partielle Ordnungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) &\subseteq \Phi_0(\mathbb{E}_v(P' \subseteq P, (X', Y'))) \\ &= \mathbb{E}_v(P'' \subseteq P, (X'', Y''))\end{aligned}$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
(X'')^{\downarrow} &\subseteq (X'' \cup \{x^i_{n-1}(\emptyset, Y'')\})^{\downarrow} = (\bar{X}'')^{\downarrow} \\
(Y'')^{\uparrow} = (\bar{Y}'')^{\uparrow} &\subseteq (\bar{Y}'')^{\uparrow}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
P'' - ((X'')^{\downarrow} \cup (Y'')^{\uparrow}) &= P'' - ((X'' \cup \{x^i_{n-1}(\emptyset, Y'')\})^{\downarrow} \cup (Y'')^{\uparrow}) \\
&\subseteq P_n - ((\bar{X}'')^{\downarrow} \cup (\bar{Y}'')^{\uparrow})
\end{aligned}
$$

ist sogar

$$\mathbb{E}_v(P'' \subseteq P, (X'', Y'')) \subseteq \mathbb{E}_v(P'' \subseteq P, (\bar{X}'', \bar{Y}'')) \; .$$

Offenbar ist auch

$$\mathbb{E}_v(P'' \subseteq P, (\bar{X}'', \bar{Y}'')) \subseteq \mathbb{E}_v(P_n \subseteq P, (\bar{X}'', \bar{Y}'')) \; .$$

Wir haben also

$$\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) \subseteq \mathbb{E}_v(P_n \subseteq P, (\bar{X}'', \bar{Y}'')) \; , \tag{5.12}$$

müssen jedoch zeigen:

$$\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) \subseteq \mathbb{E}_v(P_n, (\bar{X}'', \bar{Y}''))$$

Sei also $(X, Y) \in \mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)$ beliebig, o.B.d.A. $(X, Y) = (\widetilde{X} \cup \{p_0\}, \widetilde{Y})$. Mit (5.12) bleibt noch zu zeigen:

$$(\mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup \bar{X}''), \Phi_0(\widetilde{Y})) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$$

Wegen $(X, Y) \in \mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)$ existiert ein $q \in P$ mit $X < q < Y$. Wegen $\widetilde{X} \cup X' \subseteq X^{\downarrow}$ ist somit $\mathrm{Max}(\widetilde{X} \cup X') \prec\!\!\prec^P \widetilde{Y}$. Da Φ_0 die Separiertheit erhält, gilt auch

$$\Phi_0(\mathrm{Max}(\widetilde{X} \cup X')) \prec\!\!\prec^P \Phi_0(\widetilde{Y}) \; .$$

Aus $\Phi_0(\mathrm{Max}(\widetilde{X} \cup X')) = \mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup \Phi_0(X')) = \mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup X'')$ erhalten wir

$$\mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup X'') \prec\!\!\prec^P \Phi_0(\widetilde{Y}) \; .$$

Mit $\mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup X'') \cup \Phi_0(\widetilde{Y}) \subseteq P_n$ ist bereits

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup X'') \prec\!\!\prec^{P_n} \Phi_0(\widetilde{Y}) & & \text{oder} \\
(\mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup X''), \Phi_0(\widetilde{Y})) & \in & \mathrm{Rand}(P_n) \cup \mathrm{Lin}(P_n) \quad .
\end{array}
$$

Wegen $\mathrm{Rand}(P_n) \cup \mathrm{Lin}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n)$ gilt damit in beiden Fällen

$$(\mathrm{Max}(\Phi_0(\widetilde{X}) \cup X''), \Phi_0(\widetilde{Y})) \in \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n) \; .$$

Wir erhalten also

$$\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) \subseteq \mathbb{E}_v(P_n, (\bar{X}'', \bar{Y}'')) \; .$$

Wegen $\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0) \subseteq (\mathfrak{P}_e(P' \cup \{p_0\}))^2$ ist

$$\begin{aligned}\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) &\subseteq \mathbb{E}_v(P_n, (\bar{X}'', \bar{Y}'')) \cap (\mathfrak{P}_e(P'' \cup \{v\}))^2 \\ &= \mathbb{E}_v(P'' \subseteq P_n, (\bar{X}'', \bar{Y}'')) \; .\end{aligned}$$

Da P' endlich ist, ist auch $\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)$ und somit $\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]})$ endlich und es gilt:

$$\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) \;\in\; \mathfrak{P}_e(\mathbb{E}_v(P'' \subseteq P_n, (\bar{X}'', \bar{Y}''))) \;\subseteq\; \mathfrak{P}_e(\mathbb{E}_v(P_n, (\bar{X}'', \bar{Y}'')))$$

Für ein geeignetes $i \in \omega$ ist somit

$$\Phi_0(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)_{[p_0/v]}) = T_n^i(\bar{X}'', \bar{Y}''; v) \; .$$

Wir setzen

$$T := T_n^i(\bar{X}'', \bar{Y}''; v) \quad \& \quad \Phi_1(p_0) := q_0' := x_n^i(\bar{X}'', \bar{Y}'') \; .$$

Offenbar ist Φ_1 ordnungserhaltend. Des Weiteren ist

$$\Phi_1(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)) = T_{[v/q_0']} = \mathrm{Ex}(P_{n+1} \,|\, q_0')$$

und wegen $\mathrm{Im}(\Phi_1) = P'' \cup \{q_0'\}$ sogar

$$\Phi_1(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)) = \mathrm{Ex}(P'', P_{n+1} \,|\, q_0') \; .$$

Wir behaupten:

$$\Phi_1(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)) = \mathrm{Ex}(P'', P \,|\, q_0') \tag{5.13}$$

Wegen $\Phi_1(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)) = \mathrm{Ex}(P'', P_{n+1} \,|\, q_0') \subseteq \mathrm{Ex}(P'', P \,|\, q_0')$ müssen wir nur noch die Inklusion

$$\mathrm{Ex}(P'', P \,|\, q_0') \subseteq \Phi_1(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0))$$

beweisen. Nach Hilfssatz 5.2.4.2 ist

$$\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0) = \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0) \quad \& \quad \mathrm{Ex}(P'', P \,|\, q_0') = \mathrm{Sep}(P'', P \,|\, q_0') \; .$$

Es reicht also zu zeigen:

$$\mathrm{Sep}(P'', P \,|\, q_0') \subseteq \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0))$$

Wir gehen dazu im Wesentlichen wie im Beweis für separativ konstruierte partielle Ordnungen vor.

Sei also $(X, Y) \in \mathrm{Sep}(P'', P \,|\, q_0')$. Das heißt, X und Y sind durch P separiert, q_0' liegt in $X \cup Y$ und es ist $(X, Y) \in \mathbb{L}(P'' \cup \{q_0'\})$. Wegen $q_0' \in X \cup Y$ ist auch

$$p_0 \in \Phi_1^{-1}(X) \cup \Phi_1^{-1}(Y) \; .$$

Da Φ_1 ordnungserhaltend ist, folgt aus $(X,Y) \in \mathbb{L}(P'' \cup \{q_0'\})$ bereits

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathbb{L}(P' \cup \{p_0\}) .$$

Zu zeigen bleibt, dass $\Phi_1^{-1}(X)$ und $\Phi_1^{-1}(Y)$ durch P separiert werden.

Wir unterscheiden die Fälle, ob (X,Y) eine breite Lage ist oder nicht:

1.) Sei (X,Y) keine breite Lage. Wie im Beweis für separativ konstruierte partielle Ordnungen erhalten wir für ein $m \in \omega$ mit $P' \cup \{p_0\} \subseteq P_m$

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Lin}(P' \cup \{p_0\}) \cup \mathrm{Rand}(P' \cup \{p_0\}) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_m) ,$$

also

$$(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)$$

und folglich

$$(X,Y) = \Phi_1((\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y))) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) .$$

2.) Sei nun (X,Y) eine breite Lage. Da X und Y in P separiert sind, erhalten wir aus $X \cup Y \subseteq P_{n+1}$ bereits

$$X \prec\!\!\prec^{P_{n+1}} Y .$$

Falls X und Y durch P'' separiert werden, sehen wir wie im separativen Fall, dass $\Phi_1^{-1}(X)$ und $\Phi_1^{-1}(Y)$ durch P' separiert werden, und erhalten:

$$(X,Y) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0))$$

Falls X und Y durch P_{n+1}, nicht aber durch P_n separiert werden, erhalten wir ebenfalls genau wie im separativen Fall: $(X,Y) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0))$.

Den Fall, dass X und Y durch P_n, nicht aber durch P'' separiert werden, wollen wir etwas genauer untersuchen.

a) Betrachten wir zuerst den Fall, dass q_0' in X liegt *(Abbildung 5.1)*. Wir setzen

$$(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := (X - \{q_0'\}, Y) .$$

Wegen $q_0' \in X$ und $\mathrm{L}_{P_n}(q_0') = (\bar{X}'', \bar{Y}'')$ gibt es also ein

$$z \in ((\bar{Y}'')^{\uparrow} \cap P_n) - P'' ,$$

das X und Y separiert. Wir erinnern daran, dass $\bar{Y}'' = Y''$ gilt. Daher können wir weiter genau wie im separativen Fall verfahren: Da $z \notin P''$ und insbesondere $z \notin \bar{Y}'' = Y''$ ist, gibt es wegen $z \in (\bar{Y}'')^{\uparrow}$ ein

$$z' \in \bar{Y}'' \quad \text{mit} \quad q_0' < z' < z .$$

Wir setzen

$$\bar{Y} := \{z'\} \cup (\widetilde{X} - (\widetilde{X} \cap \{z'\}^{\downarrow})) .$$

Offensichtlich ist $\bar{Y}$ eine Antikette in $(P'', \leq)$. Es gilt:

$$\bar{Y} \prec\!\prec^{z} \widetilde{Y} \quad \& \quad \bar{Y} \cup \widetilde{Y} \subseteq P'' \quad \& \quad X = \widetilde{X} \cup \{q_0'\} \subseteq \bar{Y}^{\downarrow} .$$

Da Φ_0 die Separiertheit erhält, ist auch

$$\Phi_1^{-1}(\bar{Y}) = \Phi_0^{-1}(\bar{Y}) \prec\!\prec^{P} \Phi_0^{-1}(\widetilde{Y}) = \Phi_1^{-1}(\widetilde{Y}) .$$

Wegen $X \subseteq \bar{Y}^{\downarrow}$ ist somit auch

$$\Phi_1^{-1}(X) \prec\!\prec^{P} \Phi_1^{-1}(\widetilde{Y}) = \Phi_1^{-1}(Y) ,$$

also $(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)$ und damit

$$(X, Y) = \Phi_1((\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y))) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)) .$$

b) Sei nun q_0' in Y enthalten *(Abbildung 5.2)*. Wir notieren

$$(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := (X, Y - \{q_0'\}) .$$

Wegen $q_0' \in Y$ und $\mathrm{L}_{P_n}(q_0') = (\bar{X}'', \bar{Y}'')$ gibt es also ein

$$z \in ((\bar{X}'')^{\downarrow} \cap P_n) - P'' ,$$

das X und Y separiert. Gegenüber dem separativen Fall benötigen wir an dieser Stelle einen zusätzlichen Schritt: Wir erinnern uns, dass definitionsgemäß

$$\bar{X}'' = X'' \cup \{x_{n-1}^{i}(\emptyset, Y'')\}$$

ist und somit $\mathrm{L}_{P_n}(x_{n-1}^{i}(\emptyset, Y'')) = (\emptyset, Y'')$ gilt. Es ist also

$$\{x_{n-1}^{i}(\emptyset, Y'')\}^{\downarrow} \cap P_n = \{x_{n-1}^{i}(\emptyset, Y'')\} .$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}(\bar{X}'')^{\downarrow} \cap P_n &= ((X'')^{\downarrow} \cap P_n) \cup (\{x_{n-1}^{i}(\emptyset, Y'')\}^{\downarrow} \cap P_n) \\ &= ((X'')^{\downarrow} \cap P_n) \cup \{x_{n-1}^{i}(\emptyset, Y'')\} .\end{aligned}$$

Aus $\emptyset \neq X \subseteq P'' \subseteq P_{n-1}$ folgt, dass $x_{n-1}^{i}(\emptyset, Y'')$ nicht X und Y separieren kann. Somit erhalten wir

$$z \in P_n \cap (X'')^{\downarrow}$$

und können nun wieder wie im separativen Fall verfahren: Wegen $z \notin P''$ und damit $z \in (X'')^{\downarrow} - X''$ existiert ein

$$z' \in X'' \quad \text{mit} \quad z < z' < q_0' .$$

Wir setzen

$$\bar{X} := \{z'\} \cup (\widetilde{Y} - (\widetilde{Y} \cap \{z'\}^{\uparrow}))\ .$$

Offenbar ist $\bar{X}$ eine Antikette in $(P'', \leq)$ und es gilt:

$$\widetilde{X} = X \prec\!\prec^{z} \bar{X} \quad \& \quad \bar{X} \cup \widetilde{X} \subseteq P'' \quad \& \quad Y = \widetilde{Y} \cup \{q_0'\} \subseteq \bar{X}^{\uparrow}$$

Da Φ_0 die Separiertheit erhält, ist auch

$$\Phi_1^{-1}(\widetilde{X}) = \Phi_0^{-1}(\widetilde{X}) \prec\!\prec^{P} \Phi_0^{-1}(\bar{X}) = \Phi_1^{-1}(\bar{X})\ .$$

Wegen $Y \subseteq \bar{X}^{\uparrow}$ ist somit auch

$$\Phi_1^{-1}(X) = \Phi_1^{-1}(\widetilde{X}) \prec\!\prec^{P} \Phi_1^{-1}(Y)\ ,$$

also $(\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y)) \in \mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0)$ und damit

$$(X, Y) = \Phi_1((\Phi_1^{-1}(X), \Phi_1^{-1}(Y))) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0))\ .$$

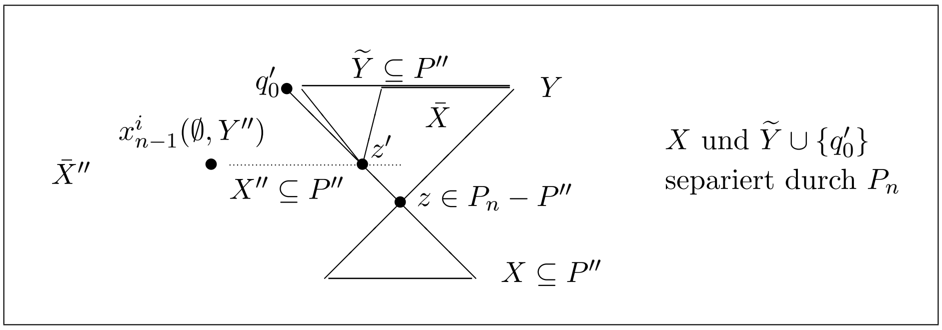


Abbildung 5.2: Zum Beweis von $(X, \widetilde{Y} \cup \{q_0'\}) \in \Phi_1(\mathrm{Sep}(P', P \,|\, p_0))$

Damit ist (5.13) bewiesen.

Wir zeigen nun, dass Φ_1 die exakte Separiertheit erhält. Sei $(X, Y) \in \mathbb{L}(P' \cup \{p_0\})$ beliebig.

1.) Wir betrachten zunächst den Fall, dass $p_0 \in X \cup Y$ ist (und damit auch $q_0' \in \Phi_1(X) \cup \Phi_1(Y)$). Es gilt:

$$\begin{aligned} X \ll^{P}_{P' \cup \{p_0\}} Y &\Leftrightarrow (X, Y) \in \mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0) \\ &\Leftrightarrow (\Phi_1(X), \Phi_1(Y)) \in \Phi_1(\mathrm{Ex}(P', P \,|\, p_0)) \overset{(5.13)}{=} \mathrm{Ex}(P'', P \,|\, q_0') \\ &\Leftrightarrow \Phi_1(X) \ll^{P}_{P'' \cup \{q_0'\}} \Phi_1(Y) \end{aligned}$$

2.) Betrachten wir nun den Fall, dass $p_0 \notin X \cup Y$ ist (und somit auch $q_0' \notin \Phi_1(X) \cup \Phi_1(Y)$).

Sei $X \ll^P_{P' \cup \{p_0\}} Y$. Da $p_0 \notin X \cup Y$ ist, gilt auch $X \ll^P_{P'} Y$ und es folgt

$$\Phi_1(X) = \Phi_0(X) \ll^P_{P''} \Phi_0(Y) = \Phi_1(Y) .$$

Es existiert somit ein $q \in P$ mit $\mathrm{L}_{P''}(q) = (\Phi_1(X), \Phi_1(Y))$ und insbesondere $\Phi_1(X) < q < \Phi_1(Y)$. Damit ist

$$(\Phi_1(X), \Phi_1(Y)) \in \mathrm{Sep}(P'' \cup \{q_0'\} \subseteq P) .$$

Mit Hilfssatz 5.2.4.1 ist $\mathrm{Sep}(P'' \cup \{q_0'\} \subseteq P) = \mathrm{Ex}(P'' \cup \{q_0'\} \subseteq P)$; somit erhalten wir:

$$\Phi_1(X) \ll^P_{P'' \cup \{q_0'\}} \Phi_1(Y)$$

Sei umgekehrt $\Phi_1(X) \ll^P_{P'' \cup \{q_0'\}} \Phi_1(Y)$. Da $q_0' \notin \Phi_1(X) \cup \Phi_1(Y)$ ist, gilt auch

$$\Phi_0(X) = \Phi_1(X) \ll^P_{P''} \Phi_1(Y) = \Phi_0(Y)$$

und es folgt $X \ll^P_{P'} Y$. Damit ist

$$(X, Y) \in \mathrm{Sep}(P' \cup \{p_0\} \subseteq P) = \mathrm{Ex}(P' \cup \{p_0\} \subseteq P) ,$$

also $X \ll^P_{P' \cup \{p_0\}} Y$.

Φ_1 erhält also die exakte Separiertheit in $(P, \leq)$. Analog zum Beweis für separativ erzeugte partielle Ordnungen sehen wir, dass sich Φ mit dem Zickzack-Verfahren in abzählbar vielen Schritten zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen lässt.

□

5.5 Folgerungen

Wir haben nun Beispiele für abzählbare partielle Ordnungen gefunden, die zwar Ketten- und Antiketten-homogen, nicht aber homogen sind. Insbesondere haben wir gezeigt, dass bei abzählbaren partiellen Ordnungen von der Ketten- und Antiketten-Homogenität nicht auf die Homogenität geschlossen werden kann.

5.5.1 Korollar *Sowohl die separativ konstruierte partielle Ordnung als auch die exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung aus Abschnitt 4.2 sind Ketten- und Antiketten-homogen, jedoch nicht homogen.*

Beweis Der Hauptsatz 5.2.5 zeigt zusammen mit Bemerkung 5.2.2, dass sowohl die separativ konstruierte als auch die exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung Ketten- und Antiketten-homogen sind. Mit Korollar 4.2.7 sind sie aber nicht homogen. □

5.5.2 Korollar *Für die Klasse der höchstens abzählbaren partiellen Ordnungen impliziert die Ketten- und Antiketten-Homogenität nicht die Homogenität.*

5.6 Verallgemeinerungen der Konstruktion

5.6.1 Weitere Einladungen – weitere Beispiele

In Abschnitt 4.2 haben wir separativ und exakt-separativ jeweils eine abzählbare partielle Ordnung konstruiert. Im Konstruktions-Schritt (von $(P_n, \leq_n)$ zu $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$) haben wir dabei für jede Lage (X, Y) aus der Einladung $\mathbb{E}(P_n)$ eine abzählbare Antikette $A_n(X, Y)$ eingefügt. Wir konstruieren eine partielle Ordnung *separativ*, wenn wir in jedem Konstruktions-Schritt (also für jedes $n \in \omega$) $\mathbb{E}(P_n) = \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n)$ wählen. Entsprechend konstruieren wir eine partielle Ordnung *exakt-separativ*, wenn wir in jedem Konstruktions-Schritt $\mathbb{E}(P_n) = \mathbb{E}_{\text{ex}}(P_n)$ wählen.

Nun können wir die Einladungen $\mathbb{E}(P_n)$ aber auch der Gestalt erweitern, dass wir Lagen der Konfigurationen $(2, 1, \omega)$ oder $(1, 2, \omega)$ hinzunehmen. Für jedes $n \in \omega$ definieren wir darum folgende Einladungen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\vartriangle}_{\text{sep}}(P_n) &:= \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n) \cup \{(X, Y) \in \mathbb{L}(P_n) \mid (|X|, |Y|) = (1, 2)\} \\
\mathbb{E}^{\triangledown}_{\text{sep}}(P_n) &:= \mathbb{E}_{\text{sep}}(P_n) \cup \{(X, Y) \in \mathbb{L}(P_n) \mid (|X|, |Y|) = (2, 1)\} \\
\mathbb{E}^{\lozenge}_{\text{sep}}(P_n) &:= \mathbb{E}^{\vartriangle}_{\text{sep}}(P_n) \cup \mathbb{E}^{\triangledown}_{\text{sep}}(P_n)
\end{aligned}$$

Ersetzen wir nun in der Konstruktion aus Abschnitt 4.2 in jedem Schritt $\mathbb{E}(P_n)$ durch $\mathbb{E}^{\vartriangle}_{\text{sep}}(P_n)$, dann nennen wir die so erhaltene partielle Ordnung ***$\triangledown$-separativ konstruiert***. Falls wir $\mathbb{E}(P_n)$ durch $\mathbb{E}^{\triangledown}_{\text{sep}}(P_n)$ ersetzen, nennen wir die erhaltene partielle Ordnung ***$\vartriangle$-separativ konstruiert***. Und falls wir $\mathbb{E}(P_n)$ durch $\mathbb{E}^{\lozenge}_{\text{sep}}(P_n)$ ersetzen, so nennen wir die erhaltene partielle Ordnung ***$\lozenge$-separativ konstruiert***.

5.6.1 Bemerkung *Zwischen der Konstruktions-Art einer partiellen Ordnung und ihren Separiertheits-Eigenschaften besteht folgender Zusammenhang:*

1.) *Separativ oder exakt-separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind weder* $(1, 2, 0)$- *noch* $(2, 1, 0)$-*separiert.*

2.) $\vartriangle$-*separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind* $(2, 1, 0)$-, *nicht jedoch* $(1, 2, 0)$-*separiert.*

3.) $\triangledown$-*separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind* $(1, 2, 0)$-, *nicht jedoch* $(2, 1, 0)$-*separiert.*

4.) $\lozenge$-*separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind sowohl* $(1, 2, 0)$- *als auch* $(2, 1, 0)$-*separiert.*

Alle diese Ordnungen sind universell, nicht aber Stern-dicht. Nach Satz 2.2.1 sind sie somit nicht homogen.

Hiermit ist offensichtlich, dass die Definitionen der verschiedenen Einladungen durch die Überlegungen aus Kapitel 2 motiviert sind.

Dass die so erhaltenen Strukturen Ketten- und Antiketten-homogen sind, sehen wir wie im Beweis für separativ konstruierte partielle Ordnungen in Abschnitt 5.3.

5.6.2 Korollar *Es gibt mindestens vier paarweise nicht-isomorphe abzählbare nicht-homogene, jedoch Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnungen.*

5.6.2 Andere Zwischenstrukturen

Unabhängig davon, welche Einladung wir bei der Konstruktion aus Abschnitt 4.2 für $\mathbb{E}(P_n)$ einsetzen, können wir anstelle der einzelnen Elemente

$$z_n^i(X, Y; (X', Y'))$$

auch beliebige nicht-leere partielle Ordnungen

$$Z_n^i(X, Y; (X', Y'))$$

einfügen. Auch auf diese Weise erhalten wir eine partielle Ordnung.

Außerdem können wir die Konstruktion mit einer beliebigen höchstens abzählbaren partiellen Ordnung anstelle einer abzählbaren Antikette beginnen. Dann sind die Mengen $\mathbb{E}_v(P_n, (X, Y))$ möglicherweise nur endlich (aber nie leer). Dies ist allerdings nicht weiter von Belang – wir wählen die Antiketten $A_n(X, Y)$ in derselben Kardinalität.

5.6.3 Beispiel Beginnen wir die Konstruktion z.B. mit $P_0 = \emptyset$ und wählen für sämtliche $Z_n^i(X, Y; (X', Y'))$ ein Pentagon. Wir wollen $(P, \leq)$ separativ konstruieren – zumindest $(P_1, \leq_1)$.

Es ist $P_1' = A_0(\emptyset, \emptyset)$ und

$$\mathbb{E}_v(P_0, (\emptyset, \emptyset)) = \{(\{v\}, \emptyset), (\emptyset, \{v\})\} \ .$$

Damit erhalten wir

$$\mathfrak{P}(\mathbb{E}_v(P_0, (\emptyset, \emptyset))) = \{\, T_0^0(\emptyset, \emptyset; v),\, T_0^1(\emptyset, \emptyset; v),\, T_0^2(\emptyset, \emptyset; v),\, T_0^3(\emptyset, \emptyset; v)\}$$

mit

$$\begin{aligned} T_0^0(\emptyset, \emptyset; v) &= \emptyset & T_0^2(\emptyset, \emptyset; v) &= \{(\{v\}, \emptyset)\} \\ T_0^1(\emptyset, \emptyset; v) &= \{(\emptyset, \{v\})\} & T_0^3(\emptyset, \emptyset; v) &= \{(\emptyset, \{v\}), (\{v\}, \emptyset)\} \ . \end{aligned}$$

Entsprechend enthält $A_0(\emptyset, \emptyset)$ die vier Elemente

$$\begin{aligned} x^0 &:= x_0^0(\emptyset, \emptyset) & x^2 &:= x_0^2(\emptyset, \emptyset) \\ x^1 &:= x_0^1(\emptyset, \emptyset) & x^3 &:= x_0^3(\emptyset, \emptyset) \end{aligned}$$

und als Zwischen-Strukturen fügen wir ein:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pen}_a &:= Z_0^1(\emptyset, \emptyset; (\emptyset, \{v\})) & \mathrm{Pen}_c &:= Z_0^3(\emptyset, \emptyset; (\emptyset, \{v\})) \\ \mathrm{Pen}_b &:= Z_0^2(\emptyset, \emptyset; (\{v\}, \emptyset)) & \mathrm{Pen}_d &:= Z_0^3(\emptyset, \emptyset; (\{v\}, \emptyset)) \ . \end{aligned}$$

Somit ist

$$P_1 = A_0(\emptyset, \emptyset) \cup \mathrm{Pen}_a \cup \mathrm{Pen}_b \cup \mathrm{Pen}_c \cup \mathrm{Pen}_d$$

und

$$\leq_1 = \mathrm{rt}((\mathrm{Pen}_a \times \{x^1\}) \cup (\{x^2\} \times \mathrm{Pen}_b) \cup (\mathrm{Pen}_c \times \{x^3\}) \cup (\{x^3\} \times \mathrm{Pen}_d)) \ .$$

5.6.3 Allgemeine Konstruktion per Einladung

Wir wollen die Konstruktion aus Abschnitt 4.2 dahingehend verallgemeinern, dass wir ...

1.) ... mit einer beliebigen höchstens abzählbaren partiellen Ordnung P_0 die Konstruktion beginnen.

2.) ... für $(\mathbb{E}(P_n))_{n\in\omega}$ eine der folgenden Familien von Einladungen wählen: $(\mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n))_{n\in\omega}$, $(\mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n))_{n\in\omega}$, $(\mathbb{E}^{\triangle}_{\mathrm{sep}}(P_n))_{n\in\omega}$, $(\mathbb{E}^{\triangledown}_{\mathrm{sep}}(P_n))_{n\in\omega}$ oder $(\mathbb{E}^{\Diamond}_{\mathrm{sep}}(P_n))_{n\in\omega}$

3.) ... in den Konstruktionsschritten anstelle der einzelnen $z^i_n(X, Y; (X', Y')$ beliebige nicht-leere, höchstens abzählbare partielle Ordnungen $Z^i_n(X, Y; (X', Y'))$ einfügen – diese müssen (selbst innerhalb eines Konstruktionsschrittes) nicht isomorph sein.

Die durch diese Verallgemeinerungen erhaltenen Strukturen wollen wir unter einen Begriff fassen:

5.6.4 Definition Jede aus einer beliebigen höchstens abzählbaren partiellen Ordnung $(P_0, \leq_0)$ analog zu Abschnitt 4.2 konstruierte partielle Ordnung, in die an den gegebenen Stellen beliebige nicht-leere, höchstens abzählbare partielle Ordnungen $Z^i_n(X, Y; (X', Y'))$ eingefügt wurden, nennen wir ***per Einladung konstruiert***. Je nach dem, wie die Einladungen $\mathbb{E}(P_n)$ gewählt wurden, sagen wir, $(P, \leq)$ sei ***separativ***, ***exakt-separativ***, ***$\triangle$-separativ***, ***$\triangledown$-separativ*** oder ***$\Diamond$-separativ konstruiert***.

Der Hauptsatz 5.2.5 lässt sich auf *alle* per Einladung konstruierten partiellen Ordnungen übertragen:

5.6.5 Hauptsatz *Sei $(P, \leq)$ eine per Einladung konstruierte partielle Ordnung. Jeder endliche partielle Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält, lässt sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen. Jedoch ist $(P, \leq)$ nicht homogen.*

Nach Bemerkung 5.6.1 sind per Einladung konstruierte partielle Ordnungen nicht homogen. Ansonsten verläuft der Beweis analog zum Beweis von Hauptsatz 5.2.5 für separativ konstruierte partielle Ordnungen (Abschnitt 5.3).

5.6.6 Korollar *$\Diamond$-separativ konstruierte partielle Ordnungen sind 3-homogen.*

Beweis Jede höchstens drei-elementige Lage in einer $\Diamond$-separativ konstruierte partielle Ordnung $(P, \leq)$ ist für ein geeignetes $n \in \omega$ in der Einladung $\mathbb{E}^{\Diamond}_{\mathrm{sep}}(P_n)$ enthalten und damit in $(P, \leq)$ separiert. Folglich erhält jeder endliche Isomorphismus Φ mit $|\,\mathrm{Dom}(\Phi)| \leq 3$ die Separiertheit und kann mit Hauptsatz 5.6.5 zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortgesetzt werden. $\square$

5.7 Die Isomorphie-Typen der per Einladung konstruierten Strukturen

Wir wollen die Isomorphie-Typen der per Einladung konstruierten partiellen Ordnungen bestimmen. Zuerst müssen wir dazu erklären, was es für einen endlichen partiellen Isomorphismus zwischen beliebigen abzählbaren partiellen Ordnungen heißt, die Separiertheit zu erhalten:

5.7.1 Definition Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ zwei beliebige abzählbare partielle Ordnungen. Wir sagen, ein partieller Isomorphismus Ψ von $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$ ***erhält die Separiertheit***, wenn gilt:

$$\Psi(\mathrm{Sep}(\mathrm{Dom}(\Psi) \subseteq A)) = \mathrm{Sep}(\mathrm{Im}(\Psi) \subseteq B)$$

Nun können wir folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes formulieren:

5.7.2 Satz *Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ abzählbare partielle Ordnungen mit einer der folgenden Eigenschaften:*

1.) $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ sind beide separativ konstruiert oder beide exakt-separativ konstruiert oder eine der Strukturen ist separativ konstruiert und die andere exakt-separativ.

2.) $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ sind beide $\triangle$-separativ konstruiert.

3.) $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ sind beide $\triangledown$-separativ konstruiert.

4.) $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ sind beide $\Diamond$-separativ konstruiert.

Dann ist jeder endliche partielle Isomorphismus Ψ von $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$, der die Separiertheit erhält, zu einem Isomorphismus von ganz $(A, \leq_A)$ auf ganz $(B, \leq_B)$ fortsetzbar.

Beweis Seien nun $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ wie in Satz 5.7.2 vorausgesetzt. Weiter sei $\Psi : A' \to B'$ ein endlicher Isomorphismus von $(A, \leq_A)$ in $(B, \leq_B)$, der die Separiertheit erhält.

Da $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ durch denselben Einladungstyp konstruiert wurden oder $(A, \leq_A)$ separativ und $(B, \leq_B)$ exakt-separativ konstruiert wurde oder umgekehrt, enthalten für jedes $n \in \omega$ daher $\mathbb{E}_A(A_n) - \mathrm{Sep}(A_n)$ und $\mathbb{E}_B(B_n) - \mathrm{Sep}(B_n)$ Lagen derselben Konfigurationen. Somit erhalten wir in jedem Fall eine Analogie zu (5.8) aus dem Beweis des Hauptsatzes für separativ konstruierte partielle Ordnungen.

Betrachten wir weiter die beiden Beweise des Hauptsatzes, so sehen wir, dass wir bei der Fortsetzung von Φ_0 auf einem Element $p_0 \notin P'$ müssen wir unterscheiden, ob $(P, \leq)$ *als Bildbereich* separativ oder exakt-separativ konstruiert ist. Für $(P, \leq)$ *als Urbildbereich* ist der zur Konstruktion verwendete Einladungstyp nur in einem Punkt relevant: $\mathbb{E}_A(A_n) - \mathrm{Sep}(A_n)$ und $\mathbb{E}_B(B_n) - \mathrm{Sep}(B_n)$ müssen Lagen derselben Konfigurationen enthalten. Im Fall der separativ oder exakt-separativ konstruierten partiellen Ordnungen sind das die linearen Lagen und die Randlagen – also die Lagen der Konfigurationen $(1, 1, \omega)$ sowie $(k, 0, \omega)$ und $(0, k, \omega)$ für alle $m \in \omega$. Mit anderen Worten: Das gesuchte Bildelement q_0' soll einen 1-Typ T realisieren, d.h., q_0' soll bestimmte Lage-Eigenschaften in P'' haben und die q_0'-Lagen in P'' sollen bestimmte Separiertheits-Eigenschaften besitzen. Dass T realisiert werden kann, beruht lediglich auf Eigenschaften des Bildbereichs und der Gültigkeit (eines Analogons) von (5.8).

Wir setzen also $\Psi_0 = \Psi$ und zählen $A - A' = \{a_n \mid n \in \omega\}$ und $B - B' = \{b_n \mid n \in \omega\}$ ab. Falls $(B, \leq_B)$ *separativ*, $\triangle$*-separativ*, $\triangledown$*-separativ* oder $\Diamond$*-separativ* konstruiert ist, orientieren wir uns an dem Beweis für separativ konstruierte partielle Ordnungen und ordnen dem Element a_0 ein Bild in $B - B'$ so zu, wie wir p_0 im Beweis für separativ konstruierte Ordnungen ein Bild in $P - P''$ zugeordnet haben. Ist $(B, \leq_B)$ hingegen *exakt-separativ* konstruiert, so orientieren wir uns bei der Zuordnung am Beweis für exakt-separativ konstruierte Ordnungen.

Wir gehen im Zick-Zack-Verfahren vor. Wenn wir ein geeignetes Bildelement in einer exakt-separativ konstruierten Struktur finden wollen, gehen wir wie im Beweis für exakt-separativ konstruierte partielle Ordnungen vor. Wollen wir umgekehrt ein Element in einer separativ, $\triangle$-separativ, $\triangledown$-separativ oder $\Diamond$-separativ konstruierten Struktur als Bild auswählen, so gehen wir wie im Beweis für separativ konstruierte Ordnungen vor. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

5.7.3 Korollar *Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ wie in Satz 5.7.2 gegeben. Dann sind $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ isomorph. Insbesondere sind die beiden in Abschnitt 4.2 konstruierten partiellen Ordnungen isomorph.*

Beweis Die Behauptung folgt direkt aus Satz 5.7.2, wenn wir für Ψ den leeren Isomorphismus wählen. □

5.7.4 Korollar *Es gibt bis auf Isomorphie genau vier per Einladung konstruierbare (abzählbare) partielle Ordnungen.*

5.8 Separiertheit und KA-Homogenität

In diesem Abschnitt stellen wir einen Zusammenhang dar zwischen den Separiertheits-Eigenschaften und den KA-Homogenitäts-Eigenschaften partieller Ordnungen.

5.8.1 Notation Wir verallgemeinern die in Abschnitt 2.2 eingeführten Axiome vom Typ ${}_z\Phi_x^y$ (Albert und Burris, [AlBu]) dahingehend, dass wir im Exponenten und in den Indizes auch den Ausdruck $< \omega$ zulassen. Die so erhaltenen Ausdrücke sind als unendliche Konjunktionen der ursprünglichen Axiome zu lesen:

${}_{<\omega}\Phi^{\leq 1}_{\leq 1}$	bedeutet	$\forall n \in \omega$:	${}_n\Phi^{\leq 1}_{\leq 1}$
${}_{<\omega}\Phi^{0}_{<\omega}$	bedeutet	$\forall n \in \omega\ \forall m \in \omega$:	${}_n\Phi^{0}_{m}$
${}_{<\omega}\Phi^{<\omega}_{0}$	bedeutet	$\forall n \in \omega\ \forall m \in \omega$:	${}_n\Phi^{m}_{0}$
${}_{<\omega}\Phi^{\leq 1}_{<\omega}$	bedeutet	$\forall n \in \omega\ \forall m \in \omega$:	${}_n\Phi^{\leq 1}_{m}$
${}_{<\omega}\Phi^{<\omega}_{\leq 1}$	bedeutet	$\forall n \in \omega\ \forall m \in \omega$:	${}_n\Phi^{m}_{\leq 1}$
${}_{<\omega}\Phi^{\leq 2}_{\leq 1}$	bedeutet	$\forall n \in \omega$:	${}_n\Phi^{\leq 2}_{\leq 1}$
${}_{<\omega}\Phi^{\leq 1}_{\leq 2}$	bedeutet	$\forall n \in \omega$:	${}_n\Phi^{\leq 1}_{\leq 2}$

Wir können nun folgende Aussage formulieren:

5.8.2 Proposition *Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare partielle Ordnung.*

1.) Falls in $(P, \leq)$ das Axiom ${}_{<\omega}\Phi^{\leq 1}_{\leq 1}$ gilt, so sind alle Lagen (X, Y, Z) aus $\mathbb{L}(P)$, für die $(X \cup Y \cup Z, \leq)$ eine Kette ist, in $(P, \leq)$ separiert.

Insbesondere erhält jeder endliche Ketten-Isomorphismus die Separiertheit in $(P, \leq)$.

2.) Falls in $(P, \leq)$ die Axiome ${}_{<\omega}\Phi^{0}_{<\omega}$ und ${}_{<\omega}\Phi^{<\omega}_{0}$ gelten, so sind alle Lagen (X, Y, Z) aus $\mathbb{L}(P)$, für die $(X \cup Y \cup Z, \leq)$ eine Antikette ist, in $(P, \leq)$ separiert.

Insbesondere erhält jeder endliche Antiketten-Isomorphismus die Separiertheit in $(P, \leq)$.

3.) Falls in $(P, \leq)$ die Axiome ${}_{<\omega}\Phi^{<\omega}_{\leq 1}$ und ${}_{<\omega}\Phi^{\leq 1}_{<\omega}$ gelten, so sind alle Lagen (X, Y, Z) aus $\mathbb{L}(P)$, für die $X \cup Y \cup Z = A \cup K$ mit einer Antikette $(A, \leq)$ und einer Kette $(K, \leq)$ ist, in $(P, \leq)$ separiert.

Insbesondere erhält jeder endliche Kreuz-Isomorphismus die Separiertheit in $(P, \leq)$.

4.) Falls in $(P, \leq)$ die Axiome ${}_{<\omega}\Phi^{<\omega}_{\leq 1}$ und ${}_{<\omega}\Phi^{\leq 1}_{<\omega}$ gelten, so sind alle höchstens dreielementigen Lagen (X, Y, Z) aus $\mathbb{L}(P)$ in $(P, \leq)$ separiert.

Insbesondere erhält jeder Isomorphismus mit höchstens dreielementigem Definitionsbereich die Separiertheit in $(P, \leq)$.

Beweis Die Aussagen 1, 2 und 4 sind klar. Zu Aussage 3 ist nur anzumerken, dass nicht sowohl X als auch Y mehr als ein Element enthalten können, da schon Sterne nicht $(1, 1)$-zerlegbar sind. □

Für die Klasse der abzählbaren separiert-homogenen partiellen Ordnungen axiomatisiert das folgende Korollar einige KA-Homogenitäts-Eigenschaften.

5.8.3 Korollar *Sei $(P, \leq)$ eine abzählbare separiert-homogene partielle Ordnung.*

1.) Falls in $(P, \leq)$ das Axiom ${}_{<\omega}\Phi^{\leq 1}_{\leq 1}$ gilt, so ist $(P, \leq)$ Ketten-homogen.

2.) Falls in $(P, \leq)$ die Axiome ${}_{<\omega}\Phi_0^{<\omega}$ und ${}_{<\omega}\Phi_{<\omega}^0$ gelten, so ist $(P, \leq)$ Antiketten-homogen.

3.) Falls in $(P, \leq)$ die Axiome ${}_{<\omega}\Phi_{\leq 1}^{\leq\omega}$ und ${}_{<\omega}\Phi_{<\omega}^{\leq 1}$ gelten, so ist $(P, \leq)$ Kreuz-homogen und 3-homogen.

Die Aussagen des folgenden Korollars sind teils schon aus früheren Abschnitten bekannt.

5.8.4 Korollar *Separativ, exakt-separativ, $\triangle$-separativ oder $\triangledown$-separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind Ketten- und Antiketten-homogen.*

$\Diamond$-separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind Kreuz-homogen und 3-homogen.

Beweis Da in jedem Konstruktions-Schritt (von $(P_n, \leq_n)$ nach $(P_{n+1}, \leq_{n+1})$)

$$\mathrm{Lin}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n) \cap \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n) \cap \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}^{\triangle}(P_n) \cap \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}^{\triangledown}(P_n)$$

ist, gilt das Axiom ${}_{<\omega}\Phi_{\leq 1}^{\leq 1}$ in den separativ, exakt-separativ, $\triangle$-separativ und $\triangledown$-separativ konstruierten abzählbaren partiellen Ordnungen. Wegen

$$\mathrm{Rand}(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}(P_n) \cap \mathbb{E}_{\mathrm{ex}}(P_n) \cap \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}^{\triangle}(P_n) \cap \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}^{\triangledown}(P_n)$$

gelten die Axiome ${}_{<\omega}\Phi_0^{<\omega}$ und ${}_{<\omega}\Phi_{<\omega}^0$ in den separativ, exakt-separativ, $\triangle$-separativ und $\triangledown$-separativ konstruierten abzählbaren partiellen Ordnungen. Wegen

$$\Delta(P_n) \cup \nabla(P_n) \subseteq \mathbb{E}_{\mathrm{sep}}^{\Diamond}(P_n)$$

gelten die Axiome ${}_{<\omega}\Phi_{\leq 1}^{\leq 2}$ und ${}_{<\omega}\Phi_{\leq 2}^{\leq 1}$ und damit auch die Axiome ${}_{<\omega}\Phi_{\leq 1}^{\leq\omega}$ und ${}_{<\omega}\Phi_{<\omega}^{\leq 1}$ in den $\Diamond$-separativ konstruierten abzählbaren partiellen Ordnungen.

Die genannten partiellen Ordnungen sind (nach Satz 5.2.5 bzw. in Analogie dazu) separiert-homogen, erfüllen also die Voraussetzungen von Korollar 5.8.3. Die Behauptung folgt. □

5.8.5 Korollar *Für die Klasse der höchstens abzählbaren partiellen Ordnungen impliziert die Kreuz-Homogenität nicht die Homogenität.*

Beweis Mit Korollar 5.8.4 sind $\Diamond$-separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen Kreuz-homogen; mit Bemerkung 5.6.1 sind sie jedoch nicht homogen. □

5.8.6 Bemerkung *In Bemerkung 1.3.3 haben wir gesehen, dass abzählbare Kreuz-homogene partielle Ordnungen immer 3-homogen sind. Die* Frage*, ob auch die Umkehrung gilt, ist noch offen.*

5.9 $\aleph_1$-Universalität

Die in diesem Kapitel konstruierten partiellen Ordnungen sind offenbar $\aleph_0$-universell. Wir erhalten sogar folgende Aussage:

5.9.1 Satz *Jede per Einladung konstruierte partielle Ordnung ist $\aleph_1$-universell.*

Beweis Aus dem Beweis von Satz 5.2.5 lässt sich ersehen, wie wir eine beliebige abzählbare partielle Ordnung $(A, \leq_A)$ in eine per Einladung konstruierte Struktur $(P, \leq)$ einbetten können: Wir beginnen mit dem leeren Isomorphismus und Abzählungen von A und P; Schritt für Schritt ordnen wir jedem Element aus A injektiv ein Bild in P zu. (Wir benutzen sozusagen ein *Zick*- anstelle eines *Zick-Zack*-Verfahrens.) Wie in Abschnitt 5.7 ist auch hier nur von Belang, dass der *Bildbereich* $(P, \leq)$ per Einladung konstruiert ist. $\Box$

Alternativer Beweis Da in der abzählbaren universell-homogene partielle Ordnung sämtliche der Axiome ${}_z\Phi_x^y$ (mit $x, y, z \in \omega$) gelten, lässt sich in diese jede höchstens abzählbare partielle Ordnung (mit dem „Zick"-Verfahren) einbetten; sie ist also $\aleph_1$-homogen. Beginnen wir die Konstruktion von $(P, \leq)$ also mit der abzählbaren universell-homogenen partiellen Ordnung (als P_0). Dann ist auch $(P, \leq)$ als Oberstruktur $\aleph_1$-universell. Da mit Korollar 5.7.3 die abzählbaren separativ oder exakt-separativ konstruierten partiellen Ordnungen paarweise isomorph sind, sind sie alle $\aleph_1$-universell. $\triangle$-separativ-, ∇-separativ- oder $\Diamond$-separativ konstruierte partielle Ordnungen sind Erweiterungen separativ konstruierter partieller Ordnungen und somit ebenfalls $\aleph_1$-universell. $\Box$

Teil III

Weiterführendes

Kapitel 6

Offene Fragen

Im Laufe dieser Arbeit haben sich einige Fragen angesammelt, die leider noch nicht geklärt werden konnten.

$\mathbf{KA}_0^2$-Homogenität

So nehmen bei der Betrachtung der KA-Homogenität in Abschnitt 1.3 die KA_0^2-homogenen partiellen Ordnungen eine Sonderrolle ein:

- Von den KA_2^0-homogenen partiellen Ordnungen, sowie von den (n, m)-homogenenen Strukturen mit $n + m \geq 3$ wissen wir, dass sie homogen sind (Proposition 2.4.1 und Proposition 1.5.1) – und universell, sofern sie ein Pentagon enthalten (Satz 1.5.4).

- Von den schwach Ketten-homogenen oder schwach Antiketten-homogenen partiellen Ordnungen wissen wir, dass sie nicht homogen sind.

- Von den KA_0^2-homogenen partiellen Ordnungen wissen wir lediglich, dass sie die Vorraussetzungen von Satz 1.4.1 (dem Analogon zum ersten Teil der Schmerl'schen Klassifikation) erfüllen – aber nicht, ob sie universell sind, falls sie ein Pentagon enthalten. Weiterhin wissen wir zwar, dass sie homogen sind, falls sie Antiketten-homogen sind – allerdings ist unklar, *ob* sie Antiketten-homogen sind.

Isomorphie-Typen

Es gibt mit Korollar 5.7.4 genau vier Isomorphie-Typen per Einladung konstruierbarer partieller Ordnungen. Ob es auch nicht-homogene abzählbare partielle Ordnungen gibt, die Ketten- und Antiketten-homogen sind, aber zu keinem dieser Isomorphie-Typen gehören, ist fraglich.

$\aleph_1$-Universalität

Per Einladung konstruierte partielle Ordnungen (Kapitel 4) sind mit Korollar 5.8.4 sehr stark KA-homogen und mit Satz 5.9.1 $\aleph_1$-universell. Dass jede abzählbare sehr stark KA-homogene oder separiert-homogene partielle Ordnung $\aleph_1$-universell ist, können wir jedoch nur vermuten.

Implikationen der 3-Homogenität

Weiterhin stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang zwischen

- Ketten- und Antiketten-Homogenität,
- Kreuz-Homogenität,
- 3-Homogenität und
- Stern-Dichte

bei partiellen Ordnungen, die ein Pentagon enthalten.

Wir wissen bereits:

- Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnungen sind 2-homogen, brauchen aber weder 3-homogen noch Stern-dicht zu sein (siehe Teil II).
- Kreuz-homogene partielle Ordnungen sind immer 3-homogen (siehe Abschnitt 5.8). Wie wir am Beispiel der $\Diamond$-separativ konstruierten partiellen Ordnungen sehen, impliziert Kreuz-Homogenität aber nicht Stern-Dichte.
- 3-Homogenität und Stern-Dichte sind unabhängig voneinander: $\Diamond$-separativ konstruierte partielle Ordnungen enthalten ein Pentagon und sind 3-homogen, nicht aber Stern-dicht (siehe Abschnitt 5.6.1). Umgekehrt beweisen Droste und Macpherson die Existenz einer Stern-dichten, aber nicht 3-homogenen partiellen Ordnung mit Pentagon ([DrMcP], Proposition 3.3).
- Für Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnungen mit Pentagon sind nach Proposition 2.3.1 jedoch Homogenität und Stern-Dichte äquivalent.

Die Frage, ob 3-Homogenität Ketten-Homogenität, Antiketten-Homogenität oder sogar Kreuz-Homogenität impliziert, ist weiter offen – sogar für separiert-homogene partielle Ordnungen.

Kapitel 7

Partielle Ordnungen größerer Mächtigkeiten

Zum Schluss überlegen wir, wie weit sich die bisherigen Ergebnisse für abzählbare partielle Ordnungen auf überabzählbare partielle Ordnungen übertragen lassen. Wir werden dazu (in Analogie zum bisherigen Vorgehen) Ketten- und Antiketten-homogene partielle Ordnungen, die nicht homogen sind, in beliebigen überabzählbaren regulären Kardinalitäten κ mit $\kappa = 2^{<\kappa}$ konstruieren.

7.1 Lagen und Separiertheit in überabzählbaren Strukturen

Bis jetzt galt unser Interesse ausschließlich endlichen Isomorphismen in (abzählbaren) partiellen Ordnungen und ihrer Fortsetzbarkeit zu Automorphismen in diesen. Zur Fortsetzung eines endlichen Isomorphismus $\Phi : P' \to P''$ nutzten wir das Zick-Zack-Verfahren. Für eine Abzählung $\{p_n \mid n \in \omega\}$ von $P - P'$ betrachteten wir so zunächst das Tripel

$$((P')^{<p_0}, (P')^{>p_0}, (P')^{\|p_0})$$

bzw.

$$(\mathrm{Max}((P')^{<p_0}), \mathrm{Min}((P')^{>p_0}), (P')^{\|p_0}) \ ,$$

die *Lage* von p_0 zu P'.

Haben wir es nun aber mit unendlichen Isomorphismen zu tun, so geben die Mengen $\mathrm{Max}((P')^{<p_0}$ und $\mathrm{Min}((P')^{>p_0})$ (zusammen mit $(P')^{\|p_0}$) die *Position* von p_0 zu P' (salopp gesprochen) im Allgemeinen nicht adäquat wieder:

Für *endliche* Teilmengen P' einer partiellen Ordnung $(P, \leq)$ und für beliebige Elemente p_0 gilt:

$$(P')^{<p_0} = (\mathrm{Max}((P')^{<p_0}))^{\downarrow} \quad \& \quad (P')^{>p_0} = (\mathrm{Min}((P')^{>p_0}))^{\uparrow}$$

Das heißt, jedes Element q, das oberhalb von $\mathrm{Max}((P')^{<p_0})$, unterhalb von $\mathrm{Min}((P')^{>p_0})$ und unvergleichbar mit $(P')^{\|p_0}$ liegt, liegt genau so in P zu P' wie p_0. Deshalb konnten wir als *Lagen* diejenigen Tripel $(X, Y, Z) \in \mathfrak{P}(P)$ betrachten, für die X und Y endliche Antiketten waren – und zudem $X < Y$ und $X^{\downarrow} \cap Z = \emptyset = Y^{\uparrow} \cap Z$ galt.

Betrachten wir nun hingegen *unendliche* Teilmengen P' einer (unendlichen) partiellen Ordnung $(P, \leq)$, die η_0-Ketten enthält. Sei o.B.d.A. $(Q, \leq)$ eine Substruktur von $(P, \leq)$ und wir setzen $P' := \mathbb{Q} - \{0\}$. Dann ist die *Position* von 0 zu $\mathbb{Q}$ gegeben durch $(\mathbb{Q}^{<0}, \mathbb{Q}^{>0}, \emptyset)$. Es ist jedoch

$$(\mathrm{Max}(\mathbb{Q}^{<0}), \mathrm{Min}(\mathbb{Q}^{>0}), \emptyset) = (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \ ,$$

d.h., ein Element q mit der Lage $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ zu P' liegt unvergleichbar zu P' – im Gegensatz zu dem Element 0.

Setzen wir zunächst für beliebige partielle Ordnungen $(P, \leq)$:

$$\lambda(P) := \{(X, Y, Z) \in \mathfrak{P}(P)^3 \mid |X \cup Y| < |P| \ \& \ X < Y \ \& \ X^{\downarrow} \cap Z = \emptyset = Y^{\uparrow} \cap Z\}$$

Eine Option wäre es sicher, für eine κ-mächtige partielle Ordnung $(P, \leq)$ nun alle Tripel $(X, Y, Z) \in \lambda(P)$ als Lagen in $(P, \leq)$ zu bezeichnen. So wollen wir aber nicht vorgehen.

Zur Begründung betrachten wir noch einmal die *abzählbaren* partiellen Ordnungen. Jedem Tripel $(X, Y, Z) \in \lambda(P)$ können wir mit $(\mathrm{Max}(X), \mathrm{Min}(Y), Z)$ eindeutig eine Lage aus $\mathbb{L}(P)$ zuordnen. Diese Zuordnung wollen wir mit ρ bezeichnen. Da ρ eine surjektive Abbildung von $\lambda(P)$ auf $\mathbb{L}(P)$ ist, erhalten wir somit kanonisch eine Partition von $\lambda(P)$. Dabei ist $\mathbb{L}(P)$ ein Vertreter-System dieser Partition.

Wir können stattdessen aber auch jedem Tripel $(X, Y, Z) \in \lambda(P)$ das Tripel $(X^{\downarrow}, Y^{\uparrow}, Z)$ zuordnen. Diese Zuordnung bezeichnen wir mit $\widehat{\alpha}$. Nun ist $\widehat{\alpha}$ eine Abbildung von $\lambda(P)$ in die Menge

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(P) := \{(X, Y, Z) \in \mathfrak{P}(P)^3 \mid \ & X < Y \ \& \ X^{\downarrow} \cap Z = \emptyset = Y^{\uparrow} \cap Z \\ & X = X^{\downarrow} \ \& \ Y = Y^{\uparrow}\} \ . \end{aligned}$$

Schränken wir den Bildbereich von $\widehat{\alpha}$ auf ihr Bild $\mathrm{Im}(\widehat{\alpha})$ ein, dann induziert (für *abzählbares* P) die so erhaltene surjektive Abbildung α dieselbe Partition von $\lambda(P)$ wie die Abbildung ρ. Als Vertreter-System fällt dabei $\mathrm{Im}(\alpha)$ ins Auge.

7.1.1 Definition Sei $(P, \leq)$ eine überabzählbare partielle Ordnung der Kardinalität κ. Als ***Lage in*** $(\boldsymbol{P}, \leq)$ bezeichnen wir jedes Tripel $(X, Y, Z) \in \lambda(P)$, für das $X', Y' \in \mathfrak{P}_{<\kappa}(P)$ existieren mit $X = (X')^{\downarrow}$ und $Y = (Y')^{\uparrow}$. Die ***Menge der Lagen in*** $(\boldsymbol{P}, \leq)$ notieren wir mit $\mathbb{L}_{\kappa}(P)$.

Sei P' eine Teilmenge von P und p ein Element von P. Falls $|(P')^{<p} \cup (P')^{>p}| < \kappa$, so ist

$$\mathrm{L}^{\kappa}_{P'}(p) := (((P')^{<p})^{\downarrow}, ((P')^{>p})^{\uparrow}, (P')^{\|p}) \in \mathbb{L}_{\kappa}(P')$$

und wir nennen $\mathbb{L}^{\kappa}_{P'}(p)$ die ***Lage von*** $\boldsymbol{p}$ ***zu/in*** $\boldsymbol{P'}$.

Seien P' und P'' Teilmengen von P mit $P' \subseteq P'' \subseteq P$. Falls $(X, Y, Z) \in \mathbb{L}_{\kappa}(P')$ ist, so ist auch $(X^{\downarrow}, Y^{\uparrow}, Z) \in \mathbb{L}_{\kappa}(P'')$ (wobei $^{\uparrow}$ und $^{\downarrow}$ in Bezug auf P'' zu lesen sind). Wir nennen $(X^{\downarrow}, Y^{\uparrow}, Z)$ die ***Erweiterung von*** $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ ***in*** $\boldsymbol{P''}$.

7.1.2 Notation Sei $(P, \leq)$ eine überabzählbare partielle Ordnung der Kardinalität κ. Analog zum abzählbaren Fall, wollen wir für Teilmengen X, Y von P mit $X^{\downarrow} = X < Y = Y^{\uparrow}$ und $|X \cup Y| < \kappa$ die Lage $(X, Y, P - (X \cup Y))$ kurz mit (X, Y) notieren.

7.1.3 Bemerkung *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl mit der Eigenschaft $\kappa = 2^{<\kappa}$. Ist $(P, \leq)$ eine partielle Ordnung der Kardinalität κ, dann erhalten wir*

$$\kappa \leq |\{(X,Y) \mid (X,Y) \in \mathbb{L}_\kappa(P)\}| \leq |\mathfrak{P}_{<\kappa}(P)^2| = 2^{<\kappa} = \kappa$$

und somit $|\{(X,Y) \mid (X,Y) \in \mathbb{L}_\kappa(P)\}| = \kappa$.

Wir passen auch die Definitionen der Mengen separierter (p-) Lagen, linearer Lagen und Randlagen in $(P, \leq)$ für überabzählbare partielle Ordnungen an; ebenso wie den Begriff der (separierten) Einladung in eine partielle Ordnung und die Definition der separierbaren v-Lagen über $(P, \leq)$:

7.1.4 Notation Sei $(P, \leq)$ eine κ-mächtige partielle Ordnung mit $\kappa > \aleph_0$ und sei P' eine beliebige Teilmenge von P. Wir definieren folgende Ausdrücke, wobei wir im Falle $P = P'$ im Argument nur P anstelle von P', P notieren wollen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sep}_\kappa(P', P) &:= \{(X,Y) \in \mathbb{L}_\kappa(P') \mid \text{ es existiert ein } q \in P \text{ mit } X < q < Y\} \\
\mathrm{Sep}_\kappa(P', P \,|\, q) &:= \{(X,Y) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P' \cup \{q\}) \mid X \cup Y \ni q\} \\
\mathrm{Lin}_\kappa(P) &:= \{(X,Y) \in \mathbb{L}_\kappa(P) \mid X = \mathrm{Max}(X)^{\downarrow} \,\&\, Y = \mathrm{Min}(Y)^{\uparrow} , \\
&\qquad\qquad |\,\mathrm{Max}(X)| = |\,\mathrm{Min}(Y)| = 1\} \\
\mathrm{Rand}_\kappa(P) &:= \{(X,Y) \in \mathbb{L}_\kappa(P) \mid X = \emptyset \text{ oder } Y = \emptyset\} \\
\mathbb{E}_\kappa(P) &:= \mathrm{Lin}_\kappa(P) \cup \mathrm{Rand}_\kappa(P) \cup \mathrm{Sep}_\kappa(P)
\end{aligned}$$

Sei nun $(X, Y) \in \mathbb{E}_\kappa(P)$. Wir definieren eine Menge von Termen in der Sprache der partiellen Ordnungen, erweitert durch geeignete Namen für Elemente und Teilmengen von P; v sei eine freie Variable. Wieder unterscheiden wir in der Notation nicht die Elemente und Menge von ihren Namen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_v^\kappa(P,(X,Y)) := \{(X' \cup X \cup \{v\}, Y') \mid\; & (X',Y') \in \mathbb{L}_\kappa(P) , \\
& X' \subseteq P - (X \cup Y) \,\&\, Y' \subseteq Y , \\
& (X' \cup X, Y') \in \mathrm{Sep}_\kappa(P)\} \\
\cup \{(X', Y' \cup Y \cup \{v\}) \mid\; & (X',Y') \in \mathbb{L}_\kappa(P) , \\
& X' \subseteq X \,\&\, Y' \subseteq P - (X \cup Y) , \\
& (X', Y' \cup Y) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P)\}
\end{aligned}$$

7.2 Eine κ-separativ konstruierte Struktur

In diesem Abschnitt sei κ eine überabzählbare *reguläre* Kardinalzahl mit der Eigenschaft

$$\kappa = 2^{<\kappa} .$$

Konstruktions-Anfang

Wie im abzählbaren Fall wollen wir die gewünschte Struktur $(P, \leq)$ rekursiv definieren. Dazu konstruieren wir mit $(P_\nu, \leq_\nu)_{\nu \in \kappa}$ einen Turm κ-mächtiger partieller Ordnungen. Dabei garantiert uns die Bedingung $\kappa = 2^{<\kappa}$, dass die Mächtigkeit der Ordnungen P_ν und P durch κ beschränkt bleibt.

Wir beginnen mit einer beliebigen κ-mächtigen partiellen Ordnung P_0. Bei der Konstruktion müssen wir zwischen Nachfolger-Schritt und Limes-Schritt unterscheiden.

Der Nachfolger-Schritt

Sei $\mu \in \kappa$ eine beliebige Ordinalzahl und für alle $\nu \leq \mu$ seien die partiellen Ordnungen $(P_\nu, \leq_\nu)$ mit $|P_\nu| = \kappa$ bereits konstruiert. Analog zum abzählbaren Fall konstruieren wir nun die partielle Ordnung $(P_{\mu+1}, \leq_{\mu+1})$ aus $(P_\mu, \leq_\mu)$.

Wir bezeichnen $\mathbb{E}_\kappa(P_\mu)$ als ***Einladung in $\boldsymbol{P_\mu}$***. Für jedes $(X, Y) \in \mathbb{E}_\kappa(P_\mu)$ fügen wir eine κ-mächtige Antikette

$$A_\mu(X,Y) = \{x_\mu^\zeta(X,Y) \mid \zeta \in \kappa\}$$

mit der Lage

$$\mathrm{L}_{P_\mu}^\kappa(A_\mu(X,Y)) = (X,Y)$$

ein und setzen

$$P'_{\mu+1} := P_\mu \cup \bigcup_{(X,Y) \in \mathbb{E}_\kappa(P_\mu)} A_\mu(X,Y) \ .$$

Dabei ist

$$\kappa \ \leq \ |\mathbb{E}_\kappa(P_\mu)| \ \leq \ |\mathbb{L}_\kappa(P_\mu)| \ = \ \kappa$$

und damit

$$|P'_{\mu+1}| \ = \ \kappa + \kappa \cdot \kappa \ = \ \kappa \ .$$

Wir betrachten nun die Term-Menge $\mathbb{E}_v^\kappa(P_\mu, (X,Y))$. Mit Bemerkung 7.1.3 erhalten wir

$$\kappa \ \leq \ |\mathbb{E}_v^\kappa(P_\mu, (X,Y))| \ \leq \ 2 \cdot |\mathbb{L}_\kappa(P_\mu)| \ = \ \kappa$$

und somit

$$|\mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{E}_v^\kappa(P_\mu, (X,Y)))| \ = \ 2^{<\kappa} \ = \ \kappa \ ,$$

so dass wir notieren können

$$\mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{E}_v^\kappa(P_\mu, (X,Y))) \ =: \ \{T_\mu^\zeta(X,Y) \mid \zeta \in \kappa\} \ .$$

Für jede Term-Menge $T_\mu^\zeta(X,Y)$ und jeden Term $(X', Y') \in T_\mu^\zeta(X,Y)$ fügen wir wieder ein Zwischen-Element $z_\mu^\zeta(X,Y;(X',Y'))$ ein mit der Lage

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_{P'_{\mu+1}}^\kappa(z_\mu^\zeta(X,Y;(X',Y'))) &= (X'_{[v/x_\mu^\zeta(X,Y)]}, Y'_{[v/x_\mu^\zeta(X,Y)]}) \\ &= \mathrm{L}_{P_{\mu+1}}^\kappa(z_\mu^\zeta(X,Y;(X',Y'))) \ . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Mächtigkeit der neuen Ordnung

$$P_{\mu+1} := P'_{\mu+1} \cup \bigcup_{(X,Y)\in\mathbb{E}_\kappa(P_\mu)} \{z^\zeta_\mu(X,Y;(X',Y')) \mid \zeta \in \kappa, (X',Y') \in T^\zeta_\mu(X,Y)\}$$

wie gewünscht:

$$\kappa \;\leq\; |P_{\mu+1}| \;\leq\; |P'_{\mu+1}| + |\,\mathbb{E}_\kappa(P_\mu)| \cdot \kappa \cdot \sup_{\zeta\in\kappa}(|\,T^\zeta_\mu(X,Y)|) \;\leq\; \kappa + \kappa\cdot\kappa\cdot\kappa \;=\; \kappa$$

Der Limes-Schritt

Sei $\lambda \in \kappa$ eine Limes-Ordinalzahl und für jedes $\mu \in \lambda$ sei die partielle Ordnung P_μ mit $|P_\mu| = \kappa$ bereits konstruiert. P_λ soll auf jeden Fall $\bigcup_{\mu\in\lambda} P_\mu =: P'_\lambda$ enthalten. Dabei ist offenbar

$$\kappa \;\leq\; |P'_\lambda| \;\leq\; \lambda \cdot \sup_{\mu\in\lambda}(|P_\mu|) \;=\; \lambda\cdot\kappa \;=\; \kappa\;.$$

Wir müssen aber auch im Limes-Schritt noch weitere Elemente hinzufügen. Unser Ziel ist es, ein Analogon des Hauptsatzes (Satz 5.2.5) für partielle Ordnungen der Mächtigkeit κ zu beweisen. Deshalb ist sicherzustellen, dass bei der schrittweisen Erweiterung des Anfangs-Isomorphismus Φ_0 zu Φ_μ auch der Limes

$$\Phi_\lambda := \bigcup_{\mu\in\lambda} \Phi_\mu$$

die Separiertheit erhält.

Dazu separieren wir auch die Limites aufsteigender Ketten separierter Lagen. Definieren wir diese Limites nun:

7.2.1 Definition Seien $(X_\mu)_{\mu\in\lambda}$ und $(Y_\mu)_{\mu\in\lambda}$ aufsteigende Kette in $(\mathfrak{P}(P'_\lambda), \subseteq)$ und für alle $\mu \in \lambda$ sei $(X_\mu, Y_\mu) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P_\mu)$. Dann nennen wir

$$(X,Y) := (\bigcup_{\mu\in\lambda} X_\mu, \bigcup_{\mu\in\lambda} Y_\mu)$$

eine ***historisch separierte Lage*** in $(P'_\lambda, \leq)$.

Die ***Menge der historisch separierten Lagen*** in $(P'_\lambda, \leq)$ notieren wir mit $\mathrm{Sep}^{(\mathrm{his})}_\kappa(P'_\lambda)$.

7.2.2 Proposition *Eine historisch separierte Lage in $(P'_\lambda, \leq)$ ist insbesondere eine Lage in P'_λ.*

Beweis Für jedes $\mu \in \lambda$ gibt es ein $(X'_\mu, Y'_\mu) \in \mathfrak{P}_{<\kappa}(P_\mu)$ mit $(X_\mu, Y_\mu) = ((X'_\mu)^\downarrow, (Y'_\mu)^\uparrow)$. Somit ist

$$\begin{aligned}(X,Y) &= (\bigcup_{\mu\in\lambda}(X'_\mu)^\downarrow, \bigcup_{\mu\in\lambda}(Y'_\mu)^\uparrow) \\ &\overset{P'_\lambda=\bigcup_{\mu\in\lambda}P_\mu}{=} ((\bigcup_{\mu\in\lambda} X'_\mu)^\downarrow, (\bigcup_{\mu\in\lambda} Y'_\mu)^\uparrow)\;,\end{aligned}$$

insbesondere ist $(X, Y) = (X^{\downarrow}, Y^{\uparrow})$. Da κ regulär und $\lambda < \kappa$ ist, erhalten wir:

$$|\bigcup_{\mu\in\lambda} X'_\mu| \leq \lambda \cdot \sup_{\mu\in\lambda}(|X'_\mu|) < \kappa \qquad \& \qquad |\bigcup_{\mu\in\lambda} Y'_\mu| \leq \lambda \cdot \sup_{\mu\in\lambda}(|Y'_\mu|) < \kappa$$

Folglich ist $(X, Y) \in \mathbb{L}_\kappa(P_{\lambda'})$. $\square$

7.2.3 Bemerkung *Für jedes $\mu \in \lambda$ und jede in $(P_\mu, \leq_\mu)$ separierte Lage (X, Y) ist $(X^{\downarrow}, Y^{\uparrow})$ eine historisch separierte Lage in $(P'_\lambda, \leq)$: Betrachte dazu einfach die aufsteigenden Ketten $(X^{\downarrow} \cap P_\nu)_{\nu\in\lambda}$ und $(Y^{\uparrow} \cap P_\nu)_{\nu\in\lambda}$.*

Die Menge

$$\mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda) := \text{Sep}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda) \cup \text{Lin}_\kappa(P'_\lambda) \cup \text{Rand}_\kappa(P'_\lambda)$$

übernimmt im Limes-Schritt die Rolle der (separativen) Einladung – analog zu $\mathbb{E}_\kappa(P_\mu)$ im Nachfolger-Schritt. Für jede Lage $(X, Y) \in \mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda)$ konstruieren wir also eine κ-mächtige Antikette

$$\dot{A}_\lambda(X, Y) = \{\dot{x}^\zeta_\lambda(X, Y) \mid \zeta \in \kappa\} \quad \text{mit der Lage} \quad \mathrm{L}^\kappa_{P'_\lambda}(\dot{A}_\lambda(X, Y)) = (X^{\downarrow}, Y^{\uparrow})$$

und setzen

$$P''_\lambda := P'_\lambda \cup \bigcup_{(X,Y)\in\mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda)} \dot{A}_\lambda(X, Y)\ .$$

7.2.4 Bemerkung *Wir notieren $\dot{A}_\lambda(X, Y)$, $\dot{x}^\zeta_\lambda(X, Y)$ und gleich auch $\dot{T}^\zeta_\lambda(X, Y)$ und $\dot{z}^\zeta_\lambda(X, Y; (X', Y'))$, um eine Verwechslung mit den im Nachfolger-Schritt von $(P_\lambda, \leq)$ zu $(P_{\lambda+1}, \leq)$ konstruierten Objekten $A_\lambda(X, Y)$, $x^\zeta_\lambda(X, Y)$, $T^\zeta_\lambda(X, Y)$ und $z^\zeta_\lambda(X, Y; (X', Y'))$ zu vermeiden.*

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \kappa \leq |P''_\lambda| &\leq \kappa + |\,\mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda)| \cdot \kappa \leq \kappa + |\,\mathbb{L}_\kappa(P'_\lambda)| \cdot \kappa \\ &\leq \kappa + |\mathfrak{P}_{<\kappa}(P'_\lambda)|^2 \cdot \kappa = \kappa + (2^{<\kappa})^2 \cdot \kappa = \kappa + \kappa^2 \cdot \kappa = \kappa \end{aligned}$$

Die Zwischen-Elemente konstruieren wir mittels folgender Term-Menge:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(\text{his})}_{\kappa,v}(P'_\lambda, (X, Y)) := \{(X' \cup \{v\}, Y') \mid\ & (X', Y') \in \mathbb{L}_\kappa(P'_\lambda), \\ & X' \subseteq P'_\lambda - (X \cup Y)\,,\ Y' \subseteq Y, \\ & (X' \cup X, Y') \in \mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda)\} \\ \cup \{(X', Y' \cup \{v\}) \mid\ & (X', Y') \in \mathbb{L}_\kappa(P'_\lambda), \\ & X' \subseteq X\ ,\ Y' \subseteq P'_\lambda - (X \cup Y), \\ & (X', Y' \cup Y) \in \mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda)\} \end{aligned}$$

Es ist

$$\kappa \ \leq\ |\,\mathbb{E}^{(\text{his})}_{\kappa,v}(P'_\lambda, (X, Y))| \ \leq\ 2 \cdot |\,\mathbb{L}_\kappa(P'_\lambda)| \ \leq\ 2 \cdot (2^{<\kappa})^2 \ =\ \kappa$$

und somit

$$|\mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{E}^{(\text{his})}_{\kappa,v}(P'_\lambda,(X,Y)))| = 2^{<\kappa} = \kappa\ ,$$

so dass wir notieren können:

$$\mathfrak{P}_{<\kappa}(\mathbb{E}^{(\text{his})}_{\kappa,v}(P'_\lambda,(X,Y))) \ =:\ \{\dot{T}^\zeta_\lambda(X,Y)\mid \zeta\in\kappa\}$$

Für jede Term-Menge $\dot{T}^\zeta_\lambda(X,Y)$ und jeden Term $(X',Y')\in\dot{T}^\zeta_\lambda(X,Y)$ fügen wir wieder ein Zwischen-Element $\dot{z}^\zeta_\lambda(X,Y;(X',Y'))$ ein mit der Lage

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^\kappa_{P''_\lambda}(\dot{z}^\zeta_\lambda(X,Y;(X',Y'))) &= ((X'_{[v/\dot{x}^\zeta_\lambda(X,Y)]})^{\downarrow},(Y'_{[v/\dot{x}^\zeta_\lambda(X,Y)]})^{\uparrow})\\ &= \mathrm{L}^\kappa_{P_\lambda}(\dot{z}^\zeta_\lambda(X,Y;(X',Y')))\ .\end{aligned}$$

Wir setzen

$$P_\lambda := P''_\lambda \cup \bigcup_{(X,Y)\in\mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda)} \{\dot{z}^\zeta_\lambda(X,Y;(X',Y'))\mid \zeta\in\kappa,(X',Y')\in\dot{T}^\zeta_\lambda(X,Y)\}\ .$$

Damit gilt:

$$\kappa\ \le\ |P_\lambda|\ \le\ |P''_\lambda| + |\,\mathbb{E}^{(\text{his})}_\kappa(P'_\lambda)|\cdot\kappa\cdot\sup_{\zeta\in\kappa}(|\,\dot{T}^\zeta_\lambda(X,Y)|)\ =\ \kappa+\kappa\cdot\kappa\cdot\kappa\ =\ \kappa$$

Der Abschluss

Schließlich erhalten wir mit

$$(P,\le) := \bigcup_{\mu\in\kappa}(P_\mu,\le)$$

wegen

$$\kappa\ \le\ |P|\ \le\ \kappa\cdot\sup_{\mu\in\kappa}(|P_\mu|)\ =\ \kappa\cdot\kappa\ =\ \kappa$$

eine κ-mächtige partielle Ordnung.

Auf Grund der Konstruktionsweise sagen wir, $(P,\le)$ sei ***κ-separativ konstruiert***.

Eine Konvention

Eine Lage (X,Y,Z) oder (X,Y) in P_μ ist genau genommen keine Lage in P_ν für $\mu\in\nu$ – lediglich die kanonische Erweiterung $(X^\downarrow,Y^\uparrow,Z)$ bzw. $(X^\downarrow,Y^\uparrow)$ ist eine Lage in P_ν, wobei $^\uparrow$ und $^\downarrow$ in Bezug auf P_ν zu lesen sind. Um die Notationen einfach zu halten, wollen wir dennoch folgende *Sprachregelung* treffen:

7.2.5 Notation Sei $(P,\le)$ eine partielle Ordnung und $(P',\le)$ sei eine Substruktur von $(P,\le)$. Falls (X,Y) eine Lage in P' ist, so wollen wir (X,Y) auch als Lage in P betrachten, indem wir (X,Y) immer (aus dem Zusammenhang) durch ihre kanonische Erweiterung $(X^\downarrow,Y^\uparrow)$ interpretieren.

7.2.6 Bemerkung *Mit dieser Konvention können wir für $P'\subseteq P$ nun $\mathbb{L}_\kappa(P')$ als Teilmenge von $\mathbb{L}_\kappa(P)$ auffassen, sowie $\mathrm{Sep}_\kappa(P')$ als Teilmenge von $\mathrm{Sep}_\kappa(P)$ usw. . .*

7.3 Übertragung des Hauptsatzes

Zunächst erweitern wir den Begriff der KA-Homogenität zu einer Eigenschaft beliebiger unendlicher partieller Ordnungen.

7.3.1 Definition Sei $(P, \leq)$ eine beliebige unendliche partielle Ordnung. Wir sagen, sie sei ***Ketten- und Antiketten-homogen***, falls jeder partielle Isomorphismus in $(P, \leq)$, dessen Definitionsbereich eine Kette oder eine Antikette mit echt weniger als $|P|$ Elementen ist, sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen lässt.

Nun geben wir die angekündigte Variante von Satz 5.2.5 für κ-separativ konstruierte (überabzählbare) partielle Ordnungen an:

7.3.2 Satz *Sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl mit der Eigenschaft $2^{<\kappa} = \kappa$. Sei $(P, \leq)$ eine κ-separativ konstruierte partielle Ordnung.*

Jeder partielle Isomorphismus Φ in $(P, \leq)$ mit $|\operatorname{Dom}(\Phi)| \in \kappa$, der die Separiertheit erhält, lässt sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen.

Wir halten zunächst eine unmittelbare Folgerung fest:

7.3.3 Korollar *Sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl mit der Eigenschaft $2^{<\kappa} = \kappa$ und $(P, \leq)$ sei eine κ-separativ konstruierte partielle Ordnung. Dann ist $(P, \leq)$ Ketten- und Antiketten-homogen, nicht aber homogen.*

Insbesondere impliziert auch für die Klasse der κ-mächtigen partiellen Ordnungen die Ketten- und Antiketten-Homogenität nicht die Homogenität.

Beweis Offenbar ist $(P, \leq)$ weder $(1, 2, 0)$- noch $(2, 1, 0)$-separiert. Damit ist $(P, \leq)$ nicht 3-homogen und insbesondere nicht homogen.

Wegen
$$\operatorname{Lin}_\kappa(P_\mu) \subseteq \mathbb{E}_\kappa(P_\mu)$$
sind für jede Kette $K \subseteq P$ mit $|K| < \kappa$ alle Lagen $(X, Y) \in \mathbb{L}_\kappa(K)$ in $(P, \leq)$ separiert. Wegen
$$\operatorname{Rand}_\kappa(P_\mu) \subseteq \mathbb{E}_\kappa(P_\mu)$$
sind für jede Antikette $A \subseteq P$ mit $|A| < \kappa$ alle Lagen $(X, Y) \in \mathbb{L}_\kappa(A)$ in $(P, \leq)$ separiert. Folglich erhält jeder Ketten- oder Antiketten-Isomorphismus Φ mit $|\operatorname{Dom}(\Phi)| < \kappa$ die Separiertheit und kann somit nach Satz 7.3.2 auf ganz $(P, \leq)$ fortgesetzt werden. □

Bevor wir Satz 7.3.2 beweisen – genauer: bevor wir angeben, wie der Beweis von Satz 5.2.5 zu variieren ist – zeigen wir zwei Aussagen, die für die Limes-Schritte gewissermaßen die Vererbung der Separiertheit nach oben sicherstellen:

7.3.4 Proposition *Sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl mit der Eigenschaft $2^{<\kappa} = \kappa$. Weiterhin sei λ eine Limeszahl mit $\lambda \in \kappa$ und I_λ sei eine beliebige Teilmenge* *von λ. Sei*

$$(X_\mu, Y_\mu)_{\mu \in I_\lambda} \in \prod_{\mu \in I_\lambda} \mathrm{Sep}_\kappa(P_\mu)$$

eine aufsteigende Folge von Lagen (d.h., für $\nu \in \mu \in I_\lambda$ ist $X_\nu \subseteq X_\mu$ und $Y_\nu \subseteq Y_\mu$).

Dann ist die Folge $(X'_\eta, Y'_\eta)_{\eta \in \lambda}$, gegeben durch

$$X'_\eta := \bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \eta}} X_\mu \quad \& \quad Y'_\eta := \bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \eta}} Y_\mu$$

für jedes $\eta \in \lambda$, eine aufsteigende Folge und Element von $\prod_{\eta \in \lambda} \mathrm{Sep}_\kappa(P_\eta)$. Darüber hinaus gilt:

1.) $(X'_\mu, Y'_\mu) = (X_\mu, Y_\mu)$ *für alle* $\mu \in I_\lambda$

2.) $\bigcup_{\mu \in I_\lambda} X_\mu = \bigcup_{\mu \in \lambda} X'_\mu$ *und* $\bigcup_{\mu \in I_\lambda} Y_\mu = \bigcup_{\mu \in \lambda} Y'_\mu$

3.) $\bigcup_{\mu \in I_\lambda \cap \zeta} X_\mu = \bigcup_{\mu \in \zeta} X'_\mu$ *und* $\bigcup_{\mu \in I_\lambda \cap \zeta} Y_\mu = \bigcup_{\mu \in \zeta} Y'_\mu$ *für alle* $\zeta \in I_\lambda$

*Wegen 1.) nennen wir $(X'_\mu, Y'_\mu)_{\mu \in \lambda}$ eine **Erweiterung** von $(X_\mu, Y_\mu)_{\mu \in I_\lambda}$. Wegen 2.) und 3.) sagen wir, die Folgen $(X'_\mu, Y'_\mu)_{\mu \in \lambda}$ und $(X_\mu, Y_\mu)_{\mu \in I_\lambda}$ haben **gleiches Supremum**.*

Beweis Wir führen eine Induktion über die Menge der Limeszahlen λ mit $\lambda \in \kappa$ durch.

Sei zum *Induktions-Anfang* $\lambda = \omega$. Seien weiter $I_\omega \subseteq \omega$ und eine aufsteigende Folge

$$(X_i, Y_i)_{i \in I_\omega} \in \prod_{i \in I_\omega} \mathrm{Sep}_\kappa(P_i)$$

gegeben. Für jedes $n \in \omega$ ist $I_\omega^{\leq n}$ endlich, so dass $m(n) := \mathrm{Max}(I_\omega^{\leq n})$ wohldefiniert ist. Wir erhalten somit

$$(X'_n, Y'_n) = (X_{m(n)}, Y_{m(n)}) \ .$$

Dann ist wegen $m(n) \leq n$ auch

$$(X'_n, Y'_n) = (X_{m(n)}, Y_{m(n)}) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P_{m(n)}) \subseteq \mathrm{Sep}_\kappa(P_n)$$

und damit

$$(X'_n, Y'_n)_{n \in \omega} \in \prod_{n \in \omega} \mathrm{Sep}_\kappa(P_n) \ .$$

Offenbar ist $(X'_n, Y'_n)_{n \in \omega}$ eine Erweiterung von $(X_i, Y_i)_{i \in I_\omega}$ mit gleichem Supremum.

Als *Induktions-Voraussetzung* gelte die Behauptung für alle Limeszahlen $\lambda' \in \lambda$; insbesondere sei $(X'_\nu, Y'_\nu)_{\nu \in \lambda'} \in \prod_{\nu \in \lambda'} \mathrm{Sep}_\kappa(P_\nu)$.

Sei zum *Induktions-Schluss* nun eine Index-Menge $I_\lambda \subseteq \lambda$ sowie eine aufsteigende Folge $(X_\mu, Y_\mu)_{\mu \in I_\lambda} \in \prod_{\mu \in I_\lambda} \mathrm{Sep}_\kappa(P_\mu)$ gegeben.

Wir müssen zeigen, dass die Folge $(X'_\eta, Y'_\eta)_{\eta \in \lambda}$ – definiert wie in der Proposition – eine Erweiterung von $(X_\mu, Y_\mu)_{\mu \in I_\lambda}$ mit gleichem Limes ist und dass sie in $\prod_{\eta \in \lambda} \mathrm{Sep}_\kappa(P_\eta)$ enthalten ist.

Falls $\eta \in I_\lambda$ ist, so ist $\eta = \mathrm{Max}(I_\lambda^{\leq \eta})$ und wir erhalten $(X'_\eta, Y'_\eta) = (X_\eta, Y_\eta)$. Also ist $(X'_\eta, Y'_\eta)_{\eta \in \lambda}$ eine Erweiterung von $(X_\mu, Y_\mu)_{\mu \in I_\lambda}$.

Offenbar ist

$$\bigcup_{\nu \in \lambda} X'_\nu \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \bigcup_{\nu \in \lambda} \Big(\bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \nu}} X_\mu \Big) = \bigcup_{\mu \in I_\lambda} X_\mu \quad \& \quad \bigcup_{\nu \in \lambda} Y'_\nu \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \bigcup_{\nu \in \lambda} \Big(\bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \nu}} Y_\mu \Big) = \bigcup_{\mu \in I_\lambda} Y_\mu$$

und für jedes $\zeta \in I_\lambda$ gilt:

$$\bigcup_{\nu \in \zeta} X'_\nu \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \bigcup_{\nu \in \zeta} \Big(\bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \nu}} X_\mu \Big) = \bigcup_{\mu \in I_\lambda \cap \zeta} X_\mu \quad \& \quad \bigcup_{\nu \in \zeta} Y'_\nu \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \bigcup_{\nu \in \zeta} \Big(\bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \nu}} Y_\mu \Big) = \bigcup_{\mu \in I_\lambda \cap \zeta} Y_\mu$$

Also haben $(X_\mu, Y_\mu)_{\mu \in I_\lambda}$ und $(X'_\eta, Y'_\eta)_{\eta \in \lambda}$ gleichen Limes.

Sei nun $\nu \in \lambda$ beliebig. Falls $m_\nu := \mathrm{Max}(I_\lambda^{\leq \nu})$ existiert, so ist mit $m(\nu) \leq \nu$

$$(X'_\nu, Y'_\nu) = (X_{m(\nu)}, Y_{m(\nu)}) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P_{m(\nu)}) \subseteq \mathrm{Sep}_\kappa(P_\nu) \ .$$

Andernfalls setzen wir

$$\lambda' := \mathrm{Sup}(I_\lambda^{\leq \nu}) = \mathrm{Sup}(I_\lambda \cap \nu) \ .$$

Offenbar ist λ' eine Limeszahl mit $\lambda' \leq \nu \in \lambda$. Wir erhalten:

$$(X'_\nu, Y'_\nu) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \Big(\bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \nu}} X_\mu, \bigcup_{\mu \in I_\lambda^{\leq \nu}} Y_\mu \Big) = \Big(\bigcup_{\mu \in I_\lambda \cap \lambda'} X_\mu, \bigcup_{\mu \in I_\lambda \cap \lambda'} Y_\mu \Big) \stackrel{\mathrm{I.V.}}{=} \Big(\bigcup_{\mu \in \lambda'} X'_\mu, \bigcup_{\mu \in \lambda'} Y'_\mu \Big)$$

Nach Induktions-Voraussetzung ist $(X'_\nu, Y'_\nu) \in \mathrm{Sep}_\kappa^{(\mathrm{his})}(P'_\lambda)$ und somit insbesondere

$$(X'_\nu, Y'_\nu) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P'_\lambda) \subseteq \mathrm{Sep}_\kappa(P_\nu) \ .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

7.3.5 Korollar *Sei $I \in \mathfrak{P}_{<\kappa}(\kappa)$ beliebig und*

$$(X_i, Y_i)_{i \in I} \in (\mathrm{Sep}_\kappa(P))^I$$

sei eine aufsteigende Folge. Dann gibt es eine Limeszahl $\lambda \in \kappa$ mit

$$\Big(\bigcup_{i \in I} X_i, \bigcup_{i \in I} Y_i \Big) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P_\lambda) \ .$$

Beweis Wir zählen zunächst I ordnungstreu ab: $I = \{i_\mu \mid \mu \in \alpha\}$ mit $\alpha = |I|$ und $\mu \in \mu' \in \alpha$ genau dann, wenn $i_\mu \in i_{\mu'}$. Wir definieren rekursiv:

$$\begin{aligned} m(0) &:= \mathrm{Min}\{\eta \in \kappa \mid (X_{i_0}, Y_{i_0}) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P_\eta)\} \\ m(\mu) &:= \mathrm{Min}\{\eta \in \kappa \mid (X_{i_\mu}, Y_{i_\mu}) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P_\eta) \ \& \ \eta \notin \{m(\zeta) \mid \zeta \in \mu\}^{\downarrow}\} \quad (\text{für } \mu \in \alpha) \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$I' := \{m(\mu) \mid \mu \in \alpha\}$$

und für jedes $\mu \in \alpha$ definieren wir

$$(X'_{m(\mu)}, Y'_{m(\mu)}) := (X_{i_\mu}, Y_{i_\mu}) \ .$$

Wegen

$$(X_{i_\mu}, Y_{i_\mu}) \in \mathrm{Sep}_\kappa(P_{m(\mu)})$$

ist damit

$$(X_i, Y_i)_{i\in I} = (X_{i_\mu}, Y_{i_\mu})_{\mu\in\alpha} = (X'_{m(\mu)}, Y'_{m(\mu)})_{\mu\in\alpha} = (X'_j, Y'_j)_{j\in I'} \in \prod_{j\in I'} \mathrm{Sep}_\kappa(P_j) \ .$$

Sei nun λ die kleinste Limeszahl mit $\lambda \geq \sup(I')$. Nach Proposition 7.3.4 gibt es eine Erweiterung

$$(X''_j, Y''_j)_{j\in\lambda} \in \prod_{j\in\lambda} \mathrm{Sep}_\kappa(P_j)$$

von $(X'_j, Y'_j)_{j\in I'}$ mit gleichem Supremum; insbesondere gilt:

$$(X, Y) := \Big(\bigcup_{j\in\lambda} X''_j, \bigcup_{j\in\lambda} Y''_j\Big) = \Big(\bigcup_{i\in I'} X'_i, \bigcup_{i\in I'} Y'_i\Big)$$

Nach Konstruktion ist (X, Y) eine historisch separierte Lage in P'_λ und ist damit in P_λ separiert. Aus

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{j\in I'} X'_j \quad \& \quad \bigcup_{i\in I} Y_i = \bigcup_{j\in I'} Y'_j$$

folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 7.3.2 Sei $\Phi : P' \to P''$ mit $|P'| \in \kappa$ ein partieller Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält. Wir können im Wesentlichen den Beweis von Satz 5.2.5 übernehmen, bemerken aber Folgendes:

1.) Die Regularität von κ stellt sicher, dass es ein $\nu \in \kappa$ mit $P'' \subseteq P_\nu$ gibt.

2.) Sind für eine Limes-Ordinalzahl $\lambda \in \kappa$ die Erweiterungen Φ_ν für alle $\nu \in \lambda$ wie gewünscht (d.h. Separiertheits-erhaltend) konstruiert, so erhält auch $\Phi_\lambda := \bigcup_{\nu\in\lambda} \Phi_\nu$ die Separiertheit:

   Sei $(X, Y) \in \mathrm{Sep}_\kappa(\mathrm{Dom}(\Phi_\lambda))$. Falls bereits $(X, Y) \in \mathrm{Sep}_\kappa(\mathrm{Dom}(\Phi_\nu))$ gilt für ein $\nu \in \lambda$, so ist auch $\Phi_\lambda(X, Y) = \Phi_\nu(X, Y)$ separiert. Andernfalls setzen wir für jedes $\nu \in \lambda$

$$(X_\nu, Y_\nu) := (X \cap \mathrm{Dom}(\Phi_\nu), Y \cap \mathrm{Dom}(\Phi_\nu))$$
$$(X'_\nu, Y'_\nu) := (\Phi_\nu(X_\nu), \Phi_\nu(Y_\nu))$$

   und erhalten:

$$X = \bigcup_{\nu\in\lambda} X_\nu \quad \& \quad Y = \bigcup_{\nu\in\lambda} Y_\nu \quad \& \quad \Phi_\lambda(X) = \bigcup_{\nu\in\lambda} X'_\nu \quad \& \quad \Phi_\lambda(Y) = \bigcup_{\nu\in\lambda} Y'_\nu$$

Da für jedes $\nu \in \lambda$ die Lage (X_ν, Y_ν) in $(P, \leq)$ separiert ist und Φ_ν die Separiertheit erhält, ist auch $(X'_\nu, Y'_\nu) = (\Phi_\nu(X_\nu), \Phi_\nu(Y_\nu))$ in $(P, \leq)$ separiert. Sei nun $\mu \in \kappa$ minimal mit

$$(X', Y') := (\Phi_\lambda(X), \Phi_\lambda(Y)) \in \mathbb{L}_\kappa(P_\mu) \; .$$

Damit ist

$$(X'_\nu, Y'_\nu)_{\nu\in\lambda} \in (\mathrm{Sep}_\kappa(P_\mu))^\lambda$$

und wegen

$$\begin{aligned} (X', Y') &= \Big(\Phi_\lambda\big(\bigcup_{\nu\in\lambda} X_\nu\big), \Phi_\lambda\big(\bigcup_{\nu\in\lambda} Y_\nu\big)\Big) \\ &= \Big(\bigcup_{\nu\in\lambda} \Phi_\nu(X_\nu), \bigcup_{\nu\in\lambda} \Phi_\nu(Y_\nu)\Big) \\ &= \Big(\bigcup_{\nu\in\lambda} X'_\nu, \bigcup_{\nu\in\lambda} Y'_\nu\Big) \end{aligned}$$

ist mit Korollar 7.3.5 dann auch (X', Y') in $(P, \leq)$ separiert.

Da alle Φ_ν mit $\nu \in \lambda$ die Separiertheit in $(P, \leq)$ erhalten, sind auch ihre Inversen Φ_ν^{-1} Separiertheits-erhaltend, und die obige Überlegung zeigt zugleich, dass Φ_λ *nur* separierte Lagen auf separierte Lagen abbildet. Also erhält Φ_λ die Separiertheit.

Alle anderen Beweis-Schritte verlaufen analog zum abzählbaren Fall, können also aus dem Beweis von Satz 5.2.5 übernommen werden. □

Zusammenstellung der wichtigsten Resultate

Zum Schluss geben wir einen kurzen Überblick über die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit. Es ist zu beachten, dass Korollare hier teils ohne die zugehörigen Sätze, Propositionen etc. aufgeführt werden.

Übertragung der Schmerl'schen Klassifikation

Satz 1.4.1 *Sei $(P, \leq)$ eine (höchstens abzählbare) stark* KA*-homogene partielle Ordnung.*

1.) *Falls $(P, \leq)$ nicht $\{\ \}$ - universell ist, so ist $(P, \leq)$ isomorph zu A_ν für ein $\nu \in \omega + 1$.*

2.) *Falls $(P, \leq)$ zwar $\{\ \}$ - universell, nicht jedoch $\{\ \}$ - universell ist, so ist $(P, \leq)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, \leq)$.*

3.) *Falls $(P, \leq)$ zwar $\{\ \}$ - universell, nicht jedoch $\{\ \}$ - universell ist, so ist $(P, \leq)$ isomorph zu $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\pi_1})$ für ein $\nu \in \omega + 1$.*

4.) *Falls $(P, \leq)$ zwar $\{\ \}$ - universell, nicht jedoch $\{\ \}$ - universell ist, so ist $(P, \leq)$ isomorph zu $(\mathbb{Q} \times \nu, \leq_{\mathrm{id}_2})$ für ein $\nu \in \omega + 1$.*

5.) *Falls $(P, \leq)$ $\{\ ,\ \}$ - universell ist, so enthält $(P, \leq)$ ein Pentagon.*

Satz 1.5.4 *Sehr stark* KA*-homogene partielle Ordnungen, die ein Pentagon enthalten, sind universell.*

Separierbarkeit signifikanter Lagen als Homogenitäts-Kriterium

Satz 2.3.5 *Eine abzählbare partielle Ordnung mit Pentagon ist genau dann homogen, wenn sie jede signifikante Lage separiert.*

Weder Ketten- und Antiketten-Homogenität noch Kreuz-Homogenität implizieren die Homogenität

Hauptsatz 5.2.5 *Sei $(P, \leq)$ eine separativ oder exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung. Jeder endliche partielle Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält, lässt sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen.*

Korollar 5.5.1 *Sowohl die separativ konstruierte partielle Ordnung als auch die exakt-separativ konstruierte partielle Ordnung aus Abschnitt 4.2 sind Ketten- und Antiketten-homogen, jedoch nicht homogen.*

Korollar 5.5.2 *Für die Klasse der höchstens abzählbaren partiellen Ordnungen impliziert die Ketten- und Antiketten-Homogenität nicht die Homogenität.*

Korollar 5.7.4 *Es gibt bis auf Isomorphie genau vier per Einladung konstruierbare (abzählbare) partielle Ordnungen.*

Der Hauptsatz 5.2.5 lässt sich auf *alle* per Einladung konstruierten partiellen Ordnungen übertragen:

Hauptsatz 5.6.5 *Sei $(P, \leq)$ eine per Einladung konstruierte partielle Ordnung. Jeder endliche partielle Isomorphismus in $(P, \leq)$, der die Separiertheit erhält, lässt sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen. Jedoch ist $(P, \leq)$ nicht homogen.*

Korollar 5.8.4 *Separativ, exakt-separativ, $\triangle$-separativ oder $\triangledown$-separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind Ketten- und Antiketten-homogen.*
$\Diamond$-separativ konstruierte abzählbare partielle Ordnungen sind Kreuz-homogen und 3-homogen.

Korollar 5.8.5 *Für die Klasse der höchstens abzählbaren partiellen Ordnungen impliziert die Kreuz-Homogenität nicht die Homogenität.*

Satz 5.9.1 *Jede per Einladung konstruierte partielle Ordnung ist $\aleph_1$-universell.*

Partielle Übertragung ins Überabzählbare

Satz 7.3.2 *Sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl mit der Eigenschaft $2^{<\kappa} = \kappa$. Sei $(P, \leq)$ eine κ-separativ konstruierte partielle Ordnung.*

Jeder partielle Isomorphismus Φ in $(P, \leq)$ mit $|\operatorname{Dom}(\Phi)| \in \kappa$, der die Separiertheit erhält, lässt sich zu einem Automorphismus auf ganz $(P, \leq)$ fortsetzen.

Korollar 7.3.3 *Sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl mit der Eigenschaft $2^{<\kappa} = \kappa$ und $(P, \leq)$ sei eine κ-separativ konstruierte partielle Ordnung. Dann ist $(P, \leq)$ Ketten- und Antiketten-homogen, nicht aber homogen.*

Insbesondere impliziert auch für die Klasse der κ-mächtigen partiellen Ordnungen die Ketten- und Antiketten-Homogenität nicht die Homogenität.

Literaturverzeichnis

[Schm] James H. Schmerl
Countable homogeneous partially ordered sets
Algebra Universalis **9** (1979), S. 317–321

[DrMcP] Manfred Droste und H. Dugald Macpherson
On k-homogeneous Posets and Graphs
Journal of Combinatorial Theory, Series A **56** (1991), S. 1–15

[AlBu] Michael H. Albert und Stanley N. Burris
Finite Axiomatizations for Existentially Closed Posets and Semilattices
Order **3** (1986), S. 169–178

[CK] C.C. Chang und H. Jerome Keisler
Model Theory
North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1990

[Haus] Egbert Brieskorn et al. (Hrsg.)
Felix Hausdorff – Gesammelte Werke
Band II *Grundzüge der Mengenlehre*
Springer, Berlin, 2002

Index