

Eine praktische Anwendung von CMC–Flächen in der Bionik

Dissertation

der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat)

vorgelegt von
Christian Apeltauer
aus Schwäbisch Hall

Tübingen
2011

Tag der mündlichen Qualifikation: 20. 7. 2011

Dekan: Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Franz Pedit

2. Berichterstatter: PD Dr. Anita Roth-Nebelsick

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Grundlagen	3
1.2.1	Young–Laplacesche Gleichung	3
1.2.2	Stabilität	7
1.2.3	Persistenz	7
2	Der rotationssymmetrische Fall	8
2.1	Fall 1: Sphäre und Unduloid	11
2.2	Fall 2: Nодоide	15
2.2.1	Fall 2a: Kurve ist gänzlich oberhalb der Umkehrpunkte	16
2.2.2	Fall 2b: Die Kurve ist (teilweise) unter einem Umkehrpunkt	16
2.3	Fall 3: Katenoid	18
3	Zweidimensionale Gitter von Säulen	20
3.1	Grundlagen und Problemstellung	20
3.2	Existenz-Kriterium	29
3.2.1	Beispiele	37
3.3	Stabilität	38
3.4	Persistenz	41
3.5	Anmerkungen zur Numerik	44
4	Variation	45
4.1	Ein Extremalprinzip für CMC–Flächen	45
4.2	Grundlagen	46
4.3	Extremalprinzip am Rand	55
4.4	Ausblick Kegel	65
5	Perron	68
5.1	Unter– und Oberfunktionen	68
5.2	Schranken	76
6	Danksagungen	78

1 Einführung

1.1 Motivation

Die ingenieurwissenschaftliche Forschung hat in jüngster Zeit ein verstärktes Interesse an Luft-Wasser-Grenzschichten gezeigt. Vor allem im Schiffbau erhofft man sich, den Wasserwiderstand von nautischen Fahrzeugen (und damit deren Energieverbrauch) deutlich reduzieren zu können, indem man die Hülle so gestaltet, daß sie unter Wasser möglichst lange (im Idealfall unbegrenzt) eine Luftschicht an sich hält. Diese Luftschicht würde dann wie ein Schmierfilm zwischen Schiff und Wasser wirken. Ein höchst willkommener Seiteneffekt wäre das sogenannte Antifouling: Meeresorganismen wie Algen oder Schnecken besiedeln regelmäßig die Schiffshülle und vergrößern deren Oberfläche und damit den Wasserwiderstand erheblich. Zur Bekämpfung dieser Besiedlung werden konventionell Lacke und Farben eingesetzt, die auf Grund ihrer allgemeinen Toxizität jedoch nicht unumstritten sind. Es ist jedoch bekannt, daß diese Organismen eine ausgeprägte Aversion gegen Luftschichten haben und eine Oberfläche selbst dann nicht besiedeln, wenn die Luftschicht klein gegen die eigene Körpergröße ist, der Körper bei einer Besiedlung der festen Oberfläche also immer noch den benötigten Wasserkontakt hätte. Eine lufthaltende Oberfläche der Schiffshülle würde also den Wasserwiderstand nicht nur unmittelbar reduzieren, sondern auch vor einer Verschlechterung des Widerstandswertes schützen und die Freisetzung schädlicher Substanzen im maritimen Ökosystem verhindern helfen.

Diesem praktischen Interesse steht jedoch ein theoretisches Defizit gegenüber, was die Interaktion von Festkörperoberfläche, Wasser und Luft betrifft. Zwar sind die fundamentalen Gleichungen bekannt, die diese Interaktion steuern, jedoch wurden die Lösungen dieser Gleichungen in Bezug auf die hier vorgegebene Problemstellung bislang noch nicht untersucht und keine Anstrengungen unternommen, die optimale Oberflächenbeschaffenheit vorherzusagen. Vielmehr stützt sich die ingenieurwissenschaftliche Forschung auf empirische Beobachtungen und das Verfahren von Versuch und Irrtum, als einige Beispiele seien die Artikel [1], [2] und [3] genannt. Einige Ansätze gingen soweit, Luft unter Wasser zu pumpen, um die Schiffshülle aktiv mit Luft zu „bestreichen“ (sog. bubble seeding), vgl. z. B. [4], [12]; dieses Verfahren wies jedoch durchgängig eine negative Energiebilanz auf. Daß es dennoch möglich passiv und über lange Zeiträume Luftschichten zu halten, zeigen zahlreiche Beispiele aus der Natur. So sind die Blätter von *Salvinia molesta*, des gemeinen Wasserfarn, wie Laboruntersuchungen zeigen, imstande eine Luftschicht bis zu 60 Stunden zu halten und erreichen damit Zeiten, die deutlich über künstlich erschaffenen Oberflächen liegen, die Luftschichten nur in Größenordnungen von Stunden halten können. Einige Wasserspinnen verbringen ihr sogar ihr gesamtes Leben in einer mitgeführten Luftblase unter der Wasseroberfläche.

1 Einführung

Das Beispiel *Salvinia molesta* zeigt aber auch deutlich, wie sehr ein theoretisches Fundament nötig ist. Die Oberfläche der Pflanze ist von Haaren bedeckt; die Luft-Wasser-Grenzschicht spannt sich nun wie ein Zeltdach zwischen den Spitzen der Haare. Naturgemäß ist die Verteilung der Härchen nicht exakt, gleichwohl strebt man für die technische Nachbildung ein symmetrisches zweidimensionales Gitter an. Beobachtungen legen aber für *Salvinia molesta* teils eine vierzählige, teils eine sechszählige Drehsymmetrie nahe. Eine Entscheidung der Symmetriefrage ohne theoretische Grundlagen ist hier also nicht möglich.

Beschäftigt man sich mit den theoretischen Grundlagen, wird man sehr schnell auf das Problem der Gleichungen für die Flächen konstanter mittlerer Krümmung (im folgenden kurz CMC-Flächen¹ genannt) mit Randbedingungen geführt. Diese Problemstellung wird bislang noch kaum unter Hinblick auf praktische Anwendungen untersucht. Während also Mathematikern kaum bewußt wird, welches praktische Potential in ihren Arbeiten schlummert, fehlt es Ingenieuren am theoretischen Rüstzeug für ihr Vorhaben. Die vorliegende Arbeit versucht, diese Lücke ein Stück weit zu schließen.

¹nach englisch „constant mean curvature“

1.2 Grundlagen

Für die Frage wie eine Oberfläche beschaffen sein muß, damit sie möglichst lange eine Luftschicht an sich hält, spielen drei Faktoren eine Rolle:

- Existenz und Form der Grenzfläche: Diese werden durch die Drücke auf beiden Seiten der Grenzfläche gesteuert. Die zentrale Gleichung ist hier die Young–Laplacesche Gleichung. Mit einer physikalisch vertretbaren Zusatzannahme² führt sie auf die CMC–Gleichung. Zugleich trifft diese CMC–Fläche unter einem Kontaktwinkel γ auf die Festkörperoberfläche, der als Funktion der chemischen Eigenschaften der drei Phasen Festkörper, Flüssigkeit und Gas vorgegeben ist. Form und Existenz hängen also von der Form des Festkörpers und den chemischen Eigenschaften der beteiligten Substanzen ab.
- (Mechanische) Stabilität: Diese hängt wesentlich von den auftretenden hydrodynamischen und hydrostatischen Drücken ab. Auch hier wird die Young–Laplacesche Gleichung und damit Geometrie und chemische Eigenschaften zu betrachten sein.
- Persistenz, d. i. zeitliche Stabilität: Luftschichten können sich auflösen, weil sich Gas im umgebenden Wasser löst und wegdiffundiert. Zentrale Gesetzmäßigkeiten sind hier das Henrysche Gesetz über die Löslichkeit von Gasen und das Ficksche Gesetz über Diffusionsprozesse. Wegen der auftretenden Druckabhängigkeit wird die Young–Laplacesche Gleichung auch hier eine Rolle spielen. Zusätzlich zu den Faktoren, die bei der mechanischen Stabilität eingehen, wird hier also auch noch der Gasgehalt des Wassers zu berücksichtigen sein.

1.2.1 Young–Laplacesche Gleichung

Die Young–Laplacesche Gleichung beschreibt, wie die Drücke auf beiden Seiten einer Grenzfläche deren Form bestimmen. Zunächst geben wir eine kurze Herleitung dieser wichtigen Gleichung an. Hierzu betrachten wir die Grenzfläche zwischen zwei Medien. Wir wählen ein Koordinaten–System derart, daß sich die Grenzfläche als Graph $(x, y, z = u(x, y))$ einer Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen läßt³. Das obere Medium bezeichnen wir als „Medium A“ und bezeichnen alle zugehörigen Größen mit dem Subskript A. Entsprechend nennen wir das untere Medium „Medium B“ und verwenden den Subskript B (vgl. Abb. 1.1).

Wird nun ein Flächenelement $df = \sqrt{g}dx dy$ um δz verschoben⁴, so muß gegen den Druck des Mediums, in das hineinverschoben wird, Arbeit verrichtet werden, während im entlasteten Medium Arbeit frei wird. Die insgesamt geleistete Arbeit bei der Volumenänderung ist sodann:

$$\int (p_A - p_B)\delta z df$$

²Daß nämlich der Druck entlang der Grenzfläche in beiden Phasen konstant sei, der Einfluß der Schwerkraft also zu vernachlässigen sei.

³Lokal ist dies immer möglich. Da die Laplacesche Gleichung eine lokale Gleichung ist, ist es nicht nötig ein solches Koordinaten–System global zu finden

⁴ g ist die Determinante des ersten Fundamentaltensors

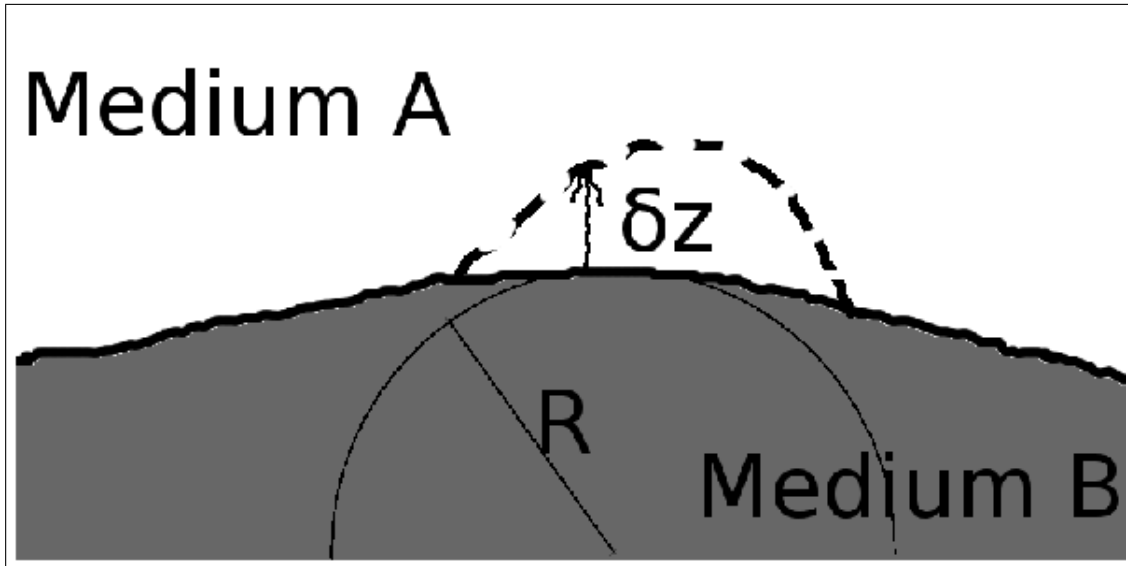


Abbildung 1.1: Schnitt der Grenzfläche mit einer Hauptkrümmungsebene
 R : zugehöriger Hauptkrümmungsradius, hier mit positiven Vorzeichen
 δz Verschiebung der Grenzfläche

die geleistete Gesamtarbeit erhält man, indem man noch die Arbeit hinzuaddiert, die für die Änderung der Grenzfläche nötig ist. Diese ist gleich

$$\sigma \delta f,$$

wobei σ die Oberflächenspannung und δf die Änderung der Fläche ist. Zusammengefaßt ist also die Gesamtarbeit δR :

$$\delta R = \int (p_A - p_B) \delta z df + \sigma \delta f \quad (1.1)$$

Ist die Grenzfläche im Gleichgewicht, so muß für alle Verschiebungen $\delta R = 0$ sein.

Wir führen nun in jedem Punkt die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 ein, wobei wir die Radien als positiv betrachten, wenn sie in Medium 2 hineingerichtet sind. Wird der Punkt nun um δz verschoben, so ändert sich auf jedem der beiden Hauptschnitte das zugehörige Linienelement dl_i um $\frac{\delta z}{R_i} dl_i$ ⁵. Somit können wir für das neue Flächenelement die Näherung

$$dl_1 \left(1 + \frac{\delta z}{R_1}\right) dl_2 \left(1 + \frac{\delta z}{R_2}\right) \approx dl_1 dl_2 \left(1 + \frac{\delta z}{R_1} + \frac{\delta z}{R_2}\right)$$

angeben. Das Flächenelement vor der Verschiebung ist dagegen $df = dl_1 dl_2$. Somit ist die Änderung des Flächeninhaltes der Grenzfläche in dieser Näherung also:

$$\delta f = \int \delta z \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) df.$$

⁵Hier soll keine Summation über i erfolgen; wir machen dies und im folgenden durch Unterstreichen eines Indizes deutlich

1 Einführung

Setzen wir dies in (1.1) ein, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung:

$$\int \delta z \left\{ (p_A - p_B) + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right\} df = 0$$

Die Summe der reziproken Hauptkrümmungsradien ist aber nach Definition das Doppelte der mittleren Krümmung H ; wir können obige Gleichung also kürzer als

$$\int \delta z \{ (p_A - p_B) + 2\sigma H \} df = 0$$

schreiben. Diese Bedingung muß bei jeder beliebigen infinitesimalen Verschiebung der Fläche erfüllt sein. Dies kann nur erfüllt sein, wenn der Term in geschweiften Klammern punktweise identisch verschwinden:

$$p_A - p_B = 2\sigma H. \quad (1.2)$$

Vergleiche hierzu z. B. ([13], §61).

Nach Wahl des Vorzeichens der Hauptkrümmungsradien ist die mittlere Krümmung positiv, wenn sich die Fläche zu demjenigen Normalenvektor hinkrümmt, der in Medium B hineinweist (wie in Abb. 1.1. Verglichen mit einer ebenen Fläche, ist die gekrümmte Fläche in Medium A hineingedrückt. Dies ist genau das Verhalten der Grenzfläche, die man erwartet, wenn $p_B > p_A$ ist.

Die typischen Oberflächenstrukturen, für die wir uns interessieren, sind von der Größenordnung eines Millimeters oder darunter. Wir können daher in guter Näherung davon ausgehen, daß der hydrostatische Druck entlang der Grenzfläche konstant ist. Dies führt zu der wichtigen Annahmen:

Die Druckdifferenz $\Delta p = p_2 - p_1$ ist entlang der Grenzfläche eine Konstante. Vermöge der Young–Laplaceschen Gleichung (1.2) ist die Grenzfläche also eine Fläche konstanter mittlere Krümmung (CMC–Fläche).

Das wohl bekannteste Beispiel für solche Grenzflächen konstanter mittlerer Krümmung sind Seifenblasen. Da hier keine Randbedingungen zu beachten sind, führt die Forderung nach konstanter mittlerer Krümmung auf die anschaulich wohl bekannte Sphärenform.

Wir sind jedoch an einem anspruchsvolleren Problem interessiert. Die Grenzfläche zwischen Luft und Wasser soll an einen Festkörper andocken, sich gewissermaßen wie ein Zeltdach von Befestigungsmöglichkeit zu Befestigungsmöglichkeit spannen. An den Stellen, wo die Grenzfläche den Festkörper berührt, bilden die Normalen beider Flächen einen vorgegebenen Winkel, den Kontaktwinkel. Nach der Youngschen Gleichung ist der Cosinus des Kontaktwinkels eine Funktion der Oberflächenspannungen zwischen Luft und Wasser, zwischen Wasser und Festkörper, sowie zwischen Festkörper und Luft. Der Kontaktwinkel hängt damit nur von den chemischen Eigenschaften der beteiligten Substanzen ab. Wir kommen später auf dieses Randwertproblem und seine exakte Formulierung zurück.

Ist der Kontaktwinkel — gemessen im Wasser — kleiner als $\pi/2$, so sagt man, daß der Festkörper **hydrophil** sei; im Falle eines Kontaktwinkels größer als $\pi/2$ spricht man von einem **hydrophoben** Festkörper. Anschaulich kann man sich diese Namensgebung an Abbildung 1.2 klarmachen.

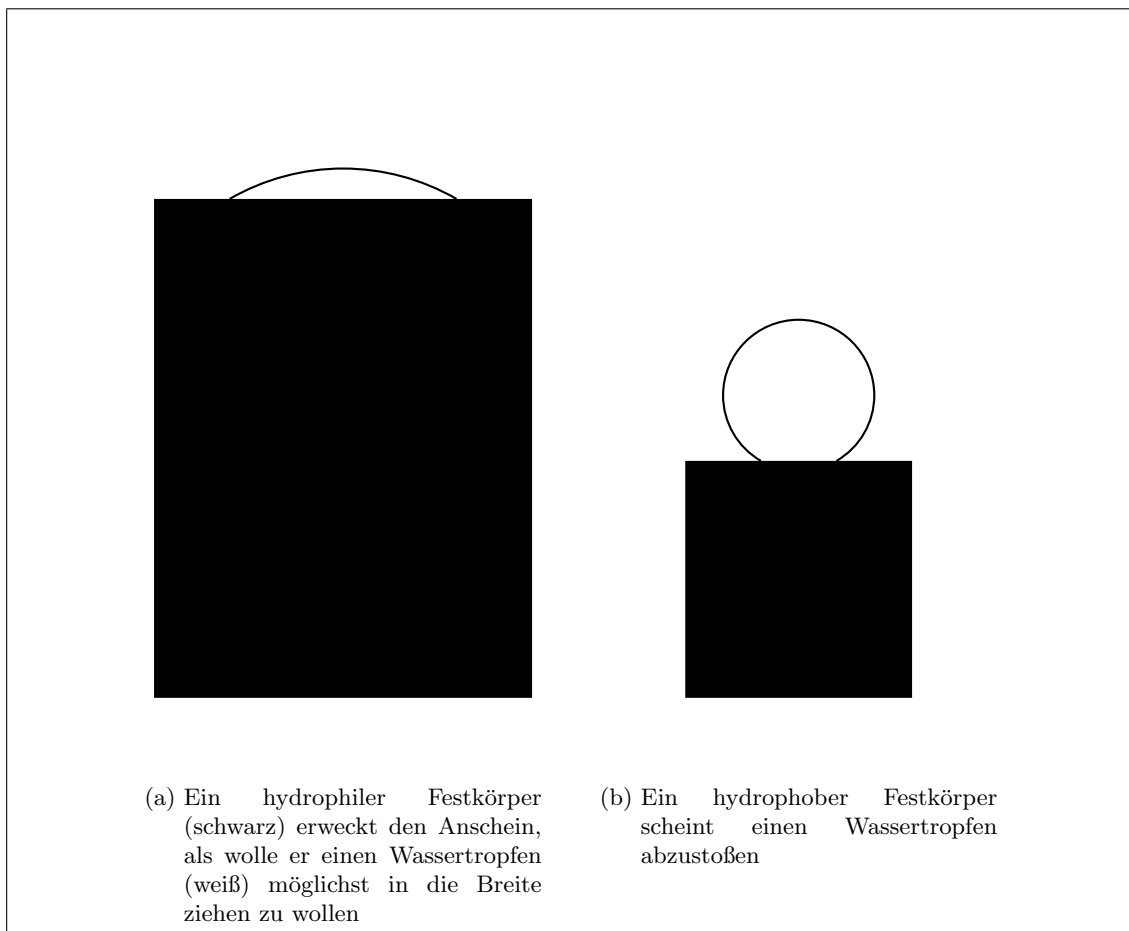


Abbildung 1.2: Hydrophile und hydrophobe Festkörper

1.2.2 Stabilität

Wir wenden uns aber zunächst der Frage der (mechanischen) Stabilität zu. Damit die Luftschicht ihre reibungsvermindernde Wirkung entfalten kann, muß sie natürlich stabil gegen (kleine) mechanische Störungen sein, d. h. die Grenzfläche kehrt nach einer solchen Störung wieder in ihre Gleichgewichtsposition zurück. Solche Störungen treten auf, wenn das Objekt, dem die Luftschicht anhaftet, seine Geschwindigkeit oder seine vertikale Position in der Wassersäule (also den wirksamen hydrostatischen Druck) ändert.

Wir gehen im folgenden wieder von einem konstanten hydrostatischen Druck aus. Die Druckdifferenz entlang der Grenzfläche ist dann eine Funktion allein des Drucks in der Luftschicht. Wird die Grenzfläche verschoben, ändert sich zum einen der Luftdruck, der nötig ist, um die Grenzfläche aufrecht zu erhalten, und der durch Young–Laplace (1.2) gegeben ist. Zum anderen ändert sich der durch die allgemeine Gasgleichung⁶

$$pV = nRT \quad (1.3)$$

gegebene tatsächliche Luftdruck. Steigt dieser tatsächliche Luftdruck stärker an, als der benötigte, so ist eine Expansion der Luftschicht zu erwarten, umgekehrt ein Schrumpfen. Stabilität erfordert, daß Expansion auftritt, wenn die Luftschicht durch eine Störung verkleinert wird, und daß Schrumpfen auftritt, wenn die Störung die Luftschicht vergrößert. Andernfalls würde die Luftschicht explodieren oder kollabieren.

Die Änderungen der beiden Drücke können durch Taylor–Entwicklung der Gleichungen (1.2) und (1.3) abgeschätzt werden. Hieraus werden wir später ein einfaches (und in einigen Fällen auch zu einfaches) Stabilitätskriterium ableiten.

1.2.3 Persistenz

Die zeitliche Persistenz einer Luftschicht wird naturgemäß durch die Austauschrate von Gasmolekülen zwischen Luft und Wasser bestimmt. An der Grenzfläche treten Moleküle vom einen Medium in das andere über. Ob der Nettostrom ins Wasser gerichtet ist (und die Luftschicht damit langfristig auflöst) oder in die Gasphase, wird neben der Young–Laplaceschen Gleichung (1.2) durch zwei elementare Gesetzmäßigkeiten der physikalischen Chemie bestimmt:

Das Henrysche Gesetz

$$p_A = c_A k_H \quad (1.4)$$

koppelt den Partialdruck p_A des Gases A in der Luftschicht mit dem Molenbruch c_A der im Wasser gelösten Moleküle von A . Dabei ist k_H die Henrysche Konstante.

Das Ficksche Gesetz

$$\vec{j}_A = -D\nabla c_A \quad (1.5)$$

beschreibt den Diffusionsstrom von Molekülen des Gases A in der wäßrigen Lösung: der Strom \vec{j}_A ist dem Gradienten der Konzentration c_A entgegengerichtet. D ist die Diffusionskonstante.

Wir wenden uns auch hier einer ausführlichen Diskussion erst später wieder zu.

⁶ p : Druck, V Volumen, n : Stoffmenge, R : allgemeine Gaskonstante, T : Temperatur

2 Der rotationssymmetrische Fall

Die CMC-Gleichung mit Randbedingungen ist im allgemeinen sehr schwierig zu lösen. Das Problem vereinfacht sich jedoch stark, wenn es Symmetrien aufweist. Im Falle von Rotationssymmetrie sind sogar sämtliche Lösungen bekannt. Solche Lösungen treten auf, wenn sich eine Luftblase an eine einzelne runde Säule anheftet. Im folgenden betrachten wir die bekannten rotationssymmetrischen Lösungen und passen die auftretenden freien Parameter den gegebenen Randbedingungen an. Außer als einführendes Beispiel sind diese Lösungen von Interesse, da zu erwarten ist, daß eine Luftschicht in einzelne Blasen zerfällt, wenn in einem Feld von Säulen der Abstand zwischen diesen zu groß wird. Eine zumindest ungefähre Antwort auf die Frage, wann der Abstand „zu groß“ ist, liefert ein Vergleich der Energien, die einerseits in einer durchgehenden Luftschicht, andererseits in einem Feld einzelner Blasen gebunden ist. Hierauf werden wir später in Abschnitt 3.3 zurückkommen; zunächst aber werden wir in diesem Abschnitt einer Klassifikation aller rotationssymmetrischen Lösungen durchführen.

Die rotationssymmetrischen Flächen konstanter mittlerer Krümmung H , die Delaunay-Flächen¹, werden durch Rotation des Graphen

$$X(s; H, B) = \left(\int_0^s \frac{1 + B \sin(2Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Ht)}} dt, \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs)} \right)$$

$$B \geq 0$$

um die x -Achse erzeugt; die Kurve ist hierbei nach Bogenlänge s parametrisiert, H ist die vorgeschriebene mittlere Krümmung, B ist ein Ordnungsparameter. Für $B = 0$ erhalten wir den für uns uninteressanten Zylinder, für $0 < B < 1$ den Unduloiden (s. Abbildung 2.1), für $B = 1$ eine unendliche Aneinanderreihung von sich berührenden Sphären entlang einer gemeinsamen Achse und für $B > 1$ den Nodoiden (s. Abbildung 2.2). Eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung H , $H < 0$, ergibt sich formal durch eine Verschiebung der Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung $|H|$ entlang der Rotationsachse und ist damit allein durch ihre Form nicht von dieser unterscheidbar. Dies ist auch zu erwarten, da das Vorzeichen von H lediglich eine Aussage über die Orientierung der Fläche relativ zum umgebenden Raum macht und durch eine Umorientierung geändert werden kann. Wir führen daher die Konvention ein, daß $H > 0$, falls das Wasser auf der Außenseite der Fläche (= Seite, die im Maximum von der Rotationsachse abgewandt ist) ist. Zur Vereinfachung setzen wir im Folgenden $H > 0$ und merken explizit an, falls die mittlere Krümmung negativ zu interpretieren ist. Es ergeben sich, wie im Folgenden gezeigt, folgende Winkelbereiche (r_S ist Radius der Säule; vgl. Abb. 2.3):

¹vgl. hierzu auch [9], an dessen Nomenklatur wir uns Folgenden halten

2 Der rotationssymmetrische Fall

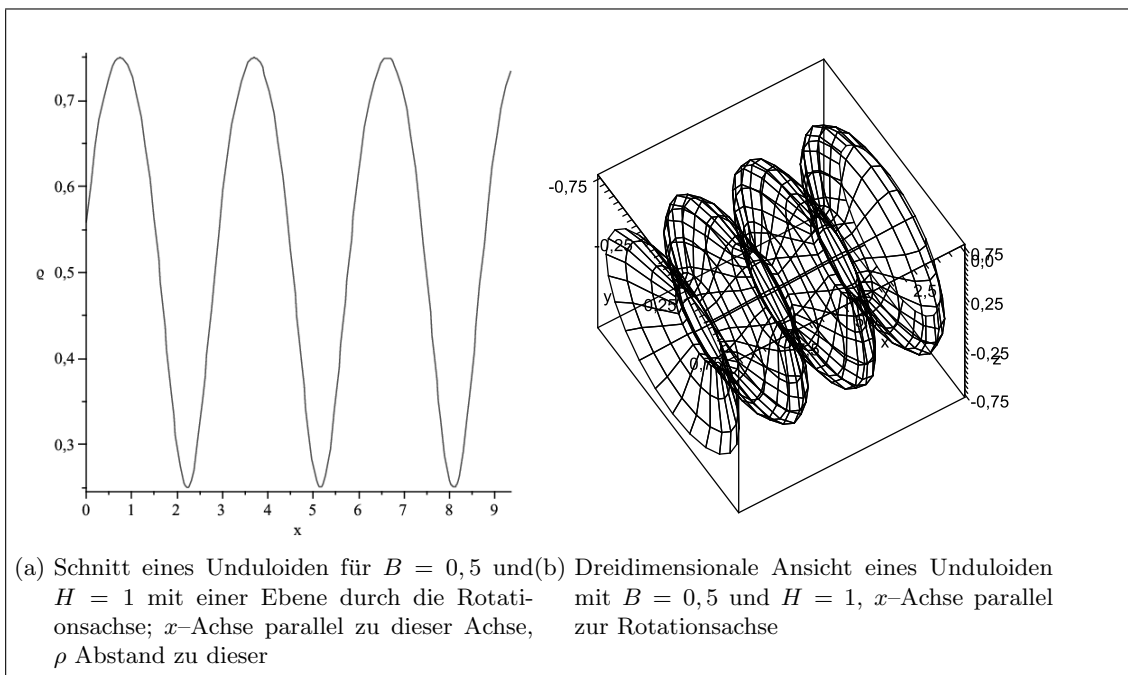


Abbildung 2.1: Unduloid

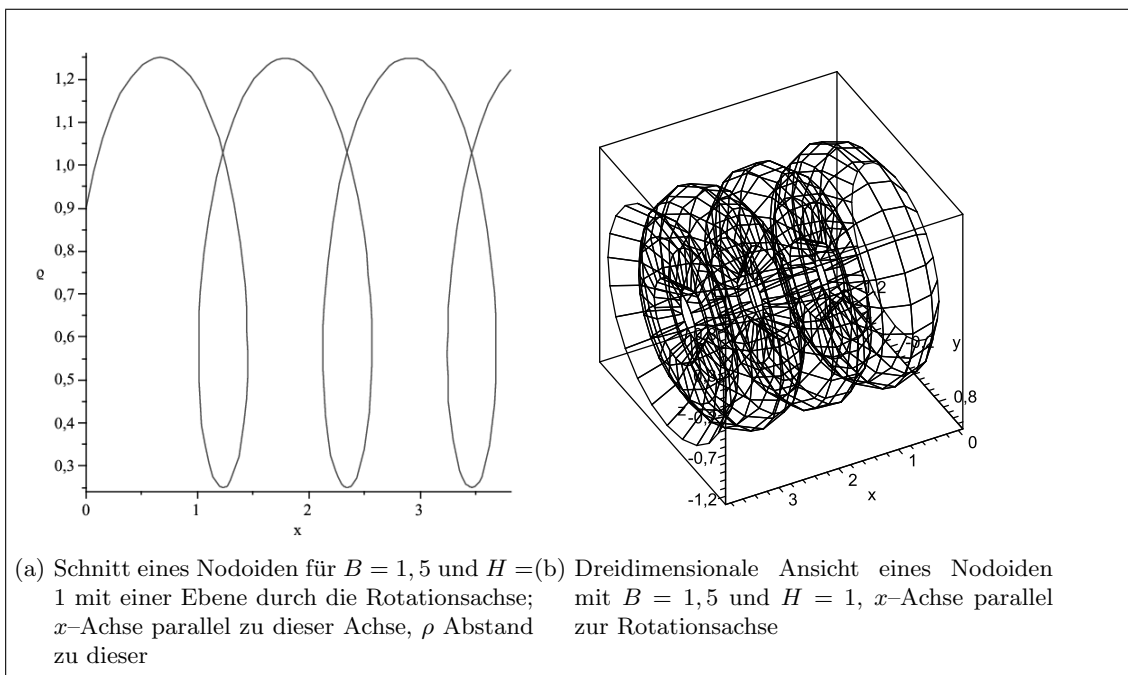


Abbildung 2.2: Nodoid

2 Der rotationssymmetrische Fall

Kontaktwinkel α an der Säule	Kontaktwinkel β am Boden	sgn H	Fall
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \cos \alpha > 2Hr_S$	$\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{B}{\sqrt{1-B^2}} < \beta < \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}$	+1	1
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, 2Hr_S \geq \cos \alpha \geq Hr_S$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha > \beta > \alpha - \frac{\pi}{2}$	+1	1
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, Hr_S < \cos \alpha $	$\frac{3\pi}{2} - \alpha > \beta > \alpha - \frac{\pi}{2}$	+1	2a
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$0 < \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha^*$ (s. Gleichung (2.25))	+1	2b.1
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha < \beta < \pi$	-1	2b.2
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi > \beta > \frac{3\pi}{2} - \alpha$	0	3

Der maximale Durchmesser des Rotationskörpers beträgt offenbar

$$y_{\max} := \frac{1+B}{2|H|} \quad (2.1)$$

und der minimale Durchmesser

$$y_{\min} := \frac{|1-B|}{2|H|} \quad (2.2)$$

Die Extrema werden für $s \in \{\frac{(2z+1)\pi}{4H} | z \in \mathbb{Z}\}$ angenommen und die Ebenen senkrecht zur Rotationsachse durch die Extrema sind Spiegelebenen der Delaunay-Fläche. Um dies zu zeigen wählen wir o. B. d. A. $s = \frac{\pi}{4H}$ und betrachten die beiden Kurvenpunkte, die jeweils die Bogenlänge $\delta \in \mathbb{R}^+$ vom Extrempunkt entfernt sind. Wenn tatsächlich die postulierte Spiegelsymmetrie vorliegt, muß für jedes δ gelten:

$$y(s_+) = y(s_-), \quad x(s_+) - x(s) = x(s) - x(s_-), \quad s_{\pm} = s \pm \delta$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y(s_+) &= \frac{1}{2|H|} \sqrt{1+B^2+2B \sin\left(\frac{\pi}{2}+2H\delta\right)} \\ &= \frac{1}{2|H|} \sqrt{1+B^2+2B \sin\left(\frac{\pi}{2}-2H\delta\right)} \\ &= y(s_-) \\ x(s_+) - x(s) &= \int_0^\delta \frac{1+B \sin\left(\frac{\pi}{2}+2Ht\right)}{\sqrt{1+B^2+2B \sin\left(\frac{\pi}{2}+2Ht\right)}} dt \\ &= \int_{-\delta}^0 \frac{1+B \sin\left(\frac{\pi}{2}-2Ht\right)}{\sqrt{1+B^2+2B \sin\left(\frac{\pi}{2}-2Ht\right)}} dt \\ &= x(s) - x(s_-) \end{aligned}$$

Im Punkt $X(s; H, B)$ beträgt der Tangens des Winkels gegen die Horizontale (=Richtung der Rotationsachse)

$$y'(x(s)) = \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)} = \frac{B \cos(2Hs)}{1+B \sin(2Hs)} \quad (2.3)$$

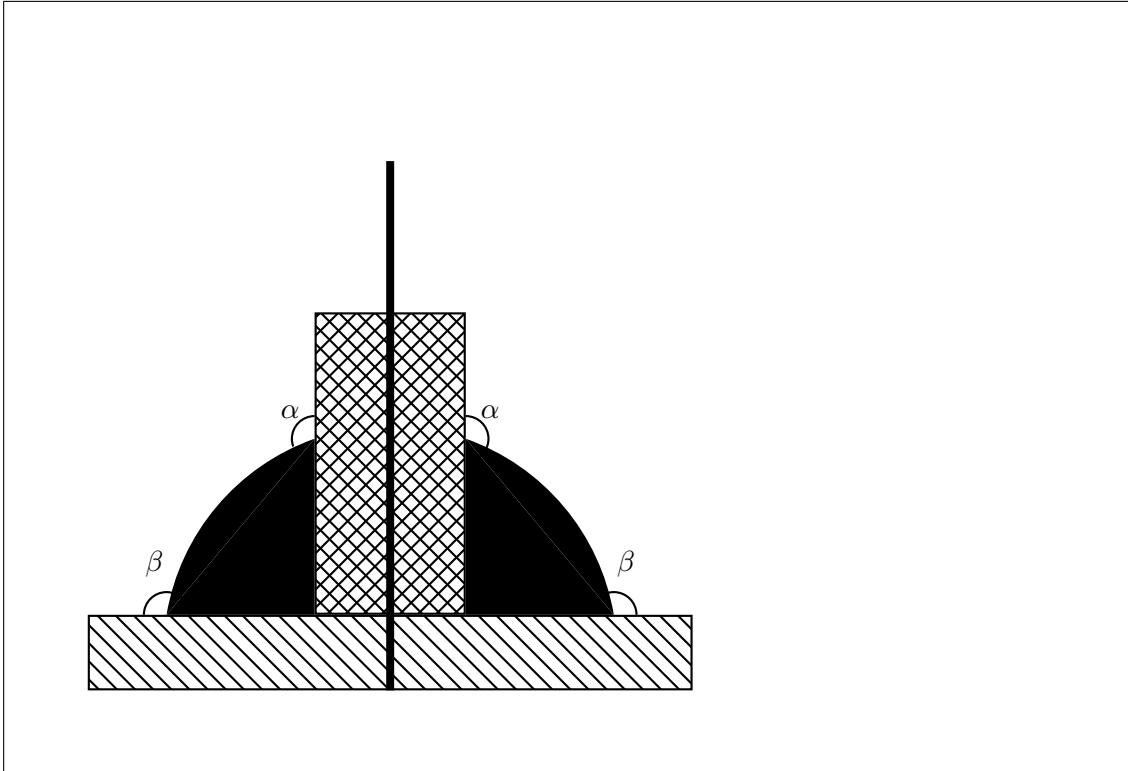


Abbildung 2.3: Kontaktwinkel

Weiß: Wasser; Schwarz: Luftblase; gekreuzt: Säule; quergestreift: Boden; dicke Linie: Rotationsachse; α, β : Kontaktwinkel an Säule bzw. Boden

Wir betrachten nun rotationssymmetrische Grenzflächen zwischen Wasser und Luft um eine Säule von Radius r_S . Der Säulenradius r_S muß offenbar den Ungleichungen

$$y_{\min} < r_S \quad (2.4)$$

$$y_{\max} > r_S \quad (2.5)$$

genügen.

Sei α der Kontaktwinkel an der Säule (s. Abb. 2.3). Es sind nun mehrere Fälle zu unterscheiden.

2.1 Fall 1: Sphäre und Unduloid

Wenn die Fläche ein Ausschnitt aus einer Sphäre oder einem Unduloiden ist, dann ist $\pi > \alpha \geq \frac{\pi}{2}$. Im Falle des Unduloiden ist zu beachten, daß es einen Wendepunkt ($x_W = x(s_W); y_W = y(s_W)$) von $X(s; H, B)$ gibt:

$$y''(x_W) = \frac{-2HB(B + \sin(2Hs_W))\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs_W)}}{(1 + B \sin(2Hs_W))^3} = 0$$

2 Der rotationssymmetrische Fall

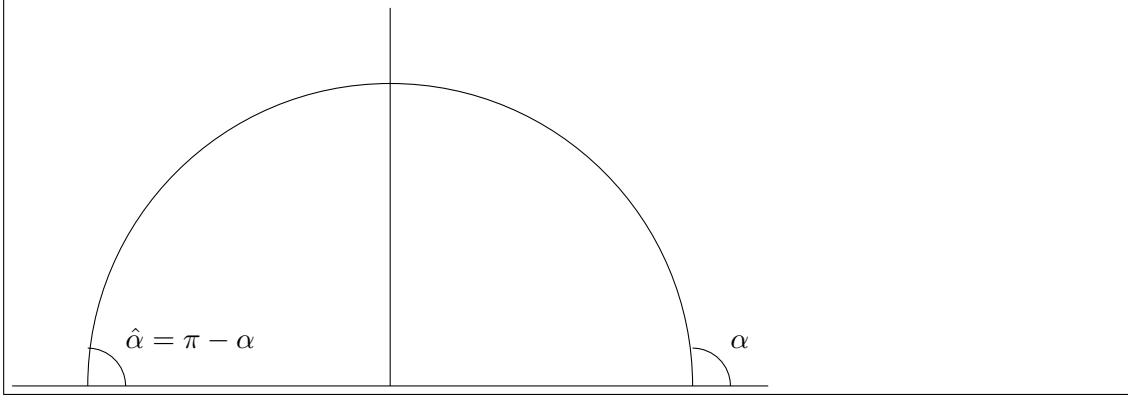


Abbildung 2.4: Extremale Winkel im Fall 1

$$(B + \sin(2Hs_W))\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs_W)} = 0 \quad (2.6)$$

Gleichung (2.6) hat die zwei Lösungen

$$\sin(2Hs_W) = -B \quad (2.7)$$

und

$$\sin(2Hs_W) = -\frac{1 + B^2}{2B} \quad (2.8)$$

Gleichung (2.7) liefert für $B \leq 1$ eine reelle Lösung für s_W (wobei im Falle $B = 1$ diese Lösung im Kurvenminimum liegt und deshalb nicht weiter interessiert). Für $B \neq 1$ liefert (2.8) dagegen niemals einen reellen Wert für s_W und für $B = 1$ wiederum nur die Minimalstelle. Die Steigung im Wendepunkt auf der abfallenden Seite des Unduloiden ist

$$y'(x_W) = -\frac{B\sqrt{1 - B^2}}{1 - B^2} = -\frac{B}{\sqrt{1 - B^2}} \quad (2.9)$$

Das Minuszeichen trägt dem Umstand Rechnung, daß der Cosinus auf der fallenden Seite negativ ist. Gleichung (2.9) läßt sich geometrisch so interpretieren, daß der Winkel ν gegen die Horizontale (=Parallele zur Rotationsachse) im Wendepunkt seinen maximalen Betrag annimmt. Der radiale Abstand zur Rotationsachse beträgt im Wendepunkt

$$y_W = y(s_W) = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 - B^2}$$

Ist $y_W \leq r_S$, so nimmt ν wegen der Spiegelsymmetrie Werte zwischen $\alpha - \pi$ und $\pi - \alpha$ an (vgl. Abb. 2.4). Damit gilt für β , den Kontaktwinkel am Boden senkrecht zur Säule (s. Abb. 2.3):

$$\alpha - \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2} - \alpha. \quad (2.10)$$

Ist dagegen $y_W > r_S$, so fällt ν bis auf sein Minimum im Wendepunkt ab (man beachte: $\nu < 0!$), um erst dann bis auf 0 zu wachsen. Also gilt $-\arctan \frac{B}{\sqrt{1 - B^2}} \leq \nu \leq \arctan \frac{B}{\sqrt{1 - B^2}}$ und $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{B}{\sqrt{1 - B^2}} < \beta < \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{B}{\sqrt{1 - B^2}}$.

2 Der rotationssymmetrische Fall

Aus den Gleichungen (2.1), (2.5) und $B \leq 1$ folgt

$$Hr_S < 1$$

Sei $(x_1 = x(s_1), y_1 = y(s_1))$ der Punkt, wo die Grenzfläche an die Säule andockt. Es gelten die Gleichungen:

$$y'(x_1) = \frac{B \cos(2Hs_1)}{1 + B \sin(2Hs_1)} = \tan(-(\pi - \alpha)) = \tan \alpha \quad (2.11)$$

$$y(s_1) = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs_1)} = r_S \quad (2.12)$$

Aus Gleichung (2.12) folgt:

$$\sigma_1 := \sin(2Hs_1) = \frac{2H^2 r_S^2}{B} - \frac{1}{2B} - \frac{1}{2}B$$

Einsetzen in Gleichung (2.11) liefert unter Beachtung der Tatsache, daß $\alpha > \frac{\pi}{2}$ und wir deshalb auf dem abfallenden Zweig des Graphen sind, wo $\cos(2Hs) < 0$ gilt:

$$B^2 = 1 + 4H^2 r_S^2 - 4Hr_S |\cos \alpha| \quad (2.13)$$

(Da $B \leq 1$ können wir in diesem Fall $|1 + 4H^2 r_S^2 - B^2| = 1 + 4H^2 r_S^2 - B^2$ annehmen.)
Im Fall einer Sphäre ist $B = 1$ und es folgt:

$$|\cos \alpha| = Hr_S$$

Für den Unduloiden, $0 < B < 1$ folgt:

$$|\cos \alpha| > Hr_S$$

Wir können nun klären, wann $y_W > r_S$ ist. Es ist

$$y_W = \frac{\sqrt{1 - B^2}}{2|H|} = \frac{\sqrt{Hr_S |\cos \alpha| - H^2 r_S^2}}{|H|}$$

und damit

$$y_W > r_S \quad \text{für } |\cos \alpha| > 2Hr_S$$

Sei $(x_2 = x(s_2), y_2 = y(s_2))$ der Punkt, wo die Grenzfläche an den Boden andockt. Es gilt die Gleichung:

$$y' = \frac{B \cos(2Hs_2)}{1 + B \sin(2Hs_2)} = \cot \beta \quad (2.14)$$

also

$$\sigma_2 := \sin(2Hs_2) \frac{1}{B} (-\cos^2 \beta \pm \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta}),$$

2 Der rotationssymmetrische Fall

da $0 \leq \beta \leq \pi$.

Wir haben damit zunächst zwei Lösungen

$$\sigma_+ := \frac{1}{B}(-\cos^2 \beta + \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta}) \quad (2.15)$$

$$\sigma_- := \frac{1}{B}(-\cos^2 \beta - \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta}) \quad (2.16)$$

Eine Kurvendiskussion des Graphen von

$$f_B :] \arccos B, \pi - \arccos B[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{B} \left(-\cos^2 x + \sin x \sqrt{B^2 - \cos^2 x} \right), 0 < B \leq 1$$

ergibt, daß sich das Maximum von 1 an der Stelle $\pi/2$ befindet und die Funktion gegen beide Ränder hin einem Minimum von -1 zustrebt, ohne dazwischen weitere Extrema anzunehmen.

Die Ungleichung

$$\cos^2 \beta \leq B^2 \Leftrightarrow \sin^2 \beta \geq 1 - B^2$$

ist unter unseren Voraussetzungen stets erfüllt, da auf dem Intervall $[\pi/2; \pi]$ stets

$$\cos^2 \alpha - (1 - B^2) = \cos^2 \alpha + 4H^2 r_S^2 + 4Hr_S \cos \alpha \geq 0$$

gilt und aus (2.10) die Ungleichung

$$\cos^2 \alpha \leq \sin^2 \beta$$

folgt. Somit ist Lösung (2.15) stets im zulässigen Wertebereich von -1 bis 1 .

Analog betrachten wir für (2.16) die Funktion

$$g_B(x) = \frac{1}{B}(-x - \sqrt{B^2 - (1 + B^2)x + x^2}); x \in [0; B^2].$$

Da g_B monoton auf $[0; B^2]$ ist, nimmt auch σ_- nur Werte zwischen -1 und 1 an.

Falls nun $2Hr_S \geq |\cos \alpha| \geq Hr_S$, so ist die gesamte Fläche oberhalb der Wendepunkte. Andererseits folgt aus der Gestalt des Unduloiden, daß eine Lösung Abständen $< r_W$, die andere Abständen $> r_W$ zur Rotationsachse entspricht.

Physikalisch ist nur letztere Lösung zulässig. Da $\sigma_+ > \sigma_-$ ist

$$\sqrt{1 + B^2 + 2B\sigma_+} > \sqrt{1 + B^2 + 2B\sigma_-}.$$

Somit ist (2.15) die gesuchte Lösung und es gilt:

$$\sin(2Hs_2) = \frac{1}{B}(-\cos^2 \beta + \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta}) \quad (2.17)$$

Für $|\cos \alpha| > 2Hr_S$ sind zunächst jedoch beide Lösungen möglich.

Als s_2 bestimmen wir das größte $s < s_1$, das Gleichung (2.14) und (2.15) bzw. (2.16) genügt.

2 Der rotationssymmetrische Fall

Für das Volumen V der Luftblase gilt:

$$V = \pi \int_{x_2}^{x_1} y^2(s; H, B) dx \quad (2.18)$$

$$= \pi \int_{s_2}^{s_1} \frac{1}{4H^2} (1 + B \sin(2Hs)) \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs)} ds \quad (2.19)$$

Für $\beta > \frac{\pi}{2}$ ist $V|_{\sigma_+} > V|_{\sigma_-}$; für $\beta < \frac{\pi}{2}$ ist $V|_{\sigma_+} < V|_{\sigma_-}$.

Die nicht bedeckte Stelle am Boden ist ein Kreis vom Radius

$$r_B = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2B\sigma_+} = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2(-\cos^2 \beta + \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta})}.$$

Für $\beta > \frac{\pi}{2}$ ist r_B zugleich größte Ausdehnung der Luftblase; für $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ ist es $y_{\max} = \frac{1+B}{2|H|}$.

2.2 Fall 2: Nodoide

Im Falle eines Nodoiden ist zu beachten, daß sich hier die Kurve $X(s; H, B)$ selbst schneidet; für eine physikalisch sinnvolle Lösung kann ein solcher Selbstschnitt natürlich nicht zugelassen werden. Wir müssen nun unser Augenmerk auf jene Punkte richten, in denen sich die x -Richtung der Kurve umkehrt. Seien also x_l und x_r benachbarte Umkehrpunkte der x -Richtung, dergestalt, daß zwischen ihnen x zunimmt, d. h.:

$$\begin{aligned} x_l &= x(s_L) \\ x_r &= x(s_R) \\ \dot{x}(s_L) &= 0 \\ \dot{x}(s_R) &= 0 \\ \forall s \in]s_L; s_R[: \dot{x}(s) &> 0 \end{aligned}$$

Aus

$$\dot{x}(s_R) = \dot{x}(s_L) = \frac{1 + B \sin(2Hs_L)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs_L)}} = 0$$

folgt

$$\sin(2Hs_R) = \sin(2Hs_L) = -\frac{1}{B}$$

und damit

$$y(s_R) = y(s_L) = \frac{1}{2|H|} \sqrt{B^2 - 1} \quad (2.20)$$

Wiederum gelten Gleichungen (2.12) und (2.11) an der Kontaktstelle von Grenzfläche und Säule. Die Herleitung des Ausdrucks für B^2 erfolgt bis zum Ziehen der Wurzel völlig analog zur Herleitung von Gleichung (2.13):

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{16H^2 r_S^2}{(1 + 4H^2 r_S^2 - B^2)^2} \quad (2.21)$$

Nun muß jedoch eine weitere Fallunterscheidung durchgeführt werden.

2.2.1 Fall 2a: Kurve ist gänzlich oberhalb der Umkehrpunkte

Der erste Fall ist

$$B^2 < 1 + 4H^2 r_S^2.$$

Damit folgt auch in diesem Fall Formel (2.13) für B^2 und es gilt:

$$|\cos \alpha| < 4Hr_S.$$

Nun ist

$$y(s_L) = \frac{1}{2|H|} \sqrt{4H^2 r_S^2 - 4Hr_S |\cos \alpha|} < r_S.$$

Somit haben wir es in diesem Fall ausschließlich mit Nodoiden oberhalb ihrer Umkehrpunkte zu tun und es gelten die gleichen Einschränkungen für α und die gleichen Abschätzungen für β wie im Fall 1.

An der Kontaktstelle von Grenzfläche und Boden gilt wiederum Gleichung (2.14) und es folgen wieder die beiden Lösungen σ_+ und σ_- für $\sigma_2 = \sin(2Hs_2)$. Die Funktion

$$f_B :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{B} \left(-\cos^2 x + \sin x \sqrt{B^2 - \cos^2 x} \right)$$

erfüllt $f_B(x) > -\cos^2 + \sin^2 x = -\cos(2x) \geq -1$ und nimmt (siehe Diskussion der analogen Funktion oben) ihr Maximum $+1$ an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ an. Und daher ist (2.17) die gesuchte Lösung. Für das Volumen gilt wieder Formel (2.19). Die nicht bedeckte Stelle am Boden ist ein Kreis vom Radius

$$r_B = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2B\sigma_+} = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2(-\cos^2 \beta + \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta})}$$

Für $\beta > \frac{\pi}{2}$ ist r_B zugleich größte Ausdehnung der Luftblase; für $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ ist es $y_{\max} = \frac{1+B}{2|H|}$.

2.2.2 Fall 2b: Die Kurve ist (teilweise) unter einem Umkehrpunkt

Der zweite Fall ist

$$B^2 \geq 1 + H^2 r_S^2 \tag{2.22}$$

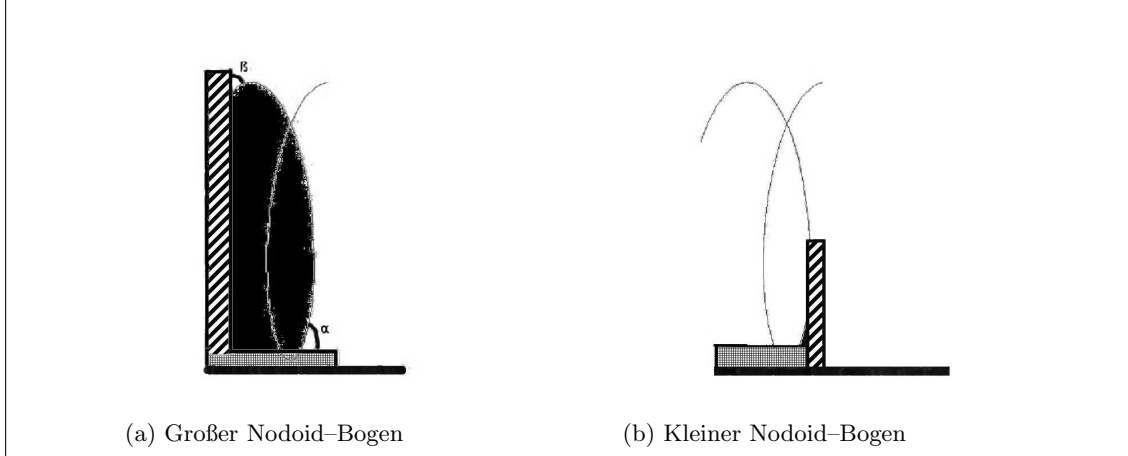
und es folgt aus (2.21):

$$B^2 = 1 + 4H^2 r_S^2 + 4Hr_S |\cos \alpha| \tag{2.23}$$

Nun ist

$$y(s_L) = \frac{1}{2|H|} \sqrt{4H^2 r_S^2 + 4Hr_S |\cos \alpha|} > r_S.$$

Das Nodoidstück ist also (zum Teil) unterhalb seines Umkehrpunktes. An dieser Stelle muß nun eine dritte Ebene von Fallunterscheidungen durchgeführt werden.



Abbildungung 2.5: Nodoid-Bögen; Legende wie in Abb. 2.3, jedoch gegenüber um 90° im Uhrzeiger gekippt, um Orientierung der Kurve wie in Abb. 2.2 zu erhalten

Der Bogen geht über einen Umkehrpunkt hinaus

Der Bogen geht über den linken Umkehrpunkt (x_l, y_l) hinaus (vgl. Abb. 2.5a). In diesem Fall ist $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Der Bogen muß den Boden spätestens im rechten Umkehrpunkt (x_r, y_r) erreichen und somit gilt $0 < \beta$. Sei weiter $(x_1 = x(s_1^*), y_1^* = y(s_1^*))$ der Punkt über dem Kontaktpunkt $(x_1 = x(s_1), y_1 = y(s_1))$, $y_1^* > y_1$:

$$\int_{s_L}^{s_1} \frac{1 + B \sin(2Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Ht)}} dt = - \int_{s_1^*}^{s_L} \frac{1 + B \sin(2Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Ht)}} dt$$

$$\int_{s_1^*}^{s_1} \frac{1 + B \sin(2Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Ht)}} dt = 0 \quad (2.24)$$

und sei

$$\tan \alpha^* := y'(x(s_1^*)) < 0, \quad (2.25)$$

dann ist $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha^*$. Gleichung (2.14) gilt auch in diesem Fall an der Kontaktstelle und mit der gleichen Argumentation wie zuvor finden wir (2.17) als gesuchte Lösung. Als s_2 bestimmen wir das größte $s < s_L$, das Gleichung (2.14) genügt. Für das Volumen gilt

$$V = \pi \int_{x_2}^{x_1} y^2(s; H, B) dx - \pi \int_{x_1}^{x_l} y^2(s; H, B) dx$$

$$= \pi \int_{s_2}^{s_1} \frac{1}{4H^2} (1 + B \sin(2Hs)) \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(2Hs)} ds,$$

also wiederum Gleichung (2.19). Die nicht bedeckte Stelle am Boden ist ein Kreis vom Radius

$$r_B = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2B \sigma_+} = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2(-\cos^2 \beta + \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta})}$$

Die größte Ausdehnung der Luftblase ist $y_{\max} = \frac{1+B}{2|H|}$.

Der Bogen überschreitet den Umkehrpunkt nicht

Der Bogen erreicht den Boden vor (oder spätestens in) dem linken Umkehrpunkt (s. Abbildung 2.5b). In diesem Fall ist $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ und $\frac{3\pi}{2} < \beta < \pi$. Da sich die Luft hier unterhalb der Schleife befindet, haben wir hier den einzigen Fall mit $H < 0$ vorliegen.

Gleichung (2.14) gilt auch in diesem Fall an der Kontaktstelle, aber dieses Mal müssen wir die kleinere Lösung σ_- wählen. Als s_2 bestimmen wir das größte $s < s_1$, das Gleichung (2.14) genügt. Es gilt wiederum die Volumenformel (2.19). Die nicht bedeckte Stelle am Boden ist ein Kreis vom Radius

$$r_B = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2B\sigma_-} = \frac{1}{2|H|} \sqrt{1 + B^2 + 2(-\cos^2 \beta - \sin \beta \sqrt{B^2 - \cos^2 \beta})}$$

Zugleich ist r_B größte Ausdehnung der Luftblase.

2.3 Fall 3: Katenoid

Wir betrachten abschließend noch den Fall $H = 0$. Wir haben nun eine rotationssymmetrische Minimalfläche; die einzige derartige Fläche ist die Kettenfläche, die durch Rotation der Kettenlinie $y(x) = \frac{1}{c} \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ um die x -Achse entsteht. Man macht sich leicht klar, daß

$$\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$$

und

$$\pi > \beta > \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

ist. Die Kettenlinie genügt dem Gleichungssystem

$$y(x_1) = r_S \tag{2.26}$$

$$y'(x_1) = -\tan \alpha \tag{2.27}$$

$$y'(x_2) = -\cot \beta \tag{2.28}$$

Aus (2.26) und (2.27) folgt

$$c = r_S |\cos \alpha|.$$

Es folgt damit

$$x_1 = \operatorname{Arsinh}(-\tan \alpha)$$

$$x_2 = \operatorname{Arsinh}(-\cot \beta)$$

$$x_2 - x_1 = \operatorname{Arsinh}\left(\frac{\tan \alpha}{|\sin \beta|} - \frac{\cot \beta}{|\cos \alpha|}\right)$$

Die bedeckte Fläche ist ein Kreis vom Radius

$$\frac{\cosh(x_2)}{r_S |\cos \alpha|},$$

2 *Der rotationssymmetrische Fall*

der zugleich die größte Ausdehnung der Luftblase ist. Ihr Volumen ist

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cosh^2(\xi)}{r_S |\cos \alpha|} d\xi.$$

Wir schließen an dieser Stelle vorläufig die Betrachtungen über rotationssymmetrische Lösungen. Wie zu Beginn dieses Kapitels bemerkt wurde, vereinfachen Symmetrien das Problem, die CMC-Gleichung mit Randbedingungen zu lösen. Rotationssymmetrie ist sicherlich für die praktische Anwendung eine zu grobe Vereinfachung; wir gehen daher zur einer Symmetrie über, die in der Praxis eine viel bedeutendere Rolle spielt: der Symmetrie zweidimensionaler Gitter.

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

Zweidimensionale Gitter bieten eine geringere Vereinfachung als Rotationssymmetrie, doch ist leicht einzusehen, daß sie in der technischen Praxis, der wichtigste und wünschenswerteste Fall sind. Sie bieten einerseits die Möglichkeit, eine durchgehende Luftschicht hervorzubringen; andererseits können solche Gitter Oberflächen von nahezu beliebiger Größe abdecken und sind technisch am einfachsten zu realisieren.

Im ersten Abschnitt erfolgt eine Einführung der Grundbegriffe und es werden erste Schlußfolgerungen gezogen. Die drei folgenden Abschnitte sind jeweils den Fragen der Existenz, der Stabilität und der Persistenz von Lösungen gewidmet. Der fünfte Abschnitt geht kurz auf einige numerische Probleme im Zusammenhang mit der CMC-Gleichung im zweidimensionalen Gitter ein.

3.1 Grundlagen und Problemstellung

Wir wenden uns jetzt der Problemstellung einer geschlossenen Luftschicht zu, die sich nicht mehr wie zuvor in vereinzelt Blasen an ein Härchen oder eine Säule anheftet, sondern sich wie ein Zeltdach zwischen diesen Säulen als Trägern aufspannt. Dazu denken wir uns die Säulen in einem regelmäßigen zweidimensionalen Gitter angeordnet. Die kleinste Einheit, durch deren fortgesetzte Spiegelung das Gitter reproduziert werden kann, bezeichnen wir wie üblich als Elementarzelle. Die Säulen denken wir uns zunächst als gerade Zylinder¹. Weiterhin nehmen wir an, daß das Wasser oberhalb der Grenzfläche sei. Den Boden, auf dem die Säulen stehen, denken wir uns eben und wollen ihn **Grundfläche** nennen.

Wir haben weiter oben bereits die offene Frage erwähnt, ob die Härchen der *Salvinia*-Pflanze in einem hexagonalen oder in einem quadratischen Gitter angeordnet seien (vgl. Abb. 3.1). Zur Veranschaulichung des

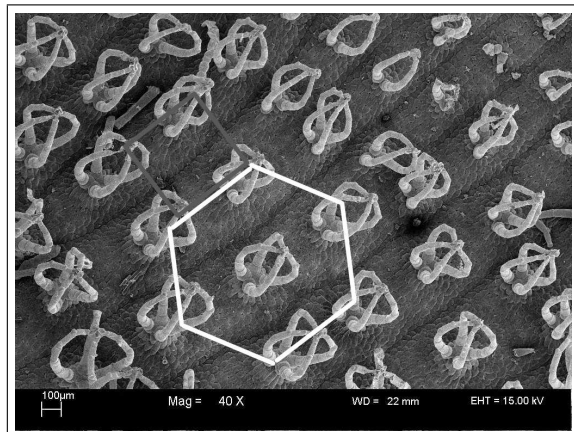


Abbildung 3.1: Mögliche Konfigurationen der Härchen von *Salvinia*
Bild: Anita Roth-Nebelsick, IfG, Universität Tübingen

¹nicht notwendigerweise über einer kreisförmigen Grundfläche; jedoch so, daß die Grundflächen die Symmetrie nicht brechen

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

oben gesagten und des folgenden wollen wir nun die Elementarzellen solcher Anordnungen betrachten.

In einem hexagonalen Gitter, wie wir es nennen wollen, ist jede Säule von sechs nächsten Nachbarn im Abstand der Gitterkonstanten a umgeben, die ein regelmäßiges Hexagon um die zentrale Säule bilden (s. Abb. 3.3). Das Hexagon ist bekannt, wenn eines der sechs gleichseitigen Dreiecke bekannt ist, aus denen es aufgebaut ist; dieses wiederum wird durch die drei Seitenhalbierenden in sechs gleiche rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt. Deren eines bildet damit eine Elementarzelle des hexagonalen Gitters (Abb. 3.4). Dabei muß der Grundriß der Säule nicht wie hier ein Kreis sein, sondern wir können den Zwölftel-Kreis durch eine beliebige Kurve ersetzen.

In einem quadratischen Gitter verfügt jede Säule entsprechend über vier nächste Nachbarn im Abstand der Gitterkonstanten a , die ein Quadrat bilden (Abb. 3.5). Die Elementarzelle ist hier ein rechtwinkliges Dreieck (Abb. 3.6a). Auch sind hier wieder andere Säulengrundrisse als Kreise denkbar. Das quadratische Gitter ist ein Spezialfall des rechteckigen Gitters, in denen die Säulen auf den Eckpunkten von Rechtecken mit den Kantenlängen a und b stehen (Abb. 3.6).

Eine Unterscheidung dieser zweidimensionalen Gitter in Subtypen analog den flächen- und raumzentrierten Gittern des dreidimensionalen Raumes tritt nicht auf.

In allen Fällen kann das Gitter aus einer Elementarzelle aufgebaut werden, indem die Zelle an einem Rand gespiegelt wird, der nicht auf einer Säule liegt. Wir führen daher die folgende Bezeichnung ein:

Definition 1 *Eine Linie auf dem Rand einer Elementarzelle, die nicht auf der Säule verläuft, nennen wir eine **Symmetrielinie**.*

Haben wir eine CMC-Fläche über einer Elementarzelle gefunden, erhalten wir die entsprechende CMC-Fläche für das Gitter offenbar, indem wir die Fläche an jenen Ebenen spiegeln, die senkrecht zur Grundfläche verlaufen und eine Symmetrielinie enthalten. Diese Ebenen wollen wir **Symmetrieebenen** nennen.

Die Elementarzelle wollen wir in der Notation von [5] als Ω bezeichnen. Der gesamte Rand von Ω sei Σ . Derjenige Teil von Σ , der auf der Projektion des Säulenrandes liegt, bezeichnen wir mit $\hat{\Sigma}$.

Die gesuchte CMC-Fläche soll nun als Graph $(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ einer Funktion $u : (x_1, x_2) \mapsto u(x_1, x_2)$ dargestellt werden, wobei die Elementarzelle in der $x_1 - x_2$ -Ebene liegt. Die Funktion u genügt der Differentialgleichung²

$$-2H = \frac{(1 + u_{,2}^2)u_{,11} - 2u_{,1}u_{,2}u_{,12} + (1 + u_{,1}^2)u_{,22}}{(1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.1)$$

Die mittlere Krümmung wird dabei bezüglich des nach *unten* gerichteten Normalenvektors der CMC-Fläche berechnet. Diese Gleichung läßt sich in einer übersichtlichen Form schreiben. Dazu führen wir den Operator T definiert durch

$$Tf := \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \quad (3.2)$$

² $f_{,i}$ bezeichne dabei die partielle Ableitung $\partial f / \partial x_i$ von f nach x_i .

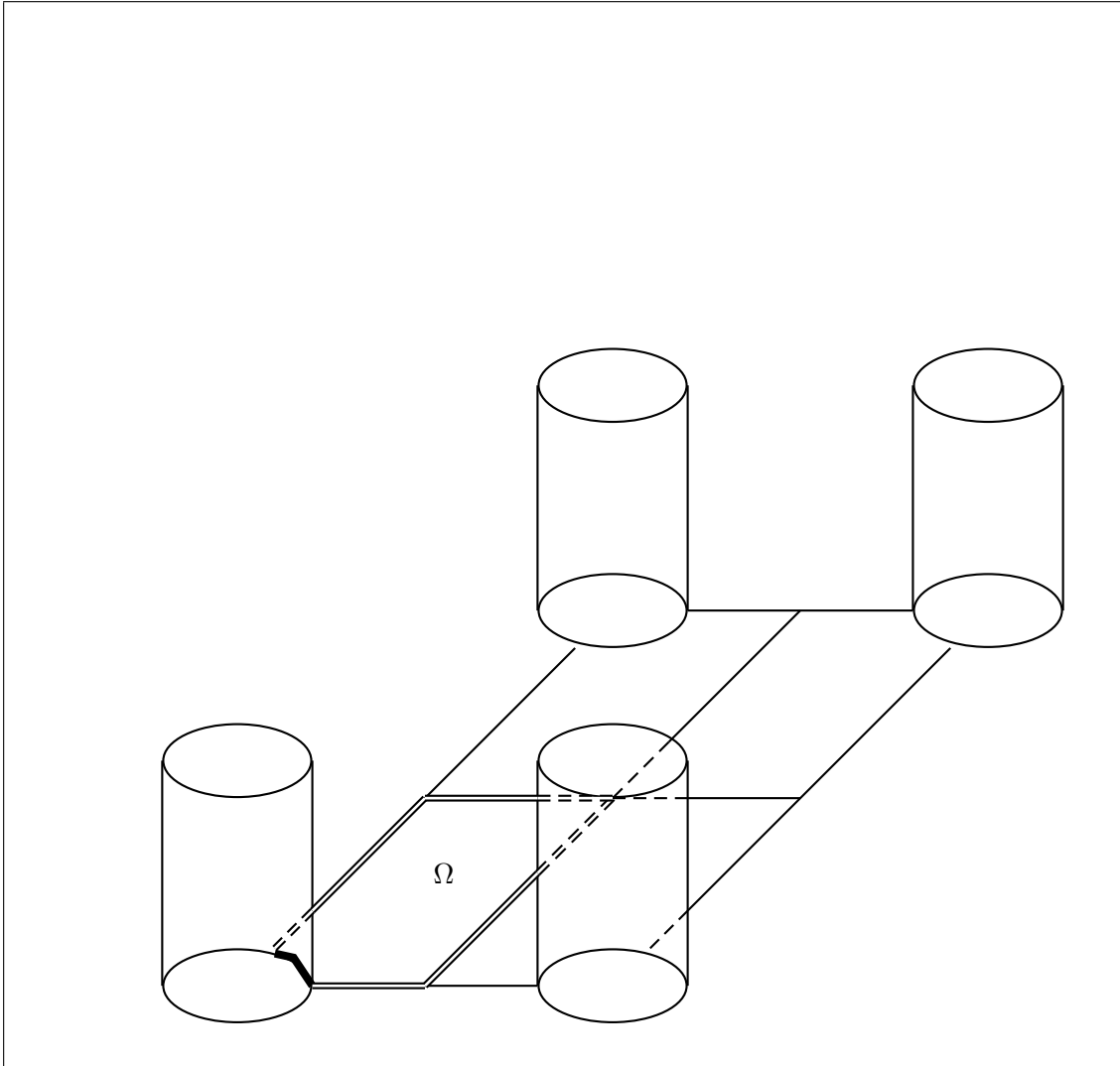


Abbildung 3.2: Elementarzelle Ω und ihr Rand Σ und dessen beiden Komponenten: $\hat{\Sigma}$ (dicke Linie) auf der Säule und $\Sigma \setminus \hat{\Sigma}$ (doppelte Linien) entlang der Symmetrielinien

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

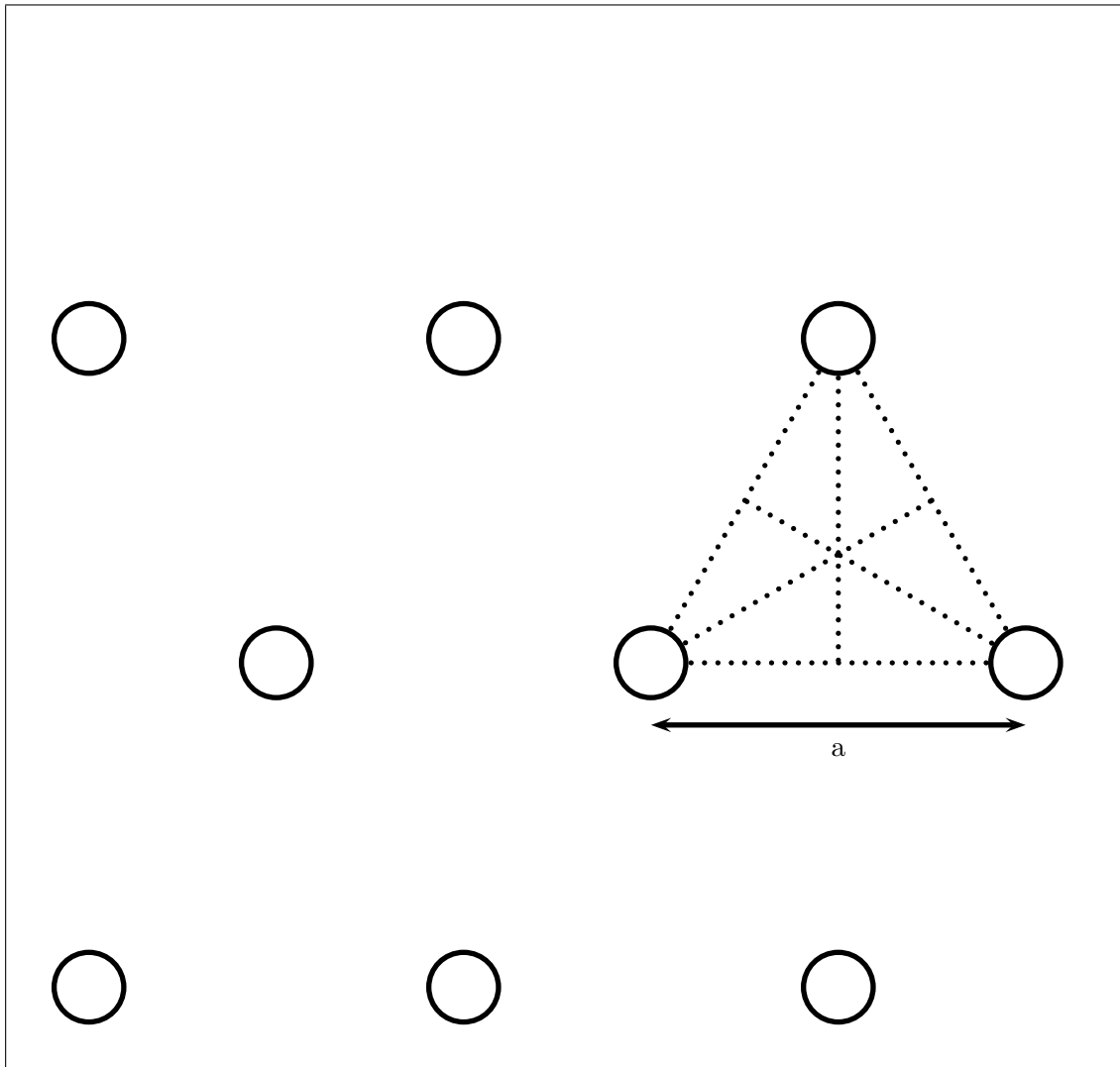


Abbildung 3.3: Hexagonales Gitter mit Gitterkonstanten a

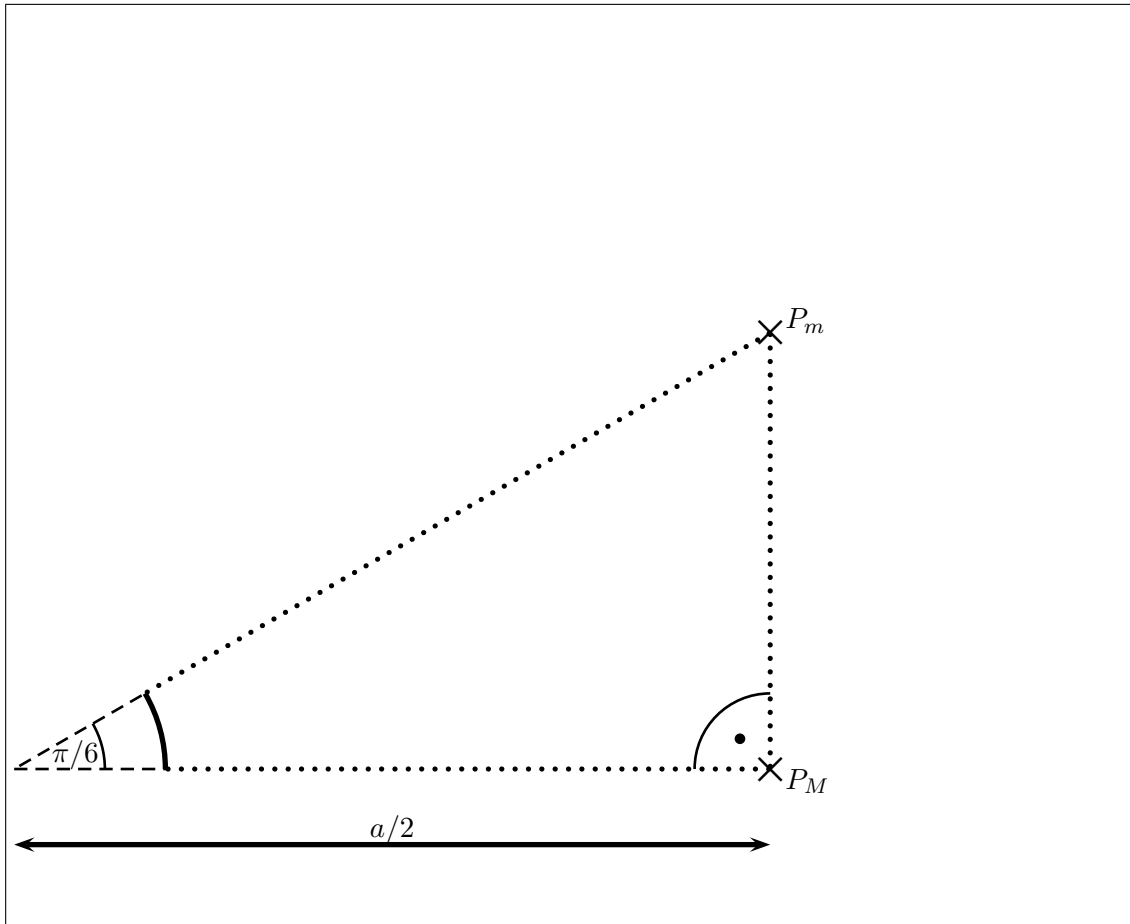


Abbildung 3.4: Elementarzelle eines hexagonalen Gitters mit Gitterkonstanten a
 durchgehend: Säule $\hat{\Sigma}$; gepunktet: Symmetrielinien; gestrichelt:
 Säulenradien
 Minimum der CMC-Fläche in P_m , Sattelpunkt in P_M

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

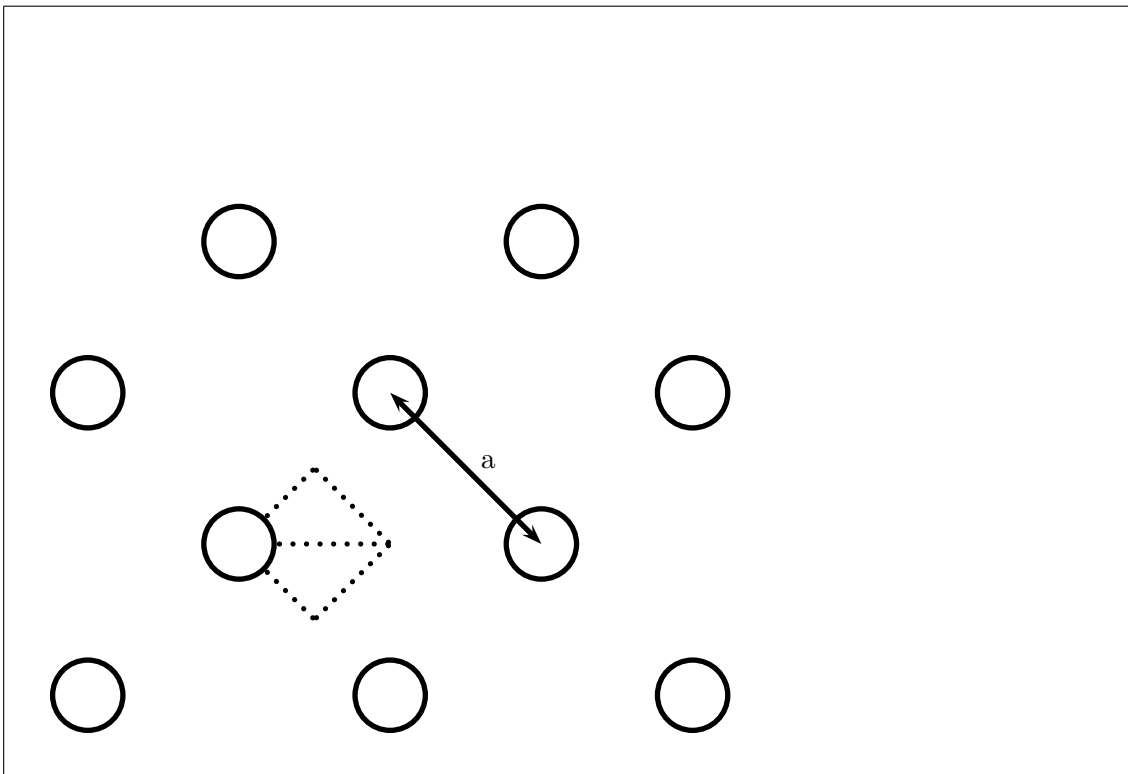


Abbildung 3.5: quadratisches Gitter mit Gitterkonstanten a

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

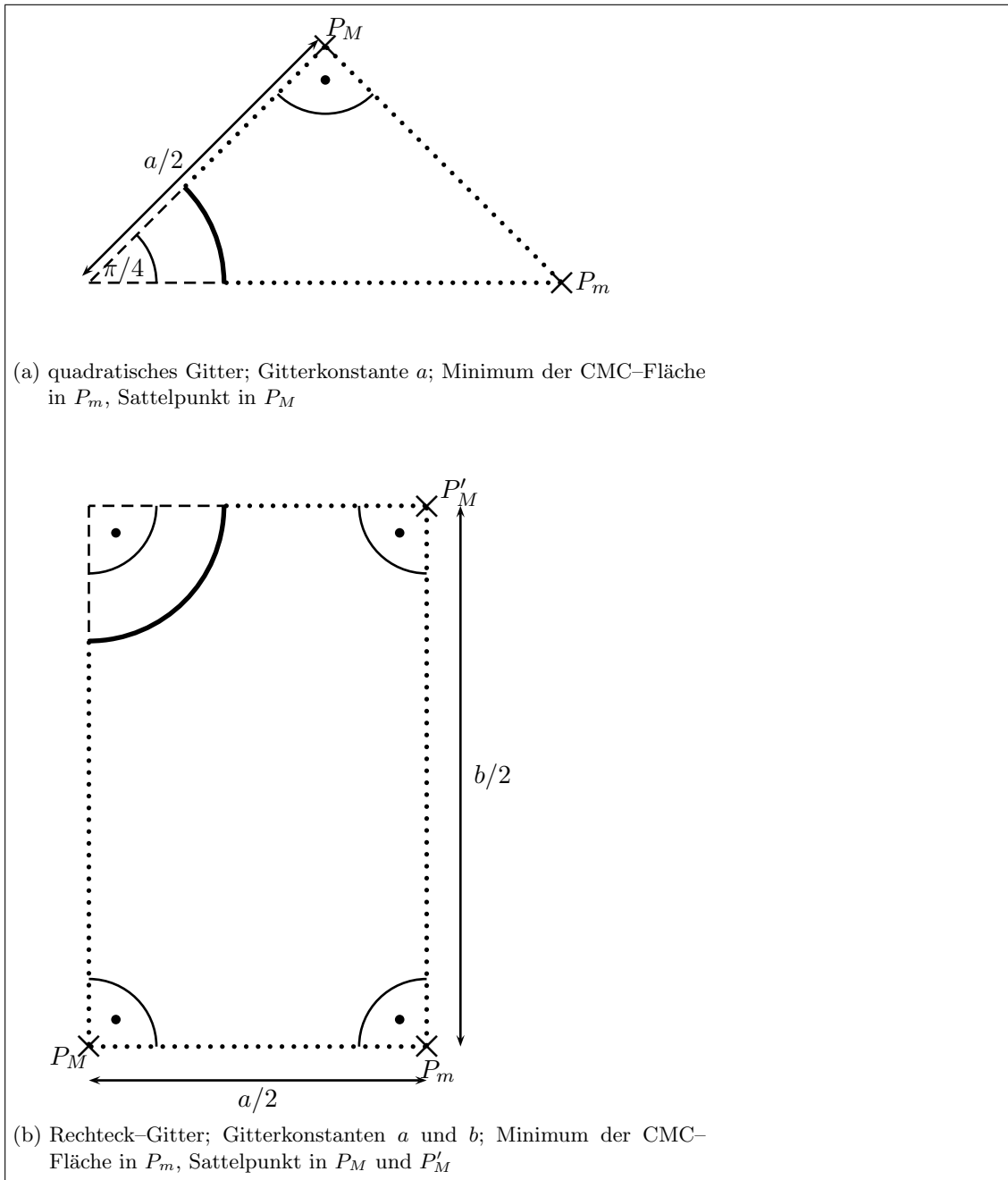


Abbildung 3.6: Elementarzellen des quadratischen Gitters und des Rechteck-Gitters durchgehend: Säule, $\hat{\Sigma}$; gepunktet: Symmetrielinien; gestrichelt: Säulenradien

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ ein. (3.1)
können wir dann als

$$\operatorname{div} Tu = -2H \quad (3.3)$$

schreiben. Anschaulich können wir Tu dabei als die Projektion des nach unten gerichteten Normalenvektors der CMC-Fläche auf die $x_1 - x_2$ -Ebene interpretieren. Diese Interpretation erlaubt es uns, auch die Randbedingung in diesem Formalismus niederzuschreiben. Da wir von zylindrischen Säulen ausgehen, besitzt der Normalenvektor der Mantelfläche keine z -Komponente; er ist also mit seiner Projektion auf die $x_1 - x_2$ -Ebene identisch, wenn wir uns diese Projektion wieder in den dreidimensionalen Raum eingebettet denken. Da der Kontaktwinkel im Wasser gemessen wird, ist der Cosinus des Kontaktwinkels γ — im folgenden mit β bezeichnet — gleich dem Produkt des nach unten gerichteten Normaleneinheitsvektors der CMC-Fläche und des in die Elementarzelle gerichteten Normaleneinheitsvektors der Mantelfläche oder nach unseren Vorüberlegungen

$$-\cos \gamma = -\beta = Tu \cdot \nu, \quad (3.4)$$

wo ν der nach *außen* gerichtete Normaleneinheitsvektor von $\hat{\Sigma}$ ist. Auf dem restlichen Rand der Elementarzelle, $\Sigma \setminus \hat{\Sigma}$ ist zu beachten, daß die CMC-Fläche hier nach Konstruktion der Elementarzelle mindestens C^2 -stetig durch Spiegelung an der Ebene, die senkrecht zur Grundfläche über der Randlinie steht, fortgesetzt wird. Dies ist nur möglich, wenn der Normalenvektor auf diesem Randabschnitt in der Spiegelebene selbst liegt oder, anders formuliert, senkrecht auf dem Normalenvektor der Spiegelebene steht. Ist ν_S ein solcher Normalenvektor, gilt also:

$$0 = Tu \cdot \nu_S.$$

Über der Elementarzelle ist also folgendes Problem zu lösen:

Problemstellung 1 Gegeben sei eine Elementarzelle Ω mit Rand Σ und eine Konstante H . Auf einem Teil $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$ des Randes sei eine Konstante β , $-1 \leq \beta \leq 1$ vorgegeben. Zu lösen ist dann das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Tu &= -2H && \text{auf } \Omega \\ Tu \cdot \nu &= -\beta && \text{auf } \hat{\Sigma} \\ Tu \cdot \nu_S &= 0 && \text{auf } \Sigma \setminus \hat{\Sigma} \end{aligned}$$

Dabei ist ν der vom Inneren von Ω weggerichtete Normaleneinheitsvektor von $\hat{\Sigma}$, ν_S ein Normalenvektor von $\Sigma \setminus \hat{\Sigma}$. Der Operator T ist durch (3.2) gegeben.

Man sieht unmittelbar

Korollar 1 Ist u eine Lösung von Problemstellung 1 für H und β , so ist $-u$ eine Lösung für $-H$ und $-\beta$.

Wir rekapitulieren nun (leicht verallgemeinert) die fundamentale Feststellung aus ([5], Kapitel 6):

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

Satz 1 *Problemstellung 1 kann nur dann eine Lösung besitzen, wenn zwischen H und β der Zusammenhang*

$$2H|\Omega| = |\hat{\Sigma}|\beta$$

gilt.

Beweis: Durch Integration von (3.3) über Ω , Anwendung des Divergenz-Theorems und Einsetzen von (3.4) erhalten wir mit der charakteristischen Funktion $\chi_{\hat{\Sigma}}$ von $\hat{\Sigma}$:

$$2H|\Omega| = \oint_{\partial\Omega} \beta \chi_{\hat{\Sigma}} ds = \int_{\hat{\Sigma}} \beta ds = \beta \int_{\hat{\Sigma}} ds = |\hat{\Sigma}|\beta.$$

q.e.d

Wir können aus diesem trivial anmutenden Satz dennoch mit Hinblick auf das zugrunde liegende bionische Problem³ eine erste Schlußfolgerung ziehen, die in den empirischen Ansätzen weitestgehend unbeachtet blieb: In einem starren Gitter von Säulen ist nur ein einziger Wert der mittleren Krümmung der Grenzfläche und damit des Druckunterschiedes über die Grenzfläche hinweg möglich. Anschaulich ist sofort klar, daß eine solche Konstellation schwerlich eine stabile Luftschicht produzieren kann. Die Flexibilität der Härchen von *Salvinia molesta* und anderen Modellorganismen ist also ein notwendiger Beitrag zur Stabilisierung der Luftschicht, auch wenn dies unter ingenieurwissenschaftlichen Aspekten wenig wünschenswert ist (Stichwort: Verschleiß beweglicher Teile).

³Nachbau einer Oberfläche, die möglichst lange eine Luftschicht an sich hält

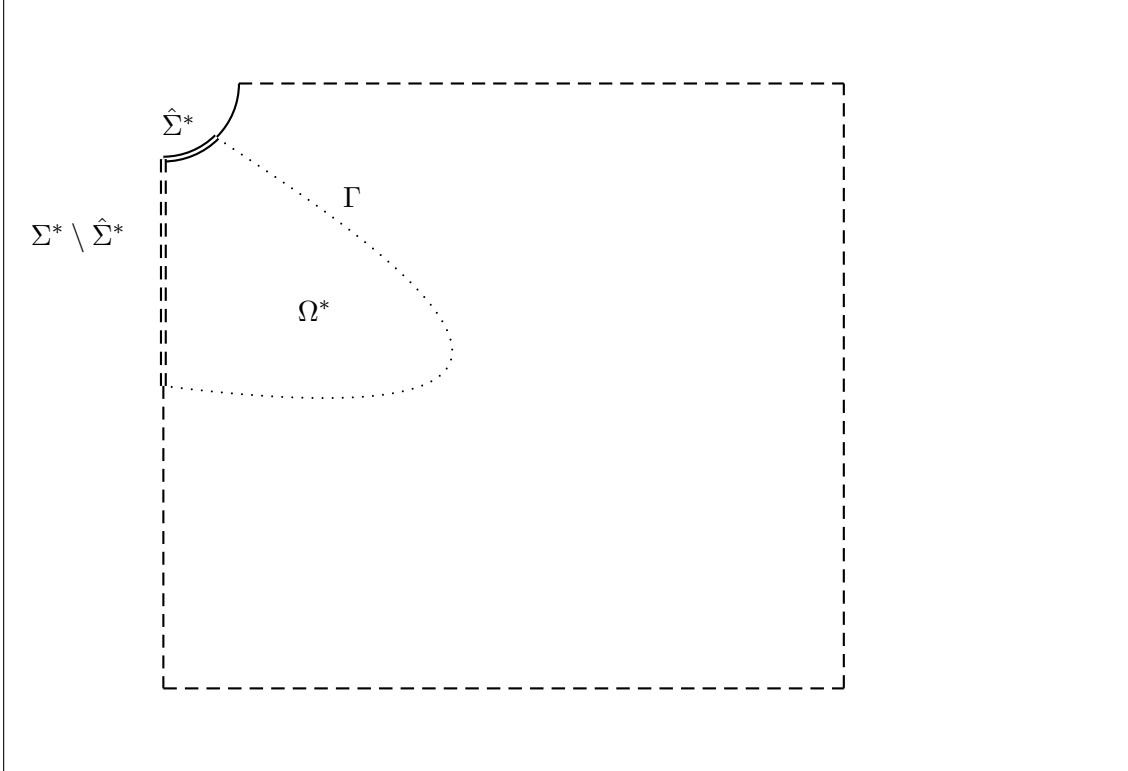


Abbildung 3.7: Die Teilmenge Ω^* und ihre Ränder: Σ^* (doppelte Linien) liegt auf dem Rand von Ω , $\hat{\Sigma}^*$ (doppelte Linien, durchgehend) liegt auf der Säule und Γ (gepunktet) liegt im Inneren der Elementarzelle
Die Säule ist durch durchgehende Linien dargestellt, die Symmetrielinien gestrichelt

3.2 Existenz-Kriterium

Wir suchen nun nach einem Kriterium für die Existenz von Lösungen der Problemstellung 1 und geben folgende Beobachtung von [5] wieder (vgl. [5] Theorem 6.1):

Satz 2 Sei $\Omega^* \subset \Omega$ eine beliebige echte Teilmenge von Ω ungleich der leeren Menge. Seien $\Sigma^* = \partial\Omega^* \cap \Sigma$ und $\hat{\Sigma}^* = \partial\Omega^* \cap \hat{\Sigma}$; sei weiterhin $\Gamma = \partial\Omega \subset \Sigma^*$, s. Abb. 3.7. Sei weiter ein Funktional Φ definiert vermöge

$$\Phi[\Omega^*] := |\Gamma| - |\hat{\Sigma}^*|\beta + \frac{|\Omega^*|}{|\Omega|}|\hat{\Sigma}|\beta.$$

Notwendige Bedingung für eine Lösung von Problemstellung 1 ist dann folgendes Kriterium: Für alle $\Omega \supset \Omega^* \neq \emptyset, \Omega$ ist

$$\Phi[\Omega^*] > 0. \quad (3.5)$$

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

Beweis: Wir integrieren (3.3) über Ω^* , wenden das Divergenz-Theorem an und setzen die Randbedingungen sowie (1) ein:

$$\left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\Omega|} |\Omega^*| - |\hat{\Sigma}^*| \right) \beta = - \int_{\Gamma} \nu_{\Gamma} \cdot T u \, ds,$$

wobei ν_{Γ} der nach außen weisende Normaleneinheitsvektor von Γ ist. Nun gilt andererseits

$$|Tu| = \frac{|\nabla u|}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} < 1.$$

Daraus folgt mit den üblichen Abschätzungen für Betrag und Integral:

$$\left(\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\Omega|} |\Omega^*| - |\hat{\Sigma}^*| \right) \beta \geq - \left| \int_{\Gamma} \nu_{\Gamma} \cdot T u \, ds \right| \geq - \int_{\Gamma} |\nu_{\Gamma} \cdot T u| \, ds \geq - \int_{\Gamma} |\nu_{\Gamma}| |Tu| \, ds > -|\Gamma|.$$

q.e.d

Definition 2 Es sei $BV(\Omega)$ die Menge aller Funktionen f , für die

$$\int_{\Omega} |f| \, dx + \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx < \infty$$

gelte.

Definition 3 Wir führen auf Ω eine Partition der Eins ein, d. h. wir überdecken den Abschluß $\bar{\Omega}$ mit einer endlich Anzahl N von (bezüglich der Topologie von $\bar{\Omega}$) offenen Mengen Ω_i , zu deren jede eine Funktion ϕ_i mit folgenden Eigenschaften existiere:

1. ϕ besitzt einen kompakten Träger in Ω und ist beliebig oft differenzierbar: $\phi_i \in C_0^{\infty}(\Omega)$.
2. $\phi_i(x) \geq 0$ in allen Punkten $x \in \Omega$.
3. $\sum_{i=1}^N \phi_i(x) = 1$ in jedem Punkt $x \in \Omega$.

Wir wollen die Mengen Ω_i so wählen, daß für $\Sigma_i = \partial\Omega_i \cap \Sigma \neq \emptyset$ gilt:

1. Es gibt eine höchstens endliche Menge von Punkten $\{p_k\} = P \subset \Sigma$ und ein zugehöriges $N_P \leq N$, so daß $\Sigma_P := \Sigma \setminus P$ als Teilmenge von $\bigcup_{j=1}^{N_P} \Sigma_j$ eine offene Menge in der Topologie von Σ und $\bar{\Sigma}_P$ zusammenhängend ist.
2. Zu jedem $p_k \in P$ existiert ein eindeutiges $\Omega_k \ni p_k$ und Σ_k schneidet genau zwei (benachbarte) $\Sigma_j \subset \Sigma \setminus P$.
3. Es existiert ein $\tau > 0$, so daß Σ_i über einem Intervall $a_i < \xi < b_i$ durch eine Lipschitz-stetige Funktion ψ_i mit Lipschitz-Konstante L_i als $\eta = \psi_i(x)$ dargestellt werden kann, und die Menge $\{(\xi, \eta) | a_i < \xi < b_i, -\tau < \eta - \psi_i(x) < 0\}$ in Ω liegt. Zwei solche Menge, die in der Umgebung eines Punktes $p_k \in P$ liegen schneiden sich nicht.

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

Dies wollen wir eine zulässige Partition der Eins nennen.

Wir merken an, daß wir die Punkte $p_k \in P$ nur als Vortizes von einwärts gerichteten Ecken⁴ benötigen. Solche einwärts gerichteten Ecken können in einer Elementarzelle allenfalls entlang der Säule auftreten; bei einfachen geometrischen Formen der Säulen-Grundfläche wie Kreise, Rechtecke oder Sechsecke treten sie aber nicht auf. Treten keine einwärts gerichteten Ecken auf, können wir $P = \emptyset$ und $N_P = N$ setzen. Auswärtsgerichtete Ecken können dagegen in ein $\Sigma_j, j \leq N_P$ mit $L_j \geq \cot \alpha$ eingebettet werden, wobei 2α der Öffnungswinkel ist. Wir geben nun in gekürzter Form Theorem 7.1 aus [5] wieder

Satz 3 *Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

1. *Es gibt ein zulässige Partition der Eins.*
2. *Es gibt eine Konstante μ , so daß für alle j : $\sqrt{1 + L_j^2} \max_{\Sigma_j} |b| < \mu < 1$ ist.*
3. *Es gilt für alle $\Omega^* \subset \Omega, \Omega^* \neq \emptyset, \Omega$: $\Phi[\Omega^*] > 0$.*

Dann *existiert eine Lösung des Randwertproblems:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Tu &= -2H && \text{in } \Omega \\ \nu \cdot Tu &= -b && \text{auf } \Sigma. \end{aligned}$$

Der Beweis für diesen Satz wird für das Verständnis der folgenden Überlegungen nicht benötigt; für den interessierten Leser wird er in Kapitel 4.2 dennoch skizziert.

Für unseren Fall ist $b|_{\hat{\Sigma}} \equiv \beta, b|_{\Sigma \setminus \hat{\Sigma}} \equiv 0$. Die Bedingung an β läßt sich einfach nachprüfen; es bleibt also das Kriterium an Φ zu untersuchen. Dazu wollen wir nun die Frage klären, ob es möglich ist, das Minimum von $\Phi[\Omega^*]$ für alle möglichen Mengen Ω^* zu bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst eine minimierende Sequenz $\{\Omega_j^*\}$ für $\Phi[\Omega^*]$. Die Folge ist beschränkt und wir können somit eine Teilfolge auswählen, die gegen einen Grenzwert Ω_0 mit Rändern Σ_0 und Γ_0 konvergiert.

Lemma 1 *Falls keine Menge $\Omega_0 \neq \emptyset, \Omega$ existiert, die das Funktional $\Phi[\Omega^*]$ minimiert, so ist $\Phi[E] > 0$ für alle $E \neq \emptyset, \Omega$.*

Beweis: Existiert kein $\Omega_0 \neq \emptyset, \Omega$, so muß jede konvergierende minimierende Folge gegen \emptyset oder gegen Ω konvergieren. Es gilt aber

$$\Phi[\emptyset] = \Phi[\Omega] = 0.$$

q.e.d

Wir können daher den Existenz-Satz umformulieren:

⁴also Ecken, wo der Winkel zwischen den Schenkeln in Ω gemessen größer als π ist

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

Satz 4 *Es mögen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:*

1. *Es existiert eine zulässige Partition der Eins.*
2. *Es existiert Menge $\Omega_0 \neq \emptyset, \Omega$, die das Funktional $\Phi[\Omega^*]$ minimiert.*

Dann *existiert eine Lösung von Problemstellung 1.*

Unmittelbar einsichtig ist folgendes Korollar:

Korollar 2 *Existiert für einen Kontaktwinkel γ_0 eine Lösung von Problemstellung 1 und eine zulässige Partition der Eins, so existiert auch eine Lösung für jeden Kontaktwinkel γ mit $|\gamma - \frac{\pi}{2}| \leq |\gamma_0 - \frac{\pi}{2}|$.*

Nun geben wir zunächst folgendes Lemma (leicht verallgemeinert) wieder (vgl. [5] Lemma 6.4):

Lemma 2 *Sei $\{\Omega_j^*\}$ eine Folge, welche $\Phi[\Omega^*]$ minimiert und sei Ω_0 Grenzwert einer konvergierenden Teilfolge. Dann gilt:*

1. Γ_0 *besteht aus Kreisbögen des Radius $R_\beta = \frac{|\Omega|}{|\hat{\Sigma}|\beta}$.*
2. *Ist $\beta > 0$, so liegt Ω_0 vom Mittelpunkt des Bogens aus gesehen, jenseits des Bogens, ansonsten diesseits.*

Beweis: Da Γ_0 das Funktional Φ (nun als Funktion von Γ statt von Ω^* gedeutet) minimiert, muß es dies unter benachbarten Kurven tun, also muß die erste Variation verschwinden. Wir wählen willkürlich einen Punkt von Γ_0 als Koordinatenursprung und wählen ein Koordinatensystem so, daß sich Γ_0 als Graph $(\xi, g(\xi))$ einer Funktion g auf einem Intervall $a \leq \xi \leq b$ darstellen läßt, und Ω_0 unter der Kurve liegt. Verwerfen wir konstante Terme in Φ so bleibt als zu minimierender Ausdruck:

$$\int_a^b \sqrt{1 + g'^2} d\xi + \frac{|\hat{\Sigma}|\beta}{|\Omega|} \int_a^b g d\xi$$

Die zugehörige Euler-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dx} \frac{g'}{\sqrt{1 + g'^2}} = \frac{|\hat{\Sigma}|\beta}{|\Omega|}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist für $\beta > 0$ ein nach oben gekrümmter Kreisbogen, für $\beta < 0$ ein nach unten gekrümmter Kreisbogen jeweils des Radius $\frac{|\Omega|}{|\hat{\Sigma}|\beta}$.

q.e.d

Wir können folgenden weitergehenden Satz aufstellen (nach [5] Theorem 6.10):

Satz 5 *Sei Γ Komponente des Randes einer minimierenden Menge Ω_0 in Ω und liege im Inneren von Ω . **Dann** gelten folgende Aussagen:*

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

1. Γ ist ein Kreisbogen vom Radius $R_\beta = \frac{|\Omega|}{|\Sigma\beta|}$, der Σ in zwei von einander verschiedenen Punkten P_1 und P_2 schneidet.
2. Falls $|\beta| \neq 1$ ist, so ist Γ von allen anderen Komponenten von $\partial\Omega_0 \setminus \Sigma$ isoliert.
3. Falls $|\beta| = 1$ ist, kann Γ über isolierte Punkte von $\hat{\Sigma}$ hinweg von einer anderen Komponente als Teil des gleichen Bogens fortgesetzt werden.
4. Falls $\beta > 0$ ist, so ist der Schnittwinkel γ' zwischen Γ und Σ , welcher vom Krümmungsmittelpunkt aus gesehen außen liegt, kleiner gleich γ ; auf der gegenüberliegenden Seite besteht ein Winkel $\gamma'' \geq \pi - \gamma$.
5. Falls der Schnittpunkt im Inneren eines regulären Bogens von $\hat{\Sigma}$ liegt, gilt $\gamma' = \gamma$, $\gamma'' = \pi - \gamma$.
6. Für $\beta < 0$ sind die Winkel umgekehrt angeordnet⁵.
7. $\Sigma \setminus \hat{\Sigma}$ wird unter rechtem Winkel geschnitten.
8. Kein Bogen Γ kann eine Ecke von Σ schneiden, wenn der Öffnungswinkel 2α kleiner als π ist.

Beweis: Um die Variationsbedingung an Γ möglichst einfach zu formulieren, führen wir Polarkoordinaten mit dem Ursprung im Krümmungsmittelpunkt von Γ ein:

$$\begin{aligned} \Gamma & : r = r(\theta) \equiv R_\beta, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \Sigma^* & : \rho = \rho(t); \theta = \phi(t), & t_1 \leq t \leq t_2 \end{aligned}$$

Wir können offenbar annehmen: $\rho'^2 + \phi'^2 > \delta > 0$ im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ und $t_1 = \theta_1$, $t_2 = \theta_2$.

Wir betten Γ nun in eine Kurvenschar $\Gamma_\epsilon : r = r(\theta; \epsilon)$ mit $r(\theta, 0) \equiv R_\beta$. Die Schnittpunkte mit Σ^* sind durch die Gleichungen

$$r(\theta_i; \epsilon) = \rho(t_i) \quad i \in \{1, 2\} \tag{3.6}$$

$$\theta_i = \phi(t_i) \quad i \in \{1, 2\} \tag{3.7}$$

gegeben. Wir setzen für das folgende die Abkürzungen

$$\begin{aligned} r_i & = r(\theta_i; \epsilon) & i \in \{1, 2\} \\ \rho_i & = \rho(t_i) & i \in \{1, 2\} \\ r' & = \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ f(r, r') & = \sqrt{r^2 + r'^2} \\ \rho' & = \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ b & = \begin{cases} \beta & \text{auf } \hat{\Sigma} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ g(\rho, \rho'; b) & = \sqrt{\rho^2 \phi'^2 + \rho'^2 b} \end{aligned}$$

⁵Da aber jetzt $\gamma > \pi/2$ ergibt sich (lokal) wieder die gleiche geometrische Figur wie für $\pi - \gamma$.

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

Wir können nun für das Funktional Φ , aufgefaßt als Funktion von ϵ , schreiben:

$$\Phi(\epsilon) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(f(r, r') - \frac{r^2}{2R_\beta} \right) d\theta - \int_{t_1}^{t_2} \left(g(\rho, \rho', b) - \frac{\rho^2 \phi'}{2R_\beta} \right) dt.$$

Daraus erhalten wir (mit $\dot{} = \frac{\partial}{\partial \epsilon}$):

$$\dot{\Phi}(\epsilon) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(f_r \dot{r} + f_{r'} \dot{r}' - \frac{r \dot{r}}{R_\beta} \right) d\theta + \left[\left(f - \frac{r^2}{2R_\beta} \right) \dot{\phi} - \left(g - \frac{\rho^2 \phi'}{2R_\beta} \right) \dot{t} \right]_1^2. \quad (3.8)$$

Aus Gleichung (3.6) erhalten wir durch Differentiation nach ϵ :

$$\dot{r}_i = (\rho'_i - r'_i \phi'_i) \dot{t}_i \quad i \in \{1, 2\}$$

Da an den Endpunkten $r = \rho$ gilt liefert eine partielle Integration von (3.8):

$$\dot{\Phi}(\epsilon) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(f_r - \frac{r}{R_\beta} - \frac{d}{d\theta} f_{r'} \right) \dot{r} d\theta + \{[(\rho' - r' \phi') f_{r'} + (f \phi' - g)] \dot{t}\}_1^2$$

Für $\epsilon = 0$ ist $r \equiv R_\beta$ und der Integrand obiger Gleichung verschwindet ebenso identisch wie $f_{r'}$. Es verbleibt der Ausdruck⁶

$$\dot{\Phi}(0) = [(R_\beta \phi' - \sqrt{\rho'^2 + R_\beta^2 \phi'^2} b) \dot{t}]_1^2.$$

Da die Variation beliebig gewählt ist, können wir $\dot{t} = 1$ annehmen. In einem Minimum muß nun gelten

$$\dot{\Phi}(0) \geq 0$$

oder (da dies auch für Variationen gelten muß, bei denen der andere Endpunkt festgehalten wird) an jedem Endpunkt

$$\phi' R_\beta \leq \sqrt{\rho'^2 + (\phi' R_\beta)^2} b. \quad (3.9)$$

Betrachtet man einen Endpunkt auf der Säule, so liefert die geometrische Interpretation von (3.9) auf dem Schenkel, der Γ unter γ' schneidet für $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} \cos \gamma' &\leq \beta = \cos \gamma \\ \gamma' &\geq \gamma \end{aligned}$$

Eine entsprechende Betrachtung auf dem zweiten Schenkel liefert analog $\gamma'' \geq \gamma$. Entsprechend folgen die Aussagen für $\beta < 0$. Auf den Symmetrielinien ist $b = 0$, also

$$\begin{aligned} \cos \gamma' &\geq 0 \\ \cos \gamma'' &\geq 0 \end{aligned}$$

Es gilt also stets $\gamma' + \gamma'' \geq \pi$. Ein Eckpunkt mit Öffnungswinkel kleiner π ist somit unmöglich, in einem regulären Punkt, wo der Öffnungswinkel π ist, müssen γ' und γ'' zwingend ihre Minima annehmen.

⁶Sollte der Schnittpunkt ein Eckpunkt sein, so ist obige Gleichung als einseitige Ableitung entlang eines Schenkels der Ecke zu interpretieren.

q.e.d

Wir schlagen also folgenden Algorithmus vor, um zu bestimmen, ob eine Elementarzelle eine Lösung zu läßt:

1. Versuche der Elementarzelle Ω Kreisbögen vom Radius

$$R_\beta = \frac{|\Omega|}{|\hat{\Sigma}| \cos \gamma}$$

einzuzeichnen. Falls ein solcher Bogen eine Symmetrielinie schneidet, muß dies unter rechtem Winkel geschehen; die Säule muß unter dem Winkel γ geschnitten werden. Ist $\gamma < \pi/2$, so liegt der Winkel vom Kreismittelpunkt aus gesehen außen, ansonsten innen. Ist dies unmöglich gehe zu Schritt 3, ansonsten zu Schritt 2.

2. Betrachte für jeden Bogen Γ die von Γ begrenzte Teilfläche Ω^* und das Funktional

$$\Phi[\Omega^*] = |\Gamma| - |\hat{\Sigma}^*| \cos \gamma + \frac{|\Omega^*|}{|\Omega|} |\hat{\Sigma}| \cos \gamma,$$

wobei für $\gamma < \pi/2$ — vom Kreismittelpunkt aus gesehen — Ω^* außerhalb von Γ liegt, ansonsten innerhalb. Ist für ein Γ $\Phi[\Omega^*] \leq 0$, so existiert keine Lösung. Andernfalls gehe zu Schritt 3.

3. Enthält die Säule nach innen gerichtete Ecken (d. h. Ecken mit Öffnungswinkeln größer π gemessen in Ω), so gehe zu Schritt 4. Ansonsten: Für jede Ecke, die mindestens einen Schenkel auf der Säule hat, bestimme

$$\frac{|\cos \gamma|}{\sin \alpha},$$

wo α der halbe Öffnungswinkel ist. Ist dieser Ausdruck für alle Ecken kleiner 1, so existiert eine Lösung; andernfalls ist eine Existenzaussage nach dem hier vorgestellten Kriterium nicht möglich.

4. Suche eine zulässige Überdeckung (s. Definition 3) von Ω und bestimme

$$\sqrt{1 + L_j^2} \max_{\Sigma_j} |\beta|$$

für jedes Σ_j , das Säulenrand enthält. Existiert eine Konstante $\mu < 1$ und sind alle obigen Ausdrücke kleiner oder gleich μ , so existiert eine Lösung. Andernfalls oder wenn keine zulässige Überdeckung existiert, ist eine Existenzaussage nach dem hier vorgestellten Kriterium nicht möglich.

Wir können hieraus sofort einige qualitative Schlußfolgerungen ziehen. Lassen wir die Säulen selbst unverändert, vergrößern aber die Abstände zwischen selbigen, so sehen wir sofort, daß der Säulenabstand mit $\sqrt{|\Omega|}$ skaliert, der Radius R_β aber mit Ω . Das bedeutet nun, daß für hinreichend große Abstände keine minimierenden Teilmengen Ω_0

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

mehr existieren. Zugleich können wir für solche Abstände die Säule zunehmend besser als einen Kreiszyylinder approximieren. Im Falle von Kreiszyindern sind die einzigen Ecken mit Säulenkontakt, die Kontaktstellen zu den radial verlaufenden Symmetrielinien (also $\alpha = \pi/4$ in obiger Notation). Mindestens für Kontaktwinkel größer als $\pi/4$ wäre demnach die Existenz für hinreichend große Säulenabstände gesichert. Diese Folgerung paßt gut damit zusammen, daß wir für $\gamma = \pi/2$ ja sofort die Lösung $u = \text{const}$ haben.

Dieses Resultat erscheint auf den ersten Blick unsinnig, doch ist hier zu bedenken, daß die Existenzfrage von der Stabilitätsfrage zu unterscheiden ist. Diese Lösungen sind demnach zwar möglich, werden in natura aber aufgrund mangelhafter Stabilität nicht realisiert. Es ist daher an der Zeit, daß wir uns Stabilität und Persistenz zuwenden. Zunächst aber bringen wir ein paar Beispiele zu den bisherigen Überlegungen.

3.2.1 Beispiele

Wir wollen nun in quadratischen und hexagonalen Elementarzellen mit runden Säulen den oben beschriebenen Algorithmus anwenden. Interessiert man sich nur für Existenz und läßt die Frage nach Stabilität außen vor, so sind die einzigen freien Parameter des Problems der Quotient a/r aus Gitterkonstanten a und Säulenradius r , sowie der Kontaktwinkel γ . Mit Hilfe eines numerischen Programms ist es möglich, den Algorithmus für ein gegebenes Parameterpaar durchzuspielen. Im Falle des hexagonalen Gitters erhält man für kein Paar eine gesicherte Nichtexistenz; da keine einwärtsgerichteten Ecken auftreten, ist also stets Schritt 3 als letzter Schritt zu betrachten. Nun wird die Säule unter rechtem Winkel geschnitten, der Winkel α ist also $\pi/4$ und für alle Kontaktwinkel $\pi/4 < \gamma < 3\pi/4$ ist Existenz gesichert, während in den übrigen Fällen keine Aussage getroffen werden kann. Praktisch ist dies keine sonderliche Einschränkung, da Kontaktwinkel größer $2\pi/3$ bei allen bekannten Materialien nicht erreichbar sind⁷, während Kontaktwinkel kleiner $\pi/2$ mangels Stabilität und Persistenz generell uninteressant sind.

Komplizierter stellt sich der Fall bei einem quadratischen Gitter dar. Hier treten Wertepaare auf, für die Nichtexistenz gesichert ist. In Abbildung 3.8 ist dieser Bereich schwarz unterlegt. Bezüglich gesicherter Existenz gelten dieselben Überlegungen wie im Falle des hexagonalen Gitters. Existenz ist für alle Wertepaare im weißen Bereich von Abbildung 3.8 erwiesen, wobei man sich diesen Bereich endlos nach rechts fortgesetzt denken darf.

und hexagonalen Elementarzellen mit

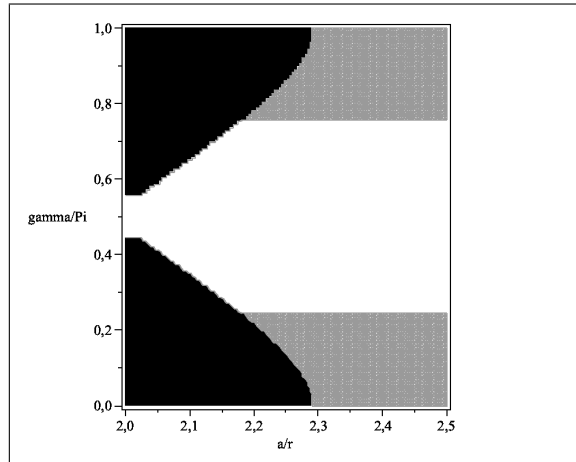


Abbildung 3.8: Existenz und Nichtexistenz im Falle quadratischer Gitter; aufgetragen ist der Kontaktwinkel γ in Vielfachen von π gegen den Säulenabstand a in Vielfachen des Säulenradius r schwarz: Nichtexistenz; weiß: Existenz; grau: keine gesicherte Aussage möglich

⁷Solch große Kontaktwinkel können auf makroskopischer Ebene durch Oberflächenstrukturierung zum Teil erreicht werden; unsere Betrachtung verbleibt jedoch der mikroskopischen Ebene verhaftet.

3.3 Stabilität

Unter der (mechanischen) Stabilität verstehen wir, wie schon oben gesagt, die Fähigkeit der Luft–Wasser–Grenzfläche nach (kleinen) mechanischen Störungen wieder in ihre ursprüngliche (Gleichgewichts–) Lage zurückzukehren. Diese Fähigkeit resultiert aus zwei widerstreitenden Drücken: zum einen, dem nach der Young–Laplaceschen Gleichungen nötigen Druck, um die Grenzfläche aufrecht zu erhalten, zum anderen dem tatsächlichen Druck, den wir uns durch die allgemeine Gasgleichung gegeben denken.

Der Druck, der nötig ist, um die Grenzfläche aufrecht zu erhalten, ist durch die Young–Laplacesche Gleichung (1.2)

$$p_n = p_W + 2H\sigma$$

gegeben (p_n : Luftdruck, p_W : Wasserdruck, σ : Oberflächenspannung). Der tatsächliche Druck in der Luftschicht wird durch die allgemeine Gasgleichung

$$p_t = \frac{nRT}{V}$$

gegeben. In der Gleichgewichtslage gilt natürlich

$$p_t = p_n.$$

Um zu bestimmen, wie beide Drücke auf Volumenänderungen reagieren, führen wir für beide Gleichungen je eine Taylor–Entwicklung durch und verwerfen Terme zweiter und höherer Ordnung. In dieser Näherung gilt zunächst für den tatsächlichen Luftdruck

$$p_t(V_0 + dV) \approx p_t(V_0) - \frac{nRT}{V_0^2} dV,$$

während für den benötigten Druck gilt:

$$p_n(V_0 + dV) \approx p_n(V_0) + 2\sigma \left. \frac{dH}{dV} \right|_{V=V_0} dV.$$

Der Ausdruck für die Differenz beider Drücke ist damit

$$\delta p := p_t(V_0 + dV) - p_n(V_0 + dV) = - \left[\frac{nRT}{V_0^2} + 2\sigma \left. \frac{dH}{dV} \right|_{V=V_0} \right] dV.$$

Für den Term in eckigen Klammern führen wir die Abkürzung

$$\omega := \left[\frac{p_W + 2\sigma H}{V} + 2\sigma \left. \frac{dH}{dV} \right|_{V=V_0} \right]$$

ein. Es sind nun zwei Fälle mit je zwei Unterfällen zu unterscheiden:

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

1. $\omega > 0$

a) $dV > 0$: Aus $\delta p = -\omega dV$ folgt, daß der benötigte Druck stärker angewachsen ist als der tatsächliche; die kontrahierende Tendenz der Oberflächenspannung ist stärker als die expansive Tendenz des Luftdrucks: Die Oberfläche strebt wieder dem Gleichgewichtszustand zu.

b) $dV < 0$: Entsprechend ist hier der tatsächliche Druck größer als der benötigte; die expansiven Tendenzen überwiegen. Da sich das Volumen aber zuvor verkleinert hat, strebt die Grenzfläche wieder der Gleichgewichtslage zu.

Zusammenfassend gilt also, daß aus $\omega > 0$ Stabilität der Gleichgewichtslage folgt.

2. $\omega < 0$: Hier liegen die Verhältnisse bei beiden Unterfällen genau umgekehrt wie oben. Im Falle einer anfänglichen Expansion, erfolgt durch den stärker gewachsenen tatsächlichen Luftdruck eine weitere Expansion, während die Luftschicht nach einer anfänglichen Kontraktion weiter zusammenschrumpft. In diesem Fall ist die Gleichgewichtslage also labil.

Im Fall eines regelmäßigen Gitters mit zylindrischen Säulen ist, wie oben gezeigt, (1):

$$H = \frac{|\hat{\Sigma}|\beta}{2|\Omega|},$$

weist also keinerlei Volumenabhängigkeit auf. Dies bedeutet

$$\omega = \frac{p_W + 2\sigma H}{V} > 0.$$

Dies scheint das Paradoxon vom Ende des letzten Abschnitts weiter zu bestärken: Große Säulenabstände begünstigen die Existenz von Lösungen, die nun auch stabil erscheinen.

Natürlich hätten wir zu diesem Ergebnis auch ohne den Umweg über ω kommen können. Jede Lösung der Problemstellung 1 ist nur bis auf eine additive Konstante eindeutig. Nur durch Einbeziehung des Drucks, der umgekehrt proportional zum Volumen und damit zur Höhe (bestimmt durch die additive Konstante) ist, ergibt sich eine eindeutige Lösung. Da der Druck bei einer Verschiebung nach oben abnimmt (und umgekehrt bei einer Verschiebung nach unten wächst) ist diese Lösung gegen Verschiebungen der Grenzfläche stabil.

Der entscheidende Punkt bei den obigen Überlegungen ist jedoch, daß für die Lösung vorausgesetzt wurde, daß sie sich über die gesamte Elementarzelle erstreckt, während vereinzelte Luftblasen, wie sie im zweiten Kapitel diskutiert wurden, nicht berücksichtigt werden. Auch wenn eine kontinuierliche Lösung gegen Druckschwankungen nach obigen Überlegungen stabil sein mag, so kann sie energetisch gegen den Zerfall in vereinzelte Luftblasen instabil sein.

Für die Klärung der Stabilitätsfrage haben wir uns also Energiebetrachtungen zuzuwenden. Es gibt drei Beiträge zur Energie einer Luft–Wasser–Konfiguration⁸, die wir auf die Energie normieren wollen, die das System hätte, wäre alles von Wasser bedeckt.

⁸vgl. hierzu auch das Kapitel über Variationsrechnung

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

1. Die Volumenenergie: Wird ein Volumen V_L Wasser durch Luft (adiabatisch) ersetzt, muß dieses Volumen gegen den Wasserdruck p_W in das Wasserreservoir gebracht werden; zugleich leistet die einströmende Luft Arbeit mit ihrem eigenen Druck p_L . Die gesamte erbrachte Volumenenergie, die anschließend im System gespeichert ist, ist

$$E_V = p_W V_L - p_L V_L = -2\sigma H V_L$$

2. Die Energie der Grenzfläche: Dieser Term ist gegeben durch

$$E_G = \sigma A_G,$$

wo A_G der Flächeninhalt der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft ist.

3. Die Benetzungsenergie: Es muß Energie aufgebracht werden, um den Festkörper mit Luft zu benetzen, zugleich wird die Benetzungsenergie des Wassers frei:

$$E_B = \sigma_L A_L - \sigma_W A_L,$$

hierbei ist A_L die Fläche mit Luftkontakt, σ_L und σ_W sind Proportionalitätskonstanten analog zur Oberflächenspannung σ . Mit Hilfe der Youngschen Gleichung⁹

$$\beta = \frac{\sigma_L - \sigma_W}{\sigma}$$

können wir obige Gleichung umschreiben zu:

$$E_B = \sigma \beta A_L.$$

Die Gesamtenergie ist somit

$$E = \sigma [-2H V_L + \beta A_L + A_G]. \quad (3.10)$$

Die exakte Berechnung der Gesamtenergie erfordert natürlich die genaue Kenntnis der Grenzfläche, jedoch können wir vermöge

$$H \rightarrow 0 \quad \text{für } |\Omega| \rightarrow \infty, |\hat{\Sigma}| = \text{const.}$$

für große Säulenabstände A_G durch Ω approximieren. Hängt die in dieser Annäherung ebene Grenzfläche in einer Höhe h über dem Grund, so ist die Energie der Elementarzelle¹⁰:

$$E = \sigma \left[-\frac{|\hat{\Sigma}|}{|\Omega|} \beta |\Omega| h + \beta (|\Omega| + |\hat{\Sigma}| h) + |\Omega| \right] = \sigma(1 + \beta) |\Omega|.$$

Somit sehen wir sofort, daß die Energie einer durchgehenden Lösung für größer werdende Säulenabstände ständig wächst, während sie für Einzelblasen beschränkt ist. Die Energie für isolierte Luftblasen wird schließlich niedriger als für eine durchgehende Luftschicht. Dies bedeutet selbstverständlich, daß die durchgehende Lösung instabil gegen Zerfall in einzelne Blasen wird.

⁹Zur Erinnerung: β ist Cosinus des Kontaktwinkels

¹⁰nach Gleichung (1) ist $2H|\Omega| = |\hat{\Sigma}|\beta$

3.4 Persistenz

Unter Persistenz wird die Stabilität der Luftschicht gegen Diffusionsprozesse verstanden, insbesondere natürliche solche, die einen Nettostrom von Luftmolekülen aus der Luftschicht bewirken. Die beiden grundlegenden Gesetzmäßigkeiten hier sind, wie bereits erwähnt, das Henrysche Gesetz

$$p_A = c_A k_H,$$

das Partialdruck einer Luftkomponente in der Gasphase mit deren Konzentration in der wäßrigen Phase verknüpft, und das Ficksche Gesetz

$$\vec{j}_A = -D\nabla c_A,$$

welches den Diffusionsstrom \vec{j} der Luftkomponente A entlang ihres Konzentrationsgradienten im Wasser beschreibt. Wir wenden uns zunächst einer rein qualitativen Diskussion zu und ziehen aus beiden Gesetzmäßigkeiten den Schluß, daß die Komponente A aus der Luftschicht um ein untergetauchtes Objekt in die Atmosphäre oberhalb des Wassers diffundiert, wenn der Partialdruck in der Luftschicht größer ist als in der Atmosphäre: Höherer Partialdruck bedeutet lokal eine höhere Konzentration, diese wird jedoch nach Fick wegdiffundiert. Da in der Luftschicht gleiche chemische Zusammensetzung wie in der Atmosphäre angenommen werden kann, heißt dies nichts anderes, als daß sich eine Luftschicht auflöst, wenn der Druck in ihr höher ist als in der Atmosphäre. Im Fall eines Gitters zylindrischer Säulen ist die Druckdifferenz zwischen Luft und Wasser eine feststehende Größe. Durch das Ausströmen der Luft erfolgt also keine Druckentlastung und die Luftschicht muß sich zur Gänze auflösen. Da der hydrostatische Druck — und über die feststehende Druckdifferenz damit auch der Luftdruck in der Luftschicht — ausschließlich eine Funktion der Tauchtiefe ist, kann man eine maximale Tauchtiefe h_{\max} angeben, bis zu der ein untergetauchtes Objekt eine persistente Luftschicht halten kann. Aus der Forderung, daß in der Tiefe h_{\max} der Druck p_L in der Luftschicht gleich dem atmosphärischen Druck p_{atm} ist,

$$p_L = p_{\text{atm}},$$

der hydrostatischen Druckgleichung

$$p_W = p_{\text{atm}} + \rho_W g h$$

mit ρ_W als Dichte des Wassers, g als Erdbeschleunigung und h als Tauchtiefe, sowie der Young–Laplaceschen Gleichung (1.2) und der Beziehung zwischen H und der Elementarzelle (1) folgt:

$$h_{\max} = -\frac{\sigma\beta|\hat{\Sigma}|}{\rho_W g|\Omega|}.$$

Wir sehen sofort, daß für $H > 0$, also nach (1) für $\beta < 0$, die maximale Tauchtiefe negativ ist. D. h. daß es für hydrophile Körper nicht möglich ist eine persistente Luftschicht an sich zu halten. Dieses Ergebnis ist im Einklang mit dessen, was man naiv erwarten konnte.

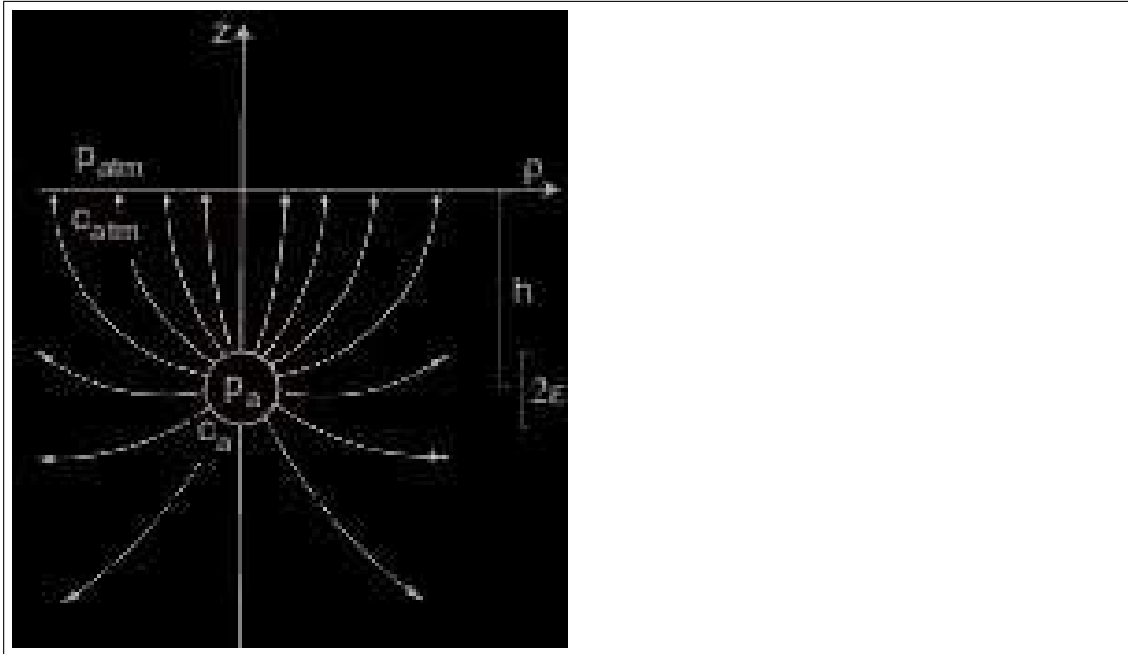


Abbildung 3.9: Luftblase (Radius ϵ , Druck p_a , Tiefe h) in diffusivem Austausch mit der Atmosphäre (Druck p_{atm}). Für $c_a > c_{atm}$ (entsprechend $p_a > p_{atm}$), entweichen Luftmoleküle aus der Blase und wandern entlang der Trajektorien in Pfeilrichtung in die Atmosphäre [10], Fig. 5

Für eine qualitative Diskussion der Zeit, die eine nicht-persistente Luftschicht braucht, um sich aufzulösen, hat Herr Wilfried Konrad in [10] in Idee entwickelt, die auf einer Analogie zwischen dem Diffusionsproblem und elektrostatischen Problemen mit Spiegel Ladungen beruht. Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c.$$

Nun nimmt er an, daß sich ein stationärer Fluß ausgebildet hat, d. h.

$$0 = D\Delta c$$

ist, d. h. letztlich wird eine untere Grenze der Lebensdauer berechnet. Die Luftschicht soll gänzlich in einer Sphäre vom Radius ϵ in der Tiefe h enthalten sein (s. hierzu und auch für die folgenden Größen Abb. 3.9). Die Randbedingungen lauten in Zylinderkoordinaten, wenn die Wasseroberfläche bei $z = 0$ ist:

$$\begin{aligned} c|_{z=0} &= c_{atm} \\ c|_{\sqrt{\rho^2+(z+h)^2}=\epsilon} &= c_a \end{aligned}$$

Das Problem ist damit völlig analog zum elektrostatischen Problem einer geladenen Sphäre gegenüber einer Metallplatte, dessen Lösung hinlänglich bekannt ist. Hier ergibt

3 Zweidimensionale Gitter von Säulen

sich:

$$c(\rho, z) = c_{\text{atm}} + \frac{\epsilon(c_a - c_{\text{atm}})}{\sqrt{\rho^2 + (z + h)^2}} + \frac{\epsilon(c_a - c_{\text{atm}})}{\sqrt{\rho^2 + (z - h)^2}}. \quad (3.11)$$

Einsetzen von (3.11) in (1.5) liefert die Flußdichte $\bar{j}|_{z=0}$ durch die Wasseroberfläche, das Integral von $\bar{j}|_{z=0}$ über die gesamte (unendlich gedachte) Wasseroberfläche liefert den Gesamtstrom I in die Atmosphäre. Die Lebenszeit τ ist dann durch

$$\tau = \frac{n_a}{I}$$

gegeben, wobei n_a die in der Luftblase enthaltene Stoffmenge ist, die wiederum aus $p_a V_a = n_a R T$ folgt. Faßt man alles zusammen, folgt ([10], Gl. (23)):

$$\tau = \begin{cases} \infty & , \text{ falls } h \leq h_\infty \\ \frac{V_a k_H}{4\pi\epsilon D R T} \left(1 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_W g (h - h_\infty)} \right) & , \text{ falls } h > h_\infty \end{cases}$$

wobei ρ_W die Dichte von Wasser und g die Erdbeschleunigung ist.

3.5 Anmerkungen zur Numerik

An dieser Stelle scheinen ein paar Bemerkungen zur numerischen Lösung des Problems angebracht. Dank eines Stipendiums des DAADs verbrachte ich einen Monat bei Herrn Prof. Frauendiener an der Universität von Otago, Neuseeland. Hauptgrund der Reise war die Beschäftigung mit numerischen Methoden im Zusammenhang der hier untersuchten Problemstellung.

Die Methode der finiten Elemente ließ sich erfolgreich auf solche Flächen anwenden, die sich als Graphen über einem gegebenen zweidimensionalen Gebiet darstellen lassen. Numerische Verfahren wurden dabei auch für Parameterwerte durchgeführt, für die aus analytischen Überlegungen heraus bekannt ist, daß sie keine Lösung zulassen. In diesen Fällen konvergierte das numerische Verfahren nicht, es wurden zum Teil aber auch Lösungen geliefert, die Eigenschaften aufwiesen, die mit konstanter mittlerer Krümmung unvereinbar sind. Solide analytische Kenntnisse sind also unentbehrlich, um falsche Lösungen aussortieren zu können.

Ein Schwerpunkt der Simulationen lag dabei auf Wasser-Luft-Grenzflächen, die sich entlang von Säulen mit quadratischem Grundriß ausbilden, welche in einem quadratisch Gitter angeordnet sind. Das Nees-Institut für Biodiversität der Pflanzen an der Universität Bonn, mit dem eine Kooperation besteht, hatte solcher Art strukturierte Oberflächen („Prototypen“) für Testzwecke in Auftrag gegeben; durch die Simulationen sollte nun geklärt werden, ob für diese Prototypen die Ausbildung einer Grenzschicht theoretisch möglich ist. Für einen weiten Parameterbereich konnte die Existenz einer (numerischen) Lösung gezeigt werden. Dies war ein Anlaß für Prof. Frauendiener und mich uns nochmals intensiver mit den Existenzsätzen zu beschäftigen. Dabei wurden dann die Grundlagen für den vorangehenden theoretischen Teil dieses Kapitels (vor allem 3.2) gelegt.

Eine numerische Berechnung von Luftschichten, die sich nicht als Graphen über einem vorgegebenen Gebiet darstellen lassen (wie zum Beispiel eine Luftschicht, die sich entlang von Kegeln statt Säulen spannt), ist daher als Vorbereitung auf eine Klärung der theoretischen Existenzfrage zu empfehlen. Es schwingt dabei die Hoffnung mit, daß sie dem zukünftigen Forscher eine Intuition vermittelt, wann Lösungen existieren und wann nicht.

4 Variation

Wir wenden in diesem Kapitel das Instrumentarium der Variationsrechnung auf unsere Problemstellung an. Abschnitt 4.2 skizziert den Beweis von Satz 3. Er ist lediglich eine Wiedergabe von [5], Kapitel 7, und liefert gegenüber [5] keine neuen Erkenntnisse oder Ansätze; nur der Vollständigkeit halber ist diese Beweisskizze in unsere Arbeit übernommen worden. In Abschnitt 4.3 stellen wir sodann unseren zentralen Satz über das Extremalprinzip am Rand zweidimensionaler Elementarzellen auf. Im letzten Abschnitt geben wir einen kurzen Überblick über das, was auf dieser Arbeit aufbauend als nächster Schritt zu einem besseren Verständnis von lufthaltenden Oberflächen anzusehen ist.

4.1 Ein Extremalprinzip für CMC-Flächen

Zunächst aber wollen wir einige triviale Erkenntnisse über CMC-Flächen wieder in Erinnerung rufen. Wir betrachten den CMC-Flächen-Operator L_H mit

$$L_H[u] \equiv 2H(1 + u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}} + (1 + u_2^2)u_{,11} - 2u_{,1}u_{,2}u_{,12} + (1 + u_1^2)u_{,22}.$$

Die Lösungen von $L_H[u] = 0$ sind dabei gerade CMC-Flächen mit mittlerer Krümmung H . Als erstes folgt der Satz:

Satz 6 *Sei $H > 0$ und u Lösung von $L_H[u] \leq 0$. Dann besitzt u kein inneres Minimum.*

Beweis: Angenommen u nimmt ein Minimum in einem inneren Punkt P an. Dann gilt in P für alle $i \in \{1, 2\}$:

$$u_{,i}(P) = 0$$

und die Hessematrix $b_{ik} = u_{,ik}(P)$ definiert eine positiv semidefinite quadratische Form. Hieraus folgt

$$u_{,11}(P) \geq 0, u_{,22}(P) \geq 0$$

und weiter

$$L_H[u]|_P = u_{,11} + u_{,22} + 2H > 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

q.e.d

Analog gilt der Satz:

Satz 7 *Sei $H < 0$ und u Lösung von $L_H[u] \geq 0$. Dann besitzt u kein inneres Maximum.*

Hiermit läßt sich schließlich folgender Satz beweisen:

Satz 8 *Seien v und w zwei Lösungen von $L[u] = 0$, so kann $v - w$ weder ein Maximum noch ein Minimum im Inneren annehmen, es sei denn $v \equiv w$.*

Beweis: s. [8].

4.2 Grundlagen

Wie bereits im Abschnitt über Stabilitätsbetrachtungen angedeutet, kann das Problem auch als Variationsproblem des Energiefunktional betrachtet werden. Die Gesamtenergie ist nach (3.10)

$$E = \sigma [-2HV_L + \beta A_L + A_G].$$

Da σ nur eine multiplikative Konstante ist, interessiert für das Variationsproblem nur der Ausdruck in eckigen Klammern. Es reicht also aus, das Funktional

$$\mathfrak{E}[u] = \int_{\Omega} \left(-2Hu + \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \right) dx + \int_{\hat{\Sigma}} \beta u ds$$

zu betrachten. Anwendung des üblichen Formalismus führt auf die drei Euler–Lagrange-schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Tu &= -2H && \text{in } \Omega \\ \nu \cdot Tu &= -\beta && \text{auf } \hat{\Sigma} \\ \nu \cdot Tu &= 0 && \text{auf } \Sigma \setminus \hat{\Sigma}, \end{aligned}$$

also auch wieder auf Problemstellung (1). Diese Formulierung erlaubt uns aber andererseits eine neue Herangehensweise an das gestellte Problem. Wir skizzieren im Folgenden einen Beweis für Satz 3 (wir folgen dabei im wesentlichen [5], Kapitel 7).

Wir gehen zunächst zu dem allgemeineren Funktional

$$\mathcal{E}[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx + \int_{\Omega} \lambda(u) dx - \int_{\Sigma} b(s) u(s) ds$$

mit $-1 \leq b \leq 1$ und $\lambda''(u) \geq 0$ über. Die zugehörigen Eulerschen Gleichungen lauten¹

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Tu &= 2h(u) \\ \nu \cdot Tu &= b(s) \end{aligned}$$

mit $2h(t) = \lambda'(t)$.

Zunächst bemerken wir, daß eine Funktion $u \in BV(\Omega)$ genau dann \mathcal{E} über Ω minimiert, wenn ihr Subgraph

$$U = \{(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R} | z < u(x)\}$$

¹ \mathfrak{E} erhalten wir aus \mathcal{E} durch die Wahl $\lambda(u) = -Hu$ und $b(s) = -\beta$ auf $\hat{\Sigma}$ und $b(s) = 0$ sonst. Anschaulich gesprochen messen wir die mittlere Krümmung jetzt gegen den nach oben gerichteten Normalenvektor und messen den Kontaktwinkel in der Luft statt im Wasser.

4 Variation

das Funktional

$$\mathcal{F}[U] = \int_Q |\nabla \chi_U| dx dz + 2 \int_Q h(u) \chi_U dx dz - \int_{\delta Q} b \chi_U ds dz$$

— mit $Q = \Omega \times \mathbb{R}$, $\delta Q = \partial\Omega \times \mathbb{R}$ und χ_U als charakteristische Funktion von U — minimiert. Minimierung ist hierbei in folgendem Sinne zu verstehen: Setze für $T > 0$

$$\begin{aligned} Q_T &= \Omega \times [-T, T] \\ \delta Q_T &= \partial\Omega \times [-T, T] \end{aligned}$$

und für $U \subset Q$

$$\mathcal{F}_T[U] = \int_{Q_T} |\nabla \chi_U| dx dz + 2 \int_{Q_T} h(u) \chi_U dx dz - \int_{\delta Q_T} b \chi_U ds dz;$$

wir sagen, daß U \mathcal{F}_T in Q_T minimiere (oder eine Lösung für \mathcal{F}_T in Q_T sei), wenn für jedes $S \subset Q_T$ gilt: $\mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[S]$. Wir sagen, daß U \mathcal{F} in Q minimiere (oder eine lokale Lösung für \mathcal{F} in Q sei), wenn U für alle $T > 0$ \mathcal{F}_T in Q_T minimiert.

Wir betrachten nun zunächst das Problem, für ein gegebenes $j > 0$ \mathcal{E} in der Klasse

$$V_j = \{u \in BV(\Omega) \mid |u| \leq j\}.$$

zu minimieren. Es ist offenbar, daß \mathcal{E} in V_j von unten beschränkt ist und jede minimierende Folge $\{u_k^j$ in $BV(\Omega)$ beschränkt ist. Sätze über die Kompaktheit der BV -Funktionen erlauben es uns, eine Teilfolge herauszugreifen, die in $L^1(\Omega)$ gegen $u^j \in BV(\Omega)$ konvergiert. Es läßt sich zeigen, daß u^j eine L^1 -Spur über Σ besitzt, $\mathcal{E}[u^j]$ also definiert ist. Um zu zeigen, daß u^j minimiert, reicht es aus, Halbstetigkeit von unten zu zeigen. Wir benötigen zunächst einen Hilfssatz:

Lemma 3 ([5], Lemma 6.1) *Existiere eine zulässige Partition der Eins (s. Definition 3); sei $b_j = \max_{\Sigma_j} |b|$. Sei $\mathcal{A}_\delta \subset \Omega$ ein Streifen der Breite δ entlang von Σ . Dann gilt für jedes $f \in BV(\Omega)$*

$$\left| \int_{\Sigma} b f ds \right| \leq \mu \int_{\mathcal{A}_\delta} |\nabla f| dx + \Upsilon(\Omega; \delta) \int_{\mathcal{A}_\delta} |f| dx$$

mit $\mu = \max |b_j| \sqrt{1 + L_j}$ genommen über alle j mit $\Omega_j \cap \mathcal{A}_\delta \cap \text{Tr } f \neq \emptyset$.

Beweis: Wähle δ so klein, daß die Endpunkte ($\eta = \psi_j - \tau$) jedes Intervalls nach Schritt iii von Definition 3 innerhalb von $\Omega \setminus \mathcal{A}_\delta$ liegt. Sei $\zeta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ über Σ und $\zeta \equiv 0$ auf $\Omega \setminus \mathcal{A}_\delta$. Sei zunächst $j \leq N_P$. Es gilt

$$f \phi_j|_{(\xi, \eta = \psi_j)} = \int_{\psi_j - \delta}^{\psi_j} \frac{\partial}{\partial \eta} \Big|_{(\xi, \eta)} (\zeta \phi_j f) d\eta.$$

Für irgendeine Konstante $\Upsilon_j(\Omega; \delta)$ gilt also

$$|f| \phi_j \leq \int_{\psi_j - \delta}^{\psi_j} |f_\eta| \phi_j d\eta + \Upsilon_j(\Omega; \delta) \int_{\psi_j - \delta}^{\psi_j} |f| d\eta.$$

4 Variation

Wir integrieren bezüglich ξ und erhalten vermöge $\text{Tr } \phi_j \subset \Omega_j$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + L_j^2}} \int_{\Sigma} |f| \phi_j ds \leq \int_{\mathcal{A}_\delta} |\nabla f| \phi_j dx + \Upsilon_j \int_{\mathcal{A}_\delta} |f| dx$$

und damit

$$\left| \int_{\Sigma} b f \phi_j ds \right| \leq |b_j| \sqrt{1 + L_j^2} \int_{\mathcal{A}_\delta} |\nabla f| \phi_j dx + |b_j| \sqrt{1 + L_j^2} \Upsilon_j \int_{\mathcal{A}_\delta} |f| dx. \quad (4.1)$$

Falls $j > N_P$ ist, so betrachten wir die Integrale, die den Schnitten mit den benachbarten Σ_j entsprechen (s. Definition 3 ii), einzeln. Da die Mengen nach Punkt iii der Definition sich nicht schneiden, können die Ergebnisse addiert werden und wir gelangen wieder zu Formel (4.1). Summation über alle j mit $\Omega_j \cap \mathcal{A}_\delta \cap \text{Tr} f \neq \emptyset$ liefert mit $\Upsilon = \sum_i |b_j| \sqrt{1 + L_j^2} \Upsilon_j$ die Aussage des Lemmas, da (4.1) nicht mehr von der anfänglichen Beschränkung an δ abhängt.

q.e.d

Wir sind nun in der Lage die oben geforderte Halbstetigkeit zu beweisen:

Lemma 4 ([5], Lemma 7.1) *Sei $v_k \in BV(\Omega)$, $\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla v_k|^2} dx < M < \infty$ und konvergiere v_k in $L^1(\Omega)$ gegen $v \in BV(\Omega)$. Gebe es weiter für ein gegebenes $\epsilon > 0$ eine zulässige Partition der Eins mit $\mu < 1 + \epsilon$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}[v] \leq \liminf_k \mathcal{E}[v_k].$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Term $\int_{\Omega} \lambda(u) dx$. Wir setzen

$$\lambda_T(u) = \begin{cases} \lambda(T) + \lambda'(T)(u - T), & u \geq T \\ \lambda(u), & -T \leq u \leq T \\ \lambda(-T) + \lambda'(-T)(u + T), & u \leq -T \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda''(u) \geq 0$ gilt, gilt für hinreichend großes T stets $\lambda_T(u) \leq \lambda(u)$. Weiter gilt

$$\int_{\Omega} (\lambda_T(v) - \lambda_T(v_k)) dx \leq M \int_{\Omega} |v - v_k| dx$$

mit $M = \max_{|t| \leq T} |\lambda'(t)|$ und damit

$$\int_{\Omega} \lambda_T(v) dx \leq \liminf_k \int_{\Omega} \lambda_T(v_k) dx$$

wegen der L^1 -Konvergenz von v_k gegen v . Also gilt

$$\int_{\Omega} \lambda_T(v) dx \leq \lim_k \sup_T \int_{\Omega} \lambda_T(v_k) dx = \liminf_k \int_{\Omega} \lambda(v_k) dx$$

4 Variation

und schließlich

$$\int_{\Omega} \lambda(v) dx = \sup_T \int_{\Omega} \lambda_T(v) dx \leq \liminf \int_{\Omega} \lambda(v_k) dx.$$

Die Aussage bleibt damit nur noch für den Ausdruck

$$Q[u] := \mathfrak{A}[u] - \int_{\Sigma} b u ds := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx - \int_{\Sigma} b u ds$$

zu zeigen. Für das Flächenintegral

$$\mathfrak{A}[u] \equiv \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

machen wir zunächst folgende Feststellung: Es sei

$$\mathfrak{A}_{\delta}[u] := \int_{\Omega_{\delta}} dx$$

für irgendeine Teilmenge $\Omega_{\delta} \subset \Omega$; nach Definition gilt für alle zweidimensional vektorwertigen Funktionen $g, h \in C_0^{\infty}(\Omega_{\delta})$ mit $|g|, |h| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\delta}[v] - \mathfrak{A}_{\delta}[v_k] &= \sup \int_{\Omega_{\delta}} (g_0 + v \operatorname{div} g) dx - \int_{\Omega_{\delta}} (h_0 + v_k \operatorname{div} h) dx \\ &\leq \sup \int_{\Omega_{\delta}} (g_0 + v \operatorname{div} g) dx - \sup \int_{\Omega_{\delta}} (g_0 + v_k \operatorname{div} g) dx \\ &= \sup \int_{\Omega_{\delta}} ((v - v_k) \operatorname{div} g) dx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wir setzen nun $\Omega_{\delta} = \Omega \setminus \mathcal{A}_{\delta}$, wobei $\mathcal{A}_{\delta} = \{x \in \Omega | d(x, \Sigma) < \delta\}$ ein Randstreifen der Breite δ ist. Mit Hilfe von Lemma 3 finden wir also

$$\begin{aligned} Q[v] - Q[v_k] &< (\mathfrak{A}_{\delta}[v] - \mathfrak{A}_{\delta}[v_k]) + (2 + \epsilon) \int_{\mathcal{A}_{\delta}} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx \\ &\quad + \epsilon \int_{\mathcal{A}_{\delta}} \sqrt{1 + |\nabla v_k|^2} dx + \Upsilon(\Omega; \delta) \int_{\Omega} |v - v_k| dx. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges $\hat{\epsilon} > 0$ wähle δ so, daß

$$\int_{\mathcal{A}_{\delta}} \sqrt{1 + |\nabla v|^2} dx < \hat{\epsilon};$$

aus (4.2) folgt

$$\sup_{k \rightarrow \infty} (\mathfrak{A}_{\delta}[v] - \mathfrak{A}_{\delta}[v_k]) \leq 0;$$

schließlich ist nach Voraussetzung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v - v_k| dx = 0.$$

4 Variation

Zusammengefaßt gilt also

$$\sup_{k \rightarrow \infty} (Q[v] - Q[v_k]) \leq (2 + \epsilon)\hat{\epsilon} + \epsilon M;$$

da ϵ und $\hat{\epsilon}$ beliebig wählbar sind, ist das Lemma bewiesen.

q.e.d

Wir wissen nun also, daß für \mathcal{E} ein minimierendes u^j in V_j existiert. Da $u^j \in BV(\Omega)$ ist, ist sein Subgraph U^j für alle $T \leq j$ eine Lösung für \mathcal{F} in Q_T . Wir haben weiterhin

Lemma 5 ([5], Lemma 7.2) *Sei A eine Lösung für \mathcal{F} in Q_T , dann existiert ein $C(T)$ mit*

$$\int_{Q_T} |\nabla \chi_A| dx dz < C(T).$$

Beweis: Nach der minimierenden Eigenschaft ist

$$\mathcal{F}_T[A] \leq \mathcal{F}_T[A \setminus Q_T] = \int_{Q_T} |\nabla \chi_{A \setminus Q_T}| dx dz \leq 2|\Omega|;$$

also ist

$$\int_{Q_T} |\nabla \chi_A| dx dz \leq 2|\Omega| + 2 \int_{Q_T} |h(u)| dx dz + 2|\partial\Omega|T = C(T).$$

q.e.d

Wir lassen nun $j \rightarrow \infty$ gehen und erhalten für festes T :

$$\int_{Q_T} \chi_{U^j} dx dz + \int_{Q_T} |\nabla \chi_{U^j}| dx dz \leq 2T|\Omega| + C(T)$$

Wegen Kompaktheit folgt wiederum für jedes T $U^j \rightarrow U$ in $L^1(Q_T)$ mit

$$\int_{Q_T} \chi_U dx dz + \int_{Q_T} |\nabla \chi_U| dx dz \leq 2T|\Omega| + C(T).$$

Die Menge U ist als Grenzwert von Subgraphen wiederum ein Subgraph. Halbstetigkeit von unten des Funktionals \mathcal{F} folgt analog zu Lemma 4; also folgt $\mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[V]$ für alle V . Damit folgt

Satz 9 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 aber ohne die Forderung $\Phi[\Omega^*] > 0$, $\Omega^* \neq \emptyset, \Omega$ existiert eine lokale Lösung für \mathcal{F} .*

Es bleibt jedoch zu beachten, daß eine lokale Lösung für \mathcal{F} dem Betrage nach unendlich werden kann, auch auf einer Menge von positivem Maße. Wir haben uns diesem Problem daher als nächstem zuzuwenden. Hierfür führen wir die Mengen $\mathbf{P} = \{x \in \Omega | u(x) = \infty\}$, $\mathbf{N} = \{x \in \Omega | u(x) = -\infty\}$ und $\mathbf{G} = \Omega \setminus (\mathbf{P} \cup \mathbf{N})$ ein. Es gilt zunächst

4 Variation

Lemma 6 ([5], Lemma 7.3) Sei U^j eine Lösung für

$$\mathcal{F}_T^j = \int_{Q_T} |\nabla \chi_A| dx dz + 2 \int_{Q_T} h^j(u) \chi_A dx dz - \int_{\delta Q_T} b^j \chi_A ds dz.$$

Sei $h^j(u) \rightarrow h(u)$ gleichmäßig in Q_T , $b^j \rightarrow b$ gleichförmig auf δQ_T . Dann ist U^j eine minimierende Folge für $\mathcal{F}_T[A]$.

Beweis: Angenommen, die Aussage des Satzes hielte nicht, dann existierte eine Teilfolge \hat{U}^j und ein Subgraph \hat{U} mit

$$\mathcal{F}_T[\hat{U}] < \inf \mathcal{F}_T[\hat{U}^j].$$

Da aber jedes \hat{U}^j das Funktional \mathcal{F}_T^j minimiert, gilt andererseits

$$\begin{aligned} \inf \mathcal{F}_T[\hat{U}^j] &= \inf \left\{ \mathcal{F}_T^j[\hat{U}^j] + 2 \int_{Q_T} (h(u) - h^j(u)) \chi_{\hat{U}^j} dx dz - \int_{\delta Q_T} (b - b^j) \chi_{\hat{U}^j} ds dz \right\} \\ &= \inf \mathcal{F}_T^j[\hat{U}^j] \\ &\leq \inf \mathcal{F}_T^j[\hat{U}]. \end{aligned}$$

Für $j \rightarrow \infty$ folgt aus beiden Ungleichungen ein Widerspruch.

q.e.d

Wir definieren nun die beiden Funktionale

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}[\Omega^*] &:= |\Gamma| - \int_{\Sigma^*} b ds + 2H_\infty |\Omega^*| \\ \tilde{\Psi}[\Omega^*] &:= |\Gamma| + \int_{\Sigma^*} b ds - 2H_{-\infty} |\Omega^*| \end{aligned}$$

mit $H_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ und $H_{-\infty} = \lim_{t \rightarrow -\infty} h(t)$, wobei wir für beide Größen ausdrücklich unendliche Größen zugelassen sein sollen. Für $h(t) = H = \text{const}$ gilt $\tilde{\Psi}[\Omega^*] = \Phi[\Omega^*]$ und $\tilde{\Phi}[\Omega^*] = \Phi[\Omega \setminus \Omega^*]$.

Lemma 7 ([5], Lemma 7.4) Die Menge \mathbf{P} minimiert das Funktional $\tilde{\Phi}$; die Menge \mathbf{N} minimiert das Funktional $\tilde{\Psi}$.

Beweis: Für eine Folge $j \rightarrow \infty$ sei

$$U_j = \{(x, z) \in Q \mid z < u(x) - j\}.$$

Dann ist U^j eine Lösung für

$$\mathcal{F}^j[A] = \int_Q |\nabla \chi_A| dx dz + 2 \int_Q h(u + j) \chi_A dx dz - \int_{\delta Q_T} b \chi_A ds dz.$$

Es gilt offenbar $U^j \rightarrow U = \mathbf{P} \times \mathbb{R}$. Nach Lemma 6 ist U^j eine minimierende Folge, wegen Halbstetigkeit minimiert $\mathbf{P} \times \mathbb{R}$ also $\mathcal{F}_T^\infty \equiv \int_{-T}^T \tilde{\Phi}[A] dz$. Da $\mathbf{P} \times \mathbb{R}$ und $\tilde{\Phi}[A]$ keine Abhängigkeit von t aufweisen, folgt die Behauptung für \mathbf{P} . Entsprechend beweist man die Aussage für $\tilde{\Psi}$ und \mathbf{N} .

q.e.d

Wir können nun folgenden Satz aufstellen:

Satz 10 ([5], Theorem 7.3) *Mögen die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt sein mit der einzigen Ausnahme, daß bezüglich der zulässigen Partition der Eins $\mu < 1 + \epsilon$ für beliebiges $\epsilon > 0$ gelte. Im Falle $h(t) \neq \text{const.}$ trete dabei an die Stelle der Forderung an Φ die Forderung: $\tilde{\Phi}[\Omega^*] > 0$, $\tilde{\Psi}[\Omega^*] > 0$ jeweils für alle $\Omega^* \neq \emptyset$. Dann existiert eine lokale Lösung für \mathcal{F} , die über ganz Ω lokal endlich ist.*

Beweis: Falls $h(t) \neq \text{const.}$, so folgt die Aussage unmittelbar aus Lemma 7. Andernfalls betrachte $h_j(u) = H + \epsilon_j \tan^{-1} u$ für irgendeine Folge $\epsilon_j \rightarrow 0$. Sei u_j die zugehörige lokale Lösung für \mathcal{F} . Wähle λ_j so, daß

$$|\{x \in \Omega | u_j(x) - \lambda_j \geq 0\}| \geq \frac{1}{4}|\Omega| \quad (4.3)$$

$$|\{x \in \Omega | u_j(x) - \lambda_j \leq 0\}| \geq \frac{1}{4}|\Omega| \quad (4.4)$$

gilt und setze

$$U_j = \{(x, t) \in Q | t < u_j(x) - \lambda_j\}.$$

Somit ist U_j eine Lösung für

$$\mathcal{F}^j[A] = \int_Q |\nabla \chi_A| dx dz + 2 \int_Q h_j(t + \lambda_j) \chi_A dx dz - \int_{\delta Q} b \chi_A ds dz.$$

Vermöge Lemma 5 gilt $\int_{Q_T} |\nabla \chi_{U_j}| < C(T)$, also gibt es eine Teilfolge $U_j \rightarrow U$ in $L^1(Q_T)$. Da $h_j \rightarrow h$ gleichmäßig in Q ist, ist U_j eine minimierende Folge für $\mathcal{F}_T[A]$ und durch die Halbstetigkeit von unten für alle $T > 0$ eine Lösung für $\mathcal{F}_T[A]$; also ist U eine lokale Lösung für $\mathcal{F}[A]$. Nach Lemma 7 minimiert \mathbf{P} $\tilde{\Phi}$ und \mathbf{N} $\tilde{\Psi}$. Falls also die Bedingung an Φ hält, so folgt $\mathbf{P} = \emptyset$ oder Ω , entsprechend $\mathbf{N} = \emptyset$ oder Ω . Aber (4.3) gilt auch im Limes $j \rightarrow \infty$, also kann keine der beiden Mengen gleich Ω sein.

q.e.d

Es kann nun immer noch der Fall auftreten, daß u gegen unendlich strebt, wenn es sich dem Rande nähert.

Lemma 8 ([5], Lemma 7.6) *Sei $p \in \Sigma$. Sei $\max\{|b_j| \sqrt{1 + L_j}\} < 1$ genommen über alle $\Sigma_j \ni p$. Sei U eine lokale Lösung von \mathcal{F} . Sei $Z_r(p, \tau) = \{(x, z) \in Q | |x - p| < r, |z - \tau| < r\}$ ein Zylinder um p und sei $U_r = U \cap Z_r$. Dann existiert zwei Konstanten $C > 0$ und $r_0 > 0$ so, daß gilt: Aus $|U_r| > 0$ für alle $r > 0$ folgt, daß $|U_r| > Cr^3$ für alle $r < r_0$ gilt.*

Beweis: Da U für jedes Q_T \mathcal{F} minimiert, erhalten wir aus einem Vergleich von U mit $U \setminus Z_r$:

$$\int_{Q \cap Z_r} |\nabla \chi_U| dx dz + 2 \int_{Q \cap Z_r} h(u) \chi_U dx dz - \int_{\delta Q \cap Z_r} b \chi_U ds dz \leq \int_{\partial Z_r} \chi_U dF,$$

4 Variation

so daß für fast alle $r > 0$ gilt:

$$\int_Q |\nabla \chi_{U_r}| dx dz + 2 \int_Q h(u) \chi_{U_r} dx dz - \int_{\delta Q} b \chi_{U_r} ds dz \leq 2 \int_{\delta Z_r} \chi_U dF \quad (4.5)$$

Aus Lemma 3 folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\delta Q} \chi_{U_r} ds dz &\leq \max \sqrt{1 + L_j^2} \int_Q |\nabla \chi_{U_r}| dx dz + C|U_r| \\ &\leq \max \sqrt{1 + L_j^2} \int_Q |\nabla \chi_{U_r}| dx dz + C|Z_r|^{\frac{1}{3}} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \chi_{U_r}| dx dz \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante C ; die letzte Ungleichung folgte aus der Poincareschen Ungleichung. Mit Hilfe der Identität

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \chi_{U_r}| dx dz = \int_Q |\nabla \chi_{U_r}| dx dz + \int_{\delta Q} \chi_{U_r} ds dz$$

finden wir für ein hinreichend kleines r mit $C|Z_r|^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{2}$, daß

$$\int_{\delta Q} \chi_{U_r} ds dz \leq \frac{\max \sqrt{1 + L_j^2} + C|Z_r|^{\frac{1}{3}}}{1 - C|Z_r|^{\frac{1}{3}}} \int_Q |\nabla \chi_{U_r}| dx dz \quad (4.6)$$

und damit

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \chi_{U_r}| dx dz \leq \frac{1 + \max \sqrt{1 + L_j^2}}{1 - C|Z_r|^{\frac{1}{3}}} \int_Q |\nabla \chi_{U_r}| dx dz \leq 2(1 + \max \sqrt{1 + L_j^2}) \int_Q |\nabla \chi_{U_r}| dx dz$$

gilt. Weiterhin gilt, wenn $B_r(p)$ die Grundfläche von Z_r ist:

$$\begin{aligned} \int_Q h(u) \chi_{U_r} dx dz &= \int_{\tau-r}^{\tau+r} dz \int_{B_r(p)} h(u) \chi_{U_r} dx \\ &\geq - \int_{\tau-r}^{\tau+r} \left\{ \int_{B_r(p)} |h(u)|^2 dx \int_{B_r(p)} \chi_{U_r} dx \right\}^{\frac{1}{2}} dz \\ &\geq -C|h_0^-|r \int_{\tau-r}^{\tau+r} |U_r(t)|^{\frac{1}{2}} dz \\ &\geq -C|h_0^-|r \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \chi_{U_r}| dx dz \end{aligned}$$

mit $h_0^- = \min\{0, h(\tau - r)\}$ und $U_r(s) = U_r \cap \{(x, z) | z = s\}$; die letzte Zeile wieder vermöge der Poincareschen Ungleichung. Zusammengefaßt können wir also schreiben:

$$\begin{aligned} &2 \int_Q h(u) \chi_{U_r} dx dz - \int_{\delta Q} b \chi_{U_r} ds dz \\ &\geq - \left\{ 4C|h_0^-|r \left(1 + \max \sqrt{1 + L_j^2}\right) + (\max |b_j|) \frac{C|Z_r|^{\frac{1}{3}} + \max \sqrt{1 + L_j^2}}{1 - C|Z_r|^{\frac{1}{3}}} \right\} \int_Q |\nabla \chi_{U_r}|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4 Variation

Der Term in geschweiften Klammern strebt für $r \rightarrow 0$ gegen $(\max |b_j|) \max \sqrt{1 + L_j^2} < 1$. Für hinreichend kleines r erhalten wir also aus (4.5), (4.6) und (4.7):

$$\frac{d}{dr}|U_r| = \int_{\partial Z_r} \chi_{U_r} ds dz \geq \epsilon_0 \int_Q |\partial \chi_{U_r}| dx dz$$

für ein $\epsilon_0 > 0$ und damit weiter als Folgerung aus der Poincareschen Ungleichung

$$\frac{d}{dr}|U_r| \geq \epsilon_1 |U_r|^{\frac{2}{3}} \tag{4.8}$$

für ein $\epsilon_1 > 0$ für fast alle r in einem Intervall $]0; r_1[$. Für $|U_r| > 0$ für alle $r > 0$ können wir (4.8) integrieren und erhalten die Aussage.

q.e.d

Gäbe es nun einen Punkt $p_0 \in \Sigma$ und eine Folge $x_i \in \Omega$ mit $x_i \rightarrow p_0$ und $u(x_i) \rightarrow \infty$, so wäre für alle t und alle r $|U_r(p_0, t)| > 0$. Wähle nun irgendein τ fest, dann gibt es nach Lemma 8 Konstanten $C, R > 0$ mit $|U_R(p_0, t)| > CR^3$ für alle $t > \tau$. Folglich müßte \mathbf{P} im Widerspruch zu Lemma 7 nicht leer sein. Durch Betrachtung des Funktionals \mathcal{F} für $v = -u$ und $\hat{h}(v) = -h(-u)$ finden wir analog, daß eine Folge gegen $-\infty$ $\mathbf{N} \neq \emptyset$ als Konsequenz hätte. Damit hätten wir unsere Beweisskizze von Satz 3 abgeschlossen.

Satz 3 ermöglicht es eine Aussage über Existenz oder Nichtexistenz von Lösungen des CMC-Problems in zweidimensionalen Gittern zu treffen, wenn der Rand der Elementarzelle eine gewisse Regelmäßigkeit (Existenz einer zulässigen Partition der Eins entsprechend Definition 3) aufweist und Der Kontaktwinkel in einem vom Rand abhängigen Parameterbereich liegt. Diese Annahmen an den Rand und an den Kontaktwinkel sind jedoch nicht praxisrelevant, da in der praktischen Anwendungen nur Randformen zum Einsatz kommen, für die die Voraussetzung erfüllt ist, und Kontaktwinkel, die die Voraussetzung verletzen, nicht erreichbar sind. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, folgt aus der Existenz einer Menge Ω_0 , welche das Funktional $\Phi[\Omega^*]$ minimiert, die Nichtexistenz der CMC-Fläche und umgekehrt. Die Konstruktion dieser minimierenden Menge ist ein einfaches geometrisches Problem und somit ein praxistaugliches Entscheidungskriterium für Existenz oder Nichtexistenz.

4.3 Extremalprinzip am Rand

In Abschnitt 4.1 haben wir gezeigt, daß eine CMC-Fläche für $H < 0$ keine inneren Maxima besitzen kann. Wenn die CMC-Fläche nun eine Säule schneidet, so ist nicht zu erwarten, daß die Schnittkurve in einer Ebene parallel zur Grundfläche verläuft. Diese Kurve nimmt also Minima und Maxima bezüglich der z -Richtung an. Aufgrund der Spiegelsymmetrie ist es natürlich unmittelbar einsichtig, daß solche Extrema dort auftreten, wo die Symmetrieebenen die Säulen schneiden. Dort wo die Randkurve an ein Maximum annimmt, beginnt in der CMC-Fläche, was wir in Analogie zu einem Gebirge einen Kamm nennen möchten.

Definition 4 Sei C eine Kurve auf einer CMC-Fläche, welche als Graph einer Funktion $u : (x_1, x_2) \mapsto u(x_1, x_2)$ darstellbar sei. Sei für jeden Punkt $P \in C$ die Kurve $S(P)$ diejenige Kurve auf der CMC-Fläche, welche C in P rechtwinklig schneide. Gelte für jedes $P \in C$, daß $S(P)$ in P ein Maximum habe. Dann nennen wir C einen **Kamm** der CMC-Fläche. Entsprechend nennen wir eine Kurve C' ein **Tal**, wenn für jedes $P' \in C'$ $S(P')$ ein Minimum in P' annimmt.

Die Projektion eines Kamms auf die Grundfläche heiße **Kammlinie**, diejenige eines Tales **Tallinie**.

Wegen der Symmetrie des Problems ist eine Symmetrielinie stets eine Tal- oder Kammlinie. Wir interessieren uns nun für die Umkehrung: Ist die Kammlinie einer CMC-Fläche mit $H < 0$ stets eine Symmetrielinie?

Zunächst führen wir lokal ein auf diese Fragestellung hin abgestimmtes Koordinatensystem ein. Der Kamm sei durch eine Kurve $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben; man sieht dann unmittelbar, daß die Projektion von K auf die $x_1 - x_2$ -Ebene, $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, eine Integralkurve des durch ∇u gegebenen Vektorfeldes ist. Sei t nun der Flußparameter der Integralkurve, d. h.:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} k = \nabla|_{(x_1, x_2)=k(t_0)} u.$$

Um P können wir dann im \mathbb{R}^2 lokal Koordinaten y_1 und y_2 einführen: Der Punkt $P(y_1, y_2)$ sei derjenige Punkt, der den Abstand y_2 von k hat und für welchen der Fußpunkt des Lotes auf k der Punkt $k(t = x_1)$ sei. Dabei wählen wir das Vorzeichen von y_2 so, daß, wenn man k in positiver x_1 -Richtung durchläuft, positive y_2 -Werte links liegen. Nach dieser Definition ist der Einheitsvektor in y_2 -Richtung offenbar in jedem Punkt $P(y_1, y_2)$:

$$e_{y_2} = \frac{1}{\sqrt{u_{,1}^2(k(y_1)) + u_{,2}^2(k(y_1))}} \begin{pmatrix} -u_{,2}(k(y_1)) \\ u_{,1}(k(y_1)) \end{pmatrix}$$

und die partielle Ableitung in y_2 -Richtung also:

$$\begin{aligned} \partial_{y_2} &= e_{y_2} \cdot \nabla|_{P(y_1, y_2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_{,1}^2(k(y_1)) + u_{,2}^2(k(y_1))}} \begin{pmatrix} -u_{,2}(k(y_1)) \\ u_{,1}(k(y_1)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \Big|_{(x_1, x_2)=P(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

4 Variation

Um ∂_{y_1} in einem Punkt $P(y_1, y_2)$ zu berechnen, wenden wir die Kettenregel auf eine beliebige Funktion $f(y_1, y_2)$ an. Wir bezeichnen hierzu mit $x_i(y_1, y_2)$ die x_i -Koordinate von $P(y_1, y_2)$ und mit $x_i^k(t)$ die x_i -Koordinate von $P(y_1, 0)$. Es ist dann:

$$\begin{aligned} x_1(y_1, y_2) &= x_1^k(y_1) - y_2 \frac{u_{,2}(k(y_1))}{\sqrt{u_{,1}^2(k(y_1)) + u_{,2}^2(k(y_1))}} \\ x_2(y_1, y_2) &= x_2^k(y_1) + y_2 \frac{u_{,1}(k(y_1))}{\sqrt{u_{,1}^2(k(y_1)) + u_{,2}^2(k(y_1))}}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\partial_{y_1} f = f_{,1}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \frac{\partial x_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} + f_{,2}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \frac{\partial x_2(y_1, y_2)}{\partial y_1}.$$

Nach Konstruktion ist

$$\frac{\partial x_1^k}{\partial y_1}(y_1) = u_{,1}(k(y_1))$$

und

$$\frac{\partial x_2^k}{\partial y_1}(y_1) = u_{,2}(k(y_1));$$

damit folgt

$$\begin{aligned} \partial_{y_1} f &= f_{,1}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))(1 - y_2 \kappa) u_{,1}(k(y_1)) \\ &\quad + f_{,2}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))(1 - y_2 \kappa) u_{,2}(k(y_1)) \end{aligned}$$

mit

$$\kappa = \frac{u_{,12}(u_{,1}^2 - u_{,2}^2) + u_{,1}u_{,2}(u_{,22} - u_{,11})}{(u_{,1}^2 + u_{,2}^2)^{\frac{3}{2}}} \Bigg|_{(x_1, x_2)=k(y_1)},$$

welches wir als Krümmung der Kurve k im Punkt $k(y_1)$ deuten können. Zusammengefaßt ist also in diesem Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \partial_{y_1} &= (1 - y_2 \kappa) \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1, x_2)=k(y_1)} \cdot \nabla|_{x_1=x_1(y_1, y_2), x_2=x_2(y_1, y_2)} \\ \partial_{y_2} &= \left[\frac{1}{\sqrt{u_{,1}^2 + u_{,2}^2}} \begin{pmatrix} -u_{,2} \\ u_{,1} \end{pmatrix} \right] \Big|_{(x_1, x_2)=k(y_1)} \cdot \nabla|_{x_1=x_1(y_1, y_2), x_2=x_2(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

Durch Nachrechnen findet man, daß der Kommutator

$$[\partial_{y_1}, \partial_{y_2}] = \partial_{y_1} \partial_{y_2} - \partial_{y_2} \partial_{y_1} = 0$$

4 Variation

der beiden Operatoren verschwindet.

Wir berechnen die erste Fundamentalform $g_{\alpha\beta}$, den Normalenvektor² n und die zweite Fundamentalform $b_{\alpha\beta}$ in diesen Koordinaten; zur Vereinfachung der Schreibweise vereinbaren wir die Konvention, daß u und seine Ableitungen im Punkt $P(y_1, 0) = k(y_1)$ auszuwerten sei, wenn es ein $\hat{\cdot}$ trägt, ansonsten aber im Punkt $P(y_1, y_2)$ ³

$$g_{y_1 y_1} = (1 - y_2 \kappa)^2 [\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + (\hat{u}_{,1} u_{,1} + \hat{u}_{,2} u_{,2})^2] \quad (4.9)$$

$$g_{y_1 y_2} = \frac{1 - y_2 \kappa}{\sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2}} (\hat{u}_{,1} u_{,1} + \hat{u}_{,2} u_{,2}) (\hat{u}_{,1} u_{,2} - u_{,1} \hat{u}_{,2}) \quad (4.10)$$

$$g_{y_2 y_2} = \frac{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + (\hat{u}_{,1} u_{,2} - u_{,1} \hat{u}_{,2})^2}{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2} \quad (4.11)$$

$$g = (1 - y_2 \kappa)^2 (1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2) \quad (4.12)$$

$$g^{y_1 y_1} = \frac{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + (\hat{u}_{,1} u_{,2} - u_{,1} \hat{u}_{,2})^2}{(1 - y_2 \kappa)^2 (1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2)^2} \quad (4.13)$$

$$g^{y_1 y_2} = -\frac{(\hat{u}_{,1} u_{,1} + \hat{u}_{,2} u_{,2}) (\hat{u}_{,1} u_{,2} - u_{,1} \hat{u}_{,2})}{(1 - y_2 \kappa) (1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.14)$$

$$g^{y_2 y_2} = \frac{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + (\hat{u}_{,1} u_{,1} + \hat{u}_{,2} u_{,2})^2}{(1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2) (\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2)} \quad (4.15)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2}} \begin{pmatrix} -u_{,1} \\ -u_{,2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$b_{y_1 y_1} = (1 - y_2 \kappa)^2 \frac{\hat{u}_{,1}^2 u_{,11} + 2\hat{u}_{,1} \hat{u}_{,2} u_{,12} + \hat{u}_{,2}^2 u_{,22}}{\sqrt{1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2}} \quad (4.17)$$

$$b_{y_1 y_2} = \frac{(1 - y_2 \kappa) (\hat{u}_{,1} \hat{u}_{,2} (u_{,22} - u_{,11}) + u_{,12} (\hat{u}_1^2 - \hat{u}_2^2))}{\sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2} \sqrt{1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2}} \quad (4.18)$$

$$b_{y_2 y_2} = \frac{\hat{u}_{,2}^2 u_{,11} - 2\hat{u}_{,1} \hat{u}_{,2} u_{,12} + \hat{u}_{,1}^2 u_{,22}}{(\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2) \sqrt{1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2}} \quad (4.19)$$

Wir können folgendes Lemma aufstellen:

Lemma 9 *Sei $H < 0$. Der Schnittpunkt eines Kamms mit der Schnittkurve von CMC-Fläche und einer Symmetrieebene ist kein Nabelpunkt, wenn besagte Schnittkurve ein Tal ist (vgl. Abb. (4.1)).*

Beweis: In einem Nabelpunkt gilt $g_{\alpha\beta} = \lambda b_{\alpha\beta}$ für eine Konstante λ . Möge nun eine Schnittkurve von Symmetrieebene und CMC-Fläche, welche ein Tal der CMC-Fläche

²Wir nehmen an, daß die Umgebung der Kurve k so klein ist, daß $1 - y_2 k > 0$ gilt.

³In dieser Notation ist dann $\kappa = \frac{\hat{u}_{,12} (\hat{u}_1^2 - \hat{u}_2^2) + \hat{u}_{,1} \hat{u}_{,2} (\hat{u}_{,22} - \hat{u}_{,11})}{(\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2)^{\frac{3}{2}}}$.

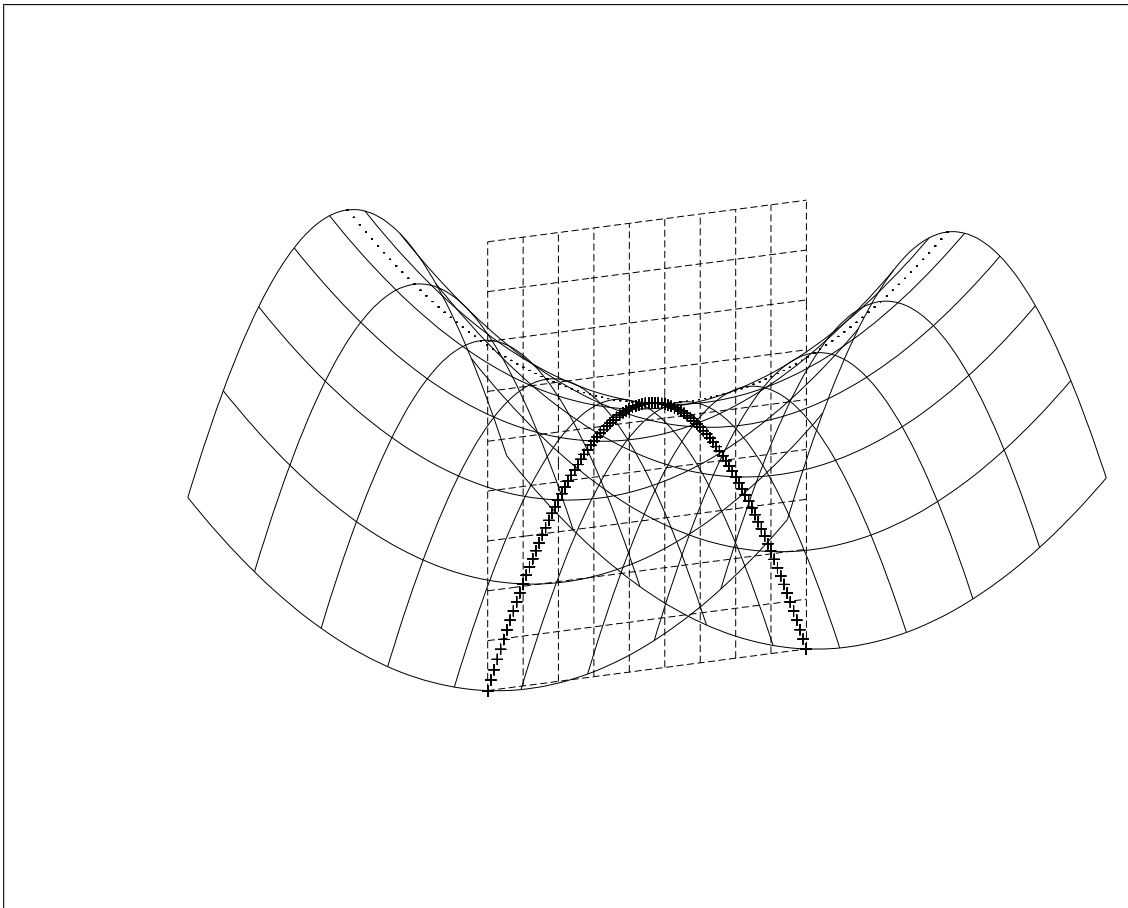


Abbildung 4.1: Ein Kamm (gepunktet) schneidet eine Symmetrieebene (gestrichelt); die Schnittkurve (Kreuze) von Symmetrieebene und CMC-Fläche ist ein Tal.

4 Variation

ist, von einem Kamm geschnitten werden. Wir wählen die x_1 -Achse so, daß sie parallel zur Tallinie verläuft. Es ist dann entlang der Tallinie nach Konstruktion:

$$u_{,2} = 0, \quad u_{,22} \geq 0, \quad u_{,12} = 0.$$

An der Schnittstelle mit dem Kamm, ist die zweite Ableitung $u_{y_2y_2}$ senkrecht zur Kamm-
linie kleiner gleich null; zugleich ist sie eine Linearkombination der $u_{\alpha\beta}$:

$$u_{y_2y_2} = a^2u_{,11} + 2abu_{,12} + b^2u_{,22}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Somit folgt

$$u_{,11} \leq 0.$$

Vermöge

$$2H = -\frac{(1+u_{,2}^2)u_{,11} - 2u_{,1}u_{,2}u_{,12} + (1+u_{,1}^2)u_{,22}}{(1+u_{,1}^2+u_{,2}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

können für $H \neq 0$ jedoch $u_{,11}$ und $u_{,22}$ im betrachteten Fall nicht beide gleichzeitig Null sein. Wenden wir die Formeln (4.17) und (4.19) auf die Tallinie an (mit $y_1 = x_1$ und $y_2 = x_2$)), so erhalten wir

$$b_{11} = \frac{u_{,1}^2 u_{,11}}{\sqrt{1+u_{,1}^2}}$$

$$b_{22} = \frac{u_{,1}^2 u_{,22}}{\sqrt{1+u_{,1}^2}}.$$

Folglich ist

$$b_{11} \leq 0, \quad b_{22} \geq 0$$

mit der Einschränkung, daß nicht beide gleichzeitig Null sind. Somit kann es keine reelle Zahl λ mit

$$b_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$$

geben, da die Diagonalelemente des metrischen Tensors beide positiv sind.

q.e.d

Wir betrachten zwei Punkte P_1 und P_2 auf einem Kamm einer CMC-Fläche ($H > 0$). Die x_1 -Achse richten wir parallel zu P_1P_2 aus. Gesucht ist der Verlauf des Kamms R_1 zwischen den beiden Punkten.

Es sei R_1^* die Projektion des Kamms auf die Grundfläche, P_i^* die Projektion der beiden Punkte P_i . Wir legen auf der Grundfläche einen Halbkreis R_2^* von P_1^* nach P_2^* ; das Urbild von R_2^* auf der CMC-Fläche sei R_2 . Wir betrachten die Werte von z und des Cosinus β des Kontaktwinkels entlang R_2 als gegeben. F sei die CMC-Fläche zwischen R_1 und R_2 , G ihre Projektion auf die Grundfläche.

4 Variation

Es seien x_1, x_2, z die Koordinaten des dreidimensionalen Raumes⁴, es seien y_1, y_2 die Koordinaten der Projektion auf die Grundfläche. Es sei σ ein Parameter von R_1^* . Das zu minimierende Energiefunktional lautet dann:

$$I = \int_G f(x_1, x_2, z(x_1, x_2), z_{,1}(x_1, x_2), z_{,2}(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 + \int_{R_1^*} \tilde{\beta}(\sigma) d\sigma + \int_{R_2^*} \beta(s) ds$$

Auf dem Kamm ist dabei der Cosinus des Kontaktwinkels $\tilde{\beta} \equiv 0$. Unsere Funktion f ist

$$f = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} - 2Hz$$

Entsprechend dem Formalismus von [6], VI2§5, nehmen wir an, daß R_1 durch

$$x_1 = x_1^*(y_1, y_2), x_2 = x_2^*(y_1, y_2), z = z^*(y_1, y_2)$$

mit y_j wiederum als Funktionen von σ gegeben ist⁵ und setzt die Abkürzungen (wie üblich $_{,t} = \frac{\partial}{\partial t}$)

$$\begin{aligned} a_{\rho\lambda} &= f\delta_{\rho\lambda} - f_{,z,\rho} z_{,\lambda} \\ \mathfrak{L}_{x_\rho} &= \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial g}{\partial x_{\rho,\sigma}^*} \right) - g_{x_\rho^*} \\ \mathfrak{L}_z(g) &= \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial g}{\partial z_{,\sigma}^*} \right) - g_{z^*} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} x_{\rho,\sigma}^* &= \frac{\partial x_\rho}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial \sigma} \\ z_{,\sigma}^* &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_\rho} \right)_{x_\rho=x_\rho^*} \frac{\partial x_\rho}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

Funk fordert dann als zusätzliche Euler–Lagrange–Gleichung entlang von R_1^*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{x_\rho}(g) \frac{\partial x_\rho^*}{\partial y_\mu} + \mathfrak{L}_z(g) \frac{\partial z^*}{\partial y_\mu} + \left\{ a_{\rho 1} \frac{x_\rho^*}{\partial y_\mu} + f_{,z,1} \frac{\partial z^*}{\partial y_\mu} \right\} \frac{\partial x_2^*}{\partial \sigma} \\ - \left\{ a_{\rho 2} \frac{x_\rho^*}{\partial y_\mu} + f_{,z,2} \frac{\partial z^*}{\partial y_\mu} \right\} \frac{\partial x_1^*}{\partial \sigma} = 0. \end{aligned}$$

Vermöge $g \equiv 0$ ist in unserem Fall:

$$\mathfrak{L}_{x_1}(g) = \mathfrak{L}_{x_2}(g) = \mathfrak{L}_z(g) = 0$$

⁴Wir folgen hier der Notation von [6], die sich in der moderneren Literatur nicht hat durchsetzen können.

⁵offenbar ist $z(x_i^*(y_j(\sigma))) = z^*(y_j(\sigma))$

4 Variation

Die Kammlinie ist eine Flußlinie des durch ∇z gegebenen Feldes; wir wählen σ als Flußparameter entlang der Kammlinie, wir setzen $y_1 = \sigma$ und wählen als u_2 den Abstand zu R_1^* . Nach unserer Koordinaten-Wahl ist

$$\begin{aligned}x_{1,\sigma}^* &= z_{,1} \\x_{2,\sigma}^* &= z_{,2} \\z_{,\sigma}^* &= z_{,1}^2 + z_{,2}^2\end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $y_2 \equiv 0$ und x_ρ^* damit nur noch eine Funktion von $y_1 = \sigma$. Weiter ist

$$\begin{aligned}f_{,z_1} &= \frac{z_{,1}}{\sqrt{1 + z_{,1}^2 + z_{,2}^2}} \\f_{,z_2} &= \frac{z_{,2}}{\sqrt{1 + z_{,1}^2 + z_{,2}^2}} \\a_{11} &= f - f_{,z_1} z_{,1} \\&= -2Hz + \sqrt{1 + z_{,1}^2 + z_{,2}^2} - \frac{z_{,1}^2}{\sqrt{1 + z_{,1}^2 + z_{,2}^2}} \\&= -2Hz + \frac{1 + z_{,2}^2}{\sqrt{1 + z_{,1}^2 + z_{,2}^2}} \\a_{12} &= -f_{,z_1} z_{,2} = -\frac{z_{,1} z_{,2}}{\sqrt{1 + z_{,1}^2 + z_{,2}^2}} \\a_{21} &= a_{12} \\a_{22} &= f - f_{,z_2} z_{,2} = -2Hz + \frac{1 + z_{,1}^2}{\sqrt{1 + z_{,1}^2 + z_{,2}^2}}\end{aligned}$$

Die Euler–Lagrangesche Gleichung auf R_1^* lautet (' als Ableitung nach σ):

$$\{a_{11}x_1^{*'} + a_{21}x_2^{*'} + f_{,z_1}z^{*'}\} \frac{\partial x_2^*}{\partial \sigma} - \{a_{12}x_1^{*'} + a_{22}x_2^{*'} + f_{,z_2}z^{*'}\} \frac{\partial x_1^*}{\partial \sigma} = 0$$

oder ausgeschrieben:

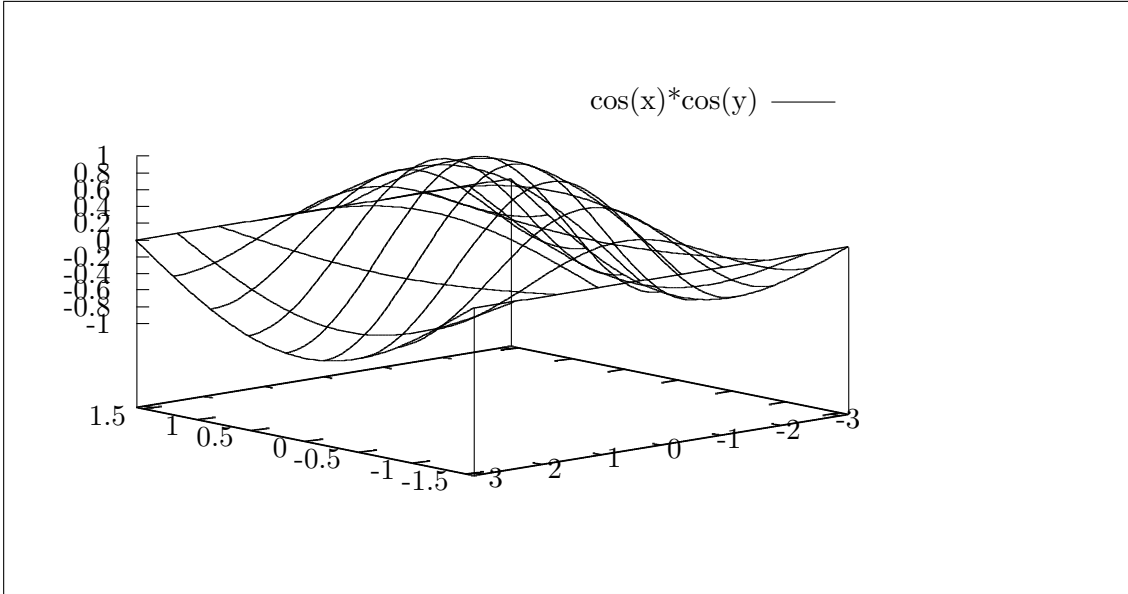


Abbildung 4.2: Die Funktion $\cos x \cos y$: Hier schlägt die Kammlinie durch die Punkte $(0; 0)$ und $(0; \pi/2)$ im Punkt $(0; \pi/2)$ in eine Tallinie um.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(-2Hz + \frac{1 + z_{,2}^2}{\sqrt{1 + z_{x_1}^2 + z_{x_2}^2}} \right) z_{,1} - \frac{z_{,1}z_{,2}}{\sqrt{1 + z_{x_1}^2 + z_{x_2}^2}} z_{,2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{z_{,1}}{\sqrt{1 + z_{x_1}^2 + z_{x_2}^2}} (z_{,1}^2 + z_{,2}^2) \right\} x_2^{*'} \\
 & - \left\{ -\frac{z_{,1}z_{,2}}{\sqrt{1 + z_{x_1}^2 + z_{x_2}^2}} z_{,1} + \left(-2Hz + \frac{1 + z_{,1}^2}{\sqrt{1 + z_{x_1}^2 + z_{x_2}^2}} \right) z_{,2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{z_{,2}}{\sqrt{1 + z_{x_1}^2 + z_{x_2}^2}} (z_{,1}^2 + z_{,2}^2) \right\} x_1^{*'} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $x_2^{*'} = 0$ entlang des Kammlinie $z_{,2} = 0$ impliziert, so erkennt man, daß $x_2^{*'} = 0$ die Euler-Lagrange-Gleichung löst.

Wir haben damit gezeigt:

Lemma 10 *Auf einer CMC-Fläche mit $H < 0$ gilt: Eine Kammlinie ist eine Gerade.*

Es könnte nun freilich sein, daß sich ein Kamm in ein Tal umwandelt (vgl. Abb. 4.2). Dies ist nach folgendem Korollar ausgeschlossen:

Korollar 3 *Auf einer CMC-Fläche mit $H < 0$ gilt: Ein Kamm kann nicht als Tal fortgesetzt werden.*

Beweis: Gäbe es einen Kamm, der sich als Tal fortsetzt, so müßte es jedenfalls einen Punkt P auf der CMC-Fläche geben, wo der Kamm in das Tal übergeht. P' sei die

4 Variation

Projektion von P auf die Grundfläche. Wir wählen ein Koordinatensystem, so daß P' der Ursprung und die x -Achse parallel zur Kammlinie ist. In P' gilt dann:

$$u_y(P') = u_{yy}(P') = u_{xy}(P') = 0.$$

Wegen

$$-2H = \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

muß also $u_{xx} > 0$ sein. Nachrechnen der zweiten Fundamentalform liefert, daß P ein parabolischer Punkt ist. Man kann also eine Umgebung von P wählen, in der die CMC-Fläche nicht ihre Tangentialebene durch P durchstößt. Wegen $u_{xx} > 0$ verläuft die CMC-Fläche oberhalb der Tangentialebene. Wir führen nun ein zweites Koordinatensystem (ξ, η, ζ) mit Ursprung P ein. Es sei $\eta = y$ und ζ der Abstand von der Tangentialebene durch P ; die ξ -Achse sei durch die Gerade festgelegt, die durch P und den Schnittpunkt von Tangentialebene und x -Achse verläuft. In diesen Koordinaten ist

$$u_\xi(P) = 0.$$

Also muß ein weiteres Tal in ζ -Richtung verlaufen. Zwischen diesem Tal und der Fortsetzung des Kamms als Tal muß ein weiterer Kamm liegen, der den ersten Kamm unter einem Winkel ungleich π schneidet. Dies ist aber im Widerspruch zu Lemma 10.

q.e.d

Wir können nun eine Antwort auf die Frage geben, die wir uns zu Beginn dieses Abschnitts gestellt haben:

Satz 11 *Betrachte eine Elementarzelle für $H < 0$. Weise $\hat{\Sigma}$ außer an den Rändern keine Stelle auf, wo die Tangente parallel zu einer Symmetrielinie ist, dann ist jeder Kammlinie, die die Säule schneidet, eine Symmetrielinie.*

Beweis: Angenommen der Kamm K verlaufe im Inneren der Elementarzelle. Die Projektion von K auf die $x - y$ -Ebene sei k . Am Schnittpunkt S von k mit $\hat{\Sigma}$, nimmt $u|_{\hat{\Sigma}}$ ein Maximum an, also ist an dieser Stelle u abgeleitet tangential zu $\hat{\Sigma}$ Null. Dies bedeutet aber, daß die Projektion des Kamms auf die $x - y$ -Ebene, k , $\hat{\Sigma}$ in S senkrecht schneidet. Ist die Tangente von $\hat{\Sigma}$ in S nun nicht parallel zu einer Symmetrielinie, so muß k nach Lemma 10 die Symmetrielinie in einem Punkt S' notwendigerweise unter einem Winkel ungleich $\pi/2$ schneiden. Da im Kamm die CMC-Fläche die Ebene senkrecht zur $x - y$ -Ebene durch k unter dem konstanten Winkel $\pi/2$ schneidet, ist der Kamm eine Krümmungslinie (vgl. z. B. [11], Theorem 88.4); die Richtung von k ist also Hauptkrümmungsrichtung in S^* . Gleiches gilt natürlich für die Symmetrielinie. Da die zwei Hauptkrümmungsrichtungen sich nicht senkrecht schneiden, muß S^* ein Nabelpunkt sein. Dies steht aber im Widerspruch zu Lemma 9.

q.e.d

Weist nun $\hat{\Sigma}$ wenigstens einen Punkt T auf, der eine Tangente parallel zu einer Symmetrielinie hat, so ist obiger Beweis natürlich nicht unmittelbar anwendbar. Wir können jedoch $\hat{\Sigma}$ in eine (glatte) Familie von Rändern einbetten, deren einziger Vertreter mit einer Tangente parallel zu einer Symmetrielinie $\hat{\Sigma}$ selbst ist. Aus Stetigkeitsgründen kann $u|_{\hat{\Sigma}}$ in T kein Maximum haben, da dies bei beliebig kleiner Änderung des Familienparameters „aus der Existenz springen“ müßte. Entsprechend können wir Ecken in $\hat{\Sigma}$ als den Grenzfall abgerundeter Ecken deuten. Wir können also den Satz aufstellen:

Satz 12 *Betrachte eine Elementarzelle mit $H < 0$. Jede Kammlinie, die die Säule schneidet, ist eine Symmetrielinie.*

Da $u|_{\hat{\Sigma}}$ dort, wo sich Symmetrie- und Kammlinie schneiden, ein Maximum annimmt, können wir die beiden letzten Sätze als Maximalprinzip am Rand bezeichnen. Es ist jedoch ein Unterschied zum Extremalprinzip der CMC-Fläche zu beachten: Setzt man mehrere Elementarzellen zusammen, so entstehen entlang der Säule durchaus Maxima, während die CMC-Fläche nach wie vor keine Maxima annimmt.

Als eine weitere Schlußfolgerung aus Lemma 9 und dem Maximalprinzip können wir die Kämme in der Elementarzelle, identifizieren. In einer hexagonalen Elementarzelle (s. Abb. 3.4) schneiden sich zwei Symmetrielinien in P_m nicht rechtwinklig und rechtwinklig in P_M . Eine der beiden von der Säule ausgehenden Linien muß die Projektion eines Kammes sein. Entspreche die Linie $P_m P_M$ ihrerseits einem Kamm, so wäre im Schnittpunkt mit dem anderen Kamm ein Maximum. Also verläuft über $P_M P_m$ ein Tal. In P_m kann es wegen des fehlenden rechten Winkels keinen Schnitt mit der Projektion eines Kammes geben. Also liegt in P_m ein Minimum der CMC-Fläche⁶, während die Symmetrielinie von der Säule zu P_M hin der Kamm sein muß.

Für das quadratische Gitter sei der Schnittpunkt am rechten Winkel wieder P_M , der andere Schnittpunkt P_m (s. Abb. 3.6a). Aus den gleichen Überlegungen heraus finden wir das Minimum wieder in P_m , den Kamm wieder von der Säule nach P_M . Im rechtwinkligen Gitter sei P_m der säulenfernste Eckpunkt, die beiden anderen seien P_M und P'_M ; obige Überlegungen sind nun nicht unmittelbar anwendbar. Setzen wir aber zunächst zwei quadratische Elementarzellen zu einer rechteckigen Elementarzelle mit $a = b$ zusammen, so entspricht der Punkt P_m des quadratischen Falles dem Punkt P_m des Rechteck-Falles. Aus Stetigkeitsgründen muß nun also, wenn wir vom Fall $a = b$ abgehen, das Minimum in P_m verbleiben, während die Kämme von der Säule in Richtung P_M und P'_M ausgehen.

⁶Intuitiv überrascht uns dies nicht, da P_m der säulenfernste Punkt ist

4.4 Ausblick Kegel

Wie schon erwähnt wurde, ist allein schon auf Grund des rigiden Zusammenhangs

$$2H\Omega = \hat{\Sigma}\beta$$

oder allgemeiner — wenn man β über $\hat{\Sigma}$ als variabel zuläßt —

$$2H\Omega = \int_{\hat{\Sigma}} \beta ds$$

zwischen mittlerer Krümmung, Geometrie der Elementarzelle und Cosinus des Kontaktwinkels kaum zu erwarten, daß ein Feld von Säulen eine Luftschicht hält, die gegen mechanische Störungen und Druckschwankungen stabil ist. Eine Verbesserung der Konfiguration bestünde einmal darin, statt starrer Säulen bewegliche Härchen zu verwenden, die auf Druckschwankungen dynamisch reagieren können. Beobachtungen an *Salvinia* und anderen biologischen Systemen zeigen stets eine rege Bewegung der Härchen; die Möglichkeit einer dynamischen Reaktion auf Störungen scheint also tatsächlich ein Schlüssel zur Erzeugung stabiler Luftschichten zu sein. Daß Oberflächenelemente beweglich sein sollten, wurde und wird in bionischen Artikeln und auf Tagungen durchaus erwähnt; dieser Umstand wird aber in der empirischen Forschung nicht berücksichtigt. Ein Grund hierfür mögen technische Probleme bei der Herstellung beweglicher Teile auf kleinen Skalen und deren recht hohe Verschleißrate sein; vom ingenieurwissenschaftlichen Standpunkt aus, ist dieser Ansatz daher wenig wünschenswert.

Ein alternativer Ansatz wäre die Verwendung von Kegeln anstatt von Säulen. Wenn man die Schnittkurve zwischen CMC–Fläche und Kegel auf die Grundfläche projiziert, erhält man in Polarkoordinaten eine Kurve, die durch eine Funktion $r(\phi)$ beschrieben wird, oder in kartesischen Koordinaten

$$\phi \mapsto \begin{pmatrix} r(\phi) \cos \phi \\ r(\phi) \sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Der Kontaktwinkel zwischen CMC–Fläche und Kegelmantel ist konstant:

$$\left. \frac{h - Br(\phi)u_x \cos \phi - Br(\phi)u_y \sin \phi}{\sqrt{B^2 r^2(\phi) + h^2} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right|_{(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi)} = \beta = \cos \gamma = \text{const.}$$

wobei h die Höhe und B der Grundradius des Kegels ist; zugleich kann man jedem Punkt dieser Kurve den Winkel $\tilde{\gamma}$ zwischen Normalenvektor der CMC–Fläche und Normalenvektor der Kurve zuordnen:

$$\begin{aligned} & \cos \tilde{\gamma} \Big|_{(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi)} \\ = & \frac{u_x \Big|_{(r \cos \phi, r \sin \phi)} (r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi) + u_y \Big|_{(r \cos \phi, r \sin \phi)} (r(\phi) \sin \phi - r'(\phi) \cos \phi)}{\sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)} \sqrt{1 + u_x^2 \Big|_{(r \cos \phi, r \sin \phi)} + u_y^2 \Big|_{(r \cos \phi, r \sin \phi)}}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

4 Variation

Man ersieht hieraus, daß diese CMC–Fläche zugleich Lösung für ein äquivalentes Problem einer Säule ist, für die $\hat{\Sigma}$ durch $r(\phi)$ gegeben ist, und entlang der der Kontaktwinkel durch $\tilde{\gamma}(s)$ gegeben ist. Es gilt nach wie vor der Zusammenhang

$$2H\Omega = \int_{\hat{\Sigma}} \cos \tilde{\gamma}(s) ds;$$

jedoch ändern sich nun $\hat{\Sigma}$ und damit Ω sowie $\tilde{\gamma}$ dynamisch, wenn sich die CMC–Fläche entlang des Kegels bewegt. Die Herausforderung liegt hier nun darin, daß $r(\phi)$ und $\tilde{\gamma}$ nicht a priori bekannt sind. Betrachtet man nochmals den Beweis von Satz 12, so sieht man, daß von der konkreten Gestalt der Säule — insbesondere davon, daß sie einen geraden Mantel besitzt — kein Gebrauch gemacht wurde; der Satz hält also auch für den Kegel. Je höher aber die CMC–Fläche am Kegel hoch wandert, desto mehr nähert sich die herunter projizierte Kurve dem Ursprung. Für $H < 0$ übersetzt sich das Extremalprinzip am Rand also in die Aussage, daß $r(\phi)$ in einer Elementarzelle kein inneres Minimum einnimmt. Dies ermöglicht, die möglichen Formen von $\hat{\Sigma}$ einzugrenzen (vgl. Abb. 4.3).

Es ist damit ein mächtiges Werkzeug gegeben, um die Existenzfrage auch für Kegel und weitere anspruchsvolle Oberflächenformen zu klären, denen in der Praxis eine größere Bedeutung zu kommt, als einfachen Säulen. Unter jenen Forschern, die das Problem bislang von der technisch–praktischen Seite bearbeitet haben, dürfte es wenig Hoffnung gegeben haben, je ein solches theoretisches Instrument zur Verfügung gestellt zu bekommen. Daß dies eine zu pessimistische Einschätzung theoretischer Erkenntnismöglichkeiten war, ist durch diese Arbeit hoffentlich gezeigt worden.

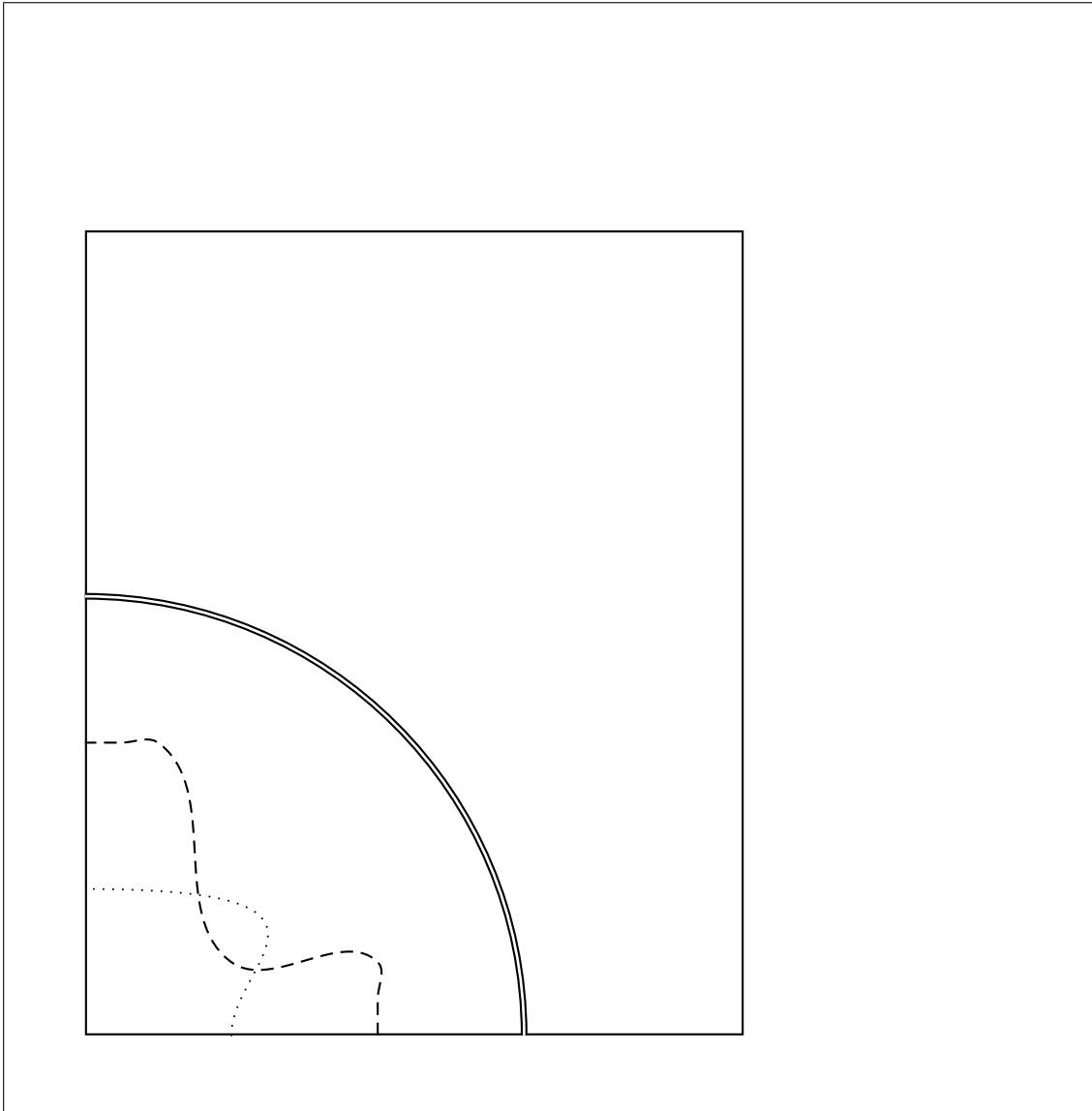


Abbildung 4.3: Projektion der Kontaktlinie zwischen Wasser–Luft–Grenzschicht und Kegel auf die Grundfläche
 gepunktet: mögliche Projektion (für $H < 0$)
 gestrichelt: unmögliche Projektion (für $H < 0$), da im Inneren Punkt (lokaler) größter Nähe zum Ursprung (entsprechend Maximum der CMC–Fläche)
 doppelte Linie: Rand der Grundfläche des Kegels

5 Perron

In diesem Kapitel soll ein Beweisverfahren, für die Existenz von CMC-Flächen mit vorgegeben Randwerten skizziert werden, das jedoch nicht zu Ende gebracht werden konnte. Doch soll das gesamte Verfahren, so weit es gediehen ist, hier wiedergegeben werden, in der Hoffnung, daß ein anderer die begonnene Arbeit zu vollenden mag. Das Verfahren ist in Kürze eine Übertragung der Perron-Methode von harmonischen Funktionen auf CMC-Flächen.

Perron gibt für das Problem einer harmonischen Funktion über einer gegebenen Fläche ein Verfahren an, daß mit Ober- und Unterlösungen arbeitet (vgl. z. B. [7]). Diese Funktionen sind Lösungen der Ungleichung $\Delta u \geq 0$ bzw. $\Delta u \leq 0$ statt der Gleichung $\Delta u = 0$. Er zeigt, daß die Mengen der Ober- und Unterlösungen nicht leer sind und diese Lösungen, die harmonische Lösung als Grenzfall enthalten. Da die Ober- und Unterlösungen ihrerseits nicht explizit konstruiert werden, ist dieses Verfahren freilich nicht als Ansatz einer numerischen Lösungsmethode zu mißverstehen.

Im folgenden wollen wir uns einige Gedanken zur Übertragung der Perronschen Methode auf unser Problem machen. Das Ziel einer vollständigen Übertragung ließ sich nicht erreichen, doch sind vor allem im ersten Abschnitt einige nützliche Sätze zu verzeichnen.

Statt des Δ -Operators betrachten wir also den CMC-Flächen-Operator L_H mit

$$L_H[u] \equiv 2H(1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2)^{\frac{3}{2}} + (1 + u_{,2}^2)u_{,11} - 2u_{,1}u_{,2}u_{,12} + (1 + u_{,1}^2)u_{,22}.$$

Die Lösungen von $L_H[u] = 0$ sind dabei gerade Graphen von CMC-Flächen mit mittlerer Krümmung H .

5.1 Unter- und Oberfunktionen

Genüge u der Ungleichung $L_H[u] > 0$ und sei $h_u(x_1, x_2)$ die mittlere Krümmung der durch u beschriebenen Fläche im Punkt (x_1, x_2) . Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} 2H(1 + u_{,1}^2 + u_{,2}^2)^{\frac{3}{2}} &> -(1 + u_{,2}^2)u_{,11} + 2u_{,1}u_{,2}u_{,12} - (1 + u_{,1}^2)u_{,22} \\ H &> h_u. \end{aligned}$$

Analog ist $H < h_u$ für $L_H[u] < 0$. Sei weiter $H > 0$ und $L_H[u] = 0$, $L_H[v] > 0$ und $L_H[w] < 0$. Und sei $u = v = w$ auf dem Rand Γ eines Gebietes G . Dann gilt, wie man sich anschaulich leicht klarmacht in G : $v > u > w$.

Definition 5 Sei $K \subset G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, die mit Rand ganz in G liegt. Wir definieren die Funktion

$$C_K^H[u]$$

als eine Funktion, die auf $G \setminus \overset{\circ}{K}$ mit u übereinstimmt¹ und über K eine CMC-Fläche der mittleren Krümmung H beschreibt.

Postulat 1 Für K klein genug gibt es zu vorgegebenen Randwerten auf jeder geschlossen Kurve L ganz in \bar{K} genau eine CMC-Fläche mit mittlerer Krümmung H .

Anmerkung: [16] garantiert, daß für

$$\kappa \geq 2|H|$$

mit κ als Krümmung des Randes bezüglich der einwärtsgerichteten Normalen Lösungen von $L_H[u] = 0$ auf Ω mit beliebigen stetigen Randwerten existieren, in unserem Fall also für einen Radius

$$R \leq \frac{1}{2|H|}.$$

Weiterhin beweist Serrin in [17], daß diese Lösung eindeutig ist, falls die Randwerte C^2 sind.

Korollar 4 Für hinreichend kleine K (im Sinne von Postulat 1) ist C_K^H ein eindeutiger Operator.

Für einige Sätze, die im Zusammenhang mit Postulat 1 interessant sein mögen und ein Kriterium liefern könnten, wann es erfüllt ist, sei hier auf [14], besonders dessen Theoreme 2', 7 und 8 hingewiesen.

Im folgenden sei für alle Kreise K stets angenommen, daß sie hinreichend klein im Sinne von Postulat 1 sind, sofern nichts anderes erklärt wird.

Definition 6 Wir nennen eine Funktion v **sub- H -CMC**, falls für alle $K \subset G$ gilt:

$$v \leq C_K^H[v].$$

Analog definieren wir **super- H -CMC-Funktionen**.

Die intuitive Annahme, daß aus v sub- H -CMC $L_H[v] \leq 0$ folgt, ist falsch: Sei $H > 0$, dann ist $u = \text{const}$ sub- H -CMC, aber $L_H[u] = 2H > 0$.

Satz 13 Sei v sub- H -CMC und w super- H -CMC, sei G ein Gebiet; sei weiterhin $v \leq w$ auf ∂G . Dann gilt in ganz G : $v \leq w$.

Beweis: Angenommen es gebe $G' \subseteq G$ mit $v = w$ auf $\partial G'$ und $v > w$ in $\overset{\circ}{G'}$. Falls G' klein genug im Sinne von Postulat 1 ist, so ist $C_{G'}^H[v] = C_{G'}^H[w]$ auf G' . Dies ist im Widerspruch zur Definition von sub- H -CMC und super- H -CMC. Also muß G' zu groß

¹mit $\overset{\circ}{A}$ ist das Innere der Menge A gemeint

im Sinne von Postulat 1 sein. Die Funktion $v - w$ muß im Innern G' nach Konstruktion ein Maximum annehmen; es sei P der Punkt des Maximums, also gilt für alle $Q \in G'$:

$$v(P) \geq v(Q) - w(Q).$$

Wir legen nun einen Kreis K um P , welcher klein genug im Sinne von Postulat 1 ist und ganz im Inneren von G' liegt. Nach Definition von sub- und super- H -CMC-Funktionen gilt weiter:

$$C_K^H[v](P) - C_K^H[w](P) \geq v(P) - w(P).$$

Nach Satz 8 gibt es jedoch ein $R \in \partial K$, so daß

$$C_K^H[v](R) - C_K^H[w](R) > C_K^H[v](P) - C_K^H[w](P)$$

gilt (ansonsten wäre $C_K^H[v] \equiv C_K^H[w]$, was $v > w$ widerspräche). Nach Definition ist nun aber

$$v(R) - w(R) > v(P) - w(P),$$

was der Definition von P widerspricht. Somit kann es einen solchen Punkt P und damit ein solches Gebiet G' nicht geben.

q.e.d

Satz 14 Seien $v \geq w$ sub- H -CMC. Dann ist $C_K^H[v] \geq C_K^H[w]$.

Beweis: Angenommen es sei $C_K^H[v] < C_K^H[w]$ in einem Punkt $P \in \overset{\circ}{K}$. Dann nimmt aber $C_K^H[v] - C_K^H[w]$ ganz sicher sein Minimum in $\overset{\circ}{K}$ an. Nach Satz 8 ist dann aber in ganz K im Widerspruch zur Annahme $C_K^H[v] = C_K^H[w]$.

q.e.d

Satz 15 Sei $H < 0$ und v sub- H -CMC. Besitzt v ein inneres Maximum, so ist v konstant.

Beweis: Setze $w = C_K^H[v]$, wobei K ein Kreis in G um den Maximumspunkt P ist. Sei $V := \max_{\partial K} v$; es ist nach Voraussetzung $V \leq v(P) \leq w(P)$. Nach dem Maximumprinzip für CMC-Funktionen mit negativer mittlerer Krümmung gilt $w = \text{const}$ in K . Folglich ist $v = w = v(P)$ auf ∂K . Da sich die Argumentation auch auf kleinere Kreise anwenden läßt, folgt $v = v(P)$ in ganz K . Also ist die Menge der Maximalpunkte in G offen. Andererseits ist sie aus Stetigkeitsgründen geschlossen. Da G zusammenhängend ist, ist sie mit G identisch.

q.e.d

Analog beweist man den

Satz 16 Sei $H > 0$ und v super- H -CMC. Besitzt v ein inneres Minimum, so ist v konstant.

Satz 17 Seien v_1, \dots, v_n sub- H -CMC, so auch $v = \max(v_1, \dots, v_n)$. Analog gilt: Seien w_1, \dots, w_n super- H -CMC, so auch $w = \max(w_1, \dots, w_n)$.

Beweis: Wir betrachten sub- H -CMC-Funktionen, der Beweis für super- H -CMC-Funktionen verläuft analog. Für jeden Kreis K und jedes i gilt nach Definition 6 und Satz 14

$$v_i \leq C_K^H[v_i] \leq C_K^H[v].$$

Somit ist $v \leq C_K^H[v]$.

q.e.d

Satz 18 Sei v sub- H -CMC, so auch $C_K^H[v]$. Analog gilt: Sei v super- H -CMC, so auch $C_K^H[v]$.

Beweis: Sei K' irgendein geschlossener Kreis in G (klein genug im Sinne von Postulat 1). Wir müssen zeigen, daß

$$w = C_K^H[v] \leq C_{K'}^H[w].$$

Diese Aussage ist offenbar dann wahr, wenn K' ganz in K oder ganz in $G \setminus K$ liegt. Es bleibt also der Fall zu zeigen, wo K' zum Teil in K und zum Teil außerhalb von K liegt. Sei $P \in K' \setminus (K' \cap K)$. Nach Satz 14 gilt im Punkt P

$$w = C_K^H[v] = v \leq C_{K'}^H[v] \leq C_{K'}^H[w].$$

Auf dem gesamten Rand von $K' \cap K$ gilt damit $w \leq C_{K'}^H[w]$. Analog zum Beweis von Satz 14 folgt daraus aber, daß diese Ungleichung in der gesamten Schnittmenge hält.

Der Fall für super- H -CMC-Funktionen wird analog bewiesen.

q.e.d

Definition 7 Sei ϕ vorgegebener Randwert auf Γ . Eine stetige Funktion v heißt H - ϕ -**Unterfunktion**, falls v sub- H -CMC in G und $v \leq \phi$ auf Γ ist. v heißt H - ϕ -**Oberfunktion**, falls v super- H -CMC und $v \geq \phi$ auf Γ ist.

Konstante Funktionen sind abhängig vom Vorzeichen von H entweder sub- H -CMC oder super- H -CMC. Die Menge der Ober- oder die der Unterfunktionen ist also definitiv nicht leer. Eine gleichlautende Aussage über die andere Menge ist aber nicht so offensichtlich.

Satz 19 Sei $F_{H,\phi}$ die Klasse aller H - ϕ -Unterfunktionen und $F^{H,\phi}$ die Klasse aller H - ϕ -Oberfunktionen. Dann gilt:

1. Falls $H < 0$, so sind alle Funktionen in $F_{H,\phi}$ gleichförmig durch $\max \phi$ nach oben beschränkt.
2. Seien $v_1, \dots, v_n \in F_{H,\phi}$, so auch $\max(v_1, \dots, v_n) \in F_{H,\phi}$.

5 Perron

3. Sei $v \in F_{H,\phi}$ und K ein geschlossener Kreis in G , dann ist auch $C_K^H[v] \in F_{H,\phi}$.
4. Falls $H > 0$, so sind alle Funktionen in $F^{H,\phi}$ gleichförmig durch $\min \phi$ nach unten beschränkt.
5. Seien $v_1, \dots, v_n \in F^{H,\phi}$, so auch $\min(v_1, \dots, v_n) \in F^{H,\phi}$.
6. Sei $v \in F^{H,\phi}$ und K ein geschlossener Kreis in G , dann ist auch $C_K^H[v] \in F^{H,\phi}$.

Beweis:

1. folgt aus Satz 15.
2. folgt aus Satz 17.
3. folgt aus Satz 18.
4. folgt aus Satz 16.
5. folgt aus Satz 17
6. folgt aus Satz 18.

Satz 20 Sei $F_{H,\phi}$ wie oben und sei $u_{H,\phi} = \sup F_{H,\phi}$. Sei f stetig in \bar{G} und ist überall $u_{H,\phi} \geq f$, so ist für jeden Kreis K auch

$$u_{H,\phi} \geq C_K^H[f].$$

Analog gilt für $u^{H,\phi} = \inf F^{H,\phi}$ und $u^{H,\phi} \leq g$:

$$u^{H,\phi} \leq C_K^H[g].$$

Beweis: Sei $P \in \bar{G}$ und $\epsilon > 0$ beliebig, so gibt es nach Konstruktion von $u_{H,\phi}$ eine H - ϕ -Unterfunktion ψ_P derart, daß

$$u_{H,\phi}(P) < \psi_P(P) + \epsilon$$

ist. Also gilt nach Voraussetzung

$$f(P) < \psi_P(P) + \epsilon.$$

Wegen der Stetigkeit von f und ψ_P existiert eine Umgebung U_P von P , in der

$$f < \psi_P + \epsilon$$

gilt. Nach dem Satz von Heine–Borel gibt es also endlich viele solcher Umgebungen U_{P_1}, \dots, U_{P_n} , die die ganze Menge \bar{G} überdecken. Die korrespondierenden Punkte P_1, \dots, P_n definieren ihrerseits wieder n H - ϕ -Unterfunktionen ψ_{P_i} und wir setzen

$$\psi = \max(\psi_{P_1}, \dots, \psi_{P_n}).$$

Nach Satz 19 Punkt 2 ist ψ wiederum eine H - ϕ -Unterfunktion. Da jeder Punkt $Q \in \bar{G}$ einer Umgebung U_{P_i} angehört, gilt

$$f(Q) < \psi_{P_i}(Q) + \epsilon \leq \psi(Q) + \epsilon.$$

Sei nun K ein Kreis; setze $\chi = C_K^H[\psi]$. Nach Satz 19 Punkt 3 ist χ ebenfalls eine H - ϕ -Unterfunktion. Nach Postulat 1 gibt es dann ein $\epsilon^* > 0$ mit $\epsilon^* \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$ so, daß

$$C_K^H[f] < C_K^H[\psi] + \epsilon^* = \chi + \epsilon^*$$

ist. Da χ eine H - ϕ -Unterfunktion ist und $u_{H,\phi}$ Supremum aller H - ϕ -Unterfunktionen ist, folgt

$$C_K^H[f] < u_{H,\phi} + \epsilon^*.$$

Da ϵ und damit ϵ^* beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

Die Behauptung für das Infimum der H - ϕ -Oberfunktionen wird analog bewiesen.

q.e.d

Satz 21 Seien $u_{H,\phi}$ und $u^{H,\phi}$ wie in Satz 20. Dann beschreiben $u_{H,\phi}$ und $u^{H,\phi}$ CMC-Flächen mit mittlerer Krümmung H .

Beweis: Wie beim Beweis von Satz 20 gibt es zu $P \in \bar{G}$ und $\epsilon > 0$ beliebig eine H - ϕ -Unterfunktion ψ_P derart, daß

$$u_{H,\phi}(P) < \psi_P(P) + \epsilon$$

ist. Sei nun P_1 ein hinreichend naher Nachbarpunkt von P , so ist wegen Stetigkeit auch

$$u_{H,\phi}(P) < \psi_P(P_1) + \epsilon.$$

Nach Definition von $u_{H,\phi}$ folgt damit

$$u_{H,\phi}(P) < u_{H,\phi}(P_1) + \epsilon.$$

Somit ist $u_{H,\phi}$ nach unten halbstetig und läßt sich als Grenzwert einer monoton zunehmenden Folge von stetigen Funktionen F_i darstellen:

$$u_{H,\phi} = \lim_{i \rightarrow \infty} F_i,$$

wobei $F_i \leq F_{i+1}$ und $u_{H,\phi} \geq F_i$ ist. Nach Satz 20 ist für jeden hinreichend kleinen Kreis K

$$u_{H,\phi} \geq C_K^H[F_i].$$

Da die F_i offenbar gleichmäßig beschränkt sind ($F_1 \leq F_i \leq u_{H,\phi}$) folgt aus dem Lebesgueschen Satz über die Integration des Grenzwertes, indem man den Grenzübergang $i \rightarrow \infty$ macht ²:

$$u_{H,\phi} \geq C_K^H[u_{H,\phi}].$$

²Der Integrationsprozeß muß dabei zunächst im Lebesgueschen Sinne aufgefaßt werden, da die Stetigkeit von u noch nicht bewiesen ist.

Andererseits folgt aus den Ungleichungen

$$u_{H,\phi}(P) \leq \psi_P(P) + \epsilon$$

und

$$\psi_P(P) \leq C_K^H[\psi_P](P) \leq C_K^H[u_{H,\phi}](P),$$

daß

$$u_{H,\phi}(P) \leq C_K^H[u_{H,\phi}](P).$$

Somit ist

$$u_{H,\phi} = C_K^H[u_{H,\phi}].$$

Die Behauptung für $u^{H,\phi}$ wird analog bewiesen.

q.e.d

Wir wenden uns nun Neumannschen Randbedingungen zu. Die Lösung wird hier nicht eindeutig sein, sondern mit u wird auch $u + c, c = \text{const.}$, eine Lösung sein. Um diese Mehrdeutigkeit zu beheben, fordern wir für einen festen, aber beliebigen Randpunkt R , daß $u(R)$ einen vorgegebenen, aber wiederum beliebigen Wert c annimmt: $u(R) = c$.

Definition 8 Sei θ vorgegebener Kontaktwinkel auf Γ und v eine Funktion mit $v(R) = c$. Sei $T[v]$ der Kontaktwinkel³ der durch v beschriebenen Fläche mit dem Zylinder⁴ über Γ entsprechend dem Winkel der Flächennormalen. Eine stetige Funktion v heißt **H - θ -Unterfunktion**, falls v sub- H -CMC in G und $T[v] \leq \theta$ auf Γ ist. v heißt **H - θ -Oberfunktion**, falls v super- H -CMC und $T[v] \geq \theta$ auf Γ ist.

Für $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ und $H < 0$ ist die Menge der H - θ -Oberfunktionen nicht leer⁵: Sie enthält die konstanten Funktionen. Entsprechendes gilt im Fall $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ und $H > 0$ für die Menge der H - θ -Unterfunktionen. Wie im Fall der H - ϕ -Unter- und Oberfunktionen erschließt sich der Fall der anderen Menge nicht sofort.

Satz 22 Sei $F_{H,\theta}$ die Klasse aller H - θ -Unterfunktionen und $F^{H,\theta}$ die Klasse aller H - θ -Oberfunktionen. Dann gilt:

1. Seien $v_1, \dots, v_n \in F_{H,\theta}$, so auch $\max(v_1, \dots, v_n) \in F_{H,\theta}$.
2. Sei $v \in F_{H,\theta}$ und K ein geschlossener Kreis in G , dann ist auch $C_K^H[v] \in F_{H,\theta}$.
3. Seien $v_1, \dots, v_n \in F^{H,\theta}$, so auch $\min(v_1, \dots, v_n) \in F^{H,\theta}$.
4. Sei $v \in F^{H,\theta}$ und K ein geschlossener Kreis in G , dann ist auch $C_K^H[v] \in F^{H,\theta}$.

³Entsprechend unserer Definition des Operators L_H weist die Oberflächennormale einer Fläche nach unten

⁴Dessen Normale weist nach außen

⁵Nach unseren Konventionen ist die Fläche dann nach unten gekrümmt, der Normalenvektor am Rand weist nach unten und nach außen; wegen des Maximumsprinzips kann es dann keinen Fall $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ und $H > 0$ geben

Beweis:

1. folgt aus Satz 17.
2. folgt aus Satz 18.
3. folgt aus Satz 17.
4. folgt aus Satz 18.

Satz 23 Sei $F_{H,\theta}$ wie oben und sei $u_{H,\theta} = \sup F_{H,\theta}$. Sei f stetig in \bar{G} und ist überall $u_{H,\theta} \geq f$, so ist für jeden Kreis K auch

$$u_{H,\theta} \geq C_K^H[f].$$

Analog gilt für $u^{H,\theta} = \inf F^{H,\theta}$ und $u^{H,\theta} \leq g$:

$$u^{H,\theta} \leq C_K^H[g].$$

Beweis: Sei $P \in \bar{G}$ und $\epsilon > 0$ beliebig, so gibt es nach Konstruktion von $u_{H,\theta}$ eine H - ϕ -Unterfunktion ψ_P derart, daß

$$u_{H,\theta}(P) < \psi_P(P) + \epsilon$$

ist. Also gilt nach Voraussetzung

$$f(P) < \psi_P(P) + \epsilon.$$

Wegen der Stetigkeit von f und ψ_P existiert eine Umgebung U_p von P , in der

$$f < \psi_P + \epsilon$$

gilt. Nach dem Satz von Heine–Borel gibt es also endlich viele solcher Umgebungen U_{P_1}, \dots, U_{P_n} , die die ganze Menge \bar{G} überdecken. Die korrespondierenden Punkte P_1, \dots, P_n definieren ihrerseits wieder n H - θ -Unterfunktionen ψ_{P_i} und wir setzen

$$\psi = \max(\psi_{P_1}, \dots, \psi_{P_n}).$$

Nach Satz 22 Punkt 2 ist ψ wiederum eine H - θ -Unterfunktion. Da jeder Punkt $Q \in \bar{G}$ einer Umgebung U_{P_i} angehört, gilt

$$f(Q) < \psi_{P_i}(Q) + \epsilon \leq \psi(Q) + \epsilon.$$

Sei nun K ein Kreis; setze $\chi = C_K^H[\psi]$. Nach Satz 22 Punkt 3 ist χ ebenfalls eine H - θ -Unterfunktion. Nach Postulat 1 gibt es dann ein $\epsilon^* > 0$ mit $\epsilon^* \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$ so, daß

$$C_K^H[f] < C_K^H[\psi] + \epsilon^* = \chi + \epsilon^*$$

ist. Da χ eine H - θ -Unterfunktion ist und $u_{H,\theta}$ Supremum aller H - θ -Unterfunktionen ist, folgt

$$C_K^H[f] < u_{H,\theta} + \epsilon^*.$$

Da ϵ und damit ϵ^* beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

Die Behauptung für das Infimum der H - ϕ -Oberfunktionen wird analog bewiesen.

q.e.d

5.2 Schranken

Wir rekapitulieren kurz, was Perron unter einer Schranke versteht. Perron definiert eine Schranke $w_Q, Q \in \Gamma$, als eine in \bar{G} stetige Funktion mit

1. w_Q ist superharmonisch in G .
2. $w_Q > 0$ in $G \setminus \{Q\}$.
3. $w_Q(Q) = 0$.

Sodann konstruiert für $\epsilon > 0$ beliebig und $k > 0$ hinreichend groß, die Unterfunktion

$$v(P) = \phi(Q) - \epsilon - kw_Q(P)$$

und die Oberfunktion

$$V(P) = \phi(Q) + \epsilon + kw_Q(P).$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß für P hinreichend nahe an Q

$$|u(P) - \phi(Q)| < 2\epsilon$$

gilt.

Für eine vollständige Übertragung des Verfahrens auf CMC-Flächen wären nun zwei Schwierigkeiten zu überwinden:

1. Perron nutzt aus, daß mit w_Q superharmonisch $-w_Q$ subharmonisch ist. Zwischen sub- H -CMC- und super- H -CMC-Funktionen besteht ein solcher Zusammenhang aber nicht. Man könnte sich hier noch behelfen, indem man obere und untere Schranken fordert.
2. Auch ist nicht zwingend, daß mit w auch ein Vielfaches $kw, k = \text{const.} > 0$ auch super- bzw. sup- H -CMC ist.

Andererseits wird der Faktor k nur benötigt, weil nicht gewährleistet ist, daß für alle $P \in \Gamma$

$$\phi(Q) - \epsilon - w_Q(P) \leq \phi(P)$$

gilt. Verschärfte man nun die Forderung an die Schranke derart, daß ϕ im obigen Sinne respektiert wird, so kann auch diese Schwierigkeit umschifft werden.

3. Es gilt jedoch wie im harmonischen Fall für jede Oberfunktion ψ und jede Unterfunktion χ : $\chi < \psi$. Dies folgt aus Satz 13.

Der Versuch, Perron auf CMC-Flächen anzuwenden, ist damit von unserer Seite leider zu seinem Ende gelangt. Ein Umstand, der diesen Ansatz so interessant macht, ist die Tatsache, daß es sich um eine konstruktive Beweismethode handelt. Es ist zwar naiv davon auszugehen, daß man die Ober- oder Unterlösungen analytisch bestimmen kann, gleichwohl liegt die Idee nahe, daß man hier den Ansatz für ein numerisches Lösungsverfahren des CMC-Problems vor sich hat. Verschiedentlich wurde diese

Hoffnungen auch schon in Gesprächen mir gegenüber geäußert. Wie berechtigt diese Hoffnung ist, muß ein Abschluß dieses Ansatzes zeigen. Daher wurde meine Arbeit zu diesem Thema in diese Arbeit aufgenommen, um andere anzuregen, sie fortzusetzen und gegebenenfalls fruchtbringend in der Praxis einzusetzen.

6 Danksagungen

Ich danke an dieser Stelle an dieser Stelle meinem Doktorvater, Franz Pedit, für seine Bereitschaft, an einem Projekt mitzuwirken, das anfangs nicht sehr ergiebig zu werden versprach.

Mein Dank gilt auch Frau Anita Roth-Nebelsick, vormals Institut für Geowissenschaften der Universität Tübingen, jetzt Staatliches Museum für Naturkunde Stuttgart, für die Mitarbeit in ihrer Arbeitsgruppe, die das Projekt initiiert hat, und ihrem Mitarbeiter Wilfried Konrad für viele interessante Diskussionen und Anregungen. Gedankt sei auch der gesamten Arbeitsgruppe „Biomimetik und Funktionsmorphologie“, wo ich viele interessante Forschungsprojekte miterleben durfte.

Mit Herrn Jörg Frauendiener, University of Otago, Neuseeland, hatte ich ebenfalls wichtige und hilfreiche Diskussionen.

Dem Land Baden-Württemberg und der Universität Tübingen sei herzlich für die Gewährung eines Stipendiums in Rahmen der Landesgraduiertenförderung gedankt, das diese Arbeit zu einem Großteil erst ermöglicht hat.

Dem DAAD danke ich für ein Reisestipendium nach Neuseeland.

Literatur

- [1] A. K. Balasubramanian, A. C. Miller und O. K. Rediniotis. „Microstructured hydrophobic skin for hydrodynamic drag reduction“. In: *AIAA Journal* 42 (2004), 408–411.
- [2] B. Bhushan, M. Nosonovsky und Y. C. Jung. „Optimization of superhydrophobic surfaces“. In: *J. R. Soc. Interface* 4.15 (2007), S. 643–648.
- [3] J. Bico, U. Thiele und D. Quéré. „Wetting of textured surfaces“. In: *Colloids and Surfaces A* 206 (2002), S. 41–46.
- [4] A. Ferrante und S. Elghobashi. „On the physical mechanisms of drag reduction in a spatially developing turbulent boundary layer laden with microbubbles“. In: *J. Fluid Mech.* 503 (2004), S. 345–355.
- [5] Robert Finn. *Equilibrium capillary surfaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 284. New York: Springer, 1986.
- [6] Paul Funk. *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 94. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1962.
- [7] David Hilbert und Richard Courant. *Methods of mathematical physics*. Bd. II. Interscience Publishers, 1966.
- [8] E. Hopf. „Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus“. In: *Sber. Preuss. Akad. Wiss.* 19 (1927), S. 147–152.
- [9] Katsuei Kenmotsu. *Surfaces with constant mean curvature*. Übers. von Katsuhiro Moriya. Translations of mathematical monographs 221. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2003.
- [10] Wilfried Konrad, Christian Apeltauer, Jörg Frauendiener, Wilhelm Berthlott und Anita Roth-Nebelsick. „Applying Methods from Differential Geometry to Devise Stable and Persistent Air Layers Attached to Objects Immersed in Water“. In: *Journal of Bionic Engineering* 6.4 (2009), S. 350–356.
- [11] Erwin Kreyszig. *Differential Geometry*. Reprinted by Dover Publications, 1991. University of Toronto Press, 1959.
- [12] R. Latorre, A. Miller und R. Philips. „Micro-bubble resistance on a model SES catamaran“. In: *Ocean Engineering* 30 (2003), 2297–2309.
- [13] L. D. Landau; E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Hrsg. und übers. von Paul Ziesche. 5. Aufl. Bd. VI: Hydrodynamik. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.

Literatur

- [14] Laurent Mazet. „A height estimate for constant mean curvature graphs and uniqueness results“. In: *Manuscripta math.* 119 (2006), S. 255–268.
- [15] Oskar Perron. „Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ “. In: *Math. Z.* 18 (1923), S. 42–54.
- [16] James Serrin. „The Dirichlet Problem for Surfaces of Constant Mean Curvature“. In: *Proc. London Math. Soc.* 21 (1970), S. 361–384.
- [17] James Serrin. „The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables“. In: *Phil. Trans. Roy. Soc. London A264* (1969), S. 413–496.

Curriculum vitae von Christian Apeltauer

29. 12. 1981 Geburt in Schwäbisch Hall als Sohn von Rolf und Christa Apeltauer
27. 6. 2001 Abitur am Gymnasium bei St. Michael, Schwäbisch Hall
WS 2001/2 Beginn des Studiums der Physik an der
Eberhard Karls Universität Tübingen;
angestrebter Abschluß Diplom
31. 7. 2003 Diplomvorprüfung in Physik
1. 12. 2005 – 1. 12. 2006 Diplomarbeit in der Arbeitsgruppe von
PD Jörg Frauendiener, Theoretische Astrophysik Tübingen
Thema: „Betrachtungen zur Bedeutung der Eichung bei diskreten
Differentialformen in der Allgemeinen Relativitätstheorie“
1. 4. 2007 – 14. 9. 2007 Mitarbeit in verschiedenen Positionen in der Arbeitsgruppe von
Prof. Jochum, Physikalisches Institut Tübingen
seit 1. 10. 2007 Mitarbeit in der Arbeitsgruppe von
Frau PD Anita Roth-Nebelsick, Institut für Geowissenschaften
Universität Tübingen
SS 2008 Doktorand bei Prof. Franz Pedit, Mathematisches Institut Tübingen

Akademische Lehrer während des Studiums:

Experimentalphysik: Gerhard J. Wagner, Peter Grabmayr, Claus Zimmermann, Dieter Kölle, Heinz Clement, Josef Jochum, Martin Weitz

Theoretische Physik: Willy Kley, Nils Schopohl, Hugo Reinhardt, Mario Liu

Informatik: Rüdiger Loos

Astrophysik: Klaus Werner, Willy Kley, Jörg Frauendiener

Mathematik: Rainer Nagel, Frank Loose, Herbert Heyer