

# Birationale Eigenschaften generischer Hyperflächen in algebraischen Tori

JARON TREUTLEIN  
(Tübingen)

DISSERTATION

der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen  
zur Erlangung des Grads eines  
Doktors der Naturwissenschaften vorgelegt

**2010**

**Tag der mündlichen Qualifikation:** 8. Juni 2010  
**Dekan:** Prof. Dr. W. Knapp  
**1. Berichterstatter:** Prof. Dr. V. Batyrev  
**2. Berichterstatter:** Prof. Dr. J. Hausen



*Für Kathrin*



# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	8
Notation	8
1 Grundlagen der torischen Geometrie	11
1.1 Torische Varietäten . . . . .	11
1.2 Kegel . . . . .	12
1.3 Gittermonoide und affine torische Varietäten . . . .	13
1.4 Normale torische Varietäten . . . . .	14
1.5 Fächer und torische Varietäten . . . . .	15
1.6 Einige Eigenschaften torischer Varietäten . . . . .	16
1.7 Homogene Koordinaten . . . . .	17
1.8 Die Klassen- und die Picardgruppe . . . . .	22
1.9 Polytope . . . . .	26
1.10 Der Satz von Ehrhart . . . . .	35
1.11 Basispunktfreie und ample Divisoren . . . . .	42
2 Auflösung von Singularitäten	51
3 Das Minimal Model Program für torische Varietäten	61
3.1 Das Schnittprodukt . . . . .	61
3.2 Der Mori-Kegel . . . . .	63
3.3 Projektive Morphismen . . . . .	65
3.4 Das Minimal Model Program . . . . .	69
3.5 Kontraktion von Divisoren . . . . .	71
3.6 Flips . . . . .	77
3.7 Terminalität . . . . .	78
3.8 Das Minimal Model Programm für torische Varietäten	81
4 Mori-Transformationen am Fächer und am Polytop	85
4.1 Teilfächer . . . . .	85
4.2 Mori-Transformationen am Polytop . . . . .	88
4.3 Beispiele . . . . .	98

5	Das Minimal Model Program für Divisoren von torischen Varietäten	107
5.1	Torisch terminale Divisoren . . . . .	107
5.2	Das Minimal Model Program für torisch terminale Divisoren . . . . .	112
5.3	Konstruktion eines Minimal Model . . . . .	117
5.4	Beispiele . . . . .	121
6	Generische Flächen vom Geschlecht 0	125
6.1	Endlichkeitssätze für Gitterpolytope . . . . .	125
6.2	Saubere 3-dimensionale Gitterpolytope . . . . .	127
6.3	Generische Flächen vom Geschlecht 0 . . . . .	132
6.4	White Gittersimplizes . . . . .	139
6.5	White Gitterpolytope . . . . .	141
6.6	Gitterpolytope ohne innere Gitterpunkte . . . . .	146
7	Simplizes mit leerem F-Inneren	149
7.1	Höhen eines $d$ -Simplex . . . . .	149
7.2	Das F-Innere . . . . .	154
7.3	$d$ -Simplizes mit leerem F-Inneren . . . . .	158
8	Rationalität generischer Konik-Bündel	163
8.1	Rationalität . . . . .	163
8.2	Rationalität von generischen Konik-Bündeln . . . . .	164
8.3	Die generische Bedingung . . . . .	169
8.4	Der Beweis des Theorems . . . . .	173
	Index	179
	Literaturverzeichnis	182
	Appendix – Lebenslauf	187

# Einleitung

Diese Dissertation beschäftigt sich mit generischen Hyperflächen in algebraischen Tori, d.h. Divisoren algebraischer Tori der Dimension mindestens zwei. Da wir ihre birationalen Eigenschaften untersuchen wollen, können wir genauso gut generische Hyperflächen in torischen Varietäten betrachten.

Eine besonders interessante Kategorie in der Algebraischen Geometrie ist die Klasse der torischen Varietäten. Sie können sowohl algebraisch-geometrisch als auch konvexgeometrisch oder kombinatorisch betrachtet werden. Aus diesem Grund können Probleme der Torischen Geometrie mit konvexgeometrischen und umgekehrt Probleme der Konvexgeometrie mit torischen Methoden gelöst werden. Dieses Wechselspiel, zusammen mit der Einfachheit der Konvexgeometrie, macht den besonderen Reiz der Torischen Geometrie aus. Daher sind torische Varietäten ein optimales Versuchsobjekt für Vermutungen über algebraische Varietäten und gut untersucht. Wir betrachten in dieser Arbeit nun Hyperflächen in torischen Varietäten. Diese sind im Allgemeinen nicht mehr torisch oder gar rational. Deswegen macht es Sinn, die Äquivalenzklassen dieser Hyperflächen bezüglich birationaler Äquivalenz zu betrachten. Dabei ist die Idee, die Hyperflächen mit torischen Methoden untersuchen. Unter anderem möchte man, dass eventuell auftretende Singularitäten durch die umgebende torische Varietät kontrolliert werden. Damit dies möglich ist, fordert man eine offene Bedingung an die betrachtete Hyperfläche und nennt diese dann generisch. Wir betrachten die generische Hyperflächen modulo birationaler Äquivalenz und interessieren uns für ihre Eigenschaften und einen möglichst einfachen Vertreter einer solchen Äquivalenzklasse. Letzteres ist Inhalt des Minimal Model Program.

Die Dissertation ist in acht Kapitel gegliedert. Dabei stellen die ersten beiden Kapitel eine Einführung in die Theorie der torischen Varietäten und die Auflösung von Singularitäten dar. Die Kapitel 3 bis 5 beschäftigen sich mit dem Minimal Model Program für torische Varietäten und torische Hyperflächen. In den letzten drei Kapiteln werden mit Hilfe konvexgeometrischer Methoden birationale Eigenschaften von generischen Hyperflächen untersucht. Einige

der dabei neu gefundenen Resultate sind als Gedicht formuliert, um auch durch ihre Form ihre Schönheit zu verdeutlichen.

Im ersten Kapitel werden die für den späteren Gebrauch benötigten Grundlagen der torischen Geometrie erarbeitet. Dabei werden die Begriffe und Ergebnisse sowohl algebraisch-geometrisch als auch konvexgeometrisch behandelt. Unbewiesene Sätze dieses Kapitels können in [CLS91], [Cox03], [Dan78], [Har77] und [Oda88] nachgelesen werden.

Im darauf folgenden Kapitel geht es um die Auflösung von Singularitäten. Dies ist ein Prozess, der birationale Eigenschaften erhalten lässt, Varietäten aber einfacher zu untersuchen macht. Die Existenz einer solchen Auflösung war lange Zeit ein großes Problem der Algebraischen Geometrie. Für torische Varietäten ist diese jedoch mit Hilfe der Grundlagen aus dem ersten Kapitel sehr einfach zu verstehen. Besonders die Proposition 2.1.20 und das Korollar 2.1.21 erweisen sich im Folgenden als wichtiges Hilfsmittel, um die Diskrepanzen einer Auflösung zu berechnen.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Minimal Model Program für torische Varietäten. Ziel dessen ist, zu einer gegebenen Varietät ein möglichst einfaches birational äquivalentes Modell anzugeben. Für Kurven ist dies einfach: Jede Kurve ist birational äquivalent zu einer eindeutigen glatten projektiven Kurve, das sogenannte glatte Modell. Die selbe Frage für Flächen ist schon schwieriger und wurde in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts von italienischen Mathematikern behandelt. Da ihre Methode aber nicht für höherdimensionale Varietäten übertragbar ist, wurde erst um 1980 die Frage nach der Existenz eines höherdimensionalen Minimal Modells wieder aufgegriffen. Dabei waren es vor allem die Ideen von Miles Reid und Shigefumi Mori, statt nur glatte Varietäten auch Varietäten mit milden Singularitäten zu betrachten. Unter Hinzunahme von Flip-Transformationen können so die Ideen für das Minimal Model Program für Flächen in einem neuen Licht gesehen werden. Aus diesem Grund heißt das Minimal Model Program auch das Mori-Program. Es steht aktuell womöglich kurz vor seinem Abschluss. Für torische Varietäten ist es dank dem Artikel [Rei80] von Miles Reid sehr gut verständlich. Wir legen zunächst die Grundlagen und den historischen Hintergrund des Minimal Model Programs bereit und erläutern anschließend das torische Minimal Model Program nach Miles Reid.

Im vierten Kapitel wollen wir die Ideen des vorigen Kapitels auf konvexgeometrische Fragen anwenden. Dadurch ergibt sich eine in-

interessante Aussage über Fächer: Betrachtet man Fächer mit bestimmten Eigenschaften und wendet auf sie die Mori-Transformationen des dritten Kapitels an, erhält man eine Teilmenge aller Strahlen des Fächers, die den Normalenfächer eines Simplexes aufspannen, der die gleichen Eigenschaften wie der ursprüngliche Fächer hat (Theorem 4.1.1). Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir zu einem Fächer  $\Sigma$  ein Polytop wählen, dessen Normalenfächer gerade  $\Sigma$  ist. Wir untersuchen, wie sich die Mori-Transformationen des Fächers auf das Polytop übertragen (Lemma 4.2.1, Korollar 4.2.4 und Proposition 4.2.13).

Wohingegen für torische Varietäten kein Minimal Model existiert, wird diese Fragestellung für Hyperflächen in algebraischen Tori nun interessant. Mittels einer offenen Bedingung an die Hyperfläche erreicht man, dass man die Mori-Transformationen des dritten Kapitels erneut durchführen und die Hyperfläche mit transformieren kann. Dadurch erhält man ein Minimal Model Program für generische torische Hyperflächen. Dieses stammt von Shihoko Ishii [Ish99a]. Im zweiten Teil dieses Kapitels wird zu einer generischen Hyperfläche mit positiver Kodaira-Dimension explizit ein Minimal Model konstruiert. Diese Konstruktion benutzt konvexgeometrische Methoden.

Kapitel 6 behandelt generische Flächen vom Geschlecht 0 als Hyperflächen dreidimensionaler algebraischer Tori. Beispielsweise haben rationale Flächen diese Eigenschaft. Wir wählen nun ein dreidimensionales Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte und betrachten dazu eine glatte generische Hyperfläche in der zugehörigen torischen Varietät. Diese hat mit einem Ergebnis von Askold G. Khovanskii [Kho78] das Geschlecht 0. Um Eigenschaften dieser Flächen zu erkennen, wird eine Klassifikation von dreidimensionalen Gitterpolytopen ohne innere Gitterpunkte benötigt. Diese wird in diesem Kapitel mit Hilfe konvexgeometrischer Methoden und einem Satz von Roger Howe [Whi64] erreicht (Theorem 6.3.1). Dadurch können wir die zugehörigen Flächen betrachten und untersuchen, wie “nahe” sie zu rationalen Flächen sind.

Im darauf folgenden Kapitel wird die Bedingung an das Polytop noch verschärft. Es darf jetzt nicht mehr nur keine inneren Gitterpunkte haben, sondern muss nun auch leeres Fine-Inneres haben. Dies liefert uns den im vierten Kapitel noch unbehandelten Fall. Da die geforderte Bedingung aber unhandlich ist, betrachten wir eine noch stärkere Bedingung, die einfacher zu untersuchen ist: Das Polytop soll leeres F-Inneres haben. Wir tun dies für Simplexe beliebiger Dimension. Diese charakterisieren wir durch ihre Höhen.

Dabei ergibt sich eine schöne notwendige Bedingung für  $d + 1$  Zahlen, die Höhen eines  $d$ -Simplex zu sein (Proposition 7.1.2). Mittels einer diophantischen Ungleichung erreichen wir eine Endlichkeitsaussage für Simplizes mit leerem F-Inneren (Theorem 7.3.2). Als Anwendung dessen erhalten wir generische Hyperflächen algebraischer Tori, die kein Minimal Model besitzen.

Unter dem Lüroth-Problem versteht man in der Algebraischen Geometrie die Suche nach unirationalen Varietäten, die nicht rational sind. In Dimension 1 ist diese Suche vergeblich, da jede unirationale Kurve rational ist. Ebenso ist die Frage für algebraische Flächen beantwortet. Wir betrachten im letzten Kapitel deswegen dreidimensionale generische Konik-Bündel auf Rationalität. Dabei untersuchen wir eine weitere birationale Invariante: die Brauergruppe. Wir betrachten zu einem kombinatorischen Cayleypolytop  $\Delta$  eine generische Hyperfläche, die durch eine Gleichung in der zugehörigen torischen Varietät definiert ist, so dass das Newtonpolytop zur Gleichung gerade  $\Delta$  ist. Mittels eines Resultats von Victor Batyrev und Maximilian Kreuzer [BK06] lässt sich nun die Brauergruppe durch das Untergitter aller Linearformen, die ihr Minimum auf einer mindestens 2-dimensionalen Seite von  $\Delta$  annehmen, untersuchen. Dadurch ergibt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass die zugehörige Brauergruppe trivial bzw. nicht trivial ist (Theorem 8.2.1).

## **Danksagung:**

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Professor Victor Batyrev. Er konnte mittels interessanter Fragestellungen und Vermutungen mein Interesse und meine Neugier an Themen der Konvexgeometrie und der Algebraischen Geometrie wecken. Bei Schwierigkeiten und Fragen gab er wertvolle Antworten, stellte Sachverhalte in einem anderen Licht dar und motivierte mich neu.

Weiter möchte ich Benjamin Nill, Christian Haase und Andreas Pfaffenholz danken für ihre Einladung nach Berlin, wo ich eine mit an Diskussionen und Anregungen reiche Woche erlebte und über meine Arbeit vortragen konnte. Außerdem bin ich ihnen dankbar für ihre Einladung zum Minisymposium über algebraische und geometrische Kombinatorik auf der Jahreshauptversammlung der Deutschen Mathematiker Vereinigung in Erlangen, auf der ich über Teile des 6. Kapitels vortragen konnte.

Außerdem gilt mein Dank dem Arbeitsbereich Algebra in Tübingen, dessen kollegiale Atmosphäre mir das Arbeiten verschönerte. Hier hatte ich auch die Möglichkeit, über Teile der Kapitel 3, 5, 6 und 8 vorzutragen.

Zuletzt möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Freundin Kathrin Lutz und meiner Familie für ihre Unterstützung, Kraft und Aufheiterung bedanken.

---

# Notation

## Allgemeines:

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	die Menge der ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen
$\overline{K}$	der algebraische Abschluss eines Körpers $K$
$M$	ein Gitter
$N$	das zu $M$ duale Gitter
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	die duale Paarung $M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ .
$M_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}}, M_{\mathbb{Q}}, N_{\mathbb{Q}}$	die von $M$ bzw. $N$ aufgespannten $\mathbb{R}$ - und $\mathbb{Q}$ -Vektorräume
$d$	die Dimension von $M$
$\{e_1, \dots, e_d\}$	eine Gitterbasis von $M$ oder die Standardbasis von $\mathbb{Q}^n$ .
$\text{lin}(A)$	die kleinste lineare Menge, die $A$ enthält
$\text{aff}(A)$	die kleinste affine Menge, die $A$ enthält
$\text{conv}(A)$	die kleinste konvexe Menge, die $A$ enthält
$\{a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n\}$	die Menge $\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ .
$A^\perp$	die Menge $\{b \in N_{\mathbb{Q}} : \langle a, b \rangle = 0 \forall a \in A\}$
$\mathbf{1}(A, t)$	die formale Potenzreihe $\sum_{a \in A \cap M} t^a$ in den Variablen $t = (t_1, \dots, t_d)$
$\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$	die kleinste Zahl $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \leq x$ bzw. $z \geq x$ .
$a b$	$a$ teilt die Zahl $b$
$\text{gcd}(a, b)$	der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ .
$S_n$	die Symmetrische Gruppe der Ordnung $n!$

## Kegel und Fächer:

$\langle u_1, \dots, u_n \rangle$	der Kegel $\sum_{i=1}^n \mathbb{Q}_{>0} \cdot u_i$
$\sigma$	meist ein Kegel
$\sigma^\vee$	der zu $\sigma$ duale Kegel
$\rho$	ein Strahl, d.h. 1-dimensionaler Kegel
$u_\rho$	ein primitiver Erzeuger des Strahls $\rho$
$\mathcal{V}_\rho$	der Divisor zu einem Strahl $\rho$
$\Sigma$	meist ein vollständiger Fächer in $N_{\mathbb{Q}}$
$\Sigma(n)$	die Menge der $n$ -dimensionalen Kegel von $\Sigma$
$\omega$	eine Wand, d.h. 1-codimensionaler Kegel
$\text{stern}(\sigma)$	der Stern von $\sigma$
$X_\Sigma$	die torische Varietät zum Fächer $\Sigma$ und Gitter $N$
$\text{SF}(\Sigma, N)$	die Menge der stückweise linearen ganzen Funktionen auf dem Fächer $\Sigma$
$h$	eine stückweise lineare Funktion
$P_h$	das Polytop zu einer stückweisen linearen Funktion
$D_h$	der Cartier-Divisor zu einer stückweisen linearen Funktion

## Polytope:

$P$	meist ein Polytop in $M_{\mathbb{Q}}$
$P^*$	das zu $P$ duale Polytop in $N_{\mathbb{Q}}$
$\Delta_d$	das $d$ -dimensionale Standardsimplex
$\Sigma(P)$	der Normalenfächer von $P$
$P^\circ$	das Innere von $P$
$P^F$	das F-Innere von $P$
$P^{\text{Fine}}$	das Fine-Innere von $P$

## Varietäten:

$\mathbb{V}(f)$	die Verschwindungsmenge von $f$
$\text{div}(f)$	der Hauptdivisor zu $f$
$K_X, -K_X$	der kanonische bzw. antikanonische Divisor von $X$
$\text{Cl}(X)$	die Klassengruppe von $X$
$\text{Pic}(X)$	die Picardgruppe von $X$
$Z_1(X)$	die 1-Zykel von $X$
$\text{NE}(X)$	der Mori-Kegel von $X$
$B(X)$	die unverzweigte Brauergruppe von $X$

# 1 Grundlagen der torischen Geometrie

In diesem ersten Kapitel wird eine Einführung in die torische Geometrie gegeben.

Die algebraische Geometrie enthält ein Wechselspiel zwischen Algebra und Geometrie. So können Probleme der Geometrie auf algebraische Probleme zurückgeführt werden und umgekehrt. In der torischen Geometrie spielt sogar noch ein drittes mathematisches Gebiet eine Rolle: die Konvexgeometrie oder Kombinatorik. Ihr Reiz besteht darin, Probleme der torischen Geometrie auf einfacher zu verstehende Sachverhalte in der Konvexgeometrie zurückzuführen. Aus diesem Grund werden Vermutungen in der algebraischen Geometrie oft zunächst für torische Varietäten überprüft.

Dieses Kapitel erklärt nun, wie dieses Wechselspiel zwischen algebraischer Geometrie und Konvexgeometrie funktioniert.

## 1.1 Torische Varietäten

Die affine Varietät  $\mathbb{T}^d := (\mathbb{C}^*)^d$  ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe und heißt der *Standardtorus*. Eine Varietät, die zu  $\mathbb{T}^d$  isomorph ist, heißt *algebraischer Torus der Dimension  $d$* . Ein Torus erbt die Gruppeneigenschaft vom zugehörigen Standardtorus.

**Definition 1.1.1.** Ein Morphismus algebraischer Gruppen  $T \rightarrow \mathbb{C}^*$  heißt *Charakter* des Torus  $T$ . Es ist einfach zu zeigen, dass jeder Charakter des Standardtorus von der Form

$$\begin{aligned} \chi^m : \mathbb{T}^d &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (t_1, \dots, t_d) &\mapsto t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} \end{aligned}$$

ist mit  $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$ . In gleicher Weise ist die Menge der Charaktere eines Torus eine Gruppe  $M \cong \mathbb{Z}^d$ .

Ein Morphismus algebraischer Gruppen  $\mathbb{C}^* \rightarrow T$  heißt *1-Parametergruppe* des Torus  $T$ . Es ist einfach zu zeigen, dass jede 1-Parameter-

tergruppe des Standardtorus von der Form

$$\begin{aligned} \lambda^n : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{T}^d \\ t &\longmapsto (t^{n_1}, \dots, t^{n_d}) \end{aligned}$$

ist mit  $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ . In gleicher Weise ist die Menge der 1-Parametergruppen eines Torus eine Gruppe  $N \cong \mathbb{Z}^d$ .

Wegen  $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) = \{t \mapsto t^l : l \in \mathbb{Z}\}$  gibt es eine natürliche Paarung  $M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ ;  $(\chi, \lambda) \mapsto l$ , wobei  $(\chi \circ \lambda)(t) = t^l \forall t \in \mathbb{C}^*$ . Es ist also  $M \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  und  $N \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ .

**Definition 1.1.2.** Eine *torische Varietät*  $X$  ist eine irreduzible Varietät, die einen Torus  $T_X$  als Zariski-dichte Teilmenge enthält, so dass die Wirkung von  $T_X$  auf sich selbst auf ganz  $X$  fortgesetzt werden kann.

Natürlich ist jeder algebraische Torus selbst eine affine torische Varietät. Aber auch der affine Raum  $\mathbb{A}^d$  ist eine affine torische Varietät. Ein weiteres Beispiel ist der projektive Raum  $\mathbb{P}^d$  mit der dichten Menge  $\mathbb{P}^d \supset \{[1 : x_1 : \dots : x_d] : x_1, \dots, x_d \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{T}^d$  mit der Wirkung  $(t_1, \dots, t_d) \cdot [x_0 : x_1 : \dots : x_d] := [x_0 : t_1 x_1 : \dots : t_d x_d]$ .

**Definition 1.1.3.** Ein Morphismus zweier Varietäten  $f : X \rightarrow Y$  heißt *Morphismus von torischen Varietäten*, wenn es zusätzlich einen Morphismus  $\tilde{f} : T_X \rightarrow T_Y$  gibt, so dass  $f(t \cdot x) = \tilde{f}(t) \cdot f(x)$  für alle  $x \in X$  und  $t \in T_X$  gilt.

## 1.2 Kegel

Wir bezeichnen die  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume  $M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$  bzw.  $N \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$  mit  $M_{\mathbb{Q}}$  bzw.  $N_{\mathbb{Q}}$  und die zugehörigen  $\mathbb{R}$ -Vektorräume entsprechend.

**Definition 1.2.1.** Ein *polyhedraler Kegel*  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  ist eine Teilmenge der Form

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \geq 0 \right\} =: \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$

wobei  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset N_{\mathbb{Q}}$ . Ist sogar  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset N$ , so nennen wir  $\sigma$  einen *polyhedralen Gitterkegel*.

Ein Kegel heißt

- *spitz*, wenn er keinen Untervektorraum enthält.

- *volldimensional*, wenn  $N_{\mathbb{R}}$  der kleinste Vektorraum ist, der  $\sigma$  enthält.

Die *Dimension* eines Kegels ist die Dimension des kleinsten Vektorraums, der den Kegel enthält.

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich Gitterkegel. Deswegen reicht es, als umgebenden Vektorraum  $N_{\mathbb{Q}}$  zu betrachten.

Man kann jeden Kegel  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen:

$$\sigma = \bigcap_{i=1}^n \{v \in N_{\mathbb{Q}} : \langle u_i, v \rangle \geq 0\},$$

wobei  $u_i \in M \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Ist  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  ein Kegel, so ist  $\sigma^{\vee} := \{u \in M_{\mathbb{Q}} : \langle u, v \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma\} \subset M_{\mathbb{Q}}$  der zu  $\sigma$  *duale Kegel*.

Ist  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  ein polyedraler (Gitter-)Kegel, so ist auch  $\sigma^{\vee} \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein polyedraler (Gitter-)Kegel. Es gilt  $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$ . Ein Kegel ist genau dann spitz, wenn sein dualer Kegel volldimensional ist.

Eine *Seite* eines Kegels  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  ist der Schnitt von  $\sigma$  mit einer Hyperebene, so dass  $\sigma$  in einem Halbraum der Hyperebene liegt. Dies ist auch ein Kegel.

Zu einem spitzen Kegel  $\sigma$  bezeichne  $\sigma(k)$  die Menge der  $k$ -dimensionalen Seiten von  $\sigma$ . Die 1-dimensionalen Seiten eines Kegels heißen *Strahlen*.

Sei  $\rho \in \sigma(1)$  ein Strahl. Der Erzeuger des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $\rho \cap N$  heißt *primitiver Gittervektor* und wird im Folgenden mit  $u_{\rho}$  bezeichnet. Die  $(d-1)$ -dimensionalen Seiten eines Kegels heißen *Facetten*.

## 1.3 Gittermonoide und affine torische Varietäten

**Definition 1.3.1.** Ein Monoid  $S \subset M$  heißt *Gittermonoid*, wenn  $S$  endlich erzeugt ist und  $M = S + (-S)$  gilt.

Sei  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  ein Kegel. Dann besagt das Lemma von Gordan, dass das Monoid  $S_{\sigma} := \sigma^{\vee} \cap M$  endlich erzeugt ist, d.h. es gibt  $m_1, \dots, m_l \in S_{\sigma}$ , so dass

$$S_{\sigma} = \left\{ \sum_{i=1}^l a_i m_i : a_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wir betrachten nun den Morphismus von torischen Varietäten

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{C}^*)^d &\longrightarrow \mathbb{C}^l \\ t := (t_1, \dots, t_d) &\longmapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_l}(t)) \end{aligned}$$

und bezeichnen den Zariski-Abschluss des Bildes von  $\varphi$  mit  $U_\sigma$ . Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass  $U_\sigma$  eine torische Varietät ist, wobei der Standardtorus  $\mathbb{T}^d$  durch  $\varphi$  eingebettet ist. Die Einschränkung der Koordinatenfunktionen von  $\mathbb{C}^l$  auf  $U_\sigma$  sind die Fortsetzungen der Funktionen  $\chi^{m_i}, i \in \{1, \dots, l\}$ . Somit lässt sich auch jeder Charakter  $\chi^m, m \in S_\sigma$ , auf  $U_\sigma$  fortsetzen. Und da  $U_\sigma$  die kleinste affine Varietät ist, die das Bild von  $\varphi$  enthält, ist  $U_\sigma$  auch die kleinste Varietät, auf der die Funktionen  $\chi^m, m \in S_\sigma$ , definiert sind:  $U_\sigma = \text{Spec } \mathbb{C}[S_\sigma]$ .

## 1.4 Normale torische Varietäten

In der algebraischen Geometrie benötigt man die Eigenschaft der Normalität unter anderem dafür, Singularitäten einer Varietät zu kontrollieren:

**Definition 1.4.1.** Eine affine Varietät heißt *normal*, wenn ihre lokalen Ringe normal, d.h. ganz abgeschlossen in ihrem Quotientenkörper, sind. Insbesondere ist also eine affine Varietät normal, wenn ihr Koordinatenring normal ist.

In der Konvexgeometrie ist der zugehörige Begriff der Folgende:

**Definition 1.4.2.** Ein Gittermonoid  $S \subset M_\mathbb{Q}$  heißt *saturiert*, wenn aus  $\sum_{i=1}^l a_i m_i \in M, a_i > 0, m_i \in S$  schon  $\sum_{i=1}^l a_i m_i \in S$  folgt.

**Proposition 1.4.3.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $S$  ist saturiert.
- (2) Aus  $km \in S, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , folgt  $m \in S$ .
- (3)  $S = S_\sigma$  mit einem spitzen Kegel  $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz (1)  $\Leftrightarrow$  (3) ist klar. Sei nun  $S$  saturiert und  $km \in S \cap M$  mit  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Sind  $m_1, \dots, m_l$  Erzeuger von  $S$ , so folgt  $km = \sum_{i=1}^l a_i m_i$  mit  $a_i > 0, m_i \in S$ . Also ist  $m = \sum_{i=1}^l \frac{a_i}{k} m_i$ . Da  $S$  saturiert ist, folgt  $m \in S$ .

Sei nun (2) erfüllt und  $\sum_{i=1}^l a_i m_i \in M$ , wobei  $a_i > 0$  und  $m_i \in S$ . Hier ist  $a_i \in \mathbb{Q}$ , deswegen gibt es eine natürliche Zahl  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

so dass  $ka_i \in \mathbb{N} \forall i \in \{1, \dots, l\}$ . Folglich ist  $\sum_{i=1}^l ka_i m_i \in M \cap S$ . Wegen (2) ist auch  $\sum_{i=1}^l a_i m_i \in S$ , d.h.  $S$  ist saturiert.  $\square$

Ist  $S \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gittermonoid, so ist  $\mathbb{C}[S]$  genau dann normal, wenn  $S$  saturiert ist ([CLS91], I.3.5). Insbesondere ist also  $U_{\sigma} = \text{Spec } \mathbb{C}[S_{\sigma}]$  eine normale Varietät.

## 1.5 Fächer und torische Varietäten

Bisher haben wir nur normale affine torische Varietäten konstruiert. Dies entsprach auf der Seite der Konvexgeometrie der Definition eines Kegels. Beliebige torische Varietäten haben eine Überdeckung von affinen torischen Varietäten. Deswegen überrascht es nicht, dass auch die Kategorie der Kegel nun wie folgt erweitert wird:

**Definition 1.5.1.** Ein *Fächer*  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{Q}}$  ist eine Menge endlich vieler spitzer polyhedraler Gitterkegel in  $N_{\mathbb{Q}}$ , so dass der Schnitt je zweier Kegel und die Seiten jedes Kegels wieder in  $\Sigma$  enthalten sind. Wir bezeichnen mit  $\Sigma(k)$  die Menge der  $k$ -dimensionalen Kegel von  $\Sigma$ . Ein  $(d-1)$ -dimensionaler Kegel eines vollständigen Fächers heißt *Wand*. Der *Träger*  $\text{supp}(\Sigma)$  eines Fächers ist die Vereinigung aller Kegel.

Ein *Morphismus von Fächern*  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{Q}}$  und  $\Sigma'$  in  $N'_{\mathbb{Q}}$  ist ein Morphismus von  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $\varphi : N \rightarrow N'$ , wobei die Fortsetzung von  $\varphi$  auf  $N_{\mathbb{Q}}$  jeden Kegel  $\sigma \in \Sigma$  in einen Kegel von  $\Sigma'$  abbildet.

Jede Seite eines Kegels ist selbst wieder ein Kegel, d.h. ist  $\tau \subset \sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  eine Seite, so gibt es ein  $u \in S_{\sigma}$  mit  $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ . Dann gilt weiter  $\mathbb{C}[S_{\tau}] = \mathbb{C}[S_{\sigma}]_{\chi^u}$ . Folglich ist  $U_{\tau} = (U_{\sigma})_{\chi^u}$  offen in  $U_{\sigma}$ . Sind nun  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  zwei Kegel eines Fächers  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{Q}}$ , so ist  $U_{\sigma \cap \sigma'}$  sowohl in  $U_{\sigma}$  als auch in  $U_{\sigma'}$  offen.

**Definition 1.5.2.** Sei  $\Sigma$  ein Fächer in  $N_{\mathbb{Q}}$ . Die normale torische Varietät, die man durch Verkleben der normalen affinen torischen Varietäten  $U_{\sigma}$  entlang der offenen Untervarietäten  $U_{\sigma \cap \sigma'}$ ,  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ , erhält, heißt *die zum Fächer assoziierte torische Varietät*  $X_{\Sigma}$ . Der zugehörige Torus ist  $T_N = \text{Spec } \mathbb{C}[M]$ .

Die Kategorien der normalen torischen Varietäten und die der Fächer sind äquivalent, d.h. zu jeder normalen torischen Varietät erhält man genau einen Fächer.

**Beispiel 1.5.3.** (1) Der Fächer zur affinen torischen Varietät  $\mathbb{C}^d$  ist der positive Orthant  $\mathbb{N}^d$ .

- (2) Der Fächer zur projektiven torischen Varietät  $\mathbb{P}^d$  besteht aus den Strahlen  $e_1, \dots, e_d, -\sum_{i=1}^d e_i$  sowie den Kegeln, die von allen echten Teilmengen aus diesen  $d + 1$  Vektoren erzeugt werden. Dabei bezeichnet  $\{e_1, \dots, e_d\} \subset \mathbb{Z}^d$  die Standardbasis von  $\mathbb{Q}^d$ . Hier gilt also  $\text{supp}(\Sigma) = N_{\mathbb{Q}}$ . Deswegen sagen wir, der Fächer zu  $\mathbb{P}^n$  ist *vollständig*.
- (3) Der Fächer zur projektiven torischen Varietät  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  besteht aus den Strahlen  $\pm e_1, \pm e_2$ , dem Punkt 0 sowie den 4 2-dimensionalen Kegeln, die von den Paaren  $\pm e_1, \pm e_2$  erzeugt werden. Auch er ist vollständig.

## 1.6 Einige Eigenschaften torischer Varietäten

Viele Eigenschaften von torischen Varietäten lassen sich an ihrem Fächer ablesen:

**Definition 1.6.1.** Ein Gitterkegel  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  heißt *glatt*, wenn sich die Menge  $\{u_{\rho} : \rho \in \sigma(1)\}$  zu einer Gitterbasis von  $N$  fortsetzen lässt.

Ein Fächer  $\Sigma$  heißt *glatt*, wenn jeder Kegel  $\sigma \in \Sigma$  glatt ist.

**Proposition 1.6.2** ([Oda88], Theorem 1.10). *Eine torische Varietät ist genau dann glatt, wenn ihr Fächer glatt ist.*

Ist  $\sigma \in \Sigma$  ein Kegel und  $v \in \sigma \cap N$  ein Gitterpunkt im Inneren von  $\sigma$ , d.h.  $\langle u, v \rangle > 0 \forall u \in \sigma^{\vee} \setminus \{0\}$ , so ist der Grenzwert  $x_{\sigma}$  der 1-Parametergruppe  $\lambda^v : \mathbb{C}^* \rightarrow T_N$  für  $t \rightarrow 0$  wohldefiniert und unabhängig von der Wahl von  $v \in \sigma$ . Der Bahnabschluss  $\mathcal{V}_{\sigma}$  der  $T_N$ -Bahn durch  $x_{\sigma}$  besteht aus den Bahnen von  $x_{\sigma'}$ , wobei  $\sigma \subset \sigma'$  ist. Die Menge der Kegel von  $\Sigma$ , die  $\sigma$  enthalten, wird auch als der *Stern*  $\text{stern}(\sigma)$  von  $\sigma$  bezeichnet.

Es gibt eine Korrespondenz zwischen den  $k$ -dimensionalen Kegeln  $\sigma \in \Sigma$  und den  $(d - k)$ -dimensionalen Bahnabschlüssen  $\mathcal{V}_{\sigma}$ .

Insbesondere entsprechen die Strahlen  $\rho \in \Sigma(1)$  den torusinvarianten Primdivisoren  $\mathcal{V}_{\rho}$ . Da  $\mathcal{V}_{\rho} \cap \mathcal{V}_{\rho'}$  aus allen Bahnen  $T \cdot x_{\sigma}$  besteht, wobei  $\rho, \rho' \in \sigma \in \Sigma$ , gilt  $\mathcal{V}_{\rho} \cap \mathcal{V}_{\rho'} = \emptyset$ , falls  $\rho$  und  $\rho'$  in keinem gemeinsamen Kegel  $\sigma \in \Sigma$  liegen.

Außerdem ist der Bahnabschluss der Bahn von  $x_0$  ganz  $X$ . Deswegen ist die Bahn von  $x_0$  der Torus  $T_N$ , und  $X_{\Sigma}$  ist die Vereinigung von  $T_N$  und den torusinvarianten Primdivisoren.

Die von den torusinvarianten Primdivisoren  $\mathcal{V}_{\rho}, \rho \in \Sigma(1)$ , erzeugte freie abelsche Gruppe wird mit  $T_N \text{Div}(X)$  bezeichnet.

**Beispiel 1.6.3.** Der Fächer von  $\mathbb{P}^2$  besitzt den Strahl  $\rho = \mathbb{Q}_{>0} \cdot e_1$ . Ein innerer Gitterpunkt in ihm ist  $e_1$ . Die 1-Parametergruppe von  $e_1$  ist die Abbildung  $\lambda^{e_1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{P}^2; t \mapsto [1 : t^1 : t^0] = [1 : t : 1]$ . Ihr Grenzwert für  $t \rightarrow 0$  ist der Punkt  $x_\rho = [1 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^2$ . Die zugehörige Bahn ist  $\mathbb{T}^2 \cdot x_\rho = \{[1 : 0 : t] \in \mathbb{P}^2 : t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$ . Eine abgeschlossene Menge in der kompakten torischen Varietät  $\mathbb{P}^2$  muss selbst wieder kompakt sein, deswegen ist ihr Abschluss

$$\overline{\mathbb{T}^2 \cdot x_\rho} = \mathbb{T}^2 \cdot x_\rho \cup [1 : 0 : 0] \cup [0 : 0 : 1] \cong \mathbb{P}^1.$$

Die zwei zusätzlichen Punkte  $[1 : 0 : 0]$  und  $[0 : 0 : 1]$  sind die Bahnen, die zu den an  $\rho$  anliegenden Kegeln  $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$  und  $\sigma_2 = \langle e_1, -e_1 - e_2 \rangle$  gehören:

$$[1 : 0 : 0] = x_{\sigma_1}, [0 : 0 : 1] = x_{\sigma_2}.$$

## 1.7 Homogene Koordinaten

Im Folgenden betrachten wir eine weitere Möglichkeit (vgl. [Cox03]), zu einem Fächer  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{Q}}$  eine torische Varietät zu konstruieren.

Es sei in diesem Abschnitt stets  $|\Sigma(1)| = l$ .

Die Koordinaten von  $\mathbb{C}^l$  seien mit  $t_\rho, \rho \in \Sigma(1)$ , bezeichnet. Zu einem Kegel  $\sigma \in \Sigma$  sei

$$t^{\hat{\sigma}} := \prod_{\rho \notin \sigma(1)} t_\rho \in \mathbb{C}[t_\rho, \rho \in \Sigma(1)].$$

Wir definieren

$$Z := \mathbb{V}(t^{\hat{\sigma}}, \sigma \in \Sigma) \subset \mathbb{C}^l.$$

Tatsächlich ist  $Z$  die Vereinigung von Koordinatenuntervektorräumen, was man an folgender Darstellung erkennt:

**Definition 1.7.1.** Eine Teilmenge  $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\} \subset N$  der Menge von primitiven Erzeugern  $\{u_1, \dots, u_l\}$  der Strahlen  $\Sigma(1)$  heißt *primitiv*, wenn sie in keinem Kegel von  $\Sigma$  enthalten ist, jede echte Teilmenge davon jedoch schon.

**Proposition 1.7.2.** *Es ist nun*

$$Z = \bigcup_{\substack{\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\} \\ \text{primitiv}}} \mathbb{V}(t_{i_1}, \dots, t_{i_k}).$$

*Beweis.* Sei zunächst  $x \in Z = \mathbb{V}(t^{\hat{\sigma}}, \sigma \in \Sigma)$ , d.h. zu jedem Kegel  $\sigma$  gibt es einen Strahl  $\rho(\sigma) \notin \sigma$ , so dass  $x \in \mathbb{V}(t_{\rho(\sigma)})$ . Wir definieren  $I := \{\rho(\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$  und bemerken, dass  $I$  in keinem Kegel enthalten ist. Indem wir Strahlen aus  $I$  herausnehmen, erhalten wir schließlich eine Teilmenge  $J \subset I$ , die immer noch in keinem Kegel enthalten ist, so dass aber für jedes  $\rho \in J$  die Menge  $J \setminus \rho$  dagegen schon in einem Kegel enthalten ist. Die zu  $J$  passende Menge von primitiven Gittervektoren ist also primitiv, und es gilt

$$x \in \bigcap_{\rho \in J} \mathbb{V}(t_{\rho}) \subset \bigcup_{I \text{ primitiv}} \bigcap_{u_{\rho} \in I} \mathbb{V}(t_{\rho}) = \bigcup_{\substack{I = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\} \\ \text{primitiv}}} \mathbb{V}(t_{i_1}, \dots, t_{i_k}).$$

Nun sei  $x \in \bigcup \mathbb{V}(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ , wobei die Vereinigung über alle primitiven Mengen läuft. Insbesondere gibt es eine primitive Menge  $I$ , so dass  $x \in \mathbb{V}(t_{\rho}) \forall \rho \in I$ . Sei  $\sigma \in \Sigma$  ein beliebiger Kegel. Da  $I$  primitiv ist, ist  $I \not\subset \sigma$ , d.h. es gibt ein  $u_{\rho} \in I$  mit  $\rho \notin \sigma(1)$ . Also ist  $x \in \bigcup_{\rho \notin \sigma} \mathbb{V}(t_{\rho})$  für alle Kegel  $\sigma \in \Sigma$ . Deswegen ist  $x \in \mathbb{V}(t^{\hat{\sigma}}, \sigma \in \Sigma)$ .  $\square$

Nun definieren wir noch eine Gruppe  $G$ , die auf  $\mathbb{C}^l \setminus Z$  wirkt:

$$G = \left\{ (\mu_1, \dots, \mu_l) \in (\mathbb{C}^*)^l : \prod_{i=1}^l \mu_i^{\langle m, u_i \rangle} = 1 \forall m \in M \right\} \subset (\mathbb{C}^*)^l.$$

Da  $(\mathbb{C}^*)^l$  in natürlicher Weise auf  $\mathbb{C}^l$  wirkt, wirkt auch  $G$  auf  $\mathbb{C}^l$ .  $Z$  ist die Vereinigung von Koordinatenuntervektorräumen, somit wirkt  $G \subset (\mathbb{C}^*)^l$  sogar auf  $\mathbb{C}^l \setminus Z$ .

Wir betrachten nun den Morphismus von torischen Varietäten

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{T}^l &\longrightarrow \mathbb{T}^d \\ (\mu_1, \dots, \mu_l) &\longmapsto \left( \prod_{i=1}^l \mu_i^{\langle m_j, u_i \rangle} \right)_{1 \leq j \leq d}, \end{aligned}$$

wobei  $\{m_1, \dots, m_d\}$  eine Gitterbasis von  $M$  ist. Es gilt  $\text{Ker}(\varphi) = G$  nach Definition von  $G$ . Wegen  $\text{lin}(u_1, \dots, u_l) = N_{\mathbb{Q}}$  ist  $\varphi$  auch surjektiv und es gilt  $\mathbb{T}^d \cong \mathbb{T}^l / G$ . Da  $Z$  Vereinigung von Koordinatenuntervektorräumen ist, folgt  $\mathbb{T}^d \cong \mathbb{T}^l / G \subset (\mathbb{C}^l \setminus Z) / G = X_{\Sigma}$ .

Außerdem wirkt  $\mathbb{T}^d$  auf  $X_{\Sigma}$ , wie oben bemerkt. Der Quotient  $X_{\Sigma}$  ist normal, weil  $\mathbb{C}^l \setminus Z$  normal ist und kategorische Quotienten von normalen Varietäten wieder normal sind.

Hieraus ergibt sich das folgende Theorem, das um 1990 unabhängig von verschiedenen Mathematikern gefunden und bewiesen wurde (Victor Batyrev, David Cox [Cox95], Jonathan Fine, Ian Musson [Mus94] und eine analytische Version in Kapitel 6 von Michèle Audin [Aud91]):

**Theorem 1.7.3.** (1) *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus zwischen  $X$  und dem kategorischen Quotienten von  $\mathbb{C}^l \setminus Z$  mit  $G$ .*

(2)  *$X$  ist der geometrische Quotient von  $\mathbb{C}^l \setminus Z$  mit  $G$  genau dann, wenn  $\Sigma$  simplizial ist, d.h. jeder Kegel  $\sigma \in \Sigma(k)$  wird von genau  $k + 1$  Vektoren erzeugt.*

Hieraus folgt

**Proposition 1.7.4.** *Sei  $\Sigma$  ein Fächer in  $N_{\mathbb{Q}}$ , und seien  $u_1, \dots, u_l \in N$  die primitiven Erzeuger der Strahlen  $\Sigma(1)$ . Dann gilt*

$$G = \left\{ \left( e^{2\pi i \alpha_1}, \dots, e^{2\pi i \alpha_l} \right) : 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_l < 1, \sum_{i=1}^l \alpha_i u_i \in N \right\} \\ \cdot \left\{ (2^{k_1}, \dots, 2^{k_l}) \in (\mathbb{R}_{>0})^l : k_1, \dots, k_l \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^l k_i u_i = 0 \right\}.$$

*Dies ist ein direktes Produkt. Die erste Klammer beschreibt die Torsionsuntergruppe, die zweite ist isomorph zu  $(\mathbb{C}^*)^{l-d}$ .*

*Beweis.* Es ist

$$G = \left\{ (\mu_1, \dots, \mu_l) \in (\mathbb{C}^*)^l : \prod_{i=1}^l \mu_i^{\langle m, u_i \rangle} = 1 \quad \forall m \in M \right\}.$$

Sei nun  $\mu_j = 2^{k_j} e^{2\pi i \alpha_j}$  mit  $k_j \in \mathbb{R}, \alpha_j \in [0, 1) \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}$ . Dann gilt

$$G = \left\{ (2^{k_j} e^{2\pi i \alpha_j})_{1 \leq j \leq l} \in (\mathbb{C}^*)^l : \prod_j 2^{k_j \langle m, u_j \rangle} \cdot e^{2\pi i \sum_j \langle m, \alpha_j u_j \rangle} = 1 \quad \forall m \right\} \\ = \left\{ (2^{k_j} e^{2\pi i \alpha_j})_{1 \leq j \leq l} \in (\mathbb{C}^*)^l : \langle m, \sum_j k_j u_j \rangle = 0 \text{ und} \right. \\ \left. \langle m, \sum_j \alpha_j u_j \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall m \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ (2^{k_j} e^{2\pi i \alpha_j})_{1 \leq j \leq l} \in (\mathbb{C}^*)^l : \sum_j k_j u_j = 0, \sum_j \alpha_j u_j \in N \right\} \\
 &= \left\{ (2^{k_1}, \dots, 2^{k_l}) \in (\mathbb{R}_{>0})^l : \sum_j k_j u_j = 0 \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ (e^{2\pi i \alpha_1}, \dots, e^{2\pi i \alpha_l}) \in (\mathbb{C}^*)^l : \sum_j \alpha_j u_j \in N \right\}.
 \end{aligned}$$

Wegen  $\dim \text{lin}(u_1, \dots, u_l) = d$  hat das homogene Gleichungssystem  $\sum_{i=1}^l k_i u_i = 0$  den Rang  $d$ . Somit ist die zweite Teilmenge isomorph zu  $(\mathbb{C}^*)^{l-d}$ .  $\square$

**Korollar 1.7.5.** *Ist  $\Sigma$  ein  $d$ -dimensionaler vollständiger Fächer mit genau  $d+1$  Strahlen, so ist die zugehörige projektive torische Varietät  $X_\Sigma$  ein Quotient eines gewichtet projektiven Raums*

$$\mathbb{P}^d(k_1, \dots, k_{d+1}) := \mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\} / \{(t^{k_1}, \dots, t^{k_{d+1}}) : t \in \mathbb{C}^*\},$$

d.h.

$$X_\Sigma = \mathbb{P}^d(k_1, \dots, k_{d+1}) / H$$

mit einer Untergruppe  $H \subset (\mathbb{C}^*)^{d+1}$  und  $k_1, \dots, k_{d+1} \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Seien  $u_1, \dots, u_{d+1}$  die Erzeuger der Strahlen von  $\Sigma$ . Die einzige primitive Teilmenge  $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_{d+1}}\} \subset \{u_1, \dots, u_{d+1}\}$  ist die Menge  $\{u_1, \dots, u_{d+1}\}$  selbst. Deswegen ist  $Z = \{0\}$ . Der Rang des Moduls  $\{(k_1, \dots, k_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} k_i u_i = 0\}$  ist eins. Sei  $(k_1, \dots, k_{d+1}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$  ein Erzeuger des freien Moduls. Dann ist  $G = H \cdot \{(t^{k_1}, \dots, t^{k_{d+1}}) \in (\mathbb{C}^*)^{d+1} : t \in \mathbb{C}^*\}$ , wobei

$$H = \left\{ (e^{2\pi i \alpha_1}, \dots, e^{2\pi i \alpha_{d+1}}) : 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{d+1} < 1, \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i u_i \in N \right\}.$$

Hieraus folgt  $X_\Sigma = \mathbb{P}^d(k_1, \dots, k_{d+1}) / H$ .  $\square$

**Korollar 1.7.6.** *Ist  $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$  ein  $d$ -dimensionaler simplizialer Gitterkegel, d.h. er wird aufgespannt von  $d$  primitiven Gittervektoren  $u_1, \dots, u_d \in N_\mathbb{Q}$ , so ist die zugehörige projektive torische Varietät  $X_\sigma$  der geometrische Quotient von  $\mathbb{C}^d$  mit der endlichen Gruppe  $G \cong \mathbb{Z}^d / (u_1 \mathbb{Z} + \dots + u_d \mathbb{Z})$ .*

*Insbesondere ist  $X_\sigma \cong \mathbb{C}^d$ , falls  $\sigma$  glatt ist. Dies liefert einen Beweis für Proposition 1.6.2.*

*Beweis.* In einem Kegel gibt es keine primitive Teilmengen, somit ist  $Z = \emptyset$ . Außerdem hat das homogene Gleichungssystem

$\sum_{i=1}^d k_i u_i = 0$  nur die triviale Lösung. Somit gilt mit Proposition 1.7.4:

$$G = \left\{ \left( e^{2\pi i \alpha_1}, \dots, e^{2\pi i \alpha_d} \right) : 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_d < 1, \sum_{i=1}^d \alpha_i u_i \in N \right\}.$$

Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^d &\longrightarrow G \\ v &\longmapsto (e^{2\pi i \alpha_1}, \dots, e^{2\pi i \alpha_d}), \text{ wobei } v = \sum_{i=1}^d \alpha_i u_i. \end{aligned}$$

Sein Kern ist das von  $u_1, \dots, u_d$  aufgespannte Untergitter von  $\mathbb{Z}^d$ , sein Bild ist  $G$ . Somit erhalten wir  $G \cong \mathbb{Z}^d / (u_1 \mathbb{Z} + \dots + u_d \mathbb{Z})$ .  $\square$

**Beispiel 1.7.7.** Die primitiven Vektoren der Strahlen im Fächer von  $\mathbb{C}^d$  sind  $e_1, \dots, e_d$ . Definiere nun  $e_0 := \sum_{i=1}^d e_i$  und den Fächer  $\Sigma$ , dessen Kegel aus allen echten Teilmengen von  $\{e_0, \dots, e_d\}$  außer der Teilmenge  $\{e_1, \dots, e_d\}$  aufgespannt werden.

Ein Vektor  $(\mu_0, \dots, \mu_d) \in (\mathbb{C}^*)^{d+1}$  ist genau dann in  $G$ , wenn  $\mu_0 \mu_1 = \dots = \mu_0 \mu_d = 1$  ist. Also ist  $G = \{(\mu^{-1}, \mu, \dots, \mu) : \mu \in \mathbb{C}^*\} \subset \mathbb{C}^{d+1}$ , und  $G$  wirkt auf  $\mathbb{C}^{d+1}$  durch  $\mu \cdot (t_0, t_1, \dots, t_d) = (\mu^{-1} t_0, \mu t_1, \dots, \mu t_d)$ .

Da  $\{e_1, \dots, e_d\}$  die einzige primitive Menge von primitiven Gittervektoren ist, folgt  $Z = \mathbb{V}(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^{d+1}$ . Deswegen ist  $\mathbb{C}^{d+1} \setminus Z = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^d \setminus \{0\})$  und  $X_\Sigma = (\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^d \setminus \{0\})) / G$ .

Sei  $(t_0, \dots, t_d)$  ein Vertreter einer Restklasse  $[(t_0, \dots, t_d)] \in X_\Sigma$ , d.h.  $t := (t_1, \dots, t_d) \neq 0$ . Ist  $t_0 \neq 0$ , so folgt nach Wirkung mit  $(t_0^{-1}, t_0, \dots, t_0) \in G : [(t_0, t)] = [(1, t_0 t)]$ . Ist dagegen  $t_0 = 0$ , so folgt nach Wirkung mit  $(\mu^{-1}, \mu, \dots, \mu) \in G : [(t_0, t)] = [(0, \mu t)]$ .

Der Morphismus von torischen Varietäten

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^{d+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ (t_0, t) &\longmapsto t_0 t \end{aligned}$$

induziert einen Morphismus  $X_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^d$ , da  $\varphi(g \cdot (t_0, t)) = \varphi(\mu^{-1} t_0, \mu t) = t_0 t = \varphi(t_0, t)$ . Dabei ist die Faser von  $0 \in \mathbb{C}^d$  nach den obigen Überlegungen der projektive Raum  $\mathbb{P}^{d-1}$  und die Faser jedes anderen Punktes der Punkt  $[(t_0, t)] \in X_\Sigma$ .

Deswegen ist  $X_\Sigma$  die Aufblasung von  $\mathbb{C}^d$  im Punkt 0.

Allgemeiner ist die Aufblasung von  $X_\Sigma$  in  $\mathcal{V}_\sigma$  die torische Varietät  $X_{\Sigma'}$ , wobei man  $\Sigma'$  wie folgt aus  $\Sigma$  erhält: Ist  $\sigma = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ , so sei  $u_0 := u_1 + \dots + u_n$ . Nun betrachtet man alle Teilmengen von  $\{u_0, \dots, u_n\}$  außer der Teilmenge  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . Die davon aufgespannten Kegel zusammen mit dem Fächer  $\Sigma \setminus \sigma$  ergeben den Fächer  $\Sigma'$ . Man nennt ihn die *baryzentrische Unterteilung* von  $\Sigma$ .

## 1.8 Die Klassen- und die Picardgruppe

Im Folgenden sei  $\Sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  stets ein vollständiger Fächer und  $X = X_\Sigma$  die zugehörige torische Varietät. Mit  $\mathbb{C}(X)$  bezeichnen wir den Körper der rationalen Funktionen auf  $X$  und mit  $\text{Div}(X)$  die Menge der Weil-Divisoren von  $X$ , d.h. die frei erzeugte abelsche Gruppe der abgeschlossenen Untervarietäten der Codimension 1.

**Definition 1.8.1.** Zwei Weil-Divisoren  $D, D' \in \text{Div}(X)$  heißen *linear äquivalent* (wir schreiben  $D \sim D'$ ), wenn es eine rationale Funktion  $f \in \mathbb{C}(X)$  gibt mit  $D - D' = \text{div}(f)$ . Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf  $\text{Div}(X)$ . Die induzierte Faktorgruppe  $\text{Cl}(X)$  heißt die *Klassengruppe* von  $X$ .

**Lemma 1.8.2.** Sei  $m \in M$ . Dann gilt  $\text{div}(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho$ .

*Beweis.* Für die Vielfachheit von  $\text{div}(\chi^m)$  auf  $\mathcal{V}_\rho$  reicht es, die offene affine Menge  $U_\rho = \text{Spec } \mathbb{C}[\rho^\vee \cap M] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{T}^{d-1}$  zu betrachten. Die Vielfachheit von  $\text{div}(\chi^m)$  ist die gleiche wie die von  $0 \times \mathbb{T}^{d-1}$  in  $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^{d-1}$ . Deswegen sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $d = 1$ . Dann ist die Vielfachheit von  $\chi^u$  bei 0 tatsächlich durch  $u \in \mathbb{Z}$  gegeben.  $\square$

*Bemerkung 1.8.3.* Da der Torus  $T_N$  einen faktoriellen Koordinatenring  $\mathcal{O}(T_N) = \mathbb{C}[M]$  hat, ist jeder Divisor auf  $T_N$  ein Hauptdivisor. Sei nun  $D \subset X_\Sigma$  ein Weil-Divisor. Dann gibt es  $0 \neq f \in \mathbb{C}(X_\Sigma)$ , so dass  $D' := D - \text{div}(f)$  den Torus nicht schneidet. Deswegen ist  $D' \sim D$  ein torusinvarianter Divisor. Jeder Weil-Divisor ist also zu einem torusinvarianten linear äquivalent. Deswegen gilt für eine torische Varietät  $X = X_\Sigma$ :

$$\text{Cl}(X) = \left\{ \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot \mathcal{V}_\rho \right\} / \sim .$$

Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow M \rightarrow T_N \text{Div}(X) = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot \mathcal{V}_\rho \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Dabei bildet die erste Abbildung  $m \in M$  auf den Hauptdivisor  $\text{div}(\chi^{-m}) \stackrel{1.8.2}{=} - \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho$  ab (die Wahl des Vorzeichen wird in Abschnitt 1.9 verständlich werden). Sie ist injektiv, weil  $X$  vollständig ist.

Die zweite Abbildung ist der kanonische Epimorphismus.

Aus der kurzen exakten Sequenz (1.1) lassen sich die Relationen ablesen, die die torusinvarianten Primdivisoren  $\mathcal{V}_\rho, \rho \in \Sigma(1)$ , in  $\text{Cl}(X)$  erfüllen. Es gilt nämlich

$$\sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m_i, u_\rho \rangle [\mathcal{V}_\rho] \stackrel{1.8.2}{=} [\text{div}(\chi^{m_i})] = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

wobei  $\{m_1, \dots, m_d\} \subset M$  eine Gitterbasis von  $M$  ist. Dies liefert  $d$  lineare Relationen für die  $|\Sigma(1)|$  Restklassen  $[\mathcal{V}_\rho], \rho \in \Sigma(1)$ . Also ist  $\text{Cl}(X)$  endlich erzeugt mit  $\text{rang}(\text{Cl}(X)) = |\Sigma(1)| - d$ .

**Definition 1.8.4.** Die Gruppe  $\text{Pic}(X) := \text{CDiv}(X) / \sim$  von Cartier-Divisoren modulo linearer Äquivalenz heißt die *Picardgruppe* von  $X$ . Ihr Rang  $\rho_X$  ist die *Picard-Zahl* von  $X$ . Außerdem bezeichnet  $T_N \text{CDiv}(\Sigma)$  die Menge aller torusinvarianten Cartier-Divisoren.

*Bemerkung 1.8.5.* Da jeder Cartier-Divisor ein Weil-Divisor ist, gilt  $\text{Pic}(X) \subset \text{Cl}(X)$ . Ist  $X$  glatt, so gilt sogar  $\text{Pic}(X) = \text{Cl}(X)$  ([Har77], II.6.11).

Analog zu der kurzen exakten Sequenz (1.1) bekommen wir auch für die Picardgruppe eine kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow M \rightarrow T_N \text{CDiv}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Wohingegen wir in (1.1) die torusinvarianten Weil-Divisoren einfach berechnen konnten, fehlt dies noch in (1.2). Deshalb wollen wir nun noch herausfinden, wann ein torusinvarianter Weil-Divisor sogar ein Cartier-Divisor ist.

**Proposition 1.8.6** ([Dan78]). *Sei  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  ein volldimensionaler Gitterkegel. Dann gilt  $T_N \text{CDiv}(U_\sigma) = \{\text{div}(\chi^m) : m \in M\}$  und  $\text{Pic}(U_\sigma) = 0$ .*

**Korollar 1.8.7.** *Es sei  $X = X_\Sigma$  mit einem Fächer  $\Sigma$ . Dann gilt  $\text{Pic}(X) = \text{Cl}(X)$  genau dann, wenn  $X$  glatt ist.*

*Beweis.* Wenn  $X$  glatt ist, folgt mit Bemerkung 1.8.5 schon  $\text{Pic}(X) = \text{Cl}(X)$ . Sei nun also  $\text{Pic}(X) = \text{Cl}(X)$ , d.h. jeder Weil-Divisor von  $X$  ist ein Cartier-Divisor. Wir wählen einen Kegel  $\sigma \in \Sigma$  und betrachten die offene Menge  $U_\sigma \subset X$ . Weil die Einschränkung  $\text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U_\sigma)$  surjektiv ist, ist auch jeder Weil-Divisor von  $U_\sigma$  ein Cartier-Divisor. Wegen Proposition 1.8.6 ist  $\text{Cl}(U_\sigma) = \text{Pic}(U_\sigma) = 0$ . Die kurze exakte Sequenz (1.1) impliziert, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow T_N \text{Div}(X) = \bigoplus_{\rho \in \sigma(1)} \mathbb{Z} \cdot \mathcal{V}_\rho \\ m &\longmapsto \text{div}(\chi^{-m}) \stackrel{1.8.2}{=} - \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho \end{aligned}$$

surjektiv ist. Also ist auch die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathbb{Z}^{|\sigma(1)|} \\ m &\longmapsto (\langle m, u_\rho \rangle)_{\rho \in \sigma(1)} \end{aligned}$$

surjektiv. Gleichzeitig ist sie die duale Abbildung zu

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}^{|\sigma(1)|} &\longrightarrow N \\ (a_\rho)_{\rho \in \sigma(1)} &\longmapsto \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho u_\rho. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass  $\Phi$  injektiv ist. Sei dazu  $a \in \text{Ker}(\Phi) \subset \mathbb{Z}^{|\sigma(1)|}$ . Die Koordinaten-Linearform  $t_\rho$  ist im Bild von  $\Phi^*$  enthalten, d.h. es gibt eine Linearform  $m \in M = N^*$  mit  $t_\rho = \Phi^*(m)$ . Deswegen gilt  $a_\rho = t_\rho(a) = \Phi^*(m)(a) = \langle m, \Phi(a) \rangle = \langle m, 0 \rangle = 0$  für alle  $\rho \in \sigma(1)$ .

Nun zeigen wir weiter, dass  $N/\Phi(\mathbb{Z}^{|\sigma(1)|})$  torsionsfrei ist. Sei  $x = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho u_\rho \in N \setminus \Phi(\mathbb{Z}^{|\sigma(1)|})$  mit  $a_\rho \in \mathbb{Q} \forall \rho \in \sigma(1)$ . Weil  $\Phi^*$  surjektiv ist, gibt es zu einem bestimmten  $\rho \in \sigma(1)$  eine Linearform  $m \in M = N^*$ , so dass  $\langle m, u_{\rho'} \rangle = 0, \langle m, u_\rho \rangle = 1 \forall \rho' \neq \rho$ . Dann gilt  $a_\rho = \langle m, \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho u_\rho \rangle = \langle m, x \rangle \in \mathbb{Z}$ . Da dies für jeden Strahl  $\rho \in \sigma(1)$  gilt, ist  $x \in \Phi(\mathbb{Z}^{|\sigma(1)|})$ .

Somit kann  $\{u_\rho\}_{\rho \in \sigma(1)}$  zu einer Gitterbasis von  $N$  ergänzt werden, d.h.  $\sigma$  ist glatt. Da dies für jeden Kegel  $\sigma \in \Sigma$  gilt, ist  $\Sigma$  ein glatter Fächer. Mit Proposition 1.6.2 folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 1.8.8.** *Sei  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$  ein torusinvarianter Weil-Divisor von  $X_\Sigma$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1)  $D$  ist ein Cartier-Divisor.
- (2)  $D|_{U_\sigma}$  ist ein Hauptdivisor für jeden Kegel  $\sigma \in \Sigma$ .

(3) Zu jedem Kegel  $\sigma \in \Sigma$  gibt es ein  $m_\sigma \in M$  mit  $-\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = c_\rho$  für alle  $\rho \in \sigma(1)$ .

*Beweis:* Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Proposition 1.8.6. Die umgekehrte Implikation gilt, weil die offenen Mengen  $U_\sigma, \sigma \in \Sigma$  die torische Varietät  $X_\Sigma$  überdecken.

Die Bedingung (2) ist wegen Proposition 1.8.6 äquivalent zu

$$\sum_{\rho \in \sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho = D|_{U_\sigma} = \operatorname{div}(\chi^{-m_\sigma}) \stackrel{1.8.2}{=} - \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m_\sigma, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho$$

mit einem  $m_\sigma \in M$  zu jedem Kegel  $\sigma \in \Sigma$ , d.h. zu jedem Kegel  $\sigma \in \Sigma$  gibt es ein  $m_\sigma \in M$  mit  $-\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = c_\rho$  für alle  $\rho \in \sigma(1)$ .  $\square$

**Korollar 1.8.9.** Sei  $\Sigma$  ein vollständiger Fächer. Dann ist  $\operatorname{Pic}(X_\Sigma)$  eine freie abelsche Gruppe.

*Beweis.* Wegen der kurzen exakten Sequenz (1.2) reicht es zu zeigen, dass für einen torusinvarianten Cartier-Divisor  $D = \sum c_\rho \mathcal{V}_\rho \in T_N \operatorname{CDiv}(X)$  und  $kD = \operatorname{div}(\chi^m), 0 < k \in \mathbb{N}$  auch  $D$  ein Hauptdivisor ist. Für  $\sigma \in \Sigma(d)$  ist die Einschränkung  $D|_{U_\sigma} = \sum_{\rho \in \sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$  von  $D$  wegen Korollar 1.8.8 ein Hauptdivisor.

Wegen Proposition 1.8.6 gibt es ein  $m' \in M$  mit  $D|_{U_\sigma} = \operatorname{div}(\chi^{m'})|_{U_\sigma} \stackrel{1.8.2}{=} \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m', u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho$ . Also ist  $c_\rho = \langle m', u_\rho \rangle \forall \rho \in \sigma(1)$ . Wegen Lemma 1.8.2 gilt außerdem  $kc_\rho = \langle m, u_\rho \rangle \forall \rho \in \Sigma(1)$ . Hieraus folgt  $\langle km' - m, u_\rho \rangle = 0 \forall \rho \in \sigma(1)$ . Weil  $\sigma$  volldimensional ist, folgt hieraus  $km' = m$ . Deswegen ist  $D = \operatorname{div}(\chi^{m'})$ .  $\square$

Ein torusinvarianter Weil-Divisor  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$  ist also genau dann ein Cartier-Divisor, wenn es zu jedem Kegel  $\sigma \in \Sigma(d)$  ein  $m_\sigma \in M$  gibt mit  $-\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = c_\rho \forall \rho \in \sigma(1)$ . Im Folgenden betrachten wir dies in einem anderen Licht.

**Definition 1.8.10.** Sei  $\Sigma$  ein Fächer in  $N_\mathbb{Q}$ . Eine Funktion  $h : \operatorname{supp}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stückweise linear* auf  $\operatorname{supp}(\Sigma)$  und *ganz* bezüglich  $N$ , wenn die Einschränkung von  $h$  auf jeden Kegel  $\sigma \in \Sigma$  linear und  $h|_M$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul-Homomorphismus ist, d.h.  $h|_\sigma(x) = \langle m_\sigma, x \rangle \forall x \in \sigma$  mit  $m_\sigma \in M$ .

Die Menge aller stückweise linearen ganzen Funktionen auf  $\Sigma$  wird mit  $\operatorname{SF}(\Sigma, N)$  bezeichnet. Im Folgenden schreiben wir statt stückweise linear und ganz oft nur stückweise linear.

*Bemerkung 1.8.11.* Eine stückweise lineare Funktion  $h \in \operatorname{SF}(\Sigma, N)$  ist also durch eine Menge  $\{m_\sigma \in M : \sigma \in \Sigma\}$  gegeben, wobei  $\langle m_\sigma, u \rangle = \langle m_{\sigma'}, u \rangle \forall u \in \sigma \cap \sigma'$ , d.h.  $m_\sigma - m_{\sigma'} \in (\sigma \cap \sigma')^\perp \cap M =:$

$M(\sigma \cap \sigma')$ . Wegen Korollar 1.8.8 können wir somit  $\text{SF}(\Sigma, N)$  mit  $\text{Pic}(X_\Sigma)$  identifizieren.

Umgekehrt kann es zu jedem volldimensionalen Kegel  $\sigma \in \Sigma(d) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_l\}$  nur ein  $m_\sigma \in M$  geben mit  $h|_\sigma(x) = \langle m_\sigma, x \rangle \forall x \in \sigma$ . Also kann man stückweise lineare Funktionen auf  $\Sigma$  einerseits mit torusinvarianten Cartier-Divisoren und andererseits mit dem Kern der Abbildung

$$\varphi: \bigoplus_{i=1}^l M \longrightarrow \bigoplus_{i < j} M/M(\sigma_i \cap \sigma_j) \quad (1.3)$$

$$(m_{\sigma_i})_i \mapsto (m_{\sigma_i} - m_{\sigma_j})_{i < j} \quad (1.4)$$

identifizieren. Es gilt  $T_N \text{CDiv}(X) \cong \text{SF}(\Sigma, N) \cong \text{Ker}(\varphi)$ .

Zu  $h \in \text{SF}(\Sigma, N)$  bezeichnen wir den zugehörigen Cartier-Divisor

$$- \sum_{\rho \in \Sigma(1)} h(u_\rho) \mathcal{V}_\rho$$

mit  $D_h$ . Umgekehrt definieren wir zu einem torusinvarianten Cartier-Divisor  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$  die zugehörige stückweise lineare Funktion  $h_D$  als die Abbildung, die  $x \in N_\mathbb{Q}$  auf  $-\langle m_\sigma, x \rangle$  abbildet, wobei  $m_\sigma \in M$  die Gleichungen  $-\langle m_\sigma, u_\rho \rangle = c_\rho \forall \rho \in \sigma(1)$  erfüllt.

## 1.9 Polytope

Ein sehr wichtiger und wohl der älteste Begriff der Konvexgeometrie ist das Polytop oder Vieleck. Zunächst werden in diesem Abschnitt rein konvexgeometrische Eigenschaften eines Polytops erklärt, bevor wir dann aus einem solchen einen Fächer, eine torische Varietät und einen Divisor konstruieren.

**Definition 1.9.1.** Ein *Polyeder* ist der Schnitt von endlich vielen Halbräumen. Ein beschränktes Polyeder heißt *Polytop*. Polytope sind die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten.

Die *Dimension* eines Polytops  $P \subset M_\mathbb{Q}$  ist die Dimension des kleinsten affinen Untervektorraums von  $M_\mathbb{Q}$ , der  $P$  enthält.

Eine *Seite* eines Polyeders  $P \subset M_\mathbb{Q}$  ist der Schnitt von  $P$  mit einer Hyperebene  $H \subset M_\mathbb{Q}$ , so dass  $P$  in einem der Halbräume von  $H$  liegt.

Jede Seite eines Polytops ist selbst wieder ein Polytop. Die Menge der  $k$ -dimensionalen Seiten von  $P$  wird mit  $P(k)$  bezeichnet.

Eine Seite  $s \subset P$  heißt *Facette*, wenn  $\dim(P) - \dim(s) = 1$ . Eine Seite  $s \subset P$  heißt *Ecke*, wenn  $\dim(s) = 0$ . Eine Seite  $s \subset P$  heißt *Kante*, wenn  $\dim(s) = 1$ .

Ein Polytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$ , dessen Ecken Gitterpunkte sind, heißt *Gitterpolytop*.

**Notation 1.9.2.** Ist  $\{a_1, \dots, a_d\}$  eine Gitterbasis für das Gitter  $M$ ,  $\{e_1, \dots, e_d\}$  die Standardbasis von  $\mathbb{Q}^d$  und  $\varphi : \mathbb{Q}^d \rightarrow M_{\mathbb{Q}}$  ein Vektorraumisomorphismus mit  $\varphi(e_i) = a_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ , so definieren wir für alle kompakten Mengen  $K \subset M_{\mathbb{Q}}$  das *Volumen bezüglich des Gitters  $M$*   $\text{vol}_M(K) := \text{vol}(\varphi^{-1}(K))$ . Hierbei ist  $\text{vol}$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{Q}^d$ . Weiter setzen wir  $\text{Vol}_M(P) := d! \text{vol}_M(P)$  und nennen es das *normalisierte Volumen bezüglich des Gitters  $M$* . Ist klar, um welches Gitter es sich handelt, lassen wir den Index  $M$  auch weg.

Außerdem sei im Folgenden stets  $\{e_1, \dots, e_d\} \subset M$  eine Gitterbasis von  $M$ .

**Definition 1.9.3** (Operationen mit Polytopen). Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein volldimensionales Gitterpolytop. Dann gibt es eine Menge von Paaren  $\{(u_F, c_F) : F \in P(d-1)\} \subset N \times \mathbb{Z}$ , so dass

$$P = \bigcap_{F \in P(d-1)} \{m \in M : \langle m, u_F \rangle \geq -c_F\}.$$

- Für  $k \geq 0$  bezeichnen wir mit  $kP$  das Polytop, das durch die Menge  $\{(u_F, kc_F) : F \in P(d-1)\} \subset N \times \mathbb{Z}$  gegeben ist.
- Ist  $Q \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein weiteres Gitterpolytop, so bezeichnen wir mit  $P+Q$  das Gitterpolytop  $\{p+q : p \in P, q \in Q\}$  und nennen es die *Minkowski-Summe* von  $P$  und  $Q$ . Im Fall  $Q = P$  stimmt dies mit der Definition von  $2P$  überein.
- Das *Innere*  $P^\circ$  ist die Menge  $\bigcap_{F \in P(d-1)} \{m \in M : \langle m, u_F \rangle > -c_F\}$ . Der *Rand* von  $P$  ist die Menge  $\partial P := P \setminus P^\circ$ .
- Ist  $0 \in P^\circ$ , so bezeichnet  $P^* = \{n \in N_{\mathbb{Q}} : \langle m, n \rangle \geq -1 \forall m \in P \cap M_{\mathbb{Q}}\} \subset N_{\mathbb{Q}}$  das zu  $P$  *duale Polytop*. Dies ist im Allgemeinen kein Gitterpolytop. Es gilt aber  $(P^*)^* = P$ . Hieraus folgt, dass es eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den  $k$ -dimensionalen Seiten von  $P$  und den  $(d-1-k)$ -dimensionalen Seiten von  $P^*$  gibt.

- Ist das duale Polytop eines Gitterpolytops  $P$  wieder ein Gitterpolytop, so heißt  $P$  *reflexiv*.

**Lemma 1.9.4.** Seien  $P_1, \dots, P_r \subset M_{\mathbb{Q}}$  Gitterpolytope,  $P = \sum_{i=1}^r P_i$  und  $\theta$  eine Seite von  $P$ . Dann gibt es zu  $i \in \{1, \dots, r\}$  genau eine Seite  $\theta_i \subset P_i$  von  $P_i$ , so dass  $\theta = \sum_{i=1}^r \theta_i$ .

*Beweis.* Sei  $u \in N$  und  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\langle m, u \rangle \geq -c \forall m \in P$  und  $\{m \in P : \langle m, u \rangle = -c\} = \theta$ . Dann gibt es ganze Zahlen  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\langle m, u \rangle \geq -c_i \forall m \in P_i$  und  $\theta_i := \{m \in P_i : \langle m, u \rangle = -c_i\} \neq \emptyset$ . Offensichtlich gilt  $c = \sum_{i=1}^r c_i$ ,  $\theta = \sum_{i=1}^r \theta_i$ , und  $\theta_i$  ist die einzige Seite von  $P_i$  mit diesen Eigenschaften.  $\square$

**Definition 1.9.5.** Ein Polytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  heißt

- *Simplex*, wenn  $|P(0)| = \dim(P) + 1$ . Wir sagen dazu auch  $\dim(P)$ -Simplex.
- *simplizial*, wenn jede Facette von  $P$  ein Simplex ist.
- *einfach*, wenn es zu jeder Ecke  $m \in P$  von  $P$  genau  $\dim(P)$  viele Facetten von  $P$  gibt, die  $m$  enthalten.

Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein konvexes Polytop mit Ecke  $v \in P$ . Da  $P$  nur endlich viele Ecken besitzt, gibt es eine Linearform  $u \in N_{\mathbb{Q}}$  und eine Zahl  $z \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\langle v, u \rangle > z$  und  $\langle v', u \rangle < z$  für alle Ecken  $v' \neq v$  von  $P$ . Die Menge  $P/v := P \cap \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u \rangle = z\}$  heißt die *Schnittfigur von  $P$  bei  $v$* . Ihre kombinatorische Struktur hängt nicht von der Wahl von  $u$  und  $z$  ab. Dies ist Inhalt der folgenden Proposition.

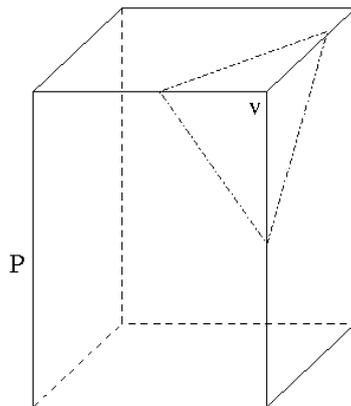


Abbildung 1.1: Die Schnittfigur  $P/v$  ist das gestrichelte Dreieck.

**Proposition 1.9.6** ([Zie95], 2.4). *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein konvexes Polytop mit Ecke  $v \in P$ . Dann gibt es eine Bijektion zwischen den  $k$ -dimensionalen Seiten von  $P$ , die  $v$  enthalten, und den  $(k - 1)$ -dimensionalen Seiten von  $P/v$ . Diese ist gegeben durch*

$$F \longmapsto F \cap \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u \rangle = z\}$$

$$P \cap \text{aff}(\{v\} \cup F') \longleftarrow F'$$

Dabei sei  $P/v = P \cap \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u \rangle = z\}$ ,  $\langle v, u \rangle > z$  und  $\langle v', u \rangle < z$  für alle Ecken  $v' \neq v$  von  $P$ .

**Korollar 1.9.7.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein  $d$ -dimensionales Polytop. Dann sind äquivalent:*

- (1)  $P$  ist einfach.
- (2) Zu jeder Ecke  $m \in P(0)$  ist die Schnittfigur  $P/m$  ein Simplex.
- (3) Zu jeder Ecke  $m \in P(0)$  gibt es genau  $d$  Kanten, die  $m$  enthalten.

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass  $P$  einfach ist. Sei  $m \in P$  eine beliebige Ecke von  $P$ . Dann ist die Schnittfigur  $P/m$  wegen Proposition 1.9.6 ein  $(d - 1)$ -dimensionales Polytop mit genau  $d$  Facetten. Weil jede Ecke dieses Polytops ein Schnitt von mindestens  $d - 1$  seiner Facetten ist, hat  $P/m$  genau  $d$  Ecken, d.h.  $P/m$  ist ein Simplex. Wegen Proposition 1.9.6 gibt es genau  $d$  Kanten von  $P$ , die  $m$  enthalten, d.h. (3) ist erfüllt.

Nun besitze  $P$  zu jeder Ecke  $m \in P(0)$  genau  $d$  Kanten, die  $m$  enthalten. Wieder betrachten wir die Schnittfigur  $P/m$ . Diese enthält wegen Proposition 1.9.6 genau  $d$  Ecken  $v_1, \dots, v_d$ . Dann sind  $\text{conv}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_d)$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$  die einzigen Facetten von  $P/m$ . Wegen Proposition 1.9.6 ist  $P$  einfach.  $\square$

**Definition 1.9.8.** Wir nennen zwei Gitterpolytope  $P, P'$  zueinander *äquivalent* und schreiben  $P \cong P'$ , wenn es eine *unimodulare Transformation*, d.h. eine Fortsetzung eines Gitterisomorphismus von  $M$  auf  $M_{\mathbb{Q}}$  gibt, die  $P$  auf  $P'$  abbildet.

Ist ein Polytop äquivalent zum Standardsimplex

$$\Delta_d := \text{conv}(0, e_1, \dots, e_d),$$

so nennen wir es *unimodular*.

Aus  $P \cong P'$  folgt  $\text{vol}_M(P) = \text{vol}_M(P')$ ,  $|P \cap M| = |P' \cap M|$  und  $|P^\circ \cap M| = |P'^\circ \cap M|$ .

**Definition 1.9.9.** Ein Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  heißt *normal*, wenn  $(kP) \cap M + (lP) \cap M = (k+l)P \cap M$  für alle  $k, l \in \mathbb{N}$  gilt.

Die Bedingung  $(kP) \cap M + (lP) \cap M \subset (k+l)P \cap M$  ist offensichtlich für jedes Gitterpolytop  $P$  erfüllt.

Wegen  $kP = P + \dots + P$  gibt es zu jedem Gitterpunkt  $m \in kP \cap M$  eines normalen Gitterpolytops Gitterpunkte  $m_1, \dots, m_k \in P \cap M$ , so dass  $m = \sum_{i=1}^k m_i$ .

**Beispiel 1.9.10.** Die einzigen Gitterpunkte des Gittersimplex  $P = \text{conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3)$  sind seine Ecken. Also ist der innere Gitterpunkt  $e_1 + e_2 + e_3 \in (2P)^\circ$  nicht Summe von Gitterpunkten aus  $P$ . Somit ist  $P$  nicht normal.

**Theorem 1.9.11** ([BGT97]). *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop der Dimension  $d \geq 2$ . Dann ist  $kP$  normal, falls  $k \geq d-1$ . Insbesondere ist jedes Gitterpolygon normal.*

**Definition 1.9.12.** Ein Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  heißt *sehr ample*, wenn zu jeder Ecke  $m \in P \cap M$  das in dieser Ecke aufgespannte Gittermonoid

$$S_m := \left\{ \sum_{m' \in P \cap M} c_{m'}(m' - m) : c_{m'} \in \mathbb{N} \right\}$$

saturiert ist.

**Proposition 1.9.13.** *Jedes normale Gitterpolytop ist sehr ample.*

*Beweis.* Sei  $m \in P \cap M$  eine Ecke eines normalen Gitterpolytops  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  und  $km' \in S_m$  für  $m' \in M$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Wegen  $km' \in S_m$  gibt es natürliche Zahlen  $c_u \in \mathbb{N}$ , so dass  $km' = \sum_{u \in P \cap M} c_u(u - m)$ . Wähle  $l \in \mathbb{N}$ , so dass  $kl \geq \sum_{u \in P \cap M} c_u$ . Dann gilt

$$km' + klm = \sum_{u \in P \cap M} c_u u + \left( kl - \sum_{u \in P \cap M} c_u \right) m \in (kl)P \cap M.$$

Folglich ist  $m' + lm \in lP \cap M$ . Weil  $P$  normal ist, gibt es nun Gitterpunkte  $\{m_1, \dots, m_l\} \subset P \cap M$ , so dass  $m' + lm = \sum_{i=1}^l m_i$ . Somit ist  $m' = \sum_{i=1}^l (m_i - m) \in S_m$ .  $\square$

**Korollar 1.9.14.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop der Dimension  $d \geq 2$ . Dann ist  $kP$  sehr ample, falls  $k \geq d-1$ . Insbesondere ist jedes Gitterpolygon sehr ample.*

*Beweis.* Dies folgt aus Theorem 1.9.11 und Proposition 1.9.13  $\square$

Zu jeder Seite  $s \subset P$  ist  $\sigma(s) = \{v \in N_{\mathbb{Q}} : \min_{u \in P} \langle v, u \rangle = \langle v, u' \rangle \forall u' \in s\} \subset N_{\mathbb{Q}}$  ein Kegel. Die Menge dieser Kegel definiert den *Normalenfächer*  $\Sigma(P)$  in  $N_{\mathbb{Q}}$ .

Ist zum Beispiel  $s \subset P$  eine Facette von  $P$ , so wird der Kegel  $\sigma(s)$  vom inneren Normalenvektor von  $s$  aufgespannt.

Es gilt  $\Sigma(P) = \Sigma_{kP+m}$  mit  $k > 0$  und  $m \in M_{\mathbb{Q}}$ .

**Definition 1.9.15.** Ein Polytop heißt genau dann *glatt*, wenn sein Normalenfächer glatt ist.

*Bemerkung 1.9.16.* Ein Polytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ist also genau dann glatt, wenn für jede Ecke die primitiven Gittervektoren der ausgehenden Kanten eine Gitterbasis bilden. Insbesondere ist dann für jede Ecke  $m \in P$  das in dieser Ecke aufgespannte Gittermonoid

$$S_m := \left\{ \sum_{m' \in P \cap M} c_{m'}(m' - m) : c_{m'} \in \mathbb{N} \right\}$$

saturiert, d.h.  $P$  ist sehr ample.

Dagegen ist es ein offenes Problem, ob Glattheit auch Normalität impliziert.

Neben dem Normalenfächer kann man zu einem Polytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  auch noch den von ihm *aufgespannten Fächer*  $\mathcal{F}(P)$  in  $M_{\mathbb{Q}}$  betrachten, bestehend aus den Kegeln  $\{r \cdot u : u \in s, r \geq 0\}$ , wobei  $s$  alle Seiten von  $P$  durchläuft. Diese beiden Fächer hängen über das duale Polytop zusammen:  $\Sigma(P) = \mathcal{F}(P^*)$ .

Im Rest dieses Abschnitts erläutern wir den Zusammenhang zwischen Cartier-Divisoren, Polytopen und stückweisen linearen Funktionen.

**Definition 1.9.17.** Zu einem Gitterpolytop  $P = \bigcap_{F \in P(d-1)} \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u_F \rangle \geq -c_F\} \subset M_{\mathbb{Q}}$  definieren wir den Weil-Divisor

$$D_P := \sum_{F \in P(d-1)} c_F \mathcal{V}_F \subset X_{\Sigma(P)},$$

wobei  $\mathcal{V}_F = \mathcal{V}_{\rho}$  und  $u_{\rho} = u_F$  ist.

*Bemerkung 1.9.18.* Aus  $P' := P + m$ ,  $m \in M$ , folgt somit  $D_{P'} = D_P - \sum_{F \in P(d-1)} \langle m, u_F \rangle D_F = D_P - \text{div}(\chi^m) \sim D_P$ .

**Proposition 1.9.19.** *Es gilt  $D_P \in \text{Pic}(X) \setminus \{0\}$ .*

*Beweis.* Jeder volldimensionale Kegel  $\sigma \in \Sigma(P)(d)$  gehört zu genau einer Ecke  $m_\sigma \in P$  von  $P$  und jeder Strahl  $\rho \in \Sigma(P)(1)$  zu genau einer Facette  $F_\rho \subset P$  von  $P$ . Für jeden Strahl  $\rho \in \sigma(1)$  ist  $F_\rho \ni m_\sigma$ , d.h.  $\langle m_\sigma, u_{F_\rho} \rangle = -c_{F_\rho} =: -c_\rho \ \forall \rho \in \sigma(1)$ . Wegen Korollar 1.8.8 ist  $D_P$  somit ein Cartier-Divisor.

Wir nehmen nun an, dass  $D_P$  ein Hauptdivisor ist und führen diese Annahme zum Widerspruch. Sei also  $D_P$  ein Hauptdivisor. Dann gibt es ein  $m \in M$ , so dass die Einschränkung von  $D_P$  auf  $U_\sigma$  für alle  $\sigma \in \Sigma(P)$  der Hauptdivisor  $\text{div}(\chi^{-m}) \stackrel{1.8.2}{=} -\sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho = -\sum_{F \in P(d-1)} \langle m, u_F \rangle \mathcal{V}_F$  ist. Insbesondere ist  $c_F = -\langle m, u_F \rangle \ \forall F \in P(d-1)$ . Dies bedeutet jedoch, dass  $m$  auf allen Facetten  $F \in P(d-1)$  liegt, ein Widerspruch.  $\square$

**Definition 1.9.20.** Die Funktion  $h_P : N_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}; v \mapsto \inf_{u \in P} \langle v, u \rangle$  ist stückweise linear auf  $\Sigma(P)$ , d.h.  $h_P \in \text{SF}(\Sigma(P), N)$ .

**Proposition 1.9.21.** *Bezüglich der Korrespondenz von Bemerkung 1.8.11 gehört die stückweise lineare Funktion  $h_P \in \text{SF}(\Sigma(P), N)$  zum Cartier-Divisor  $D_P$ , d.h.  $D_{(h_P)} = D_P$  und  $h_{(D_P)} = h_P$ .*

*Beweis.* Da  $D_P = \sum_{F \in P(d-1)} c_F D_F$  ein Cartier-Divisor ist, gibt es zu ihm eine stückweise lineare Funktion, die den Normalenvektor  $u_F \in N$  einer Facette  $F \in P(d-1)$  auf  $-c_F$  abbildet. Wir werden zeigen, dass diese gerade  $h_P$  ist.

Sei  $x \in \sigma \in \Sigma(d)$ . Der Kegel  $\sigma$  gehört zu genau einer Ecke  $m \in P \cap M$ . Ist  $x = \sum_{F \ni m} \lambda_F u_F$  mit  $\lambda_F \geq 0 \ \forall F \ni m$ , so gilt

$$\begin{aligned} h_P(x) &= \inf_{m' \in P} \langle m', x \rangle = \inf_{m' \in P} \sum_{\substack{F \in P(d-1) \\ m \in F}} \lambda_F \langle m', u_F \rangle \\ &= \sum_{\substack{F \in P(d-1) \\ m \in F}} \lambda_F \langle m, u_F \rangle = \langle m, x \rangle \ \forall x \in \sigma. \end{aligned}$$

Insbesondere ist dann  $h_P(u_F) = -c_F$  für alle Facetten  $F$  von  $P$ .  $\square$

**Definition 1.9.22.** Umgekehrt definieren wir zu jedem torusinvarianten Cartier-Divisor  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$  ein Polyeder  $P_D := \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u_\rho \rangle \geq -c_\rho \ \forall \rho \in \Sigma(1)\}$ .

$P_D$  ist im Allgemeinen kein Polytop und erst recht kein Gitterpolytop. Dies zeigt das Beispiel des Divisors  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \mathcal{V}_\rho$  mit dem

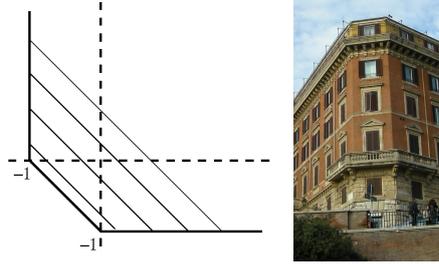


Abbildung 1.2: Das Polytop zu einer baryzentrischen Unterteilung eines 2-dimensionalen Kegels in einem 2- und 3-dimensionalen Fächer

Fächer  $\Sigma$ , der die baryzentrische Unterteilung des Kegels  $\langle e_1, e_2 \rangle$  ist. Hier ist  $P_D = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x, y, x + y \geq -1\}$  unbeschränkt (vgl. Abbildung 1.2).

Ist jedoch  $X_\Sigma$  bzw.  $\Sigma$  vollständig, so ist  $P_D$  ein Polytop. Es gilt dann  $P = P_{(D_P)}$ ,  $D = D_{(P_D)}$  und  $P_{D+\text{div}(\chi^m)} = P_D - m$ .

**Korollar 1.9.23.** Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop. Dann gilt für den zugehörigen Cartier-Divisor

$$D_P \sim \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho,$$

wobei  $c_\rho$  die Abstände eines beliebigen Punktes  $x \in P$  zu den Facetten von  $P$  ist, und  $\Sigma$  der Normalenfächer von  $P$  ist.

*Beweis.* Sei  $P = \bigcap_{F \in P(d-1)} \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, u_F \rangle \geq -c_F\}$ . Wegen Bemerkung 1.9.18 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $x = 0 \in P$  gilt. Dann ist der zugehörige Cartier-Divisor  $D_P$  durch  $\sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$  gegeben, und  $c_\rho = c_F$  sind gerade die Abstände des Punktes  $x \in P$  zu den Facetten von  $P$ .  $\square$

**Definition 1.9.24.** Zu einer stückweisen linearen Funktion  $h \in \text{SF}(\Sigma, N)$  definieren wir das Polytop

$$P_h := \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, n \rangle \geq h(n) \forall n \in N_{\mathbb{Q}}\}.$$

**Proposition 1.9.25.** Sei  $h \in \text{SF}(\Sigma, N)$  eine stückweise lineare Funktion, die durch  $m_\sigma \in M \forall \sigma \in \Sigma(d)$  definiert ist. Gilt  $m_\sigma \in P_h \forall \sigma \in \Sigma(d)$ , so folgt  $h(n) = \inf_{m \in P_h} \langle m, n \rangle$  für alle  $n \in N_{\mathbb{Q}}$ , d.h.  $h = h_{(P_h)}$ . Weiter gilt

$$P_h = \text{conv}(m_\sigma : \sigma \in \Sigma(d)).$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst für  $n \in N_{\mathbb{Q}} : h(n) = \inf_{m \in P_h} \langle m, n \rangle$ . Sei dazu  $m \in P_h$  beliebig. Dann gilt  $\langle m, n \rangle \geq h(n)$ , also ist

$$\inf_{m \in P_h} \langle m, n \rangle \geq h(n).$$

Sei  $\sigma \in \Sigma(d)$  ein volldimensionaler Kegel mit  $n \in \sigma$ . Dann gilt für  $m = m_{\sigma} : \langle m, n \rangle = \langle m_{\sigma}, n \rangle = h(n)$ , also wird die Gleichheit angenommen.

Nun zeigen wir  $P_h = \text{conv}(m_{\sigma} : \sigma \in \Sigma(d))$ .

Wegen  $m_{\sigma} \in P_h \forall \sigma \in \Sigma(d)$  ist  $\text{conv}(m_{\sigma} : \sigma \in \Sigma(d)) \subset P_h$ . Sei nun  $m \in P_h$ , d.h.  $\langle m, n \rangle \geq h(n) \forall n \in N_{\mathbb{Q}}$ . Wir wählen eine Linearform  $n' \in N$  zu einer Facette von  $\text{conv}(m_{\sigma} : \sigma \in \Sigma(d))$ , d.h.  $\langle m_{\sigma}, n' \rangle \geq c$  für alle  $\sigma \in \Sigma(d)$  mit einer Zahl  $c \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $\langle m, n' \rangle \geq h(n') = \langle m_{\tau}, n' \rangle \geq c$ , wobei  $n' \in \tau \in \Sigma(d)$ . Hieraus folgt  $m \in \text{conv}(m_{\sigma} : \sigma \in \Sigma(d))$ .  $\square$

Die folgende Proposition ist eine Art Umkehraussage zu Proposition 1.9.21:

**Proposition 1.9.26.** *Es sei  $h \in SF(\Sigma, N)$  eine stückweise lineare Funktion auf einem vollständigen Fächer  $\Sigma$ . Dann gilt  $P_{(D_h)} = P_h$ .*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} P_h &= \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, n \rangle \geq h(n) \forall n \in N_{\mathbb{Q}}\} \\ &\subset \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, u_{\rho} \rangle \geq h(u_{\rho}) \forall \rho \in \Sigma(1)\} = P_{(D_h)}. \end{aligned}$$

Umgekehrt sei  $m \in P_{(D_h)}$ , d.h.  $\langle m, u_{\rho} \rangle \geq h(u_{\rho}) \forall \rho \in \Sigma(1)$ . Zu  $n \in N_{\mathbb{Q}}$  sei  $\sigma \in \Sigma$ , so dass  $n \in \sigma$ . Dann gilt  $n = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_{\rho} u_{\rho}$  mit  $a_{\rho} \geq 0$ . Weiter ist

$$\langle m, n \rangle = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_{\rho} \langle m, u_{\rho} \rangle \geq \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_{\rho} h(u_{\rho}) \quad (1.5)$$

$$= h\left(\sum_{\rho \in \sigma(1)} a_{\rho} u_{\rho}\right) = h(n). \quad (1.6)$$

Da dies für alle  $n \in N_{\mathbb{Q}}$  gilt, folgt  $m \in P_h$ .  $\square$

**Definition 1.9.27.** Sei  $D \in \text{CDiv}(X)$  ein Cartier-Divisor. Dann ist

$$\Gamma(X, D) = \{f \in \mathbb{C}(X) : \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Proposition 1.9.28.** Sei  $D \subset X_\Sigma$  ein torusinvarianter Cartier-Divisor. Dann gilt

$$\Gamma(X_\Sigma, D) = \bigoplus_{m \in P_D \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Insbesondere ist  $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X_\Sigma, D) = |P_D \cap M|$ .

*Beweis.* Sei  $f \in \Gamma(X_\Sigma, D)$ , d.h.  $\text{div}(f) + D \geq 0$ . Dann ist auch die Einschränkung  $\text{div}(f)|_{T_N}$  auf den Torus effektiv, denn  $D|_{T_N} = 0$ . Also ist  $f \in \mathcal{O}(T_N) = \mathbb{C}[M]$  und folglich  $\Gamma(X_\Sigma, D) \subset \mathbb{C}[M]$ . Deswegen ist  $\Gamma(X_\Sigma, D) = \{f \in \mathbb{C}(X_\Sigma) : \text{div}(f) + D \geq 0\} = \bigoplus_{\text{div}(\chi^m) + D \geq 0} \mathbb{C} \cdot \chi^m$ . Dabei ist  $\text{div}(\chi^m) + D \geq 0$  genau dann, wenn für jeden Strahl  $\rho \in \Sigma(1)$   $\langle m, u_\rho \rangle + c_\rho \geq 0$  gilt, wobei  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$ . Dies ist äquivalent zu  $m \in P_D$ .  $\square$

Dies ist der Grund für die Wahl des Vorzeichens bei der Definition von stückweise linearen Funktionen und Polytopen.

**Definition 1.9.29.** Sei  $D \in \text{CDiv}(X)$  ein Cartier-Divisor. Dann heißt

$$|D| = \{E \in \text{CDiv}(X) : E \sim D, E \geq 0\}$$

das *vollständige Linearsystem* von  $D$ .

**Proposition 1.9.30.** Es gilt  $|D| = \mathbb{P}(\Gamma(X, D))$ .

*Beweis.* Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma(X, D) \setminus \{0\} &\longrightarrow |D| \\ f &\longmapsto \text{div}(f) + D \end{aligned}$$

ist wohldefiniert nach Definition von  $\Gamma(X, D)$  und  $|D|$ . Dabei ist die Faser von  $\varphi(f)$  die Menge  $\mathbb{C}^* \cdot f$ . Außerdem ist  $\varphi$  nach Definition von  $|D|$  surjektiv. Hieraus folgt  $|D| = \Gamma(X, D) \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}(\Gamma(X, D))$ .  $\square$

## 1.10 Der Satz von Ehrhart

Der Satz von Ehrhart besagt, dass die Anzahl der Gitterpunkte in den Vielfachen eines Gitterpolytops wie ein Polynom wächst. Diesen Satz werden wir in diesem Abschnitt beweisen und verfolgen dabei zum Teil Ideen aus dem Vorlesungsskript von Ivan Izestiev [Izm03]. Hieraus wird sich der Begriff des Grades eines Polytops ergeben, eine Invariante, die – ähnlich wie die Dimension – die Komplexität des Polytops beschreibt.

**Theorem 1.10.1** (von Ehrhart). *Zu jedem Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  gibt es ein Polynom  $e_P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ , so dass  $e_P(k) = |kP \cap M|$ . Sein Grad ist die Dimension von  $P$ . Der Leitkoeffizient ist  $\text{vol}_M(P)$ , und der konstante Koeffizient ist 1.*

Das Polynom  $e_P \in \mathbb{Q}[t]$  aus Theorem 1.10.1 heißt das *Ehrhart-Polynom* des Gitterpolytops  $P$ .

**Beispiel 1.10.2.** (1) Für das 2-dimensionale Standardsimplex  $\Delta_2 \subset \mathbb{Q}^2$  ist  $|k\Delta_2 \cap \mathbb{Z}^2| = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$ , ein Polynom vom Grad 2.

(2) Für den  $d$ -dimensionalen Einheitswürfel  $Q := [0, 1]^d \subset \mathbb{Q}^d$  ist  $|kQ \cap \mathbb{Z}^d| = (k+1)^d = k^d + dk^{d-1} + \dots + dk + 1$ , ein Polynom vom Grad  $d$ .

**Notation 1.10.3.** Wir bezeichnen zu einer Teilmenge  $A \subset M_{\mathbb{Q}}$  die formale Potenzreihe

$$\sum_{a \in A \cap M} \chi^a(t)$$

mit  $\mathbf{1}(A, t)$ . Hierbei ist  $t = (t_1, \dots, t_d)$ . Insbesondere gilt dann  $\mathbf{1}(A, 1) = |A \cap M|$ .

**Lemma 1.10.4.** *Sei  $C = \langle m_1, \dots, m_d \rangle \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein spitzer volldimensionaler rationaler Kegel. Dann gilt*

$$\mathbf{1}(C, t) = \frac{\mathbf{1}(\Pi, t)}{(1 - \chi^{m_1}(t)) \cdots (1 - \chi^{m_d}(t))},$$

wobei  $\Pi = \{\sum_{i=1}^d \lambda_i m_i : 0 \leq \lambda_i < 1\}$ .

*Beweis.* Es gilt  $C = \{\Pi + \sum_{i=1}^d k_i m_i : k_i \in \mathbb{N}\}$ . Somit gibt es zu  $m \in C \cap M$  ein  $p \in \Pi \cap M$  und  $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}$ , so dass  $m = p + k_1 m_1 + \dots + k_d m_d$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1}(C, t) &= \sum_{m \in C \cap M} \chi^m(t) = \sum_{p, k_i} \chi^{p+k_1 m_1 + \dots + k_d m_d}(t) \\ &= \sum_{p \in \Pi \cap M} \chi^p(t) \cdot \sum_{k_i \geq 0} \chi^{k_1 m_1 + \dots + k_d m_d}(t) \\ &= \mathbf{1}(\Pi, t) \cdot \prod_{i=1}^d \sum_{k_i \geq 0} \chi^{k_i m_i}(t) \\ &= \frac{\mathbf{1}(\Pi, t)}{(1 - \chi^{m_1}(t)) \cdots (1 - \chi^{m_d}(t))}. \end{aligned}$$

□

Zunächst beweisen wir den Satz von Ehrhart für den Simplex-Fall, d.h.  $P = \text{conv}(m_1, \dots, m_{d+1}) \subset \mathbb{Q}^d$  sei ein Gittersimplex. Hierzu betten wir  $P$  in den Raum  $M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$  gemäß  $P \mapsto (P, 1)$  ein. Der Kegel  $C := \langle (P, 1) \rangle \subset M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$  ist somit  $(d+1)$ -dimensional. Seine Koordinaten seien  $t_1, \dots, t_d, z$ . Dann gilt

$$\mathbf{1}(C, t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{1}(kP, t) z^k$$

und deswegen

$$\mathbf{1}(C, 1, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |kP \cap M| \cdot z^k.$$

**Lemma 1.10.5.** *Andererseits gilt*

$$\mathbf{1}(C, 1, z) = \frac{h^*(z)}{(1-z)^{d+1}},$$

wobei  $h^*$  ein Polynom mit  $\deg h^* < d+1$  ist.

*Beweis.* Nach Lemma 1.10.4 gilt

$$\mathbf{1}(C, t, z) = \frac{\mathbf{1}(\Pi, t, z)}{(1 - \chi^{m_1}(t)z) \cdots (1 - \chi^{m_{d+1}}(t)z)}$$

mit  $P = \text{conv}(m_1, \dots, m_{d+1})$  und

$$\Pi = \left\{ \left( \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i m_i, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \right) : 0 \leq \lambda_i < 1 \right\}.$$

Insbesondere ist  $z|_{\Pi} < d+1$ . Deswegen ist  $h^*(z) := \mathbf{1}(\Pi, 1, z)$  ein Polynom vom Grad  $\deg h^* < d+1$ . Außerdem ist  $1 - \chi^{m_i}(1)z = 1 - z$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$ .  $\square$

**Definition 1.10.6.** Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein  $d$ -dimensionales Gittersimplex. Dann heißt das Polynom  $h^*(z) = (1-z)^{d+1} \sum_{k \in \mathbb{N}} |kP \cap M| \cdot z^k$  das  $h^*$ -Polynom von  $P$ . Der Grad des Simplex  $P$  ist der Grad  $\deg h^*$  des  $h^*$ -Polynoms. Nach Lemma 1.10.5 gilt  $\deg(P) \leq d$  für jedes  $d$ -dimensionale Gittersimplex  $P$ .

Wir werden später sehen, dass sich diese Definition auf beliebige Gitterpolytope fortsetzen lässt.

**Lemma 1.10.7.** *Sei  $A \subset M_{\mathbb{Q}}$  und  $\{e_1, \dots, e_d\} \subset M$  eine Gitterbasis von  $M$ . Dann gilt*

$$\text{vol}_M(A - W) \leq |A \cap M| \leq \text{vol}_M(A + W).$$

Dabei ist

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^d x_i e_i \in M_{\mathbb{Q}} : |x_i| \leq \frac{1}{2} \forall i \in \{1, \dots, d\} \right\} \subset M_{\mathbb{Q}}$$

der  $d$ -dimensionale Einheitswürfel mit Mittelpunkt  $0 \in M$ ,  $A + W$  die Minkowski-Summe von  $A$  und  $W$  und  $A - W = \{m \in M_{\mathbb{Q}} : m + W \subset kA\}$  die Minkowski-Differenz.

Insbesondere gilt für ein Polytop  $P$  und  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\text{vol}_M(kP - W) \leq |kP \cap M| \leq \text{vol}_M(kP + W).$$

*Beweis.* Es sei  $A' = (A \cap M) + W$  die Minkowski-Summe von  $A \cap M$  und  $W$ . Dann gilt  $A' \subset A + W$ . Sei nun  $x \in A - W$ , d.h.  $x + W \subset A$ . Der Würfel  $x + W$  enthält mindestens einen Gitterpunkt  $y \in A \cap M$ . Dann gilt  $x \in y + W \subset A'$ . Daraus folgt  $A - W \subset A' \subset A + W$ . Wegen  $\text{vol}_M(W) = 1$  ist  $\text{vol}_M(A') = |A \cap M|$  und somit  $\text{vol}_M(A - W) \leq |A \cap M| \leq \text{vol}_M(A + W)$ .  $\square$

**Proposition 1.10.8.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gittersimplex. Dann gibt es ein Polynom  $e_P(t) \in \mathbb{Q}[t]$  vom Grad  $d$  mit nicht-negativen Koeffizienten, so dass  $e_P(k) = |kP \cap M|$ . Sein Leitkoeffizient ist*

$$\text{vol}_M(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|kP \cap M|}{k^d} = \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^{\deg(P)} (h^*)_i.$$

*Beweis.* Nach Lemma 1.10.5 gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} |kP \cap M| \cdot z^k &= \mathbf{1}(C, 1, z) = \frac{h^*(z)}{(1-z)^{d+1}} \\ &= h^*(z) \cdot \frac{1}{d!} \cdot \partial_z^d \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{h^*(z)}{d!} \cdot \partial_z^d \sum_{k \in \mathbb{N}} z^k \\ &= \frac{h^*(z)}{d!} \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+d) \cdots (k+1) z^k. \end{aligned}$$

Also ist  $e_P(k) := |kP \cap M|$  ein Polynom. Nach Koeffizientenvergleich ergibt sich  $(e_P)_d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|kP \cap M|}{k^d} = \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^{\deg(P)} (h^*)_i$ .

Nach Lemma 1.10.7 gilt

$$\text{vol}_M\left(P - \frac{W}{k}\right) \leq \frac{|kP \cap M|}{k^d} \leq \text{vol}_M\left(P + \frac{W}{k}\right)$$

mit dem  $d$ -dimensionalen Einheitswürfel  $W \subset M_{\mathbb{Q}}$ . Für  $k \rightarrow \infty$  konvergieren beide Schranken gegen  $\text{vol}_M(P)$ . Also gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|kP \cap M|}{k^d} = \text{vol}_M(P).$$

□

Ein typisches Vorgehen in der Konvexgeometrie ist es, Behauptungen zunächst für Simplizes zu beweisen, und mit Hilfe dieses Resultats die Behauptung auch für beliebige Polytope zu zeigen. So auch hier:

**Proposition 1.10.9.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop. Dann gibt es ein Polynom  $e_P(t) \in \mathbb{Q}[t]$  vom Grad  $d$ , so dass  $e_P(k) = |kP \cap M|$ . Sein Leitkoeffizient ist*

$$\text{vol}_M(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|kP \cap M|}{k^d} = \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^r (h^*)_i,$$

wobei  $h^*(z) = (1-z)^{d+1} \sum_{k \in \mathbb{N}} |kP \cap M| \cdot z^k$  ein Polynom vom Grad  $r \in \mathbb{N}$  ist.

Dies beweist gleichzeitig den Satz von Ehrhart 1.10.1.

**Definition 1.10.10.** Das Polynom  $h^* \in \mathbb{Q}[t]$  aus Proposition 1.10.9 heißt das  $h^*$ -Polynom des Gitterpolytops  $P$ . Die Zahl  $r = \deg(h^*)$  ist der Grad des Polytops und wird mit  $\deg(P)$  bezeichnet. Diese Invariante wurde 2006 von Victor Batyrev und Benjamin Nill [BN07] eingeführt.

*Beweis.* Wir betrachten eine Triangulierung  $P = \bigcup_{i=1}^N P_i$  mit voll-dimensionalen Gittersimplizes  $P_1, \dots, P_N$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |kP \cap M| &= \sum_{i=1}^N |kP_i \cap M| - \sum_{1 \leq i < j \leq N} |kP_i \cap kP_j \cap M| + \dots \\ &\quad + (-1)^{N+1} \left| \bigcap_{i=1}^N kP_i \cap M \right|. \end{aligned}$$

Jeder der Summanden ist nach Proposition 1.10.8 ein Polynom in  $k$  mit nicht-negativen Koeffizienten. Damit ist der Grad der ersten Summe  $d$ , und alle anderen Summen von kleinerem Grad. Somit ist auch  $|kP \cap M| =: e_P(k)$  ein Polynom in  $k$  vom Grad  $d$ . Weiter ist der

Leitkoeffizient die Summe der Volumina der Simplexe  $P_1, \dots, P_N$ , also  $\text{vol}_M(P)$ . Außerdem ist wegen Proposition 1.10.8

$$\begin{aligned} h^*(z) &:= (1-z)^{d+1} \left( \sum_{i=1}^N |kP_i \cap M| - \sum_{1 \leq i < j \leq N} |kP_i \cap kP_j \cap M| + \dots \right) \\ &= \sum_{i=1}^N h_{P_i}^*(z) - (1-z)h_{P_i \cap P_j}^*(z) + \dots \end{aligned}$$

ein Polynom, und es gilt

$$h^*(1) = \sum_{i=1}^N h_{P_i}^*(1) = \text{vol}_M(P) = (e_P)_d.$$

□

**Korollar 1.10.11.** *Sei  $P$  ein Gitterpolytop. Dann gilt*

$$\text{Vol}(P) = \sum_{i=0}^{\deg(P)} h_i^*.$$

Tatsächlich haben auch die Werte  $e_P(-k)$  mit  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  eine anschauliche Interpretation:

**Theorem 1.10.12** (Reziprozitätsgesetz). *Für ein  $d$ -dimensionales Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt*

$$e_P(-k) = (-1)^d |(kP)^\circ \cap M|.$$

**Beispiel 1.10.13.** Ist  $P = [0, 1]^d \subset \mathbb{Q}^d$  der  $d$ -dimensionale Einheitswürfel, so gilt  $|(kP)^\circ \cap \mathbb{Z}^d| = (k-1)^d$  und  $e_P(-k) \stackrel{1.10.2(2)}{=} (-k+1)^d = (-1)^d (k-1)^d$ .

**Proposition 1.10.14.** *Für ein  $d$ -dimensionales Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  gilt*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |(kP)^\circ \cap M| \cdot z^k = \frac{h_{\deg(P)}^* z^{d+1-\deg(P)} + \dots + h_0^* z^{d+1}}{(1-z)^{d+1}}.$$

*Beweis.* Zunächst sei  $P = \text{conv}(m_1, \dots, m_{d+1}) \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Simplex. Ähnlich wie in Lemma 1.10.5 gilt

$$\sum_{k \geq 0} |(kP)^\circ \cap M| \cdot z^k = \frac{h(z)}{(1-z)^{d+1}}$$

mit  $h(z) := \mathbf{1}(\Pi', 1, z)$  und

$$\Pi' = \left\{ \left( \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i m_i, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \right) : 0 < \lambda_i \leq 1 \right\} \subset M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}.$$

Es sei  $c \in \Pi'$  der Schwerpunkt dieses Parallelepipeds und  $M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q} \rightarrow M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}; x \mapsto c - x$  die Spiegelung an  $c$ . Dies ist eine bijektive Abbildung auf  $M$ . Das Bild von  $\Pi'$  ist

$$\Pi = \left\{ \left( \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i m_i, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \right) : 0 \leq \lambda_i < 1 \right\} \subset M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}.$$

Deswegen ist

$$\begin{aligned} h(z) &= \mathbf{1}(\Pi', 1, z) = \sum_{m \in \Pi' \cap (M \times \mathbb{Z})} \chi^{c-m}(1, z) \\ &= \chi^c(1, z) \cdot \sum_{m \in \Pi \cap (M \times \mathbb{Z})} \chi^{-m}(1, z) = z^{d+1} \cdot \mathbf{1}(\Pi, 1, z^{-1}) \\ &= z^{d+1} h^*(z^{-1}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung für den Simplex-Fall. Genauso wie in Satz 1.10.9 überträgt sich dies durch Triangulierung auf ein beliebiges Gitterpolytop.  $\square$

**Korollar 1.10.15.** *Der Grad eines  $d$ -dimensionalen Polytops  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ist die größte natürliche Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , so dass*

$$\left| \left( (d+1-k)P \right)^{\circ} \cap M \right| > 0.$$

*Letztere Zahl ist der Leitkoeffizient des  $h^*$ -Polynoms von  $P$ .*

*Beweis.* Wegen Proposition 1.10.14 gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |(kP)^{\circ} \cap M| \cdot z^k = h_{\deg(P)}^* z^{d+1-\deg(P)} \left( 1 + \sum_{k \geq 0} a_k t^k \right),$$

d.h.

$$|P^{\circ} \cap M| = |(2P)^{\circ} \cap M| = \dots = |((d - \deg(P))P)^{\circ} \cap M| = 0$$

und  $h_{\deg(P)}^* = |((d+1 - \deg(P))P)^{\circ} \cap M| \neq 0$ .  $\square$

**Definition 1.10.16.** Die Zahl  $d+1 - \deg(P) \in \mathbb{N}$  heißt der *Cograd* von  $P$ . Sie ist also die kleinste natürliche Zahl  $k$ , so dass  $(kP)^{\circ} \cap M \neq \emptyset$ .

**Korollar 1.10.17.** Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop vom Grad 2. Dann gilt

$$\text{Vol}(P) = |P \cap M| + |P^\circ \cap M| - d.$$

Im Spezialfall  $d = 2$  nennt man dieses Ergebnis die Formel von Pick.

*Beweis.* Wegen Proposition 1.10.9, Theorem 1.10.1 und Korollar 1.10.15 ist  $h_1^* = |P \cap M| - (d + 1)$ ,  $h_0^* = 1$  und  $h_2^* = |P^\circ \cap M|$ . Mit Korollar 1.10.11 folgt  $\text{Vol}(P) = 1 + |P \cap M| - (d + 1) + |P^\circ \cap M|$ .  $\square$

*Beweis von Theorem 1.10.12.* Wegen dem Beweis von Proposition 1.10.8 ist

$$\begin{aligned} e_P(-k) &= \sum_{j=0}^d \frac{h_j^*}{d!} (d - k - j) \cdots (-k - j + 1) \\ &= (-1)^d \sum_{j=0}^d \frac{h_j^*}{d!} (k + j - d) \cdots (k + j - 1). \end{aligned}$$

Wegen Proposition 1.10.14 gilt

$$\begin{aligned} |(kP)^\circ \cap M| &= \sum_{j=0}^d \frac{h_j^*}{d!} (k - 1 + j) \cdots (k - d + j) \\ &= \sum_{j=0}^d \frac{h_j^*}{d!} (k + j - d) \cdots (k + j - 1). \end{aligned}$$

$\square$

## 1.11 Basispunktfreie und ample Divisoren

Im letzten Abschnitt dieses ersten Kapitels geht es um die Eigenschaft eines Cartier-Divisors, basispunktfrei oder ample zu sein. Natürlich wird diese Eigenschaft auch wieder in die Sprache der Konvexgeometrie übersetzt.

**Definition 1.11.1.** Eine stückweise lineare Funktion  $h \in \text{SF}(\Sigma)$  heißt

- *konvex*, wenn  $h(x) + h(y) \leq h(x + y)$  für alle  $x, y \in N_{\mathbb{Q}}$  gilt.
- *strikt konvex*, wenn  $h(x) + h(y) < h(x + y)$  für alle  $x, y \in N_{\mathbb{Q}}$ , die nicht in einem gemeinsamen Kegel enthalten sind.

Im Folgenden sei  $h \in SF(\Sigma, N)$  stets durch  $h|_{\sigma}(n) = \langle m_{\sigma}, n \rangle \forall n \in N_{\mathbb{Q}}$  mit  $m_{\sigma} \in M$  gegeben.

**Proposition 1.11.2.** *Eine stückweise lineare Funktion  $h \in SF(\Sigma, N)$  ist genau dann konvex, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:*

- (1)  $h(x) \leq \langle m_{\sigma}, x \rangle \forall x \in N_{\mathbb{Q}}, \sigma \in \Sigma(d)$ .
- (2)  $h(x) = \min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_{\sigma}, x \rangle \forall x \in N_{\mathbb{Q}}$ .
- (3) *Zu je zwei benachbarten Kegeln  $\sigma, \sigma' \in \Sigma(d)$  gibt es ein  $x \in \sigma' \setminus \sigma$ , so dass  $h(x) \leq \langle m_{\sigma}, x \rangle$ .*

*Sie ist genau dann strikt konvex, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:*

- (1')  $h(x) < \langle m_{\sigma}, x \rangle \forall x \in N_{\mathbb{Q}}, x \notin \sigma \in \Sigma(d)$ .
- (2')  $h$  ist konvex und  $m_{\sigma} \neq m_{\sigma'} \forall \sigma \neq \sigma'$ .
- (3') *Zu je zwei benachbarten Kegeln  $\sigma, \sigma' \in \Sigma(d)$  gibt es ein  $x \in \sigma' \setminus \sigma$ , so dass  $h(x) < \langle m_{\sigma}, x \rangle$ .*

*Beweis.* Sei zunächst  $h$  konvex und  $\sigma \in \Sigma(d), x \in N_{\mathbb{Q}}$ . Weiter sei  $x' \in \sigma^{\circ}$ . Dann gibt es  $0 < \lambda < 1$ , so dass  $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in \sigma$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \langle m_{\sigma}, \lambda x + (1 - \lambda)x' \rangle &= h(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(x') \\ &= \lambda h(x) + (1 - \lambda)\langle m_{\sigma}, x' \rangle. \end{aligned}$$

Deswegen ist auch  $\langle m_{\sigma}, \lambda x \rangle \geq \lambda h(x)$ , und (1) folgt. Diese Eigenschaft impliziert weiter sofort (2), da  $h(x) = \langle m_{\sigma}, x \rangle$  für einen Kegel  $\sigma \in \Sigma(d)$  mit  $x \in \sigma$ . Aus (2) folgt wieder, dass  $h$  konvex ist:

$$\begin{aligned} h(x + y) &= \min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_{\sigma}, x + y \rangle = \min_{\sigma \in \Sigma(d)} (\langle m_{\sigma}, x \rangle + \langle m_{\sigma}, y \rangle) \\ &\geq \min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_{\sigma}, x \rangle + \min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_{\sigma}, y \rangle = h(x) + h(y). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir noch, dass (1) und (3) äquivalent sind. Offensichtlich folgt aus (1) die Aussage (3).

Sei nun also (3) erfüllt,  $\sigma \in \Sigma(d)$  und  $x \in N_{\mathbb{Q}}$ . Ist  $x \in \sigma$ , so gilt sogar  $h(x) = \langle m_{\sigma}, x \rangle$ . Sei nun also  $x \notin \sigma$ . Dann gibt es eine Wand  $\omega := \sigma \cap \sigma', \sigma' \in \Sigma(d)$ , so dass  $x$  und  $\sigma$  in zwei verschiedenen Halbräumen von  $\omega$  liegen. Die Hyperebene  $\text{lin}(\omega)$  ist durch  $m_{\sigma} - m_{\sigma'} = 0$  gegeben und wegen (3) liegt  $x$  in der Halbebene  $m_{\sigma} -$

$m_{\sigma'} \geq 0$ . Also gilt  $\langle m_\sigma, x \rangle \geq \langle m_{\sigma'}, x \rangle$ . Führt man so fort, erhält man schließlich  $h(x) = \langle m_{\sigma^{(n)}}, x \rangle \leq \cdots \leq \langle m_\sigma, x \rangle$ .

Analog zeigt man, dass die strikte Konvexität zu (1') und (3') äquivalent ist. Wir zeigen nun noch, dass (1') und (2') äquivalent sind. Mit der Aussage über die Konvexität folgt aus (1'), dass  $h$  konvex ist. Angenommen zu  $\sigma \neq \sigma'$  gilt  $m_\sigma = m_{\sigma'}$ . Dann folgt  $h(x) = \langle m_{\sigma'}, x \rangle = \langle m_\sigma, x \rangle$  für  $x \in \sigma' \setminus \sigma$ , ein Widerspruch zu (1').

Wir zeigen nun, dass (2') die Aussage (3') und somit (1') impliziert. Mit der Aussage über die Konvexität gibt es für zwei benachbarte Kegel  $\sigma, \sigma' \in \Sigma(d)$  ein  $x \in \sigma' \setminus \sigma$ , so dass  $\langle m_{\sigma'}, x \rangle = h(x) \leq \langle m_\sigma, x \rangle$ . Würde hier Gleichheit gelten, so wäre  $\langle m_\sigma - m_{\sigma'}, x \rangle = 0$ . Es gilt jedoch schon  $\text{lin}(\sigma \cap \sigma') = (m_\sigma - m_{\sigma'})^\perp$  und somit wegen  $x \notin \sigma \cap \sigma'$ :  $m_\sigma - m_{\sigma'} = 0$ , ein Widerspruch zu (2').  $\square$

Zu einem Cartier-Divisor  $D$  oder einer stückweisen linearen Funktion  $h \in \text{SF}(\Sigma, N)$  definieren wir nun ein *Linienbündel*  $L_h$  bzw.  $\mathcal{O}_X(D)$  wie folgt:

Es sei  $h$  durch  $\{m_\sigma : \sigma \in \Sigma(d)\} \subset M$  gegeben. Dann gilt für  $n \in \sigma \cap \sigma'$ :  $\langle m_\sigma, n \rangle = h(n) = \langle m_{\sigma'}, n \rangle$ , d.h.

$$m_\sigma \cap m_{\sigma'} \in M \cap (\sigma \cap \sigma')^\perp \subset M \cap (\sigma \cap \sigma')^\vee,$$

also  $\chi^{m_\sigma - m_{\sigma'}} = \mathcal{O}(U_{\sigma \cap \sigma'})$ . Dadurch kann man  $U_\sigma \times \mathbb{C}$  mit  $U_{\sigma'} \times \mathbb{C}$  so verkleben, dass  $(x, c)$  mit  $(x, \chi^{m_\sigma - m_{\sigma'}}(x)c)$  identifiziert wird.

Somit erhalten wir einen Isomorphismus zwischen der Gruppe der Linienbündel auf  $X$  (mit der Verknüpfung des Tensorprodukts) und  $\text{Pic}(X)$ .

Sei nun  $m \in M$  mit  $\langle m, n \rangle \geq h(n) \forall n \in N_\mathbb{Q}$ . Hieraus folgt

$$\langle m - m_\sigma, n \rangle \geq 0 \forall n \in N_\mathbb{Q}, \sigma \in \Sigma(d),$$

also  $m - m_\sigma \in M \cap \sigma^\vee$  und  $\chi^{m - m_\sigma} \in \mathcal{O}(U_\sigma)$ . Nun definieren wir einen globalen Schnitt  $s$  des Linienbündels  $L_h$ , indem wir auf  $U_\sigma$  definieren:

$$\begin{aligned} s_\sigma : U_\sigma &\longrightarrow U_\sigma \times \mathbb{C} \\ x &\longmapsto (x, \chi^{m - m_\sigma}(x)). \end{aligned}$$

Die Voraussetzung  $\langle m, n \rangle \geq h(n)$  ist mit Lemma 1.8.2 äquivalent zu  $\text{div}(\chi^m) + D_h \geq 0$ , d.h.  $\chi^m \in \Gamma(X_\Sigma, D)$ . Deswegen kann man jedem  $f \in \Gamma(X_\Sigma, D)$  einen globalen Schnitt des Linienbündels  $L_{(h_D)}$

zuordnen. Man bezeichnet deswegen  $\Gamma(X_\Sigma, D)$  auch als den *Raum der globalen Schnitte von  $D$* .

Der Verschwindungsdvisor eines globalen Schnitts  $s$ , der durch  $\chi^m \in \Gamma(X_\Sigma, D)$  gegeben ist, wird mit  $\text{div}(s)_0$  bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{div}(s)|_{U_\sigma} &= \text{div}(\chi^{m-m_\sigma})|_{U_\sigma} \stackrel{1.8.2}{=} \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m - m_\sigma, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho \\ &= \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho - \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m_\sigma, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho \\ &= \text{div}(\chi^m)|_{U_\sigma} + D_h|_{U_\sigma} = \left( \text{div}(\chi^m) + D_h \right) \Big|_{U_\sigma}. \end{aligned}$$

Da die offenen Mengen  $U_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma(d)$ , ganz  $X_\Sigma$  überdecken, folgt  $\text{div}(s) = \text{div}(\chi^m) + D_h$ . Wegen  $\chi^m \in \Gamma(X_\Sigma, D)$  ist  $\text{div}(\chi^m) + D_h \geq 0$  und folglich

$$\text{div}(s)_0 = \left( \text{div}(\chi^m) + D_h \right)_0 = \left( \text{div}(\chi^m) + D_h \right).$$

**Definition 1.11.3.** Ein Cartier-Divisor  $D \in \text{CDiv}(X)$  heißt *basispunktfrei*, falls es zu jedem Punkt  $x \in X$  einen globalen Schnitt  $s$  mit  $s(x) \neq (x, 0)$  gibt. Wir schreiben dafür kurz  $s(x) \neq 0$ . Die Eigenschaft eines Cartier-Divisors, basispunktfrei zu sein, überträgt sich natürlich auf sein Linearsystem.

**Proposition 1.11.4.** Sei  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho \subset X_\Sigma$  ein torusinvarianter Cartier-Divisor mit zugehöriger stückweisen linearen Funktion  $h_D \in \text{SF}(\Sigma)$ , die auf  $\sigma \in \Sigma(d)$  durch  $m_\sigma \in M$  gegeben ist. Dann sind äquivalent

- (1)  $D$  ist basispunktfrei.
- (2)  $m_\sigma \in P_D$  für alle  $\sigma \in \Sigma(d)$ .
- (3) Die Ecken von  $P_D$  sind  $m_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma(d)$ .
- (4)  $h_D$  ist konvex.

Insbesondere ist also für einen basispunktfreien Divisor  $D \subset X$  das Polytop  $P_D$  ein Gitterpolytop.

*Beweis.* Es gilt  $D_{(h_D)} = D$ . Wegen den Propositionen 1.11.2 und 1.9.26 gilt außerdem

$$\begin{aligned} h_D \text{ ist konvex} &\stackrel{1.11.2}{\iff} h_D(n) \leq \langle m_\sigma, n \rangle \quad \forall \sigma \in \Sigma(d), n \in N_\mathbb{Q} \\ &\iff m_\sigma \in P_{(h_D)} \quad \forall \sigma \in \Sigma(d) \\ &\stackrel{1.9.26}{\iff} m_\sigma \in P_D \quad \forall \sigma \in \Sigma(d), \end{aligned}$$

d.h. (2) und (4) sind äquivalent. Offensichtlich folgt (2) aus (3).

Um die andere Richtung zu zeigen nehmen wir an, dass (2) erfüllt ist. Weil dann auch (4) gilt und dies wegen Proposition 1.11.2 äquivalent zu  $h_D(n) = \min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_\sigma, n \rangle$  ist, folgt mit Proposition 1.9.26(1.5):

$$h_D(n) \stackrel{1.9.26}{\leq} \min_{m \in P_D} \langle m, n \rangle \leq \min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_\sigma, n \rangle = h_D(n),$$

also  $\min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_\sigma, n \rangle = \min_{m \in P_D} \langle m, n \rangle$ .

Sei nun  $\sigma \in \Sigma(d)$ ,  $n \in \sigma^\circ$ , und  $H := \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, n \rangle = h_D(n)\} \subset M_{\mathbb{Q}}$ . Dann gilt  $m_\sigma \in P_D \cap H$ . Aus  $m \in P_D \cap H$  folgt  $\langle m - m_\sigma, n \rangle = \langle m, n \rangle - h_D(n) = 0$ . Es gibt linear unabhängige Vektoren  $n_1, \dots, n_d \in \sigma$ , so dass  $n_1 + \dots + n_d = n$ . Also gilt  $\sum_{i=1}^d \langle m - m_\sigma, n_i \rangle = 0$ , wobei alle Summanden wegen  $m \in P_D = P_h$  positiv sind. Deswegen müssen sogar alle Summanden null sein, was  $m = m_\sigma$  impliziert. Damit ist  $H \cap P_D = \{m_\sigma\}$  und  $m_\sigma$  eine Ecke von  $P_D$ .

Sei nun umgekehrt  $v \in P_D$  eine Ecke von  $P_D$ . Dann gibt es eine Hyperebene  $H = \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, n \rangle = a\}$ , so dass  $H \cap P_D = \{v\}$  gilt, d.h.  $\langle m, n \rangle \geq a \forall m \in P_D$  mit Gleichheit nur im Fall  $m = v$ . Also gilt

$$\min_{\sigma \in \Sigma(d)} \langle m_\sigma, n \rangle = \min_{m \in P_D} \langle m, n \rangle = \langle v, n \rangle = a.$$

Somit gibt es ein  $\sigma \in \Sigma(d)$  mit  $\langle m_\sigma, n \rangle = a$ . Da die Gleichheit in  $\langle m, n \rangle \geq a$  nur für  $m = v$  angenommen wird, folgt  $m_\sigma = v$ .

Es reicht nun noch zu zeigen, dass (1) und (2) äquivalent sind. Sei dazu (1) erfüllt und  $\sigma \in \Sigma(d)$ . Dann gibt es zu dem Punkt  $x_\sigma = \bigcap_{\rho \in \sigma(1)} \mathcal{V}_\rho$  einen globalen Schnitt, der durch  $f \in \Gamma(X_\Sigma, D)$  gegeben ist, so dass  $x_\sigma \notin \text{supp}(\text{div}(f) + D)$ . Wegen Proposition 1.9.28 können wir  $f = \chi^m$  mit  $m \in P_D \cap M$  annehmen. Mit Lemma 1.8.2 ist also

$$x_\sigma \notin \text{supp}\left(\sum_{\rho \in \Sigma(1)} (c_\rho + \langle m, u_\rho \rangle) \mathcal{V}_\rho\right).$$

Wegen  $x_\sigma \in \mathcal{V}_\rho \forall \rho \in \sigma(1)$  folgt  $-c_\rho = \langle m, u_\rho \rangle \forall \rho \in \sigma(1)$ , d.h.  $m_\sigma = m \in P_D$ .

Umgekehrt sei  $\sigma \in \Sigma(d)$  und  $m_\sigma \in P_D$ . Wegen Proposition 1.9.28 ist  $\chi^{m_\sigma} \in \Gamma(X_\Sigma, D)$ . Aus der Definition des zugehörigen globalen Schnitts erkennen wir, dass  $s|_{U_\sigma} \neq 0$  gilt. Da dies für jeden Kegel  $\sigma \in \Sigma(d)$  gilt und die zugehörigen offenen Mengen  $U_\sigma$  ganz  $X_\Sigma$  überdecken, ist  $D$  basispunktfrei.  $\square$

**Beispiel 1.11.5.** Der vollständige Fächer  $\Sigma_a$ , der von den Strahlen  $e_1, e_2, -e_2$  und  $-e_1 + ae_2$  erzeugt wird, heißt *Hirzebruchfächer*, die zugehörige torische Fläche  $\mathbb{F}_a$  *Hirzebruchfläche*. Wir betrachten in  $\mathbb{F}_1$  die Divisoren  $D := \mathcal{V}_{-e_2}, D' := \mathcal{V}_{-e_2} + \mathcal{V}_{e_2} \subset \mathbb{F}_1$ . Aus der Abbil-

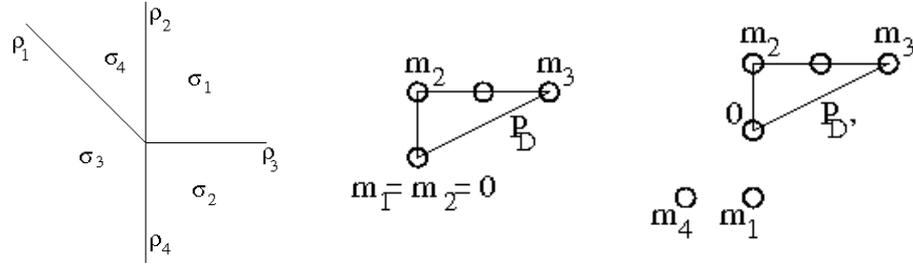


Abbildung 1.3: Der Hirzebruchfächer  $\Sigma_1$  und die Polytope  $P_D, P_{D'}$

dung 1.3 sehen wir mit Proposition 1.11.4, dass  $D$ , aber nicht  $D'$  basispunktfrei ist.

**Definition 1.11.6.** Sei  $D \in \text{CDiv}(X)$  ein Cartier-Divisor auf einer vollständigen normalen Varietät  $X$ , und  $D$  sei basispunktfrei. Weiter sei  $\{s_0, \dots, s_n\}$  eine Basis des endlichdimensionalen Vektorraums  $\Gamma(X, D)$ . Dann bezeichnen wir mit  $\varphi_D$  den Morphismus

$$\varphi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \tag{1.7}$$

$$p \longmapsto (s_0(p) : \dots : s_n(p)). \tag{1.8}$$

Für  $X = X_{\Sigma(P)}$  können wir wegen Proposition 1.9.28 die globalen Schnitte  $s_i$  durch  $\chi^{m_i} \in \Gamma(X, D)$  mit  $\{m_0, \dots, m_n\} = P_D \cap M$  wählen. Wir schreiben dann auch  $\varphi_D(p) = (\chi^{m_0}(p) : \dots : \chi^{m_n}(p))$ . Ist dies eine abgeschlossene Einbettung, so heißt  $D$  *sehr ample*.

Ein Cartier-Divisor  $D$  heißt *ample*, wenn es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $kD$  sehr ample ist.

**Proposition 1.11.7.** Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein volldimensionales Gitterpolytop und  $D_P$  der zugehörige Divisor in  $X_P$ . Dann ist  $D_P$  genau dann sehr ample, wenn  $P$  sehr ample ist.

*Beweis.* Der Divisor  $D := D_P$  ist genau dann sehr ample, wenn der Morphismus  $\varphi_D$  aus (1.7) eine abgeschlossene Einbettung ist, d.h.  $\varphi_D(X_P) \cong X_P$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\varphi_D|_{U_\sigma}(U_\sigma) \cong U_\sigma \forall \sigma \in \Sigma(P)(d)$ . Die volldimensionalen Kegel von  $\Sigma(P)$  entsprechen den Ecken von  $P$ . Sei  $\sigma = \sigma_{m_0}$  mit einer Ecke  $m_0 \in M \cap P$  von  $P$ . Wegen

$$\begin{aligned} \varphi_D|_{U_\sigma} : U_\sigma &\longrightarrow U_0 \subset \mathbb{P}^n \\ p &\longmapsto (1 : \chi^{m_1 - m_0}(p) : \dots : \chi^{m_n - m_0}(p)) \end{aligned}$$

und  $\mathcal{O}(U_\sigma) = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  ist dies äquivalent dazu, dass die Menge  $\{m - m_0 : m \in P \cap M\}$  das Monoid  $\sigma^\vee \cap M$  erzeugt, d.h.  $\{\sum_{m \in P \cap M} c_m(m - m_0) : c_m \in \mathbb{N}\}$  ist saturiert.  $\square$

**Korollar 1.11.8.** *Der Cartier-Divisor  $D_P \subset X_P$  zu einem voll-dimensionalen Gitterpolytop  $P \subset M_\mathbb{Q}$  ist ample und insbesondere basispunktfrei. Der Divisor  $kD_P$  ist sehr ample für  $k \geq d - 1$ .*

*Beweis.* Wegen Korollar 1.9.14 ist  $kP$  sehr ample, falls  $k \geq d - 1$ . Mit Proposition 1.11.7 ist somit  $kD_P \subset X_P$  sehr ample.  $\square$

Die folgende Proposition ist als Analogon zu Proposition 1.11.4 zu sehen:

**Proposition 1.11.9.** *Sei  $\Sigma$  ein vollständiger Fächer und  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c_\rho \mathcal{V}_\rho$  ein Cartier-Divisor. Dann sind äquivalent:*

- (1)  $D$  ist ample.
- (2)  $h_D$  ist strikt konvex.
- (3)  $P_D$  ist volldimensional und seine Ecken entsprechen bijektiv den Linearformen  $m_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma(d)$ , von  $h_D$ .

*Ist eine dieser Aussagen erfüllt, so stimmt der Normalenfächer von  $P_D$  mit  $\Sigma$  überein, und es gilt  $D_{(P_D)} = D$ .*

*Ist  $D$  ample und  $d \geq 2$ , so ist  $kD$  sehr ample für alle  $k \geq d - 1$ .*

*Beweis.* Sei zunächst  $D$  sehr ample. Insbesondere ist dann  $D$  basispunktfrei, weswegen mit Proposition 1.11.4  $h_D$  konvex ist. Wir nehmen an, dass  $h_D$  nicht strikt konvex ist.

Dann gibt es wegen Proposition 1.11.2 eine Wand  $\omega = \sigma \cap \sigma'$  mit  $m_\sigma = m_{\sigma'} =: m_0$ . Wegen Proposition 1.11.4 ist  $m_0 \in P_D \cap M$ . Der globale Schnitt zu  $\chi^{m_0}$  verschwindet auf  $U_\sigma \cup U_{\sigma'}$  nicht. Deswegen ist die Einschränkung des Morphismus  $\varphi_D$  aus (1.7) auf  $U_\sigma \cup U_{\sigma'}$  ein Morphismus in die affine Menge  $U_{i_0} \subset \mathbb{P}^n$ . Wegen  $\omega \subset \sigma, \sigma'$  gilt  $\mathbb{P}^1 \cong \mathcal{V}_\omega \subset U_\sigma \cup U_{\sigma'}$ . Weil jeder Morphismus des projektiven Raums in einen affinen Raum konstant ist, bildet  $\varphi_D$  die Kurve  $\mathcal{V}_\omega$  auf einen Punkt ab. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass  $\varphi_D$  eine abgeschlossene Einbettung ist.

Wir zeigen nun die Implikation (1)  $\Rightarrow$  (2). Sei also  $D$  ample. Dann gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $kD$  sehr ample ist. Die zugehörige stückweise lineare Funktion  $h_{kD} = kh_D$  ist strikt konvex, also ist auch  $h_D$  strikt konvex.

Sei nun (2) erfüllt, also  $h := h_D$  strikt konvex. Dann ist  $h_D$  insbesondere konvex. Wegen Proposition 1.11.4 ist die Menge der Ecken von  $P_h \stackrel{1.9.26}{=} P_{(D_h)}$  durch  $\{m_\sigma : \sigma \in \Sigma(d)\}$  gegeben. Wir nehmen an, dass  $P_h$  nicht volldimensional ist, d.h. es gibt ein  $u \in N_{\mathbb{Q}}$  und  $c \in \mathbb{Z}$  mit  $\langle m_\sigma, u \rangle = c \ \forall \sigma \in \Sigma(d)$ . Seien  $\sigma, \sigma' \in \Sigma(d)$ , so dass  $u \in \sigma, u \notin \sigma'$ . Wegen Proposition 1.11.2 gilt  $c = \langle m_\sigma, u \rangle = h(u) < \langle m_{\sigma'}, u \rangle = c$ . Dies ist ein Widerspruch. Also ist  $P_h$  volldimensional, und sein Normalenfächer ist  $\Sigma$ . Dies liefert uns die Implikation (2)  $\Rightarrow$  (3).

Wegen Korollar 1.11.8 und Proposition 1.9.26 folgt aus (3), dass  $D = D_h = D_{(P_D)}$  ample ist. Der Rest der Behauptung folgt mit Korollar 1.11.8.  $\square$

**Beispiel 1.11.10.** Die Divisoren aus Beispiel 1.11.5 sind also nicht ample. Dagegen ist der Divisor  $D := -K_{\mathbb{F}_1} \subset \mathbb{F}_1$  ample, siehe Abbildung 1.4.

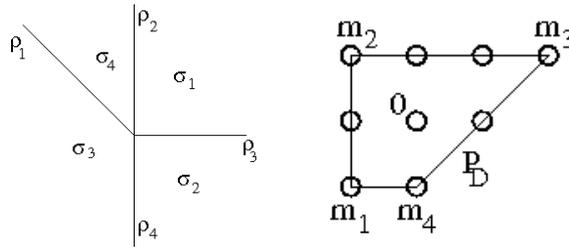


Abbildung 1.4: Der Hirzebruchfächer  $\Sigma_1$  und das Polytop  $P_D$

**Korollar 1.11.11.** Genau dann, wenn es eine strikt konvexe stückweise lineare Funktion  $h \in SF(\Sigma, N)$  gibt, ist  $X_\Sigma$  projektiv. In diesem Fall nennen wir auch den Fächer  $\Sigma$  projektiv.

**Korollar 1.11.12** (Demazure). Ist  $X_\Sigma$  glatt, so ist  $D$  genau dann ample, wenn  $D$  sehr ample ist.

*Beweis.* Sei  $D$  ample. Wegen Proposition 1.11.9 ist  $\Sigma$  der Normalenfächer von  $P_D$  und  $D = D_{(P_D)}$ . Weil  $X_\Sigma$  glatt ist, ist auch  $P_D$  glatt. Wegen Bemerkung 1.9.16 ist das Polytop  $P_D$  sehr ample. Wegen Proposition 1.11.7 ist dann auch  $D = D_{(P_D)}$  sehr ample.  $\square$



## 2 Auflösung von Singularitäten

Mit Hilfe der im letzten Kapitel gelegten Grundlagen werden wir nun eine zentrale Fragestellung der algebraischen Geometrie verfolgen: die Auflösung von Singularitäten. Dabei sucht man zu einer beliebigen Varietät  $X$  einen birationalen Morphismus  $X' \rightarrow X$  mit bestimmten Eigenschaften, so dass  $X'$  glatt ist. Dieses Problem wurde schon in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhundert für singuläre Kurven über  $\mathbb{C}$  behandelt. In den Jahren 1939 und 1944 wurden dann Singularitäten von Flächen und 3-dimensionalen Varietäten von Oscar Zariski aufgelöst. 1964 konnte Heisuke Hironaka schließlich die Existenz einer Auflösung für beliebige Varietäten über einem Körper der Charakteristik 0 zeigen. Für positive Charakteristik ist die Existenz einer Auflösung immer noch ein offenes Problem. Für torische Varietäten kann man die Auflösung durch eine Unterteilung des zugehörigen Fächers erreichen. Wir werden in diesem Kapitel mit Hilfe der existierenden Auflösung die Schwere von Singularitäten torischer Varietäten untersuchen und konvexgeometrisch beschreiben.

Dazu sei  $X$  stets eine normale separierte  $d$ -dimensionale komplexe Varietät. Diese Voraussetzungen sind insbesondere für torische Varietäten erfüllt.

Eine Varietät  $X$  heißt

- *faktoriell*, wenn jeder Weil-Divisor ein Cartier-Divisor ist.
- *global faktoriell*, wenn jeder Weil-Divisor ein Hauptdivisor ist.

Eine Varietät ist genau dann faktoriell, wenn jeder lokale Ring faktoriell ist. Eine affine Varietät ist also genau dann global faktoriell, wenn der Koordinatenring ein faktorieller Ring ist.

Ist  $X$  eine global faktorielle Varietät, so folgt sofort  $\text{Cl}(X) = \text{Pic}(X) = 0$ , und  $X$  ist faktoriell. Ist  $X$  faktoriell, so folgt zumindest noch  $\text{Pic}(X) = \text{Cl}(X)$ . Hier gilt für  $X = X_\Sigma$  mit der Bemerkung nach Lemma 1.8.2:  $\text{rang}(\text{Pic}(X)) = |\Sigma(1)| - d$ .

Ein Weil-Divisor  $D \subset X$  heißt

- $\mathbb{Q}$ -Hauptdivisor, wenn es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $nD$  ein Hauptdivisor ist.
- $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor, wenn es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt mit  $nD \in \text{CDiv}(X)$ .

Ein  $\mathbb{Q}$ -Divisor ist ein Element von  $\text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

Eine Varietät  $X$  heißt

- $\mathbb{Q}$ -faktoriell, wenn jeder Weil-Divisor ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor ist.
- global  $\mathbb{Q}$ -faktoriell, wenn jeder Weil-Divisor ein  $\mathbb{Q}$ -Hauptdivisor ist.

**Proposition 2.1.13.** *Für eine torische Varietät  $X = X_{\Sigma}$  sind äquivalent:*

- (1)  $X$  ist faktoriell.
- (2)  $X$  ist glatt.
- (3)  $\Sigma$  ist glatt.
- (4)  $U_{\sigma}$  ist global faktoriell.
- (5)  $\mathcal{V}_{\sigma}$  ist ein Cartier-Divisor  $\forall \sigma \in \Sigma$ .

*Beweis.* Wegen Korollar 1.8.7 sind (1) und (2) äquivalent. Wegen Proposition 1.6.2 sind (2) und (3) äquivalent. Sei nun (3) erfüllt. Dann gilt auch (1), und  $U_{\sigma}$  ist glatt und faktoriell. Wegen Proposition 1.8.6 ist  $U_{\sigma}$  global faktoriell. Umgekehrt folgt aus (4), dass  $U_{\sigma}$  faktoriell und glatt ist. Weil  $X$  von  $U_{\sigma}, \sigma \in \Sigma$ , überdeckt wird, ergibt sich (2). Die Äquivalenz der Aussagen (1) und (5) gilt wegen der Bemerkung 1.8.3.  $\square$

**Proposition 2.1.14.** *Für eine torische Varietät  $X = X_{\Sigma}$  sind äquivalent:*

- (1)  $X$  ist  $\mathbb{Q}$ -faktoriell.
- (2)  $\Sigma$  ist simplizial.
- (3)  $U_{\sigma}$  ist global  $\mathbb{Q}$ -faktoriell.
- (4)  $\mathcal{V}_{\sigma}$  ist ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor  $\forall \sigma \in \Sigma$ .

---

*Beweis.* Die torische Varietät  $X$  ist wegen Bemerkung 1.8.3 genau dann  $\mathbb{Q}$ -faktoriell, wenn jeder Divisor  $\mathcal{V}_\rho, \rho \in \Sigma(1)$ , ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor ist. Dies beweist die Äquivalenz von (1) und (2). Weiter ist dies mit Proposition 1.8.6 äquivalent dazu, dass es zu  $\sigma \in \Sigma(d)$  eine Zahl  $c \in \mathbb{Z}$  und  $m \in M$  gibt, so dass auf  $U_\sigma$  gilt:

$$c\mathcal{V}_\rho = \operatorname{div}(\chi^m) = \sum_{\rho' \in \sigma(1)} \langle m, u_{\rho'} \rangle \mathcal{V}_{\rho'},$$

d.h.  $\langle m, u_\rho \rangle = 0 \forall \rho' \neq \rho$ . Dies ist äquivalent dazu, dass es zu jedem Kegel  $\sigma \in \Sigma$  eine duale Vektorraumbasis zu  $\{u_\rho : \rho \in \sigma(1)\}$  gibt, d.h. jeder Kegel  $\sigma \in \Sigma$  ist simplizial. Somit sind auch (1) und (2) äquivalent. Außerdem folgt aus (1) mit Proposition 1.8.6 schon (3). Umgekehrt impliziert die Aussage (3) per Definition eines Cartier-Divisors schon (1).  $\square$

Für die Auflösung von Singularitäten benötigen wir noch eine Eigenschaft des zugehörigen Morphismus:

Seien  $X$  und  $Y$  algebraische Varietäten. Ein Morphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  heißt *abgeschlossen*, wenn das Bild  $\varphi(A) \subset Y$  jeder abgeschlossenen Menge  $A \subset X$  in  $Y$  abgeschlossen ist.

Ein Morphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  heißt *proper*, wenn für jede Varietät  $Z$  und jeden Morphismus  $\psi : Z \rightarrow Y$  der Morphismus  $\pi_Z$  im folgenden Diagramm abgeschlossen ist:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ \pi_Z \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

Dabei bezeichnet  $X \times_Y Z = \{(x, z) \in X \times Z : \varphi(x) = \psi(z)\}$  das Faserprodukt von  $X$  und  $Z$  über  $Y$ .

Ein Morphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  ist genau dann proper, wenn bezüglich der  $\mathbb{C}$ -Topologie auf  $X$  und  $Y$  das Urbild von kompakten Mengen auch wieder kompakt ist.

Seien  $\Sigma, \Sigma'$  zwei Fächer. Dann heißt  $\Sigma'$  eine *Unterteilung* von  $\Sigma$ , wenn  $\operatorname{supp}(\Sigma) = \operatorname{supp}(\Sigma')$  und jeder Kegel in  $\Sigma$  die Vereinigung von Kegeln aus  $\Sigma'$  ist.

**Proposition 2.1.15** ([Dan78], 5.6). *Ein Morphismus torischer Varietäten  $X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$  ist genau dann proper, wenn das Urbild von  $\text{supp}(\Sigma)$  unter dem zugehörigen Fächer-Morphismus der Träger  $\text{supp}(\Sigma')$  ist. Insbesondere ist ein birationaler Morphismus genau dann proper, wenn der zugehörige Fächermorphismus eine Unterteilung ist.*

Eine Varietät  $X$  heißt *vollständig*, wenn der Morphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  proper ist, wobei  $Y$  ein Punkt ist.

Die Varietät  $X$  ist genau dann vollständig, wenn  $X$  bezüglich der  $\mathbb{C}$ -Topologie kompakt ist.

**Korollar 2.1.16.** *Eine torische Varietät  $X_{\Sigma}$  ist genau dann vollständig, wenn ihr Fächer  $\Sigma$  vollständig ist.*

*Beweis.* Die torische Varietät  $X_{\Sigma}$  ist wegen Proposition 2.1.15 genau dann vollständig, wenn der Träger  $\text{supp}(\Sigma)$  das Urbild der Nullabbildung, also  $N_{\mathbb{Q}}$  ist.  $\square$

**Definition 2.1.17.** Eine *Auflösung von Singularitäten* von  $X$  ist ein proper birationaler Morphismus  $f : Y \rightarrow X$ , wobei  $Y$  eine glatte Varietät ist.

Die abgeschlossene Menge  $E \subset Y$ , auf der  $f$  kein lokaler Isomorphismus ist, heißt *exzeptioneller Ort* der Auflösung. Da  $X$  normal ist, ist die Codimension von  $f(E) \subset X$  mindestens 2. Ist  $X$   $\mathbb{Q}$ -faktoriell, so ist  $E$  die Vereinigung von Primdivisoren (vgl. [Deb01], 1.40).

**Definition 2.1.18.** Seien  $X = X_{\Sigma}$  und  $X' = X_{\Sigma'}$  torische Varietäten, wobei man  $\Sigma'$  aus  $\Sigma$  durch eine Folge von Unterteilungen und Löschungen von Kegeln enthält. Dies entspricht einer torischen birationalen Abbildung  $f : X' \dashrightarrow X$ . Die *Transformierte* eines irreduziblen Divisors  $D \subset X$  mit  $D \cap T_N \neq \emptyset$  sei  $D' = \overline{D \cap T_N}$ .

Ist zum Beispiel  $\pi : X' \rightarrow X$  die Projektion einer Aufblasung von  $X$ , so ist die Transformierte von  $D \subset X$  seine Aufblasung.

Sei  $f : X' \rightarrow X$  ein Morphismus zweier normaler Varietäten und  $D \subset X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor. Dann gibt es zu jedem Punkt  $p \in D$  eine Umgebung  $U \subset X$  und eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $nD|_U = \text{div}(g)|_U$  mit  $g \in \mathbb{C}(U)^*$ . Sei  $f^*$  der Co-Morphismus auf  $k[U]$ . Dann ist der *Pullback-Divisor*  $f^*(D)$  von  $D$  der  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor, der lokal durch  $\text{div}(f^*(g))$  definiert ist.

Sei  $f : X' \rightarrow X$  ein Morphismus zweier normaler Varietäten und  $D \subset X$  ein irreduzibler Cartier-Divisor. Dann gilt  $D' \subset f^*(D)$ , wobei  $D'$  die Transformierte von  $D$  in  $X'$  ist.

---

**Definition 2.1.19.** Sei  $D \subset X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor einer normalen Varietät  $X$ . Weiter sei  $f : X' \rightarrow X$  ein birationaler Morphismus und  $D'$  die Transformierte von  $D$ . Ist

$$D' = f^*(D) + \sum_{i=1}^n a_i E_i, \quad (2.1)$$

wobei  $E_1, \dots, E_n \subset X'$  die exceptionellen Divisoren von  $f$  sind, so heißt die ganze Zahl  $a_i \in \mathbb{Z}$  die *Diskrepanz von  $D$  bei  $E_i$* .

Sei  $X$   $\mathbb{Q}$ -faktoriell. Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl  $j_X \in \mathbb{N}$ , so dass  $j_X K_X$  ein Cartier-Divisor ist. Diese Zahl heißt der *Gorenstein-Index von  $X$* . Weiter sei  $f : Y \rightarrow X$  eine Auflösung von Singularitäten. Dann gilt

$$j_X K_Y = f^*(j_X K_X) + \sum_i a_i j_X E_i$$

mit exceptionellen Divisoren  $E_i$ . Folglich gilt auch als Gleichung von  $\mathbb{Q}$ -Divisoren:

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_i a_i E_i.$$

Sind alle Diskrepanzen  $a_i$  echt positiv, so hat  $X$  *terminale Singularitäten*. Sind alle Diskrepanzen  $a_i$  nicht negativ, so hat  $X$  *kanonische Singularitäten*. Sind alle Diskrepanzen  $a_i$  größer als  $-1$ , so hat  $X$  *log terminale Singularitäten*.

Die Positivität der Diskrepanzen hängt nicht von der gewählten Auflösung ab. Somit sind obige Begriffe wohldefiniert. Dies wollen wir uns für torische Varietäten verdeutlichen, indem wir die Diskrepanzen hier explizit berechnen:

**Proposition 2.1.20.** *Es sei  $X = X_\Sigma$  eine  $\mathbb{Q}$ -faktorielle torische Varietät und  $X' = X_{\Sigma'}$  die Varietät zu einer Unterteilung  $\Sigma'$  des Fächers  $\Sigma$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $D = D_h \subset X$  ein Cartier-Divisor und  $D_{h'} \subset X'$  seine Transformierte unter  $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$ . Dabei ist  $h \in SF(\Sigma, N)$  und  $h' \in SF(\Sigma', N)$ . Dann gilt*

$$D_{h'} = f^*(D_h) + \sum_{\rho \in \Sigma'(1)} \left( h(u_\rho) - h'(u_\rho) \right) \mathcal{V}_\rho.$$

*Beweis.* Die stückweise lineare Funktion  $h \in SF(\Sigma, N)$  sei auf  $\sigma \in \Sigma(d)$  durch  $m_\sigma \in M$  gegeben. Dann gilt mit Lemma 1.8.2 und der

Bezeichnung aus Gleichung (2.1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\rho \in \Sigma'(1) \\ \rho \subset \sigma}} a_\rho \mathcal{V}_\rho &= (D_{h'})|_{f^{-1}U_\sigma} - f^*(D_h)|_{f^{-1}U_\sigma} \\
 &= - \sum_{\substack{\rho \in \Sigma'(1) \\ \rho \subset \sigma}} h'(u_\rho) \mathcal{V}_\rho + f^* \left( \sum_{\rho \in \sigma(1)} h(u_\rho) \mathcal{V}_\rho \right) \Big|_{f^{-1}U_\sigma} \\
 &= - \sum_{\substack{\rho \in \Sigma'(1) \\ \rho \subset \sigma}} h'(u_\rho) \mathcal{V}_\rho + f^* \left( \sum_{\rho \in \sigma(1)} \langle m_\sigma, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho \right) \Big|_{f^{-1}U_\sigma} \\
 &= - \sum_{\substack{\rho \in \Sigma'(1) \\ \rho \subset \sigma}} h'(u_\rho) \mathcal{V}_\rho + f^*(\operatorname{div}(\chi^{m_\sigma}))|_{f^{-1}U_\sigma} \\
 &= \sum_{\substack{\rho \in \Sigma'(1) \\ \rho \subset \sigma}} \left( \langle m_\sigma, u_\rho \rangle - h'(u_\rho) \right) \mathcal{V}_\rho \\
 &= \sum_{\substack{\rho \in \Sigma'(1) \\ \rho \subset \sigma}} \left( h(u_\rho) - h'(u_\rho) \right) \mathcal{V}_\rho.
 \end{aligned}$$

Durch Vergleich ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**Korollar 2.1.21.** *Sei  $X = X_\Sigma$  eine torische Varietät und  $K_X$  ein Cartier-Divisor mit zugehöriger stückweisen linearen Funktion  $h \in SF(\Sigma, N)$ . Dann gilt*

$$K_{X'} = f^* K_X + \sum_{\rho \in \Sigma'(1) \setminus \Sigma(1)} (h(u_\rho) - 1) \mathcal{V}_\rho.$$

*Insbesondere hat jede  $\mathbb{Q}$ -faktorielle torische Varietät log terminale Singularitäten.*

*Außerdem hängt die Positivität der Diskrepanzen nicht von der Auflösung ab, d.h. gibt es eine Auflösung, so dass alle Diskrepanzen positiv sind, so ist dies bei jeder glatten Auflösung der Fall.*

*Beweis.* Dies erkennt man durch Übergang zu einer gemeinsamen glatten Verfeinerung der beiden glatten Fächer.  $\square$

Sei  $\sigma \subset N_\mathbb{Q}$  ein spitzer Kegel, dessen Strahlen von den primitiven Vektoren  $u_1, \dots, u_n \in N$  erzeugt werden. Dann heißt der Kegel  $\sigma$

- *terminal*, wenn  $\operatorname{conv}(0, u_1, \dots, u_n) \cap N = \{0, u_1, \dots, u_n\}$ , und  $u_1, \dots, u_n$  in einer Hyperebene enthalten sind.
- *kanonisch*, wenn  $\operatorname{conv}(0, u_1, \dots, u_n) \cap N \setminus \{0\} \subset \operatorname{aff}(u_1, \dots, u_n)$ , und  $u_1, \dots, u_n$  in einer Hyperebene enthalten sind.

Ein Fächer heißt *terminal* bzw. *kanonisch*, wenn jeder Kegel des Fächers terminal bzw. kanonisch ist.

Es gelten also die Implikationen

$$\Sigma \text{ glatt} \Rightarrow \Sigma \text{ terminal} \Rightarrow \Sigma \text{ kanonisch.}$$

**Beispiel 2.1.22.** Der Kegel  $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x, y \geq 0\} \subset (\mathbb{Z}^2)_{\mathbb{Q}}$  ist terminal, der Kegel  $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y^2 \leq x^2, x \geq 0\} \subset (\mathbb{Z}^2)_{\mathbb{Q}}$  ist kanonisch.

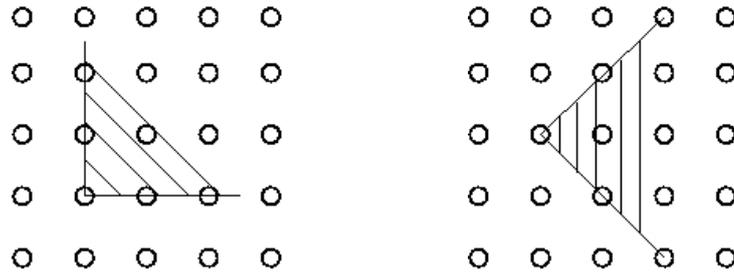


Abbildung 2.1: Ein terminaler und ein kanonischer Gitterkegel

**Korollar 2.1.23** ([Rei80]). *Ein Kegel  $\sigma$  ist terminal (bzw. kanonisch), wenn  $U_{\sigma}$  bei  $\mathcal{V}_{\sigma}$  eine terminale (bzw. kanonische) Singularität hat. Insbesondere hat  $X$  genau dann terminale (bzw. kanonische) Singularitäten, wenn jeder Kegel  $\sigma \in \Sigma(d)$  terminal (bzw. kanonisch) ist.*

*Beweis.* Dies folgt mit der Proposition 2.1.20. □

Hat die Varietät  $X$  höchstens terminale Singularitäten, so gilt mit dem Hauptsatz aus [Rei83b]  $\text{codim}(X)_{\text{sing}} > 2$ . Weiter gilt die sogenannte Adjunktionsformel:

**Proposition 2.1.24** ([Rei87]). *Sei  $D \subset X$  eine glatter Divisor einer Varietät  $X$  mit höchstens terminalen Singularitäten. Dann gilt  $K_D = (K_X + D)|_D$ .*

**Definition 2.1.25.** (1) Sei  $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$  ein spitzer Gitterkegel, dessen Strahlen von  $u_1, \dots, u_n$  erzeugt werden. Dann heißt  $\text{shed}(\sigma) := \text{conv}(0, u_1, \dots, u_n)$  die *Hütte* von  $\sigma$ .

(2) Sei  $\Sigma$  ein vollständiger Fächer. Dann heißt

$$\text{shed}(\Sigma) := \bigcup_{\sigma \in \Sigma(d)} \text{shed}(\sigma)$$

die *Hütte* von  $\Sigma$ .



Abbildung 2.2: Eine Hütte und ihr Dach

(3) Das *Dach*  $\text{roof}(\Sigma)$  von  $\Sigma$  ist der Rand von  $\text{shed}(\Sigma)$ .

*Bemerkung 2.1.26.* Ein Kegel  $\sigma = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  ist also genau dann terminal (bzw. kanonisch), wenn  $u_1, \dots, u_n$  in einer Hyperebene  $H \subset N_{\mathbb{Q}}$  liegen, und  $\text{shed}(\sigma) \cap N = \{0, u_1, \dots, u_n\}$  (bzw.  $(\text{shed}(\sigma) \setminus H) \cap N = \{0\}$ ) gilt.

**Proposition 2.1.27.** Sei  $\Sigma$  ein vollständiger Fächer und  $X = X_{\Sigma}$ . Dann ist  $K_X$  genau dann ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor, wenn das Dach von  $\text{shed}(\Sigma)$  flach über jedem Kegel  $\sigma \in \Sigma$  ist, d.h. ist  $\sigma = \langle u_1, \dots, u_n \rangle \in \Sigma(k)$ , so ist  $\text{conv}(u_1, \dots, u_n)$  in einem affinen  $(k-1)$ -dimensionalen Untervektorraum von  $N_{\mathbb{Q}}$  enthalten.

*Beweis.* Sei  $K_X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor und  $\sigma = \langle u_1, \dots, u_n \rangle \in \Sigma(k)$ . Dann gilt wegen Proposition 1.8.6 auf  $U_{\sigma}$ :

$$c \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_{u_i} = -cK_X = \text{div}(\chi^m) = \sum_{i=1}^n \langle m, u_i \rangle \mathcal{V}_{u_i}$$

mit  $c \in \mathbb{N}, m \in M$ . Deswegen ist  $\langle m, u_i \rangle = c \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , d.h.  $u_1, \dots, u_n$  liegen in einer Hyperebene.

Ist umgekehrt das Dach von  $\Sigma$  über jedem Kegel  $\sigma = \langle u_1, \dots, u_n \rangle \in \Sigma$  flach, so gibt es eine Zahl  $c \in \mathbb{N}$  und ein  $m \in M$ , so dass  $\langle m, u_i \rangle = c \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Daher ist  $-cK_X = \sum_{i=1}^n c \mathcal{V}_{u_i} = \sum_{i=1}^n \langle m, u_i \rangle \mathcal{V}_{u_i} = \text{div}(\chi^m)$  auf  $U_{\sigma}$ . Da dies für jeden Kegel gilt, ist  $K_X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor.  $\square$

**Definition 2.1.28.** Sei  $X$  eine glatte Varietät. Dann heißt  $p_n(X) := \dim \Gamma(X, nK_X)$  der  $n$ -te Plurigenus von  $X$ . Der erste Plurigenus heißt auch *geometrisches Geschlecht* von  $X$ .

Sei  $X$  eine glatte Varietät. Die Folge

$$(\dim \Gamma(X, nD))_{n \in \mathbb{N}}$$

wächst wie ein Polynom in  $n$ . Sein Grad wird mit  $\kappa(X, D)$  bezeichnet. Speziell für  $D = K_X$  heißt  $\kappa(X) := \kappa(X, K_X)$  die *Kodaira-Dimension* von  $X$ .

---

Sei nun  $X$  eine beliebige algebraische Varietät (über  $\mathbb{C}$ ). Dann gibt es wegen dem Theorem von Hironaka eine Singularitätenauflösung  $f : X' \rightarrow X$ . Wir definieren nun  $\kappa(X) := \kappa(X')$  die *Kodaira-Dimension* von  $X$ .

Stimmen für eine Varietät  $X$  die Kodaira-Dimension und die Dimension der Varietät überein, so nennt man die Varietät *vom allgemeinen Typ*.

*Bemerkung 2.1.29.* Die Plurigenera von  $X$  und einer Auflösung  $f : X' \rightarrow X$  sind im Allgemeinen verschieden. Sie stimmen aber überein, falls  $X$  und  $X'$  höchstens terminale Singularitäten haben. Hier erzeugt nämlich der Rückzug von Differentialformen einen Isomorphismus  $\Gamma(X, nK_X) \cong \Gamma(X', nK_{X'})$ .

Deswegen ist die Kodaira-Dimension einer vollständigen Varietät  $X$  wohldefiniert und eine birationale Invariante, die unabhängig von der Auflösung  $f : X' \rightarrow X$  ist.



## 3 Das Minimal Model Program für torische Varietäten

In diesem Kapitel geht es um das Minimal Model Program, ein immer noch aktuelles Problem der birationalen Geometrie, das wohl kurz vor seinem Abschluss steht. Für torische Varietäten ist es allerdings dank des Artikels [Rei80] gut zu verstehen.

Die ersten drei Abschnitte legen die benötigten Begriffe und Grundlagen bereit. Im vierten Abschnitt wird mehr zum Minimal Model Program gesagt als dies in den obigen Zeilen getan wurde. Die weiteren vier Abschnitte behandeln dann das torische Minimal Model Program. Diese Abschnitte orientieren sich am Artikel “Decomposition of Toric Morphisms” von Miles Reid [Rei80] und am Buch “Introduction to the Mori program” von Kenji Matsuki [Mat02].

### 3.1 Das Schnittprodukt

Sei  $C \subset X$  eine vollständige irreduzible glatte Kurve auf einer normalen Varietät  $X$ . Dann ist jedes Linienbündel auf  $C$  wegen Abschnitt 1.11 von der Form  $\mathcal{O}_X(D)$  mit genau einem  $D \in \text{Pic}(C)$ . Ein Vertreter  $D' \in \text{CDiv}(C)$  der Klasse  $D$  ist von der Form  $D' = \sum_i a_i P_i$  mit endlich vielen Punkten  $P_i \in C$ . Dabei ist die Zahl  $\deg(\mathcal{O}_X(D)) := \deg(D') := \sum_i a_i \in \mathbb{Z}$  unabhängig vom Vertreter  $D'$  ([Har77], II.6.10) und heißt der *Grad des Linienbündels bzw. des Divisors*.

Sei nun  $D \in \text{CDiv}(X)$  ein Cartier-Divisor und  $C \subset X$  eine vollständige irreduzible Kurve mit Normalisierung  $\varphi : C' \rightarrow C$ . Der Grad des Linienbündels  $\varphi^* \mathcal{O}_X(D)$  auf der Kurve  $C'$  heißt das *Schnittprodukt* von  $D$  und  $C$  und wird mit  $D \cdot C \in \mathbb{Z}$  bezeichnet.

*Bemerkung 3.1.1.* (1) Für Divisoren  $D, D' \in \text{CDiv}(X)$  und eine irreduzible vollständige Kurve  $C$  gilt  $(D + D') \cdot C = D \cdot C + D' \cdot C$  und  $D \cdot C = D' \cdot C$ , falls  $D \sim D'$ .

(2) Das Schnittprodukt lässt sich also auch auf  $\text{Pic}(X)$  definieren und einfach auf die Menge der  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisoren  $\text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$  fortsetzen.

- (3) Ist  $D \subset X$  ein Divisor und  $C \subset X$  eine irreduzible vollständige Kurve mit  $D \cap C = \emptyset$ , so ist  $\varphi^* \mathcal{O}_X(D)$  das triviale Bündel auf  $C'$  und deswegen  $D \cdot C = 0$ .
- (4) Ist  $X = X_\Sigma$  eine torische Varietät und  $\omega \in \Sigma(d-1)$  eine Wand, so braucht man für das Schnittprodukt eines Cartier-Divisors mit der Kurve  $\mathcal{V}_\omega$  keine Normalisierung, da  $\mathcal{V}_\omega \cong \mathbb{P}^1$  glatt und insbesondere normal ist.

**Proposition 3.1.2** ([CLS91], 6.2.8). *Sei  $X = X_\Sigma$ ,  $\omega = \sigma \cap \sigma'$  mit  $\sigma, \sigma' \in \Sigma(d)$  und  $D \in \text{CDiv}(X)$  ein Cartier-Divisor. Die stückweise lineare Funktion  $h_D$  sei auf  $\sigma$  bzw.  $\sigma'$  durch  $m_\sigma, m_{\sigma'} \in M$  gegeben. Außerdem sei  $u_{\sigma'} \in \sigma' \cap N$  ein Vektor mit Höhe 1 über  $\text{lin}(\omega)$ . Dann gilt*

$$D \cdot \mathcal{V}_\omega = \langle m_\sigma - m_{\sigma'}, u_{\sigma'} \rangle.$$

**Korollar 3.1.3.** *Sei  $\Sigma$  simplizial und  $X = X_\Sigma$ . Dann gilt  $\mathcal{V}_\rho \cdot \mathcal{V}_\omega = d(u_\rho, \omega)$ , falls  $\langle \rho, \omega \rangle \in \Sigma(d)$ , und  $\mathcal{V}_\rho \cdot \mathcal{V}_\omega = 0$ , falls  $\rho$  und  $\omega$  in keinem gemeinsamen Kegel von  $\Sigma$  enthalten sind. Dabei ist  $d(u_\rho, \omega) \in \mathbb{N}$  der Abstand des Vektors  $u_\rho$  von  $\text{lin}(\omega)$ .*

*Beweis.* Sei  $\sigma = \langle \rho, \omega \rangle \in \Sigma(d)$  und  $\omega = \sigma \cap \sigma'$ . Dann ist  $m_{\sigma'} = 0$  und  $\text{lin}(\omega) = m_\sigma^\perp$ . Mit Proposition 3.1.2 folgt nun  $\mathcal{V}_\rho \cdot \mathcal{V}_\omega = \langle m_\sigma, u_{\sigma'} \rangle = d(u_\rho, \omega)$ . Bei der zweiten Aussage ist  $m_\sigma = m_{\sigma'} = 0$  und somit  $\mathcal{V}_\rho \cdot \mathcal{V}_\omega = 0$ .  $\square$

Ein Cartier-Divisor  $D \in \text{CDiv}(X)$  heißt *nef* oder *numerisch effektiv*, wenn  $D \cdot C \geq 0$  für alle irreduziblen vollständigen Kurven  $C \subset X$  gilt.

**Proposition 3.1.4.** *Sei  $D \in \text{CDiv}(X_\Sigma)$ . Dann sind äquivalent:*

- (1)  $D \cdot \mathcal{V}_\omega \geq 0 \forall \omega \in \Sigma(d-1)$ .
- (2)  $D$  ist basispunktfrei.
- (3)  $D$  ist nef.

*Beweis.* Wegen den Bemerkungen 1.8.3 und 3.1.1(1) können wir annehmen, dass  $D$  torusinvariant ist. Die Eigenschaft (1) ist wegen Proposition 3.1.2 äquivalent zu  $\langle m_\sigma - m_{\sigma'}, u_{\sigma'} \rangle \geq 0$  mit zwei benachbarten Kegeln  $\sigma, \sigma' \in \Sigma(d)$  und den dortigen Bezeichnungen. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\langle m_\sigma, u'_\sigma \rangle \geq \langle m_{\sigma'}, u'_\sigma \rangle = h_D(u'_\sigma)$ . Wegen Proposition 1.11.2(3) ist dies äquivalent zu der Tatsache, dass  $h_D$  konvex ist, was wiederum mit Proposition 1.11.4 zu (2) äquivalent ist.

Sei nun  $D$  basispunktfrei, d.h. für jeden Punkt  $p \in X$  gibt es einen globalen Schnitt  $s$  des Linienbündels  $\mathcal{O}_X(D)$  mit  $s(p) \neq 0$ . Sei nun  $\varphi : C' \rightarrow C$  die Normalisierung einer vollständigen irreduziblen Kurve  $C \subset X$ . Dann ist auch  $\varphi^*(\mathcal{O}_X(D)) = \mathcal{O}_{C'}(D')$  mit einem basispunktfreien Divisor  $D' \subset C'$ . Ein globaler Schnitt von  $\mathcal{O}_{C'}(D')$  sei durch  $f \in \Gamma(C', D')$  gegeben. Dann gilt  $D' \sim D' + \text{div}(f) \geq 0$  und somit

$$D \cdot C = \deg(\varphi^*(\mathcal{O}_X(D))) = \deg(\mathcal{O}_{C'}(D')) = \deg(D') > 0.$$

Da dies für jede irreduzible vollständige Kurve  $C$  gilt, ist  $D$  nef. Aus der Eigenschaft (3) folgt offensichtlich wieder (1).  $\square$

### 3.2 Der Mori-Kegel

Ein Cartier-Divisor  $D \in \text{CDiv}(X)$  heißt *numerisch trivial*, wenn  $D \cdot C = 0$  für jede irreduzible vollständige Kurve  $C \subset X$  gilt. Zwei Cartier-Divisoren  $D, D' \in \text{CDiv}(X)$  heißen *numerisch äquivalent*, wenn ihre Differenz numerisch trivial ist. Wir schreiben hierfür  $D \equiv D'$ .

**Proposition 3.2.1.** *Für zwei Cartier-Divisoren  $D, D'$  einer torischen Varietät  $X_\Sigma$  gilt  $D \equiv D'$  genau dann, wenn  $D \sim D'$ .*

*Beweis.* Ist  $D \sim D'$ , so folgt mit Bemerkung 3.1.1(1) auch  $D \equiv D'$ . Sei nun also  $D \equiv D'$  und  $E := D - D'$ . Für jede Wand  $\omega = \sigma \cap \sigma' \in \Sigma(d-1)$  sei  $u_{\sigma'} \in \sigma'$  wie in Proposition 3.1.2. Dann gilt  $0 = E \cdot \mathcal{V}_\omega = \langle m_\sigma - m_{\sigma'}, u_{\sigma'} \rangle$ . Weil  $m_\sigma - m_{\sigma'}$  auf dem  $(d-1)$ -dimensionalen Raum  $\text{lin}(\omega)$  und auf  $u_{\sigma'} \notin \text{lin}(\omega)$  senkrecht steht, folgt  $m_\sigma = m_{\sigma'}$ . Daraus folgt  $m := m_\sigma \forall \sigma \in \Sigma$ . Also ist

$$\begin{aligned} D &= D' + E = D' + \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle m, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho \\ &\stackrel{1.8.2}{\equiv} D' + \text{div}(\chi^m) \sim D'. \end{aligned}$$

$\square$

Sei im Folgenden stets  $f : X = X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma = A$  ein proper torischer Morphismus. Die von den irreduziblen vollständigen Kurven  $C \subset X$ , die durch  $f$  kontrahiert werden, erzeugte freie abelsche Gruppe wird mit  $Z_1(X/A)$  bezeichnet. Ein Element  $Z \in Z_1(X/A)_\mathbb{Q}$  heißt *1-Zykel von  $X/A$* .

Sei nun  $Y$  eine weitere Varietät mit einem Morphismus  $g : Y \rightarrow A$ , und  $\varphi : X \rightarrow Y$  ein Morphismus, so dass  $f \circ \varphi = g$ . Der von  $\varphi$  erzeugte Gruppenhomomorphismus  $\varphi_* : Z_1(X/A) \rightarrow Z_1(Y/A)$  heißt der *Push-Forward-Morphismus* von  $\varphi$ .

**Lemma 3.2.2.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus,  $D \in \text{CDiv}(Y)$  ein Cartier-Divisor und  $C \subset X$  eine irreduzible vollständige Kurve, die unter  $f$  kontrahiert wird. Dann gilt  $f^*(D) \cdot C = 0$ .

*Beweis.* Sei  $D' \sim D$ , so dass  $D' \cap f_*(C) = \emptyset$ . Dann gilt wegen der Projektionsformel (vgl. [Har77], A1)  $f^*(D) \cdot C = D \cdot f_*(C) = D' \cdot f_*(C) = 0$ .  $\square$

Das Schnittprodukt lässt sich fortsetzen zu einer Abbildung  $\text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} \times (Z_1(X/A))_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$ . Zwei Klassen  $D_1, D_2 \in \text{Pic}(X)$  heißen dann *numerisch äquivalent*, wenn  $D_1 \cdot Z = D_2 \cdot Z \forall Z \in Z_1(X/A)$  gilt. Dadurch werden  $N^1(X/A) := \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} / \equiv^{3.2.1} \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$  und  $N_1(X/A) := (Z_1(X/A))_{\mathbb{Q}} / \equiv$  zu dualen Vektorräumen.

**Proposition 3.2.3.** Ist  $\Sigma$  ein simplizialer Fächer und  $X = X_{\Sigma}$ , so können wir  $N_1(X)$  mit dem Raum aller Relationen der primitiven Erzeuger  $u_{\rho}$  der Strahlen  $\rho \in \Sigma(1)$  identifizieren.

*Beweis.* Für  $m \in M$  gilt  $0 \sim \text{div}(\chi^m) \stackrel{1.8.2}{\equiv} \sum_{\rho} \langle m, u_{\rho} \rangle \mathcal{V}_{\rho}$ . Hieraus folgt mit Bemerkung 3.1.1(1):  $0 = \langle m, \sum_{\rho} (\mathcal{V}_{\rho} \cdot C) u_{\rho} \rangle$  für jedes  $C \in N_1(X)$ . Da dies für jedes  $m \in M$  gilt, ist somit  $\sum_{\rho} (\mathcal{V}_{\rho} \cdot C) u_{\rho} = 0$  die gesuchte Relation.

Sei nun umgekehrt  $\sum_{\rho} a_{\rho} u_{\rho} = 0$  eine Relation zwischen den primitiven Erzeugern der Strahlen von  $\Sigma$ . Wir betrachten die Linearform  $\varphi : \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}; \sum_{\rho} c_{\rho} \mathcal{V}_{\rho} \mapsto \sum_{\rho} a_{\rho} c_{\rho}$ . Weil  $N_1(X)$  und  $\text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$  duale Vektorräume sind, gibt es ein  $C \in N_1(X)$ , so dass  $\varphi$  gerade durch  $C$  gegeben ist, d.h.  $(\sum_{\rho} c_{\rho} \mathcal{V}_{\rho}) \cdot C = \sum_{\rho} a_{\rho} c_{\rho}$ . Hieraus folgt  $a_{\rho} = \mathcal{V}_{\rho} \cdot C \forall \rho \in \Sigma(1)$ , d.h.  $\sum_{\rho} a_{\rho} u_{\rho} = 0$  ist die Relation zu  $C \in N_1(X)$ .  $\square$

**Definition 3.2.4.** (1) Der Kegel  $\{[D] \in N^1(X/A) : D \equiv D' \text{ mit } D' \text{ relativ nef}\} \subset N^1(X/A)$  aller Klassen von nef Cartier-Divisoren von  $X/A$  wird mit  $\text{Nef}(X/A)$  bezeichnet. Ist  $A$  ein Punkt, so schreiben wir stattdessen auch  $\text{Nef}(X)$ .

(2) Der Kegel  $\{[C] \in N_1(X/A) : C \equiv \sum a_i C_i, a_i \geq 0\} \subset N_1(X/A)$  der effektiven 1-Zykel von  $X/A$  wird mit  $\text{NE}(X/A)$  bezeichnet. Sein Abschluss  $\overline{\text{NE}}(X/A)$  heißt der *Mori-Kegel* von  $X/A$ .

Ist  $A$  ein Punkt, schreiben wir stattdessen auch  $\text{NE}(X)$  bzw.  $\overline{\text{NE}}(X)$ .

Ein Cartier-Divisor  $D \in \text{CDiv}(X)$  ist also genau dann nef, wenn  $D \in \text{NE}(X)^{\vee}$ , d.h.  $\text{Nef}(X) = \text{NE}(X)^{\vee}$ .

**Lemma 3.2.5.** *Es gilt  $\overline{NE}(X) = \text{Nef}(X)^\vee$ .*

*Beweis.* Nach vorangehender Bemerkung ist der Kegel  $\text{Nef}(X)$  als Dual eines Kegels abgeschlossen. Also gilt auch  $\text{Nef}(X) = \overline{NE}(X)^\vee$ . Daraus folgt  $\overline{NE}(X) = \text{NE}(X)^{\vee\vee} = \text{Nef}(X)^\vee$ , da der Doppeldual eines Kegels der Abschluss des Kegels ist.  $\square$

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf  $\text{NE}(X)^\vee$ , indem wir für  $D_1, D_2 \in \text{NE}(X)^\vee$  genau dann  $D_1 \approx D_2$  schreiben, wenn die zugehörigen Polytope  $P_{D_1}$  und  $P_{D_2}$  den gleichen Normalenfächer haben. Die Äquivalenzklassen von  $\approx$  sind Kegel. Die somit erhaltene Unterteilung des Kegels  $\text{NE}(X)^\vee$  heißt *Oda-Park-Unterteilung* [OP91].

Das folgende Ergebnis wird z.B. in [Rei83a], [Mat02] oder [CLS91] als das ‘‘Toric Cone Theorem’’ bezeichnet:

**Theorem 3.2.6** (Reid). *Sei  $f : X \rightarrow A$  ein proper torischer Morphismus zu einer Unterteilung  $\Sigma' \supset \Sigma$ . Weiter sei  $X$  vollständig. Dann ist*

$$\text{NE}(X/A) = \overline{NE}(X/A) = \sum_{\omega \in \Sigma'(d-1) \setminus \Sigma(d-1)} \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot [\mathcal{V}_\omega]$$

*ein abgeschlossener polyhedraler Kegel.*

*Beweis.* Sei  $K := \sum_{\omega \in \Sigma'(d-1) \setminus \Sigma(d-1)} \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot [\mathcal{V}_\omega]$ . Dann gilt offensichtlich  $K \subset \text{NE}(X)$ . Wegen Proposition 3.1.4 gilt  $\text{Nef}(X) = K^\vee$ . Deswegen ist

$$\overline{NE}(X) \stackrel{3.2.5}{=} \text{Nef}(X)^\vee = K^{\vee\vee} = K \subseteq \text{NE}(X) \subseteq \overline{NE}(X),$$

d.h.  $\text{NE}(X) = \overline{NE}(X) = K$ .  $\square$

### 3.3 Projektive Morphismen

**Definition 3.3.1.** Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  heißt *projektiv*, wenn es eine abgeschlossene Einbettung  $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times Y$  gibt, so dass  $f = \pi \circ \iota$ , wobei  $\pi : \mathbb{P}^n \times Y \rightarrow Y$  die kanonische Projektion ist.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}^n \times Y & \\ & \nearrow \iota & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Proposition 3.3.2.** *Eine Varietät  $X$  ist also genau dann projektiv, wenn der Morphismus  $X \rightarrow x$  auf einen Punkt  $x$  projektiv ist.*

*Beweis.* Die Varietät  $X$  ist genau dann projektiv, wenn es eine Einbettung  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gibt. Wegen  $\mathbb{P}^n \times x \cong \mathbb{P}^n$  ist dies äquivalent dazu, dass  $X \rightarrow x$  projektiv ist.  $\square$

**Proposition 3.3.3** (Torisches Chow Lemma, vgl. [Dan78]). *Sei  $X = X_\Sigma$  vollständig. Dann gibt es einen proper birationalen Morphismus  $X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$  zu einer Unterteilung  $\Sigma'$  von  $\Sigma$ , so dass  $X_{\Sigma'}$  projektiv ist.*

*Beweis.* Wegen Korollar 1.11.11 reicht es, eine strikt konvexe Funktion  $h \in \text{SF}(N, \Sigma')$  auf einer Unterteilung  $\Sigma'$  von  $\Sigma$  anzugeben. Die Menge  $\{\text{lin}(\omega) : \omega \in \Sigma(d-1)\}$  schneidet aus  $N_{\mathbb{Q}}$  einen vollständigen Fächer  $\Sigma'$  aus, der eine Unterteilung von  $\Sigma$  ist. Zu jeder Wand  $\omega \in \Sigma(d-1)$  gibt es eine Linearform  $m(\omega) \in M$ , so dass  $\text{lin}(\omega) = m(\omega)^\perp$ . Wir definieren die stückweise lineare Funktion

$$\begin{aligned} h : N_{\mathbb{Q}} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ n &\longmapsto - \sum_{\omega \in \Sigma(d-1)} |\langle m(\omega), n \rangle|. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$h(n + n') = - \sum_{\omega \in \Sigma(d-1)} |\langle m(\omega), n + n' \rangle| \quad (3.1)$$

$$\geq - \sum_{\omega \in \Sigma(d-1)} \left( |\langle m(\omega), n \rangle| + |\langle m(\omega), n' \rangle| \right) \quad (3.2)$$

$$= h(n) + h(n'), \quad (3.3)$$

d.h.  $h$  ist konvex. Es reicht noch zu zeigen, dass für zwei benachbarte Kegel  $\sigma, \sigma' \in \Sigma'(d)$  und  $n \in \sigma \setminus \sigma'$ ,  $n' \in \sigma' \setminus \sigma$  die Gleichheit nicht erfüllt ist. Sei also  $\omega = \sigma \cap \sigma' \in \Sigma'(d-1)$ . Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\langle m(\omega), n \rangle > 0$  und  $\langle m(\omega), n' \rangle < 0$ . Angenommen, die Gleichheit in (3.2) ist erfüllt. Dann gilt für die Wand  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \langle m(\omega), n - n' \rangle &= \langle m(\omega), n \rangle - \langle m(\omega), n' \rangle \\ &= |\langle m(\omega), n \rangle| + |\langle m(\omega), n' \rangle| \\ &\stackrel{(3.2)}{=} |\langle m(\omega), n + n' \rangle| \\ &= \langle m(\omega), \varepsilon(n + n') \rangle \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ . Also gilt  $n(1 - \varepsilon) + n'(-1 - \varepsilon) \in \text{lin}(\omega)$ . Doch hieraus folgt  $n \in \omega$  oder  $n' \in \omega$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Proposition 3.3.4** (Kleiman-Kriterium). *Sei  $D \subset X$  ein Cartier-Divisor der projektiven torischen Varietät  $X$ . Dann ist  $D$  genau dann ample, wenn  $D \cdot C > 0 \forall C \in NE(X) \setminus \{0\}$  oder (äquivalent dazu)  $D \cdot \mathcal{V}_\omega > 0 \forall \omega \in \Sigma(d-1)$ .*

*Beweis.* Der Mori-Kegel  $NE(X)$  wird wegen Theorem 3.2.6 von den torusinvarianten Kurven  $\mathcal{V}_\omega, \omega \in \Sigma(d-1)$ , aufgespannt. Wegen Proposition 3.1.2 ist  $D \cdot \mathcal{V}_\omega > 0$  äquivalent zu  $\langle m_\sigma - m_{\sigma'}, u_{\sigma'} \rangle > 0$ . Hierbei ist  $\omega = \sigma \cap \sigma'$  und  $h_D$  auf  $\sigma$  durch  $m_\sigma$  gegeben. Weiter ist mit Proposition 1.11.2 genau dann  $\langle m_\sigma, u_{\sigma'} \rangle > \langle m_{\sigma'}, u_{\sigma'} \rangle$ , wenn  $h_D$  strikt konvex ist, was wegen Proposition 1.11.9 zu der Tatsache äquivalent ist, dass  $D$  ample ist.  $\square$

Also ist der Kegel der amplen Divisoren einer Varietät  $X$  im Nef-Kegel  $Nef(X)$  enthalten.

Die relative Version des Kleiman-Kriteriums 3.3.4 und gleichzeitig ein Spezialfall von Proposition 3.3.5 ist:

**Proposition 3.3.5.** *Ein Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  zweier torischer Varietäten ist genau dann projektiv, wenn es einen Divisor  $D \in CDiv(X)$  gibt mit  $D \cdot C > 0$  für jede Kurve  $C$ , die unter  $f$  kontrahiert wird.*

**Korollar 3.3.6.** *Es sei  $\Sigma'$  eine Unterteilung des Fächers  $\Sigma$ . Dann ist der Morphismus  $X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$  genau dann projektiv, wenn es einen Divisor  $D \in CDiv(X_{\Sigma'})$  gibt mit  $D \cdot \mathcal{V}_\omega > 0$  für jede Wand  $\omega \in \Sigma'(d-1)$ , die nicht in einer Wand von  $\Sigma(d-1)$  enthalten ist.*

Ist  $f$  projektiv, so ist  $f$  auch proper ([Har77], II.4.9).

**Proposition 3.3.7.** *Seien  $\varphi : X \rightarrow Y$  und  $\psi : Y \rightarrow Z$  projektive Morphismen. Dann ist auch  $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$  projektiv.*

*Beweis.* Weil  $\varphi$  projektiv ist, gibt es eine Einbettung  $\iota_1 : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^m$ , so dass  $\pi_Y \circ \iota_1 = \varphi$ . Genauso gibt es eine Einbettung  $\iota_2 : Y \hookrightarrow Z \times \mathbb{P}^n$ , so dass  $\pi_Z \circ \iota_2 = \psi$ . Weiter sei  $\iota : Y \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow Z \times \mathbb{P}^N$  die Segre-Einbettung mit  $\iota_2$  verknüpft. Dann erfüllt  $\lambda := \iota \circ \iota_1 : X \hookrightarrow Z \times \mathbb{P}^N$  die Bedingung  $\pi_Z \circ \lambda = \psi \circ \varphi$ , d.h.  $\psi \circ \varphi$  ist projektiv.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & Z \times \mathbb{P}^N \\
 & & & \nearrow \iota & \downarrow \\
 & & Y \times \mathbb{P}^m & & Z \times \mathbb{P}^n \\
 & \nearrow \iota_1 & \downarrow \pi_Y & \nearrow \iota_2 & \downarrow \pi_Z \\
 X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z
 \end{array}$$

$\square$

**Korollar 3.3.8.** *Ist  $Y$  eine projektive Varietät und  $\varphi : X \rightarrow Y$  ein projektiver Morphismus, so ist auch  $X$  projektiv.*

*Beweis.* Da  $Y$  projektiv ist, ist der Morphismus  $Y \rightarrow Z$  auf einen Punkt  $Z$  projektiv wegen Proposition 3.3.2. Nach Proposition 3.3.7 und nochmals Proposition 3.3.2 ist dann auch  $X$  projektiv.  $\square$

**Beispiel 3.3.9.** Sei  $X$  die Aufblasung von  $Y$  in einem Punkt und  $\pi : X \rightarrow Y$  die Projektion. Dann ist  $X$  abgeschlossen in  $\mathbb{P}^1 \times Y$  und somit  $\pi$  projektiv.

**Korollar 3.3.10.** *Sei  $f : X \rightarrow A$  ein proper torischer Morphismus zu einer Unterteilung  $\Sigma' \supset \Sigma$ . Dann ist  $f$  genau dann projektiv, wenn  $NE(X/A)$  ein spitzer Kegel ist.*

*Beweis.* Der Morphismus  $f$  ist wegen Korollar 3.3.6 genau dann projektiv, wenn es einen Divisor  $D \subset X$  gibt mit  $D \cdot \mathcal{V}_\omega > 0$  für alle Wände  $\omega \in \Sigma'(d-1)$ , die nicht in einer Wand von  $\Sigma(d-1)$  enthalten sind. Mit Theorem 3.2.6 ist dazu äquivalent, dass  $D$  auf allen Erzeugern von  $NE(X/A)$  positiv steht. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn  $NE(X/A)$  keine Gerade enthält, d.h.  $NE(X/A)$  ist spitz.  $\square$

**Proposition 3.3.11.** *Sei  $f : X \rightarrow A$  ein proper Morphismus und  $A$  projektiv mit amplem Cartier-Divisor  $D \in \text{Pic}(A)$ . Dann gilt*

$$Z \in NE(X) \Rightarrow f^*(D) \cdot Z \geq 0$$

und

$$Z \in NE(X/A) \iff f^*(D) \cdot Z = 0.$$

*Daraus folgt, dass  $NE(X/A)$  eine Seite von  $NE(X)$  ist.*

*Beweis.* Wegen der Bemerkung vor Proposition 3.2.3 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Divisor  $D$  nicht  $\text{supp}(f(Z))$  enthält. Dann gilt auch  $Z \not\subset f^*(D)$ . Mit der Projektionsformel (vgl. [Har77], A1) folgt  $f^*(D) \cdot Z = D \cdot f_*(Z)$ . Weil  $D$  ample ist, folgt mit dem Kleiman-Kriterium 3.3.4:  $f^*(D) \cdot Z \geq 0$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $f(Z)$  ein Punkt ist, d.h.  $Z \in NE(X/A)$ .  $\square$

Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein projektiver Morphismus. Dann heißt ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor  $D \in \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$

- *relativ nef für  $f$* , falls  $D \cdot C \geq 0$  für jede Kurve  $C$ , die unter  $f$  kontrahiert wird.

- *relativ ample für  $f$* , falls  $D \cdot C > 0$  für jede Kurve  $C$ , die unter  $f$  kontrahiert wird.

Ein torischer Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  ist also genau dann projektiv, wenn es einen relativ amplen  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor  $D \in \text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$  für  $f$  gibt.

### 3.4 Das Minimal Model Program

Da die Aufblasung einer projektiven Varietät eine birationale Abbildung ist, ist klar, dass jede Äquivalenzklasse von birational äquivalenten projektiven Varietäten unendlich viele Vertreter hat. Diese haben alle sehr ähnliche Eigenschaften. Ziel des Minimal Model Program (MMP) ist es nun, wenn möglich einen geeigneten Vertreter einer solchen Äquivalenzklasse zu finden, und die Relationen zwischen verschiedenen Vertretern zu verstehen.

Im Fall von Kurven ist das MMP einfach: In jeder Äquivalenzklasse gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine glatte Kurve:

**Theorem 3.4.1** ([Ful89], Kap. 7). *Zwei glatte projektive Kurven sind genau dann birational äquivalent, wenn sie isomorph sind.*

Diese Kurve nehmen wir als geeigneten Vertreter. Hier können wir die Äquivalenzklassen durch den Grad des kanonischen Divisors beschreiben. So erfüllen zum Beispiel rationale Kurven, d.h. zu  $\mathbb{P}^1$  isomorphe Kurven,  $\deg(K_C) = 0$ , elliptische Kurven  $\deg(K_C) = 1$  und hyperbolische Kurven  $\deg(K_C) = 2$ .

Auch im Flächen-Fall gibt es in jeder Äquivalenzklasse einen glatten Vertreter, da wir durch Aufblasungen von singulären Varietäten birational zu glatten Varietäten übergehen können. Allerdings ist dieser glatte Vertreter nicht eindeutig. Um diese Willkür zu vermeiden, entstand die Idee, den Prozess der Aufblasungen rückgängig zu machen. Deswegen betrachtet man Kontraktionen von  $(-1)$ -Kurven, d.h. Kontraktionen von Kurven  $C$  mit  $C^2 := C \cdot C = -1$ :

**Theorem 3.4.2** (Castelnuovo). *Sei  $X$  eine glatte Fläche und  $C \subset X$  eine glatte rationale Kurve mit  $C^2 = -1$ . Dann gibt es einen birationalen Morphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  auf eine glatte Fläche  $Y$ , so dass  $\varphi$  die Aufblasung eines Punktes von  $Y$  mit exceptionellem Ort  $C \subset X$  ist.*

Auf diese Weise erhält man nach endlich vielen Schritten entweder eine glatte Fläche  $X$ , so dass jeder birationale Morphismus

$X \rightarrow Y$  auf eine weitere glatte Fläche  $Y$  schon ein Isomorphismus ist, oder eine sogenannte *Regelfläche*, eine Fläche, die birational äquivalent zu  $\mathbb{P}^1 \times C$  mit einer glatten Kurve  $C$  ist. Die Fläche  $X$  im ersten Fall wurde klassisch Minimal Model genannt. Die Fläche im zweiten Fall besitzt eine Faserung auf eine niedrigdimensionalere Varietät. Deswegen wird sie *Mori fibre space* genannt. Beispiele hierfür sind  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (mit Faserung auf  $\mathbb{P}^1$ ) und  $\mathbb{P}^2$  (mit Faserung auf einen Punkt). Diese sind birational äquivalent, weil sie beide den zweidimensionalen dichten Torus enthalten, aber nicht isomorph. Im Gegensatz zum Minimal Model ist die Wahl des Vertreters einer Regelfläche also nicht eindeutig.

Ist die Kodaira-Dimension der Ausgangsfläche negativ, erhält man durch den Algorithmus von Castelnuovo eine Regelfläche. In allen anderen Fällen erhält man ein eindeutiges Minimal Model. Außerdem lässt sich jeder proper birationale Morphismus hier als Folge von Aufblasungen darstellen.

Diese Ideen wurden in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts von Guido Castelnuovo, Federico Enriques und Francesco Severi verwirklicht und führten später zur Enriques-Kodaira-Klassifikation von algebraischen Flächen.

Die Kontraktion von  $(-1)$ -Kurven macht aber nur für Flächen Sinn. Denn nur hier stimmt der Begriff des Divisors und des 1-Zykels überein. Um ein Analogon des MMP für höhere Dimensionen zu bekommen, muss man das Theorem von Castelnuovo 3.4.2 in einem anderen Licht sehen. Die dort benutzten  $(-1)$ -Kurven  $C \subset X$  erfüllen wegen der Adjunktionsformel 2.1.24 und  $-2 = \deg(K_{\mathbb{P}^1}) = \deg(K_C)$  die Bedingung  $K_X \cdot C < 0$ . Der Algorithmus von Castelnuovo bricht ab, wenn es keine solche Kurve mehr gibt. Dann ist also  $K_X$  nef. Man könnte somit äquivalent eine glatte Fläche  $X$  als Minimal Model definieren, wenn  $K_X$  nef ist. Diese Definition macht nun in jeder Dimension Sinn. Die Idee des Mori-Algorithmus für eine beliebig-dimensionale glatten Varietät  $X$  ist, alle Kurven  $C \subset X$  mit  $K_X \cdot C < 0$  zu kontrahieren. Dabei tauchen zwar kanonische und terminale Singularitäten auf, der Algorithmus funktioniert aber auch in der Kategorie von Varietäten mit diesen Singularitäten. Man bekommt somit die moderne Definition eines Minimal Models:

**Definition 3.4.3.** Sei  $X$  eine projektive Varietät. Dann heißt eine projektive Varietät  $Y$  ein *Minimal Model von  $X$* , wenn  $X$  und  $Y$  birational äquivalent sind,  $Y$  höchstens  $\mathbb{Q}$ -faktorielle terminale Singularitäten hat und  $K_Y$  ein nef  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor ist. Die projektive Varietät  $Y$  heißt *Canonical Model von  $X$* , wenn  $X$

und  $Y$  birational äquivalent sind,  $Y$  höchstens kanonische Singularitäten hat und  $K_Y$  ein ample  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor ist.

Außer der neuen Kategorie von möglichen Singularitäten braucht man nun noch eine sogenannte Flip-Transformation. Dieser neue Ansatz heißt das Minimal Model Program oder Mori-Program. Diese Ideen wurden 1980 bis 1988 für 3-dimensionale Varietäten von Xavier Benveniste, Herb Clemens, Yujiro Kawamata, János Kollár, Yoichi Miyaoka, Shigefumi Mori, Miles Reid, Vyacheslav Shokurov, Shuichiro Tsunoda, Eckhart Viehweg und anderen verwirklicht.

Von 2005 bis 2008 konnten Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon, James McKernan und andere zeigen, dass in beliebiger Dimension Varietäten vom allgemeinen Typ ein Minimal Model haben.

**Definition 3.4.4.** Eine irreduzible Varietät  $X$  heißt *rational*, wenn es eine birationale Abbildung  $\mathbb{P}^d \dashrightarrow X$  gibt.

Alle torische Varietäten der selben Dimension sind birational äquivalent und rational, weil sie den selben dichten Torus enthalten. Ihre Kodaira-Dimension ist negativ, weshalb das MMP für torische Varietäten kein Minimal Model finden kann. Zum Beispiel sind die rationalen Flächen torische Varietäten. In der von mir betreuten Zulassungsarbeit [Sen10] wird u.a. gezeigt, dass diese isomorph zu  $\mathbb{P}^2$  oder zu einer Hirzebruchfläche  $\mathbb{F}_a$ ,  $a \in \mathbb{N}_{>0}$ , sind. Beide haben eine Projektion auf  $\mathbb{P}^1$ . Dafür kann man für torische Varietäten mit Hilfe eines einfachen kombinatorischen Algorithmus den Mori fibre space finden. Dies ist Bestandteil des restlichen Kapitels.

### 3.5 Kontraktion von Divisoren

**Notation 3.5.1.** Im Folgenden betrachten wir simpliziale vollständige Fächer  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{Q}}$ . Sei  $\omega = \sigma_d \cap \sigma_{d+1} \in \Sigma(d-1)$  eine Wand mit zugehöriger Kurve  $\mathcal{V}_{\omega} \cong \mathbb{P}^1$ , wobei  $\sigma_d, \sigma_{d+1} \in \Sigma(d)$ . Wir bezeichnen die Erzeuger der Strahlen von  $\omega$  mit  $u_1, \dots, u_{d-1}$ . Die Erzeuger der noch fehlenden Strahlen von  $\sigma_d$  und  $\sigma_{d+1}$  seien  $u_d$  und  $u_{d+1}$ . Dann erfüllen die  $d+1$  Vektoren  $u_1, \dots, u_{d+1}$  eine Relation

$$\sum_{i=1}^{d+1} a_i u_i = 0$$

mit  $a_{d+1} = 1$ . Daraus folgt auch  $a_d > 0$ . Es ist genau dann  $a_i < 0$  (bzw.  $a_i = 0, a_i > 0$ ),  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ , wenn  $\sigma_d \cup \sigma_{d+1}$  in einer

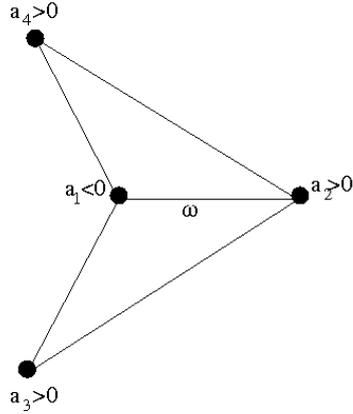


Abbildung 3.1: Der Ursprung befindet sich hinter der Seite.

Umgebung von  $\langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{d-1} \rangle$  konvex (bzw. flach, konkav) ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\begin{aligned} a_i &< 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, \alpha\}, \\ a_i &= 0 \text{ für } i \in \{\alpha + 1, \dots, \beta\} \text{ und} \\ a_i &> 0 \text{ für } i \in \{\beta + 1, \dots, d + 1\}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq d + 1$ . Weiter sei  $\Delta(\omega) = \langle u_1, \dots, u_{d+1} \rangle$  und  $U(\omega) = \langle u_1, \dots, u_\alpha, u_{\beta+1}, \dots, u_{d+1} \rangle \subset \Delta(\omega)$ .

**Lemma 3.5.2.** *Sei  $\Sigma$  ein vollständiger simplizialer Fächer und  $\rho \in \Sigma(1), \omega \in \Sigma(d - 1)$ . Dann gilt*

- (1)  $\mathcal{V}_\rho \cdot \mathcal{V}_\omega = 0$ , falls  $u_\rho \notin \{u_1, \dots, u_{d+1}\}$ .
- (2)  $\mathcal{V}_{u_i} \cdot \mathcal{V}_\omega > 0$ , falls  $i \in \{d, d + 1\}$ .
- (3)  $\mathcal{V}_{u_i} \cdot \mathcal{V}_\omega = a_i \mathcal{V}_{u_{d+1}} \cdot \mathcal{V}_\omega$ , falls  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Statt der Normierung  $a_{d+1} = 1$  kann man also auch die Normierung  $a_i = \mathcal{V}_{u_i} \cdot \mathcal{V}_\omega$  benutzen.

*Beweis.* (1) Ist  $u_\rho \notin \{u_1, \dots, u_{d+1}\}$ , so folgt  $\rho \notin \text{stern}(\omega)$  und wegen Korollar 3.1.3  $\mathcal{V}_\rho \cdot \mathcal{V}_\omega = 0$ .

(2) Dies folgt aus Korollar 3.1.3.

(3) Sei nun  $i \in \{1, \dots, d\}$  und  $v_i \in M_{\mathbb{Q}}$  eine Linearform auf  $N_{\mathbb{Q}}$ , so dass  $\langle v_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \forall j \in \{1, \dots, d\}$ . Dann gibt es ein ganzes

Vielfaches  $m = cv_i \in M$  von  $v_i$ , und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\sim \operatorname{div}(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} c \langle v_i, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho \\ &= c \left( \mathcal{V}_{u_i} + \langle v_i, u_{d+1} \rangle \mathcal{V}_{u_{d+1}} + \sum_{\rho \notin \sigma_d(1) \cup \sigma_{d+1}(1)} \langle v_i, u_\rho \rangle \mathcal{V}_\rho \right). \end{aligned}$$

Mit  $0 = \langle v_i, \sum_{j=1}^{d+1} a_j u_j \rangle = a_i + a_{d+1} \langle v_i, u_{d+1} \rangle$  folgt schließlich  $a_i = -\langle v_i, u_{d+1} \rangle$  und mit (1)  $\mathcal{V}_{u_i} \cdot \mathcal{V}_\omega = a_i \mathcal{V}_{u_{d+1}} \cdot \mathcal{V}_\omega$ .  $\square$

Die Kurven  $\mathcal{V}_\omega, \mathcal{V}_{\omega'}$  zweier Wände  $\omega, \omega' \in \Sigma(d-1)$  sind in  $N_1(X)$  also genau dann numerisch äquivalent, wenn die zugehörigen Koeffizienten  $a_1, \dots, a_{d+1}$  aus Notation 3.5.1 übereinstimmen. Bezüglich der Identifizierung 3.2.3 und obiger Notation gilt somit in  $N_1(X)$ :

$$\operatorname{NE}(X) = \sum_{\omega \in \Sigma(d-1)} \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot [a_1 u_1 + \dots + a_\alpha u_\alpha + a_{\beta+1} u_{\beta+1} + \dots + u_{d+1}].$$

Im Folgenden identifizieren wir eindimensionale Seiten  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot [\mathcal{V}_\omega]$  des Mori-Kegels  $\operatorname{NE}(X/A)$  mit obiger Relation.

**Lemma 3.5.3.** (1) *Es gilt*

$$\Delta(\omega) = \bigcup_{i=1}^{\alpha} \sigma_i = \bigcup_{i=\beta+1}^{d+1} \sigma_i,$$

wobei  $\sigma_i = \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{d+1} \rangle \subset \Delta(\omega)$ .

(2)  $U(\omega)$  ist eine Seite von  $\Delta(\omega)$  und ist genau dann spitz, wenn  $\alpha \neq 0$ .

*Beweis.* (1) Sei  $x = \sum_{i=1}^{d+1} x_i u_i \in \Delta(\omega)$  mit  $x_i \geq 0$ , und sei  $\beta < j \leq d+1$ , so dass  $\frac{x_j}{a_j} = \min_{i>\beta} \frac{x_i}{a_i}$ . Dann ist

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} x_i u_i - \frac{x_j}{a_j} \sum_{i=1}^{d+1} a_i u_i \in \langle u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{d+1} \rangle,$$

d.h.  $x \in \sigma_j \subset \bigcup_{i=\beta+1}^{d+1} \sigma_i$ . Genauso zeigt man  $\Delta(\omega) = \bigcup_{i=1}^{\alpha} \sigma_i$ .

(2) Es ist  $\Delta(\omega) \subset \{ \sum_{i=1}^{d+1} x_i u_i : x_i \geq 0 \forall \alpha < i \leq \beta \}$  und  $U(\omega) = \Delta(\omega) \cap \{ x_i = 0 \forall \alpha < i \leq \beta \}$ . Im Fall  $\alpha = 0$  ist  $u_{d+1} = \sum_{\beta < i \leq d} (-a_i) u_i$  mit negativen Koeffizienten. Deswegen ist hier  $U(\omega) = \langle \pm u_{\beta+1}, \dots, \pm u_d \rangle = \operatorname{lin}(u_{\beta+1}, \dots, u_d)$ .  $\square$

Unter einem *Extremalstrahl* verstehen wir im Folgenden eine eindimensionale Seite von  $\text{NE}(X/A)$ . Ein *Mori-Extremalstrahl* ist eine eindimensionale Seite  $R \in \text{NE}(X/A)$  mit  $K_X \cdot R < 0$ .

**Theorem 3.5.4.** *Sei  $R$  ein Extremalstrahl von  $\text{NE}(X_\Sigma)$ . Dann sind  $\alpha, \beta$  und  $U_R := U(\omega)$  unabhängig von  $\omega \in R$ , und es gilt  $\sigma_i \in \Sigma(d) \forall i \in \{\beta + 1, \dots, d + 1\}$ . Weiter definieren die Wände*

$$\Sigma_R^*(d-1) := \Sigma(d-1) \setminus R$$

einen Fächer  $\Sigma_R^*$ , allerdings mit möglicherweise nicht spitzen Kegeln. Dabei ist jeder volldimensionale Kegel  $\sigma \in \Sigma_R^*(d) \setminus \Sigma(d)$  von der Form  $\Delta(\omega), \omega \in R$ .

- Ist  $\alpha = 0$ , so ist  $\Sigma_R := \Sigma_R^*/U_R$  ein simplizialer Fächer.
- Ist  $\alpha = 1$ , so ist  $\Sigma_R := \Sigma_R^*$  ein simplizialer Fächer.

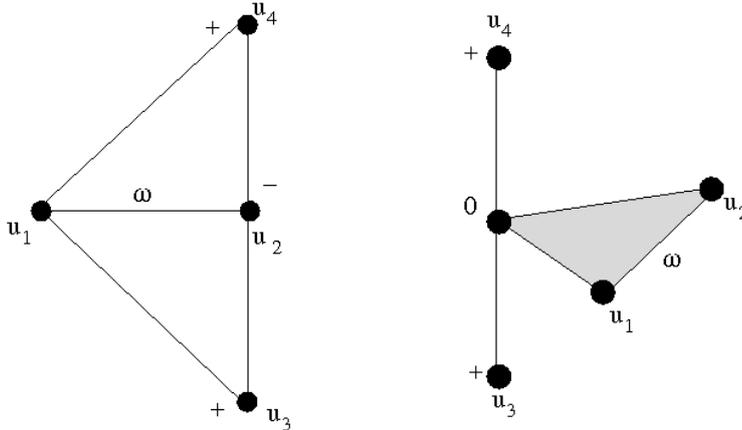


Abbildung 3.2: In obigen Bildern ist  $\omega$  eine Wand eines 3-dimensionalen Fächers. Der Ursprung im linken Bild befindet sich hinter der Seite.

Es gilt  $\dim U_R = 2$  und  $\alpha = 1$  bzw.  $\dim U_R = 1$  und  $\alpha = 0$ .

**Korollar 3.5.5.** *Die elementare Kontraktion  $\varphi_R : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma_R^*}$ , die alle Kurven  $C \in R$  kontrahiert, ist ein torischer Morphismus. Die Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $X_\Sigma$  und  $X_{\Sigma_R^*}$ , auf denen  $\varphi_R$  kein Isomorphismus ist, entsprechen den Kegeln  $\langle u_1, \dots, u_\alpha \rangle \in \Sigma(\alpha)$  und  $U_R \in \Sigma_R^*(d + \alpha - \beta)$ . Also gilt  $\dim(A) = d - \alpha$  und  $\dim(B) = \beta - \alpha$ . Gilt  $\alpha = 1$ , so nennen wir die Transformation  $\varphi_R$  Kontraktion eines Divisors.*

**Beispiel 3.5.6.** Sei  $X' = X_{\Sigma'}$  die Aufblasung von  $X = X_{\Sigma}$  in einem Punkt. Der zusätzliche Strahl  $\Sigma'(1) \setminus \Sigma(1)$  sei  $\rho \in \sigma \in \Sigma(d)$  mit primitivem Erzeuger  $u \in N$ . Außerdem sei  $\sigma = \langle u_1, \dots, u_d \rangle$ . Dann sind die Wände  $\omega = \langle u, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_d \rangle$  äquivalent und erfüllen  $\alpha = 1$ . Die Transformation  $\varphi_{[\omega]}$  ist die Projektion  $\pi : X' \rightarrow X$ .

Bevor wir Theorem 3.5.4 beweisen können, brauchen wir noch eine Vorüberlegung und eine Proposition, in der wir schon einen Teil des Theorems zeigen.

Sei  $\Sigma$  ein simplizialer Fächer und  $\sigma \in \Sigma(d-2)$  der Schnitt der Wände  $\omega_1, \dots, \omega_s \in \Sigma(d-1)$ . Zu  $m \in M \cap (\text{lin}\sigma)^\perp$  ist  $\text{div}(\chi^m)|_{\mathcal{V}_\sigma}$  ein Divisor der algebraischen Fläche  $\mathcal{V}_\sigma$ . Dann gilt also

$$0 \sim \text{div}(\chi^m)|_{\mathcal{V}_\sigma} = \sum_{i=1}^s c_{m, \omega_i} \mathcal{V}_{\omega_i}. \quad (3.4)$$

Dabei stimmt das Vorzeichen von  $c_{m, \omega_i} \in \mathbb{Z}$  mit  $\langle m, \omega_i^\circ \rangle$  überein. Also ist  $\chi^m|_{\mathcal{V}_\sigma}$  auf  $\mathcal{V}_\omega$  genau dann Null, wenn  $\langle m, \omega^\circ \rangle > 0$  ist.

**Proposition 3.5.7.** Sei  $\Sigma$  ein vollständiger simplizialer Fächer und  $R$  ein Extremalstrahl von  $NE(X_\Sigma)$  sowie  $\omega \in R$ .

- (1) Für  $i \in \{\beta + 1, \dots, d - 1\}$  gilt  $\sigma_i := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{d+1} \rangle \in \Sigma(d)$ , und die Wände  $\omega'_i := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_{d+1} \rangle$  und  $\omega''_i := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_d, u_{d+1} \rangle$  sind zu  $\omega$  äquivalent, d.h.  $\omega'_i, \omega''_i \in R$ .
- (2) Für  $i \in \{\alpha + 1, \dots, \beta\}$  gibt es genau ein  $u'_i \in \Sigma(1)$ , so dass der Stern von  $\Sigma$  in  $\sigma_i := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{d-1} \rangle \in \Sigma(d-2)$  aus den Kegeln  $\sigma_d, \sigma_{d+1}, \sigma'_d, \sigma'_{d+1} \in \Sigma(d)$  und ihren Seiten besteht, und es gilt  $\omega'_i := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, u'_i, \dots, u_{d-1} \rangle \in R$ .

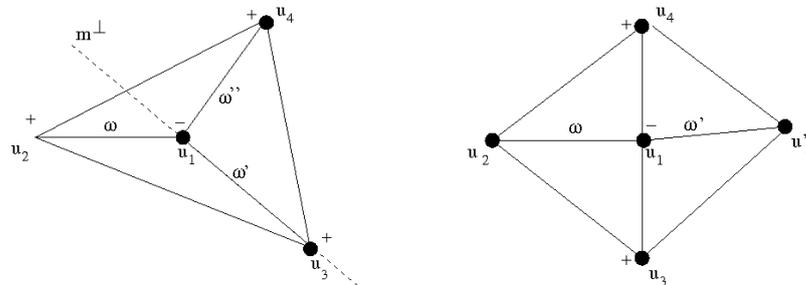


Abbildung 3.3: Der Ursprung befindet sich jeweils hinter der Seite.

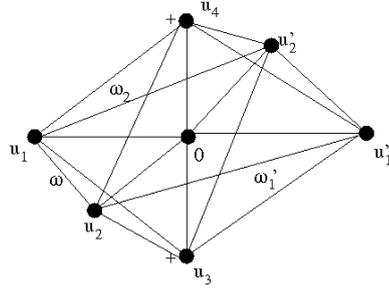


Abbildung 3.4: Es gilt  $a_1 = a_2 = 0$  und  $U(\omega) = \langle u_3, u_4 \rangle$ .

*Beweis.* Sei  $i > \alpha$  und wie im Beweis von Lemma 3.5.2  $v_i \in M$  mit  $\langle v_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \forall j \in \{1, \dots, d\}$ . Ebenso sei  $m \in M$  ein ganzes Vielfaches von  $v_i$ . Weiter sei  $\tau_i := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{d-1} \rangle \in \Sigma(d-2)$ . Dann ist also  $m \in M \cap (\text{lin} \tau_i)^\perp$ , und  $\omega$  ist die einzige Wand in  $\Sigma(d-1)$ , die  $\tau_i$  enthält und  $\langle m, \omega^\circ \rangle > 0$  erfüllt. Nach der Gleichung (3.4) ist  $\mathcal{V}_\omega$  eine positive Linearkombination von all den Kurven  $\mathcal{V}_{\omega_i}$ , die  $\sigma_i \subset \omega_i$  und  $\langle m, \omega_i^\circ \rangle < 0$  erfüllen. Weil  $R$  aber ein Extremalstrahl von  $\text{NE}(X)$  ist, folgt hieraus schon, dass diese Wände  $\omega_i$  auch in  $R$  sind. Wir beweisen nun die beiden Aussagen der Proposition:

- (1) Gilt  $i > \beta$ , so ist für  $\omega' := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_{d+1} \rangle$ :  
 $\langle m, \omega'^\circ \rangle < 0$  und somit  $\omega' \in R$ . Daraus folgt  $0 < \mathcal{V}_{u_{d+1}} \cdot \mathcal{V}_\omega = \mathcal{V}_{u_{d+1}} \cdot \mathcal{V}_{\omega'}$ . Dies ist wegen Lemma 3.5.2 nur dann möglich, wenn  $\sigma_i \in \Sigma(d)$ . Das gleiche gilt für  $\omega'' := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_d, u_{d+1} \rangle$ .
- (2) Weil  $\Sigma$  ein Fächer ist, gibt es eine Wand  $\omega' \in \Sigma(d-1)$  mit  $\langle m, \omega'^\circ \rangle < 0$  und  $\tau_i \subset \omega'$ , d.h.  $\omega' = \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, u'_i, \dots, u_{d-1} \rangle$  mit einem  $u'_i \in N$ . Aus  $\langle m, \omega'^\circ \rangle < 0$  folgt  $\omega' \in R$ . Dies impliziert wie in (1) wieder  $\mathcal{V}_{u_d} \cdot \mathcal{V}_{\omega'} > 0, \mathcal{V}_{u_{d+1}} \cdot \mathcal{V}_{\omega'} > 0$  und erneut wegen Lemma 3.5.2  $\sigma'_d, \sigma'_{d+1} \in \Sigma(d)$ . Hieraus folgt die Eindeutigkeit von  $\omega'$ .  $\square$

*Beweis von Theorem 3.5.4.* Sei  $\omega \in R$ . Dann gilt  $\{u_1, \dots, u_\alpha, u_{\beta+1}, \dots, u_{d+1}\} = \{u = u_\rho : \rho \in \Sigma(1), \mathcal{V}_\rho \cdot R \neq 0\}$  nach Lemma 3.5.2. Somit gilt für  $\omega' \in R$ :

$$\Delta(\omega') = \langle u_1, \dots, u_\alpha, u'_{\alpha+1}, \dots, u'_\beta, u_{\beta+1}, \dots, u_{d+1} \rangle$$

mit  $u'_i \in \Sigma(1)$ , aber  $U(\omega) = U(\omega') =: U_R$ .

Wegen Proposition 3.5.7 ist  $\sigma_i \in \Sigma(d)$  für alle  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ , und sowieso  $\sigma_d, \sigma_{d+1} \in \Sigma(d)$ .

Nach Lemma 3.5.3 haben alle Kegel  $\Delta(\omega), \omega \in R$ , die gemeinsame Seite  $U_R$ . Weiter ist wegen Proposition 3.5.7  $\bigcup_{\omega \in R} \Delta(\omega)$  eine konvexe Umgebung von  $U_R$ . In beiden Fällen von Proposition 3.5.7 besteht  $\partial(\bigcup_{\omega \in R} \Delta(\omega))$  aus Seiten von  $\Sigma$ , da  $\Delta(\omega) = \bigcup_{i>\beta} \Delta_i$ . Außerhalb von  $\bigcup_{\omega \in R} \Delta(\omega)$  stimmen  $\Sigma(d-1)$  und  $\Sigma_R^*(d-1)$  überein, weshalb auch  $\Sigma_R^*$  ein Fächer ist. Für  $\sigma \in \Sigma_R^*(d) \setminus \Sigma_R(d)$  gilt wegen Proposition 3.5.7  $\sigma = \Delta(\omega)$  mit  $\omega \in R$ .

Sei nun  $\alpha = 0$ . Dann ist jeder Kegel  $\sigma \in \Sigma_R^*(d)$  von der Form  $\sigma = \langle u_1, \dots, u_\beta, \pm u_{\beta+1}, \dots, \pm u_d \rangle = (\beta\text{-Simplex}) \times U_R$ , wobei  $U_R \subset N_{\mathbb{Q}}$  ein Untervektorraum ist.

Im Fall  $\alpha = 1$  gilt  $u_1 = \sum_{i=\beta+1}^{d+1} \frac{a_i}{a_1} u_i$  mit  $\frac{a_i}{a_1} > 0 \forall i > \beta$ . Daher ist  $\Delta(\omega) = \langle u_2, \dots, u_{d+1} \rangle$  simplizial.  $\square$

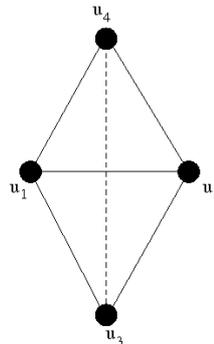
### 3.6 Flips

Sei  $\psi : X \dashrightarrow X'$  eine rationale Abbildung, die in Codimension 1 ein Isomorphismus zweier  $\mathbb{Q}$ -faktorieller vollständiger Varietäten ist. Dann sind die Vektorräume  $N^1(X)$  und  $N^1(X')$ , und damit auch  $N_1(X)$  und  $N_1(X')$ , zueinander isomorph.

Sei im Folgenden  $\alpha \geq 2$  mit den Bezeichnungen aus dem letzten Abschnitt. Dann gilt  $\sum_{i \leq \alpha} (-a_i) u_i = \sum_{i > \beta} a_i u_i$ , und wegen Lemma 3.5.3(1):

$$\Delta(\omega) = \bigcup_{i \leq \alpha} \sigma_i = \bigcup_{i > \beta} \sigma_i. \tag{3.5}$$

Dies liefert zwei simpliziale Unterteilungen von  $\Delta(\omega)$ . Der Übergang von  $\Sigma$  zu  $\Sigma_R^*$  macht aus der zweiten Unterteilung den nicht-simplizialen Kegel  $\Delta(\omega)$ .



**Theorem 3.6.1.** *Sei  $\Sigma'$  die simpliziale Unterteilung von  $\Sigma_R^*$  durch die erste Gleichung aus (3.5), und sei  $\varphi : X' := X_{\Sigma'} \rightarrow Y := X_{\Sigma_R^*}$  der zugehörige torische Morphismus. Dann ist  $\varphi'$  projektiv und ein Isomorphismus in Codimension 1. Wir bezeichnen mit  $\psi : X \dashrightarrow X'$  den Übergang von  $\Sigma$  zu  $\Sigma'$ , d.h.  $\psi = \varphi'^{-1} \circ \varphi_R$ .*

*Beweis.* Die neuen Wände von  $\Sigma'$  sind von der Form  $\omega_{ij} := \langle u_1, \dots, \hat{u}_i, \hat{u}_j, \dots, u_{d+1} \rangle$  mit  $1 \leq i < j \leq \alpha$ . Diese sind äquivalent zu  $-\omega$ . Daher ist  $\mathcal{V}_{u_1} \cdot \mathcal{V}_{\omega'} > 0$  für jede neue Wand  $\omega' \in \Sigma'(d-1)$ . Wegen Korollar 3.3.6 ist  $\varphi$  ein projektiver Morphismus.  $\square$

Die Abbildung  $\psi$  aus Theorem 3.6.1 heißt *Flip*.

Sei  $\rho$  der Strahl

$$\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot \left( \sum_{i \leq \alpha} (-a_i) u_i \right) = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot \left( \sum_{i > \beta} a_i u_i \right).$$

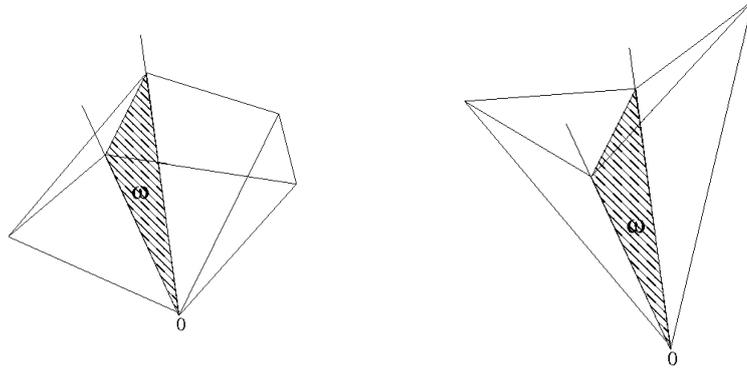
Dann liefert die baryzentrische Unterteilung von  $\Delta(\omega)$  bei  $\rho$  eine gemeinsame Unterteilung  $\tilde{\Sigma}$  von  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  und somit ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & X_{\tilde{\Sigma}} & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & X' \\
 \swarrow \varphi_R & & \swarrow \varphi \\
 & Y & 
 \end{array}$$

### 3.7 Terminalität

**Proposition 3.7.1.** *Sei  $\Sigma$  ein vollständiger Fächer und  $X = X_{\Sigma}$ . Weiter sei  $K_X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor und  $\omega \in \Sigma(d-1)$  eine Wand. Dann gilt genau dann  $K_X \cdot \mathcal{V}_{\omega} < 0$  (bzw.  $= 0, > 0$ ), wenn  $\text{shed}(\Sigma)$  in einer Umgebung eines Punktes  $p \in \omega^\circ \cap \text{roof}(\Sigma)$  streng konvex (bzw. flach, streng konkav) ist.*

*Beweis.* Sei  $\omega = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Sigma(d-1)$  mit  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(d)$ . Wegen Proposition 2.1.27 ist das Dach von  $\sigma_1$  in einer Hyperebene der Form  $\{x \in N_{\mathbb{Q}} : \langle m, x \rangle = c\}$  enthalten. Dann gilt in einer Umgebung


 Abbildung 3.5:  $K_X \cdot \mathcal{V}_\omega < 0$  bzw.  $K_X \cdot \mathcal{V}_\omega > 0$ .

von  $\mathcal{V}_\omega$  :

$$\begin{aligned}
 K_X &= - \sum_{v \in (\sigma_1 \cup \sigma_2)(1)} \mathcal{V}_v \\
 &\sim - \sum_{u \in (\sigma_1 \cup \sigma_2)(1)} \mathcal{V}_u + \frac{1}{c} \operatorname{div}(\chi^m) \\
 &= - \sum_{u \in (\sigma_1 \cup \sigma_2)(1)} \mathcal{V}_u + \sum_{u \in \sigma_1(1)} \mathcal{V}_u + \sum_{u \in (\sigma_2 \setminus \sigma_1)(1)} \frac{\langle m, u \rangle}{c} \mathcal{V}_u \\
 &= - \sum_{u \in (\sigma_2 \setminus \sigma_1)(1)} \mathcal{V}_u + \sum_{u \in (\sigma_2 \setminus \sigma_1)(1)} \frac{\langle m, u \rangle}{c} \mathcal{V}_u \\
 &= \sum_{u \in (\sigma_2 \setminus \sigma_1)(1)} \left( \frac{\langle m, u \rangle}{c} - 1 \right) \mathcal{V}_u.
 \end{aligned}$$

Der Divisor  $\sum_{u \in (\sigma_2 \setminus \sigma_1)(1)} \left( \frac{\langle m, u \rangle}{c} - 1 \right) \mathcal{V}_u$  ist also genauso wie  $K_X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor. Ist das Dach von  $\sigma_2 \setminus \sigma_1$  im Halbraum  $\{x \in N_{\mathbb{Q}} : \langle m, x \rangle > c\}$  enthalten, so ist er zusätzlich effektiv. Wegen Korollar 3.1.3 folgt  $K_X \cdot \mathcal{V}_\omega > 0$ . In diesem Fall ist  $\operatorname{shed}(\Sigma)$  in einer Umgebung eines Punktes  $p \in \omega^\circ \cap \operatorname{roof}(\Sigma)$  streng konkav. Die anderen beiden Fälle folgen analog.  $\square$

**Korollar 3.7.2.** *Sei  $\Sigma$  ein vollständiger Fächer,  $X = X_\Sigma$  und  $K_X$  ein  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor. Dann ist  $-K_X$  genau dann ample, wenn  $\operatorname{shed}(\Sigma)$  ein konvexes Polytop mit den Seiten  $\operatorname{roof}(\Sigma) \cap \operatorname{shed}(\sigma)$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , ist. In diesem Fall nennen wir  $X$  eine torische Fano-Varietät und  $\Sigma$  einen Fano-Fächer.*

*Beweis.* Wegen Proposition 3.3.4 ist  $-K_X$  genau dann ample, wenn  $K_X \cdot \mathcal{V}_\omega < 0 \forall \omega \in \Sigma(d-1)$  gilt. Mit Proposition 3.7.1 folgt die Behauptung.  $\square$



Abbildung 3.6: Da das Dach nicht konvex ist, heißt das Restaurant nicht Fano, sondern Faros.

**Proposition 3.7.3.** *Sei  $X = X_\Sigma$  eine projektive  $\mathbb{Q}$ -faktorielle torische Varietät und  $R \in NE(X)$  ein Mori-Extremalstrahl, so dass  $\varphi_R$  eine birationale Abbildung ist. Kontrahiert  $\varphi_R$  einen Divisor, so setzen wir  $\Sigma_1 = \Sigma_R$  wie in Theorem 3.5.4. Ansonsten definieren wir  $\Sigma_1$  wie in Theorem 3.6.1. Mit der Bezeichnung aus Abschnitt 3.5 ist dann  $\text{conv}(u_1, \dots, u_{d+1})$  ein  $d$ -Simplex, und es gilt*

$$\text{shed}(\Sigma_1) = \overline{\text{shed}(\Sigma) \setminus \left( \bigcup_{\omega \in R} \text{conv}(u_1, \dots, u_{d+1}) \right)}.$$

*Beweis.* Nach Proposition 2.1.14 ist  $\Sigma$  simplizial. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.5 gilt

$$\text{shed}(\Delta(\omega)) = \bigcup_{i \geq \beta+1} \text{shed}(\sigma_i),$$

und  $\text{roof}(\Sigma) \cap \text{shed}(\Delta(\omega))$  besteht aus Simplizes der Form  $\text{conv}(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_{d+1})$ ,  $i \in \{1, \dots, d+1\}$ . Wegen  $K_X \cdot R < 0$  treffen sich zwei dieser Simplizes im spitzen Winkel. Insbesondere liegen  $\{u_1, \dots, u_{d+1}\}$  nicht in einer Hyperebene. Dann ist  $\text{shed}(\Delta(\omega)) = \text{conv}(0, u_1, \dots, u_{d+1})$  und somit  $\text{conv}(u_1, \dots, u_{d+1}) \subset \text{shed}(\Sigma)$ .

Ist  $\varphi_R$  eine Kontraktion eines Divisors, so gilt wegen Theorem 3.5.4:  $\text{shed}(\Sigma_1) = \overline{\text{shed}(\Sigma) \setminus \text{conv}(u_1, \dots, u_{d+1})}$  und hier speziell  $\text{conv}(u_1, \dots, u_{d+1}) = \bigcup_{\omega \in R} \text{conv}(u_1, \dots, u_{d+1})$ .

Ist  $\varphi_R$  eine Flip-Transformation, so ist  $K_X \cdot (-R) > 0$ , d.h.  $\text{shed}(\Sigma_1)$  ist über  $\Delta(\omega)$  konkav. Somit kann man analog zeigen, dass  $\text{conv}(u_1, \dots, u_{d+1}) \not\subset \text{shed}(\Sigma_1)$ .  $\square$

**Theorem 3.7.4.** *Sei  $\varphi_R : X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma_1}$  entweder eine Kontraktion eines Divisors oder eine Flip-Transformation mit  $K_X \cdot R < 0$ . Ist  $\Sigma$  terminal, so ist auch  $\Sigma_1$  terminal.*

*Beweis.* Weil der Fächer  $\Sigma$  terminal ist, besteht  $\text{shed}(\Sigma) \cap N$  wegen Bemerkung 2.1.26 nur aus 0 und den primitiven Erzeugern von  $\Sigma(1)$ . Wegen Proposition 3.7.3 ist  $\text{shed}(\Sigma_1) \subset \text{shed}(\Sigma)$ . Deswegen besteht  $\text{shed}(\Sigma_1) \cap N$  aus 0 und den primitiven Erzeugern von  $\Sigma_1(1)$ , d.h.  $\Sigma_1$  ist terminal.  $\square$

### 3.8 Das Minimal Model Programm für torische Varietäten

**Theorem 3.8.1** (relative Version). *Sei  $A$  eine projektive torische Varietät und sei  $f : X \rightarrow A$  ein projektiver torischer birationaler Morphismus, wobei  $X$  nur  $\mathbb{Q}$ -faktorielle terminale Singularitäten hat. Dann gibt es eine Folge von torischen birationalen Abbildungen,*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X = X_0 & \dashrightarrow & X_1 & \dashrightarrow & \cdots & \dashrightarrow & X_k = S \xrightarrow{\varphi} V \\
 & \searrow & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & & & A \\
 & \searrow & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & & & A \\
 & \searrow & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & & & A
 \end{array}$$

$f = f_0$        $f_1$        $f_k = g$        $h$

wobei

- (1)  $S$  ein relatives Minimal Model für  $X \rightarrow A$  ist, d.h.  $S$  hat  $\mathbb{Q}$ -faktorielle terminale Singularitäten,  $g : S \rightarrow A$  ist ein projektiver birationaler Morphismus, und  $K_S$  ist relativ nef für  $g$ .
- (2)  $V$  ein relatives Canonical Model für  $X \rightarrow A$  ist, d.h.  $V$  hat kanonische Singularitäten,  $h : V \rightarrow A$  ist ein projektiver birationaler Morphismus, und  $K_V$  ist relativ ample für  $h$ .
- (3) wenn  $A$  nur  $\mathbb{Q}$ -faktorielle terminale Singularitäten hat, so gilt  $S = V = A$ .
- (4) alle Varietäten  $X_i$  nur  $\mathbb{Q}$ -faktorielle terminale Singularitäten haben, und  $f_i : X_i \rightarrow A$  ein projektiver Morphismus  $\forall i \in \{0, \dots, k\}$  ist.
- (5) die birationalen Abbildungen  $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$  entweder elementare Kontraktionen  $\varphi_{R_i}$  oder Flips mit zugehörigen Mori-Extremalstrahlen  $R_i \in NE(X_i/A)$  sind.

*Beweis.* Sei  $\tilde{\Sigma}$  der vollständige Fächer zu  $A$  und  $\Sigma$  eine Unterteilung von  $\tilde{\Sigma}$ , so dass  $f : X = X_{\Sigma} \rightarrow A$  der gemäß Proposition 2.1.15 zugehörige proper birationale Morphismus ist. Zu jedem Extremalstrahl  $R \in \text{NE}(X/A)$  und  $\omega \in R$  ist  $\omega \in \Sigma(d-1)$  nicht in einer Wand von  $\tilde{\Sigma}$  enthalten. Somit ist  $\Sigma_R$  auch eine Unterteilung von  $\tilde{\Sigma}$ , und  $f_1 : X_1 = X_{\Sigma_R} \rightarrow A$  ist wegen Proposition 2.1.15 proper. Nach Korollar 3.3.8 ist  $X$  projektiv und wegen Korollar 3.3.10 ist der Kegel  $\text{NE}(X/A)$  spitz. Also gibt es einen Divisor  $D$  mit  $\{\mathcal{V}_{\omega} \in N_1(X/A) : D \cdot \mathcal{V}_{\omega} = 0\} \cap \text{NE}(X/A) = R$ . Ist nun  $\varphi_R : X \rightarrow X_1$  die zugehörige Transformation, so gibt es einen Divisor  $D_1 \in X_1$ , so dass  $\varphi_R^*(D_1) \sim D$ . Also gilt für alle  $\omega \in \Sigma_R(d-1)$ , die nicht in  $\tilde{\Sigma}$  enthalten sind, und somit insbesondere  $\omega \notin R$  erfüllen:

$$D_1 \cdot \mathcal{V}'_{\omega} = D_1 \cdot (\varphi_R)_*(\mathcal{V}_{\omega}) = \varphi_R^*(D_1) \cdot \mathcal{V}_{\omega} = D \cdot \mathcal{V}_{\omega} > 0.$$

Wegen Korollar 3.3.6 ist  $f_1$  projektiv.

Nun habe  $X$   $\mathbb{Q}$ -faktorielle terminale Singularitäten und  $K_X$  sei bezüglich  $f$  nicht relativ nef, d.h.  $\Sigma$  ist terminal und simplizial, und es gibt eine Wand  $\omega \in \Sigma(d-1)$ , die nicht in  $\tilde{\Sigma}$  enthalten ist, so dass  $K_X \cdot \mathcal{V}_{\omega} < 0$ . Dann gibt es auch einen Extremalstrahl  $R \in \text{NE}(X/A)$ , so dass  $K_X \cdot R < 0$ . Mit den Fächertransformationen aus den Theoremen 3.5.4 und 3.6.1 erhalten wir eine birationale Abbildung  $X \dashrightarrow X_1$ , wobei  $X_1 \rightarrow A$  auch wieder projektiv ist, und  $X_1$  wegen Theorem 3.7.4 höchstens terminale  $\mathbb{Q}$ -faktorielle Singularitäten hat. Dies beweist (4).

Allerdings ist  $\text{shed}(\Sigma_1) \subsetneq \text{shed}(\Sigma)$ . Ebenso ist  $\Sigma_1(1) \subset \Sigma(1)$ , weshalb es nur endlich viele Möglichkeiten für  $\Sigma_1$  gibt. Folglich hat nach endlich vielen Schritten die Varietät  $X_k = S$  die Eigenschaft (1). Da  $K_S$  bezüglich  $f_k = g : S \rightarrow A$  relativ nef ist, ist  $\Sigma_k$  wegen Proposition 3.7.1 entlang der Wände  $\omega \in \Sigma_k(d-1)$ , die nicht in einer Wand von  $\tilde{\Sigma}(d-1)$  enthalten sind, nicht konvex.

Im Folgenden beseitigen wir auch noch all die Wände  $\omega \in \Sigma_k(d-1)$ , die nicht in  $\tilde{\Sigma}(d-1)$  enthalten sind und  $K_S \cdot \mathcal{V}_{\omega} = 0$  erfüllen. Dadurch erhalten wir einen Fächer  $\bar{\Sigma}_k$ . Dieser ist zwar im Allgemeinen nicht mehr simplizial und terminal, aber kanonisch: Das Dach  $\text{roof}(\Sigma_k) \cap \sigma$  über jedem Kegel  $\sigma \in \tilde{\Sigma}(d)$  ist entweder flach oder konkav. Deswegen ist  $\overline{\sigma \setminus \Sigma_k}$  ein konvexes Polyeder. Die Kegel, die seine beschränkte Facetten aufspannen, erzeugen den Fächer  $\bar{\Sigma}_k$ . So hat  $V := X_{\bar{\Sigma}_k}$  die Eigenschaft (2).

Sei nun  $\tilde{\Sigma}$  terminal. Weil  $\text{shed}(\Sigma_k) \cap \sigma$  für  $\sigma \in \tilde{\Sigma}$  konkav ist, kann es keinen Strahl  $\rho \in \Sigma_k(1) \setminus \tilde{\Sigma}(1)$  geben, d.h.  $\Sigma_k(1) = \tilde{\Sigma}(1)$ . Wenn  $\tilde{\Sigma}$

zusätzlich simplizial ist, folgt hieraus schon  $\Sigma_k = \tilde{\Sigma}$ . Dies beweist die Eigenschaft (3).  $\square$

**Theorem 3.8.2** (absolute Version). *Sei  $X$  eine projektive torische Varietät mit höchstens  $\mathbb{Q}$ -faktoriellen terminalen Singularitäten. Dann gibt es eine Folge von birationalen torischen Abbildungen und eine Faserung*

$$X = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_k = S \xrightarrow{\psi} Z.$$

Dabei gilt:

- (1) *Der Morphismus  $\psi$  ist eine Fano-Faserung, d.h.  $-K_S$  ist relativ ample, und es gilt  $\dim Z < \dim S$ .*
- (2) *Alle Varietäten  $X_i$  sind projektiv und haben nur  $\mathbb{Q}$ -faktorielle terminale Singularitäten.*
- (3) *Die birationalen Abbildungen  $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$  sind entweder elementare Kontraktionen von Divisoren  $\varphi_{R_i}$  oder Flips mit zugehörigen Mori-Extremalstrahlen  $R_i \in \text{NE}(X_i)$ .*

*Beweis.* Sei  $\Sigma$  der Fächer zu  $X$ . Dann gibt es eine Wand  $\omega \in \Sigma(d-1)$ , so dass das Dach  $\text{roof}(\Sigma)$  bei  $\omega$  konvex ist. Wegen Proposition 3.7.1 gilt dann  $K_X \cdot \mathcal{V}_\omega < 0$ . Also gibt es mindestens einen Extremalstrahl  $R \in \text{NE}(X)$ , so dass  $K_X \cdot R < 0$  gilt. Erfüllt eine Wand zu  $R$  mit Notation 3.5.1  $\alpha = 0$ , so erhalten wir eine Fano-Faserung. Sei nun also  $\varphi_R$  ein birationaler Morphismus  $\varphi_R : X \dashrightarrow X_1$ . Da  $X$  projektiv ist, ist der Mori-Kegel  $\text{NE}(X)$  mit Korollar 3.3.10 spitz. Also gibt es einen Divisor  $D \subset X$  mit  $\{\mathcal{V}_\omega \in N_1(V) : D \cdot \mathcal{V}_\omega = 0\} \cap \text{NE}(X) = R$ . Es gibt einen Divisor  $D_1 \subset X_1$ , so dass  $\varphi_R^*(D_1) \sim D$ . Also gilt für alle  $\omega \in \Sigma_R(d-1)$ , also insbesondere  $\omega \notin R$ :  $D_1 \cdot \mathcal{V}'_\omega = \varphi_R^*(D_1) \cdot \mathcal{V}_\omega = D \cdot \mathcal{V}_\omega > 0$ . Wegen Proposition 3.3.4 ist  $D_1$  ample, d.h.  $X_1$  ist projektiv, und hat wegen Theorem 3.7.4 höchstens terminale  $\mathbb{Q}$ -faktorielle Singularitäten. Dies beweist (2). Allerdings ist  $\text{shed}(\Sigma_R) \subsetneq \text{shed}(\Sigma)$  und somit  $\text{Vol}(\text{shed}(\Sigma_R)) < \text{Vol}(\text{shed}(\Sigma))$ . Folglich endet dieser Prozess nach höchstens  $\text{Vol}(\text{shed}(\Sigma_R))$  vielen Schritten mit einer Faserung.  $\square$



## 4 Mori-Transformationen am Fächer und am Polytop

In diesem Kapitel betrachten wir die Mori-Transformationen des letzten Kapitels rein kombinatorisch. Dabei werden wir im ersten Teil durch ihre Anwendung auf einen Fächer mit bestimmten Eigenschaften eine Teilmenge der Strahlen erhalten, so dass der von diesen Strahlen aufgespannte vollständige Fächer die gleichen Eigenschaften in noch verschärfter Form besitzt. Im zweiten Teil wählen wir ein Polytop und betrachten seinen Normalenfächer. Wir untersuchen, wie man schon am Polytop den Typ einer Transformation ablesen kann und welche Wände des Fächers zu numerisch äquivalenten nef Kurven gehören.

### 4.1 Teilfächer

In diesem Abschnitt werden wir das folgende Theorem beweisen:

*Sei  $\Sigma$  ein projektiver Fano-Fächer,  
d.h. er ist simplizial mit konvexen Dächer.  
Weiter sei er terminal,  
dann erlaubt er uns die Wahl  
einer Teilmenge aus  $r+1$  Strahlen,  
die einen projektiven  $r$ -dimensionalen  
simplizialen Fächer generieren  
ohne Terminalität zu verlieren.*

Etwas formaler bedeutet dies:

**Theorem 4.1.1.** *Sei  $\Sigma$  ein simplizialer projektiver terminaler  $d$ -dimensionaler Fächer. Dann gibt es eine Teilmenge  $\{u_1, \dots, u_{d'}\}$  der Menge aller primitiver Erzeuger von  $\Sigma(1)$ ,  $d' \leq d$ , so dass*

- (1)  $u_1, \dots, u_{d'+1}$  einen Unterraum erzeugen, d.h.  $\sum_{i=1}^{d'+1} a_i u_i = 0$  mit  $a_i > 0$ , und
- (2)  $\{u_1, \dots, u_{d'+1}\}$  einen terminalen projektiven Fano-Fächer erzeugt. In Abschnitt 6.1 werden wir noch zeigen, dass es davon nur endlich viele gibt, weshalb dann auch die Koeffizienten  $a_i$  beschränkt sind.

Dies ist ein Analogon zu folgender Proposition:

**Proposition 4.1.2** ([Bat91], 3.2). *Sei  $\Sigma$  ein projektiver glatter Fächer. Dann gibt es eine primitive Teilmenge  $\{u_1, \dots, u_k\}$  der Menge aller Erzeuger von  $\Sigma(1)$ , so dass  $u_1 + \dots + u_k = 0$  gilt.*

*Beweis.* Wegen Korollar 1.11.11 gibt es eine strikt konvexe stückweise lineare Funktion  $h' \in \text{SF}(\Sigma, N)$ . Sei  $h := -h' \in \text{SF}(\Sigma, N)$ . Weil  $\Sigma$  vollständig ist, gibt es Erzeuger  $u_1, \dots, u_m$  von Strahlen von  $\Sigma$  und natürliche Zahlen  $a_1, \dots, a_m > 0$ , so dass  $a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0$  gilt. Unter allen Teilmengen der Erzeuger von  $\Sigma(1)$  mit dieser Eigenschaft sei  $u_1, \dots, u_m$  eine Teilmenge, so dass  $r := a_1 h(u_1) + \dots + a_m h(u_m)$  minimal ist. Offensichtlich sind  $u_1, \dots, u_m$  nicht Erzeuger eines Kegels. Deswegen gibt es eine primitive Teilmenge  $\{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ ,  $\sigma \in S_q$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\sigma = \text{id}$ . Sei  $u_1 + \dots + u_m \in \langle w_1, \dots, w_p \rangle$ , wobei  $w_1, \dots, w_p$  Erzeuger von Strahlen von  $\Sigma$  sind. Weil  $\Sigma$  glatt ist, gibt es  $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{N}$ , so dass  $u_1 + \dots + u_m = b_1 w_1 + \dots + b_p w_p$ . Somit folgt

$$\begin{aligned}
 r &= a_1 h(u_1) + \dots + a_m h(u_m) \\
 &= (a_1 - 1)h(u_1) + \dots + (a_q - 1)h(u_q) + a_{q+1}h(u_{q+1}) + \dots \\
 &\quad + a_m h(u_m) + h(u_1) + \dots + h(u_q) \\
 &> (a_1 - 1)h(u_1) + \dots + (a_q - 1)h(u_q) + a_{q+1}h(u_{q+1}) + \dots \\
 &\quad + a_m h(u_m) + h(u_1 + \dots + u_q) \\
 &= (a_1 - 1)h(u_1) + \dots + (a_q - 1)h(u_q) + a_{q+1}h(u_{q+1}) + \dots \\
 &\quad + a_m h(u_m) + b_1 h(w_1) + \dots + b_p h(w_p).
 \end{aligned}$$

Die Vektoren  $u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_p$  erfüllen aber auch eine Relation mit positiven Koeffizienten:

$$(a_1 - 1)u_1 + \dots + (a_q - 1)u_q + a_{q+1}u_{q+1} + \dots + a_m u_m + b_1 w_1 + \dots + b_p w_p = 0.$$

Wegen der Minimalität von  $r$  folgt hieraus, dass alle Koeffizienten dieser Relation 0 sind. Dann gilt also  $a_1 = \dots = a_m = 1$ ,  $q = m$ , und somit ist  $\{u_1, \dots, u_m\}$  schon selbst primitiv.  $\square$

*Beweis von Theorem 4.1.1.* Sei  $\Sigma = \Sigma(P)$ . Wegen Theorem 3.8.1 gibt es eine Folge von Mori-Transformationen  $\varphi_{R_1}, \dots, \varphi_{R_n}$ , die mit Notation 3.5.1 alle  $\alpha_{R_i} > 0$  erfüllen und einer birationalen Abbildung  $X_\Sigma \dashrightarrow X_{\Sigma_1} \dashrightarrow \dots \dashrightarrow X_{\Sigma_n}$  entsprechen, wobei  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  simpliziale terminale Fächer sind. Dabei gilt  $\text{Vol}(\text{shed}(\Sigma_1)) > \dots > \text{Vol}(\text{shed}(\Sigma_n))$ . Sei  $X'$  die projektive torische Varietät zu  $\Sigma_n$ . Dieser Prozess bricht nur dann bei  $X'$  ab, wenn für jeden Mori-Extremalstrahl  $R \in \text{NE}(X')$  gilt:  $\alpha_R = 0$ .

Sei  $Q := \text{shed}(\Sigma_n) \subset N_{\mathbb{Q}}$ . Es gibt eine  $(d-2)$ -dimensionale Seite  $s$  von  $Q$ , so dass  $Q$  bei  $s$  konvex ist. Seien  $F_1, F_2 \subset Q$  zwei Facetten von  $Q$ , so dass  $s = F_1 \cap F_2$ . Diese entsprechen Vereinigungen von disjunkten Kegeln  $\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)} \in \Sigma_n(d)$ ,  $i \in I$ . Also gibt es eine Wand  $\omega \in \Sigma_n(d-1)$ , so dass  $\omega \subset \langle s \rangle$ . Weil  $Q$  bei  $s$  konvex ist, gilt nach Proposition 3.7.1:  $K_{X'} \cdot [\mathcal{V}_\omega] < 0$ .

Ist  $R := [\mathcal{V}_\omega]$  eine Seite von  $\text{NE}(X')$ , so haben wir einen Mori-Extremalstrahl gefunden. Ansonsten gibt es Extremalstrahlen  $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$  von  $\text{NE}(X')$  und  $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 1$  mit

$$R = \sum_{i=1}^k \lambda_i R^{(i)}, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (K_{X'} \cdot R^{(i)}) = K_{X'} \cdot R < 0,$$

und es gibt mindestens ein  $1 \leq i \leq k$ , so dass  $R^{(i)}$  ein Mori-Extremalstrahl ist.

Somit haben wir in beiden Fällen einen Mori-Extremalstrahl  $R' := [a_1 u_1 + \dots + a_{d+1} u_{d+1}] = [\mathcal{V}_\omega] \in \text{NE}(X')$  mit  $\omega = \langle u_1, \dots, u_{d-1} \rangle \in \Sigma_n(d-1)$  gefunden. Deshalb ist  $\alpha_{R'} = 0$ , und es gilt  $0 = a_1 = \dots = a_\beta, a_{\beta+1}, \dots, a_{d+1} > 0$ . Der simpliziale Fächer  $\Sigma'$ , der von  $u_{\beta+1}, \dots, u_{d+1}$  aufgespannt wird, ist also projektiv und Fano. Wir zeigen nun noch, dass er auch terminal ist.

Löscht man alle Wände  $\omega' \in \Sigma_n(d-1)$  mit  $\mathcal{V}_\omega \equiv \mathcal{V}_{\omega'}$ , so erhält man wegen dem Beweis von Theorem 3.5.4 eine Art Fächer  $\Sigma_n^*(d)$ , allerdings mit der Eigenschaft, dass jeder Kegel  $\sigma \in \Sigma_n^*(d)$  von der Form

$$\sigma = \langle u_{\beta+1}, \dots, u_{d+1} \rangle \times (\beta\text{-Simplex}) \tag{4.1}$$

ist. Wegen  $\langle u_1, \dots, u_{d-1}, u_d \rangle, \langle u_1, \dots, u_{d-1}, u_{d+1} \rangle \in \Sigma_n(d)$  gibt es keinen Strahl  $\langle u \rangle \in \langle u_{\beta+1}, \dots, u_{d-1}, u_d \rangle, \langle u_{\beta+1}, \dots, u_{d-1}, u_{d+1} \rangle$ . Angenommen es gibt einen Strahl  $\langle u \rangle \in \Sigma_n(1)$  mit primitivem Erzeuger

$$u \in \langle u_{\beta+1}, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{d+1} \rangle \cap N \setminus \{u_{\beta+1}, \dots, u_{d+1}\}$$

für ein  $\beta < j < d$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\langle u, u_{\beta+1}, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d \rangle \subset \sigma \in \Sigma_n(d)$ . Die Wand von  $\sigma$ , in der  $u$  nicht enthalten ist, ist nicht zu  $\omega$  äquivalent, da in der zugehörigen Relation  $u$  vorkommt. Sei nun  $\omega' \in \sigma(d-1)$  eine Wand, in der  $u$  vorkommt. Aus

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\substack{i=\beta+1 \\ i \neq j}}^{d+1} \alpha_i u_i = \sum_{\substack{i=\beta+1 \\ i \neq j}}^d \alpha_i u_i + \alpha_{d+1} \left( \frac{-1}{a_{d+1}} \sum_{i=\beta+1}^d a_i u_i \right) \\ &= \sum_{i=\beta+1}^d \alpha'_i u_i \text{ mit } \alpha'_j \neq 0 \end{aligned}$$

folgt  $u_j, u_{d+1} \in \text{lin}(u, u_{\beta+1}, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d) =: L$ . Der Kegel  $\sigma \cap L$  ist simplizial,  $(d-\beta)$ -dimensional, und er enthält die  $d-\beta$  Strahlen  $u, u_{\beta+1}, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_d$ . Deswegen gilt  $u_j, u_{d+1} \notin \sigma \cap L$  und somit  $u_j, u_{d+1} \notin \sigma$ . Also kommen nicht beide in der Relation zur Wand  $\omega'$  vor, und es gilt  $[\mathcal{V}'_{\omega}] \neq [\mathcal{V}_{\omega}]$ . Damit ist jede Wand von  $\sigma$  auch eine Wand in  $\Sigma_n^*$  und somit  $\sigma \in \Sigma_n^*(d)$ . Dies ist ein Widerspruch zu (4.1). Also gilt  $\text{shed}(\Sigma') \subset \text{shed}(\Sigma_n) \subset \text{shed}(\Sigma)$ , und  $\Sigma'$  ist auch terminal.  $\square$

## 4.2 Mori-Transformationen am Polytop

**Lemma 4.2.1.** *Sei  $\Sigma$  ein vollständiger simplizialer Fächer und  $\omega \in \Sigma(d-1)$  eine Wand. Mit der Notation aus 3.5.1 sei  $\sum_{i=1}^{d+1} a_i u_i = 0$  die zugehörige Relation. Dann gilt für  $R = [\mathcal{V}_{\omega}] \in NE(X_{\Sigma})$ :*

$$K_{(X_{\Sigma})} \cdot R < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{d+1} a_i > 0.$$

*Ein Extremalstrahl  $R \in NE(X_{\Sigma})$  ist also genau dann ein Mori-Extremalstrahl, wenn mit der Notation aus 3.5.1 gilt:  $\sum_{i=1}^{d+1} a_i > 0$ .*

*Beweis.* Nach Proposition 3.7.1 gilt genau dann  $K_{(X_{\Sigma})} \cdot R < 0$ , wenn das Dach von  $\langle u_1, \dots, u_{d+1} \rangle$  konvex bei  $\omega$  ist, d.h. es gibt  $0 < \lambda < 1$  und  $b_1, \dots, b_{d-1} \in \mathbb{Q}$  mit  $\sum_{i=1}^{d-1} b_i < 1$ , so dass

$$(1-\lambda)u_d + \lambda u_{d+1} = \sum_{i=1}^{d-1} b_i u_i.$$

Dies ist äquivalent zu

$$-\sum_{i=1}^{d-1} \frac{b_i}{\lambda} u_i + \frac{1-\lambda}{\lambda} u_d + u_{d+1} = 0.$$

Durch Vergleich mit Notation 3.5.1 ist  $a_i = -\frac{b_i}{\lambda}$  für  $1 \leq i \leq d-1$  und somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d+1} a_i &= -\sum_{i=1}^{d-1} \frac{b_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 \\ &> -\frac{1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 = 0. \end{aligned}$$

□

**Korollar 4.2.2.** *Sei  $\Sigma$  ein vollständiger simplizialer Fächer. Dann ist  $\Sigma$  genau dann ein Fano-Fächer, wenn*

$$\sum_{i=1}^{d+1} a_i(\omega) > 0$$

für jede Wand  $\omega \in \Sigma(d-1)$  gilt. Dabei bezeichnen  $a_i(\omega)$  die Koeffizienten der linearen Relation zur Wand  $\omega$  aus Notation 3.5.1.

*Beweis.* Der Fächer  $\Sigma$  ist genau dann Fano, wenn  $-K_{(X_\Sigma)}$  ample ist, d.h.  $K_{(X_\Sigma)} \cdot \mathcal{V}_\omega < 0$  für alle  $\omega \in \Sigma(d-1)$  wegen Proposition 3.3.4. Mit Lemma 4.2.1 folgt die Behauptung. □

Sei nun  $k \subset P$  eine Kante eines einfachen Polytops  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$ . Der Normalenfächer  $\Sigma(P)$  ist simplizial. Sei  $\mathcal{V}_\omega$  die Kurve zu der zugehörigen Wand  $\omega \in \Sigma(P)(d-1)$ . Um den Typ der Transformation  $\varphi_{[\mathcal{V}_\omega]}$  zu bestimmen, müssen wir noch die Koeffizienten  $a_i$  der zugehörigen Relation

$$\sum_{i=1}^{d+1} a_i u_i = 0$$

am Polytop ablesen können. Dazu identifizieren wir im Folgenden Kanten mit ihren Richtungsvektoren.

**Lemma 4.2.3.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein einfaches Gitterpolytop und  $k = \text{conv}(v, w) \subset P(1)$  eine Kante mit  $v, w \in P$ . Dann gibt es an  $v$  bzw.  $w$  grenzende Kanten  $v_1, \dots, v_{d-1}$  und  $w_1, \dots, w_{d-1}$ , so dass die Facetten  $F_i := \text{aff}\{k, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{d-1}\}$ ,  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  die Kante  $k$  als Schnitt haben. Weiter sei  $F_d := \text{aff}\{v_1, \dots, v_{d-1}\}$  und*

$F_{d+1} := \text{aff}\{w_1, \dots, w_{d-1}\}$ . Der innere Normalenvektor von  $F_i$  sei mit  $u_i \in N$  bezeichnet. Dann gilt mit der Notation aus 3.5.1:

$$a_i = -\frac{\langle v_i, u_{d+1} \rangle}{\langle u_i, v_i \rangle}.$$

*Beweis.* Aus  $\sum_{i=1}^{d+1} a_i u_i = 0$  folgt für  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ :  $a_i \langle v_i, u_i \rangle + \langle v_i, u_{d+1} \rangle = 0$ .  $\square$

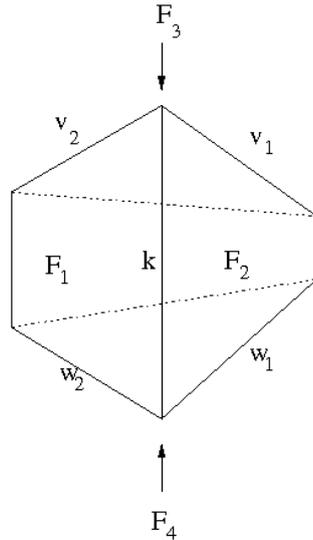


Abbildung 4.1: Beispiel zu Korollar 4.2.4 mit  $a_1, a_2 > 0$ .

**Korollar 4.2.4.** Sei  $i \in \{1, \dots, d-1\}$ . Mit der Notation aus 3.5.1 ist  $a_i$  genau dann positiv (bzw. null, negativ), wenn die Summe des Winkels zwischen  $w_i$  und  $k$  und des Winkels zwischen  $k$  und  $v_i$  kleiner als  $180^\circ$  (bzw. gleich  $180^\circ$ , größer als  $180^\circ$ ) ist.

*Beweis.* Es gilt  $\bigcap_{j=1, j \neq i}^{d-1} F_j = \text{aff}\{k, v_i\}$  und genauso  $\bigcap_{j=1, j \neq i}^{d-1} F_j = \text{aff}\{k, w_i\}$ , weshalb  $k, v_i$  und  $w_i$  in einer Ebene  $E$  liegen. Dabei erfüllt  $w_i$  die Bedingung  $\langle w_i, u_{d+1} \rangle = 0$ .

Wegen Lemma 4.2.3 ist  $\text{sgn}(a_i) = -\text{sgn}(\langle v_i, u_{d+1} \rangle)$ . Also ist  $a_i$  genau dann positiv, wenn der Vektor  $v_i$  im Halbraum  $\{x \in E : \langle u_{d+1}, x \rangle < 0\}$  liegt, d.h. der Winkel zwischen  $v_i$  und  $w_i$  ist spitz. Dies ist äquivalent dazu, dass die Summe des Winkels zwischen  $w_i$  und  $k$  und des Winkels zwischen  $k$  und  $v_i$  kleiner als  $180^\circ$  ist.

Die anderen beiden Fälle folgen analog.  $\square$

Sei  $P$  ein einfaches Polytop und  $k \in P(1)$  eine Kante. Dann heiße  $\text{supp}(k) = \{F \in P(d-1) : k \cap F \neq \emptyset\}$  der Träger von  $k$ .

Wir untersuchen im Folgenden, welche Kanten zu numerisch quivalenten Kurven gehören:

**Lemma 4.2.5.** *Sind  $k_1 \neq k_2$  zwei Kanten eines einfachen  $d$ -dimensionalen Polytops. Dann gilt genau dann  $|\text{supp}(k_1) \cup \text{supp}(k_2)| = d + 1$ , wenn  $\text{conv}(k_1, k_2)$  eine simpliziale Seite ist.*

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass  $|\text{supp}(k_1) \cup \text{supp}(k_2)| = d + 1$  gilt. Es seien  $k_i = \text{conv}(p_i, q_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  und  $v_1^{(i)}, \dots, v_{d-1}^{(i)}$  die an  $p_i$  grenzenden sowie  $w_1^{(i)}, \dots, w_{d-1}^{(i)}$  die an  $q_i$  grenzenden Kanten. Weiter seien

$$F_j^{(i)} := \text{aff}\{k_i, v_1^{(i)}, \dots, \widehat{v_j^{(i)}}, \dots, v_{d-1}^{(i)}\}, \quad j \in \{1, \dots, d-1\},$$

und  $F_d^{(i)}, F_{d+1}^{(i)}$  die restlichen beiden Facetten aus  $\text{supp}(k_i)$ , so dass  $p_i \in F_d^{(i)}$ . Wegen  $|\text{supp}(k_i)| = d + 1$  gibt es eine Permutation  $\sigma \in S_{d+1}$ , so dass  $F_i^{(1)} = F_{\sigma(i)}^{(2)}$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

**Fall 1:**  $k_1 \cap k_2 \neq \emptyset$ .

Sei also  $p_1 = p_2$ . Offensichtlich ist  $k_2$  eine der Kanten  $v_1^{(1)}, \dots, v_{d-1}^{(1)}$ . Also gilt  $k_2 \in F_d^{(1)} \setminus F_{d+1}^{(2)}$  und folglich  $F_d^{(1)} \neq F_{d+1}^{(2)}$ . Für  $j < d$  gilt  $p_1 \in F_j^{(1)} \setminus F_{d+1}^{(2)}$  und somit  $F_j^{(1)} \neq F_{d+1}^{(2)}$ . Hieraus folgt  $\sigma(d+1) = d+1$ . Wegen  $k_1 \neq k_2$  ist außerdem  $\sigma(d) \neq d$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei deswegen  $\sigma(1) = d$ . Dann ist

$$\Delta := \bigcap_{j=2}^{d-1} F_j^{(1)} = \bigcap_{j \neq \sigma^{-1}(d)}^{d-1} F_j^{(2)}$$

eine einfache 2-dimensionale Seite, welche die Kanten  $k_1$  und  $k_2$  enthält. Es gilt

$$w_1^{(1)} = \Delta \cap F_{d+1}^{(1)} = \Delta \cap F_{d+1}^{(2)} = w_{\sigma^{-1}(d)}^{(2)}.$$

Also ist  $\Delta = \text{conv}(k_1, k_2)$  ein Dreieck mit dritter Seite  $w_1^{(1)}$ .

**Fall 2:**  $k_1 \cap k_2 = \emptyset$ .

Hier ist  $F_d^{(1)} \notin \{F_d^{(2)}, F_{d+1}^{(2)}\}$  und genauso  $F_{d+1}^{(1)} \notin \{F_d^{(2)}, F_{d+1}^{(2)}\}$ . Deswegen sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\sigma(1) = d$ ,  $\sigma(2) = d+1$  und  $\sigma(j) = j \quad \forall j \in \{3, \dots, d-1\}$ . Dann ist

$$\Delta := P \cap \bigcap_{j=3}^{d-1} F_j^{(1)} = P \cap \bigcap_{j=3}^{d-1} F_j^{(2)}$$

eine einfache 3-dimensionale Seite, welche die Kanten  $k_1$  und  $k_2$  enthält. Es gilt

$$v_1^{(1)} = F_2^{(1)} \cap \Delta \cap F_d^{(1)} = F_{d+1}^{(2)} \cap \Delta \cap F_{\sigma(d)}^{(2)} = w_{\sigma(d+1)}^{(2)}$$

und genauso  $v_2^{(1)} = v_{\sigma(d)}^{(2)}$ ,  $w_1^{(1)} = w_{\sigma(d)}^{(2)}$  und  $w_2^{(1)} = v_{\sigma(d)}^{(2)}$ . Also ist  $\Delta = \text{conv}(k_1, k_2)$  ein Tetraeder mit den Kanten  $k_1, k_2, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, w_1^{(1)}$  und  $w_2^{(1)}$ .

Sei nun  $\text{conv}(k_1, k_2)$  ein Simplex. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

**Fall 1:**  $\dim(\text{conv}(k_1, k_2)) = 2$  mit Kanten  $k_1, k_2$  und  $k_3$ .

Seien  $k_2, k_3, v_1, \dots, v_{d-2}$  die Kanten, die an  $k_2 \cap k_3$  grenzen,  $k_1, k_3, u_1, \dots, u_{d-2}$  die Kanten, die an  $k_1 \cap k_3$  grenzen und  $k_1, k_2, w_1, \dots, w_{d-2}$  die Kanten, die an  $k_1 \cap k_2$  grenzen. Dabei liegen für  $j \in \{1, \dots, d-2\}$  die Vektoren  $k_1, v_j, w_j$  und  $k_2, u_j, w_j$  und  $k_3, u_j, v_j$  jeweils in einer Ebene.

Der Träger von  $k_1$  besteht aus den folgenden  $d+1$  Facetten:

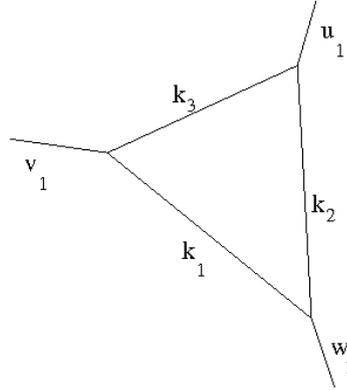


Abbildung 4.2:  $\dim(\text{conv}(k_1, k_2)) = 2$  und  $d = 3$ .

$$\begin{aligned} & \text{aff}(k_2, w_1, \dots, w_{d-1}) \\ & \text{aff}(k_3, v_1, \dots, v_{d-1}) \\ & \text{aff}(k_1, k_2, w_1, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_{d-1}) \quad \forall j \in \{1, \dots, d-2\} \\ & \text{aff}(k_1, w_1, \dots, w_{d-1}). \end{aligned}$$

Der Träger von  $k_2$  besteht aus den folgenden  $d+1$  Facetten:

$$\begin{aligned} & \text{aff}(k_1, w_1, \dots, w_{d-1}) \\ & \text{aff}(k_3, u_1, \dots, u_{d-1}) \\ & \text{aff}(k_1, k_2, w_1, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_{d-1}) \quad \forall j \in \{1, \dots, d-2\} \\ & \text{aff}(k_2, w_1, \dots, w_{d-1}). \end{aligned}$$

Weil  $k_3, u_j, v_j$  in einer Ebene liegen, gilt  $\text{aff}(k_3, u_1, \dots, u_{d-1}) = \text{aff}(k_3, v_1, \dots, v_{d-1})$  und somit  $\text{supp}(k_1) = \text{supp}(k_2)$ .

**Fall 2:**  $\dim(\text{conv}(k_1, k_2)) = 3$ .

Dieser Fall verläuft analog zu Fall 1.  $\square$

**Korollar 4.2.6.** *Seien  $k_1$  und  $k_2$  zwei Kanten eines einfachen  $d$ -dimensionalen Polytops  $P$ . Gilt  $|\text{supp}(k_1) \cup \text{supp}(k_2)| = d + 1$ , so sind die zugehörigen Kurven  $\mathcal{V}_{k_1}$  und  $\mathcal{V}_{k_2}$  in  $N_1(X_P)$  äquivalent.*

*Beweis.* Sei  $a_1u_1 + \dots + a_{d+1}u_{d+1} = 0$  die Relation zur Kante  $k_1$ . Wegen  $|\text{supp}(k_1) \cup \text{supp}(k_2)| = d + 1$  ist die Relation zu  $k_2$  entweder die von  $k_1$  oder  $(-a_1)u_1 + \dots + (-a_{d+1})u_{d+1} = 0$ . Angenommen, das Letztere wäre der Fall. Da  $k_1$  und  $k_2$  wegen Lemma 4.2.5 in einer simplizialen Seite enthalten sind, gibt es wegen Proposition 4.2.4 ein  $1 \leq i \leq d + 1$ , so dass  $a_i > 0$  und  $-a_i > 0$ . Dies ist ein Widerspruch. Also sind beide Relationen gleich und die zugehörigen Kurven in  $N_1(X_P)$  äquivalent.  $\square$

**Korollar 4.2.7.** *Sei  $P$  ein einfaches Polytop und  $\Delta \subset P$  eine simpliziale Seite. Dann sind die Kurven zu allen Kanten von  $\Delta$  in  $N_1(X_P)$  zueinander numerisch äquivalent.*

*Beweis.* Seien  $k_1$  und  $k_2$  zwei Kanten von  $\Delta$ . Dann ist  $\text{conv}(k_1, k_2)$  eine simpliziale Seite. Wegen Lemma 4.2.5 ist deswegen  $|\text{supp}(k_1) \cup \text{supp}(k_2)| = d + 1$  und somit wegen Korollar 4.2.6 die zugehörigen Kurven in  $N_1(X_P)$  äquivalent.  $\square$

**Definition 4.2.8.** Sei  $M_{\mathbb{Q}} = V_r \oplus V_{d-r}$  mit zwei  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen  $V_r, V_{d-r}$ . Weiter sei  $\Delta = \text{conv}(a_0, \dots, a_r) \subset V_r$  ein  $r$ -dimensionales Simplex und  $P_0, \dots, P_r \subset V_{d-r}$  Polytope. Ein Polytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  heißt das *kombinatorische Cayley-Polytop der Gitterpolytope  $P_0, \dots, P_r \subset V_{d-r}$  über  $\Delta$* , wenn  $P \cong \text{conv}(a_0 \times P_0, a_1 \times P_1, \dots, a_r \times P_r)$ . In diesem Fall nennen wir  $P$  auch nur *kombinatorisches Cayley-Polytop über  $\Delta$*  und bezeichnen es mit  $P = P_0 \star \dots \star P_r$ . Gilt  $\Delta \cong \Delta_r$ , nennen wir  $P_0 \star \dots \star P_r$  ein *Cayley-Polytop*.

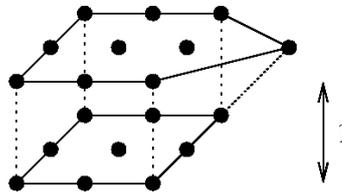


Abbildung 4.3: Ein 3-dimensionales Cayley-Polytop

**Proposition 4.2.9.** *Jedes  $d$ -dimensionale einfache kombinatorische Cayley-Polytop  $C = P_0 \star \dots \star P_r$  ist ein kombinatorisches Cayley-Polytop  $C \cong Q_0 \star \dots \star Q_s$  mit  $s \geq r$  und  $\text{aff}(Q_1) \cong \dots \cong \text{aff}(Q_s)$ .*

**Beispiel 4.2.10.** Sei  $C = P_0 \star P_1 = \text{conv}(0 \times P_0, e_1 \times P_1)$  mit  $P_0 = \text{conv}(0, e_2, e_3, e_2 + e_3)$  und  $P_1 = \text{conv}(0, e_3)$ . Dann ist zwar  $C$  ein einfaches Cayley-Polytop mit  $\text{aff}(P_0) \neq \text{aff}(P_1)$ , aber es gilt  $C = Q_0 \star Q_1 \star Q_2 = \text{conv}(0 \times Q_0, e_1 \times Q_1, e_2 \times Q_2)$  mit  $Q_0 = Q_1 = Q_2 = \text{conv}(0, e_3)$ .

**Lemma 4.2.11.** Sei  $\Delta = \text{conv}(a_0, \dots, a_r) \subset V_r \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein  $d$ -Simplex und  $P = P_0 \star \dots \star P_r$  ein kombinatorisches Cayley-Polytop über  $\Delta$  mit  $P_0, \dots, P_r \subset V_{d-r}$ . Hierbei seien  $V_r$  und  $V_{d-r}$  zwei  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume mit  $M_{\mathbb{Q}} = V_r \oplus V_{d-r}$  und  $\pi : M_{\mathbb{Q}} \rightarrow V_r$  die kanonische Projektion. Weiter sei  $I \subset \{0, \dots, r\}$ .

Dann gibt es eine Bijektion zwischen den  $d$ -dimensionalen Seiten  $\theta \subset \sum_{i \in I} P_i$  von  $\sum_{i \in I} P_i$  und den  $(d + |I| - 1)$ -dimensionalen Seiten  $F \subset P$  von  $P$ , die  $\pi(F) = \text{conv}(a_i, i \in I)$  erfüllen. Diese Bijektion ist durch

$$\theta \mapsto F_{\theta} := \text{aff}\left\{a_i \times \theta_i : \theta = \sum_{i \in I} \theta_i\right\} \cap P$$

und

$$F \mapsto \theta_F := \sum_{i \in I} \pi^{-1}(a_i) \cap F$$

gegeben.

*Beweis von Proposition 4.2.9.* Wir definieren  $P := P_0$  und  $Q := P_1 \star \dots \star P_r$ . Dann gilt  $C = P \star Q = \text{conv}(0 \times P, e_0 \times Q)$ . Es sei  $P \subset V_m, Q \subset V_n$ , wobei  $V_m$  und  $V_n$  zwei Vektorräume der Dimensionen  $m$  und  $n$  mit  $V_m \cap V_n = V_k$  sind. Wir bezeichnen mit  $\pi$  die Projektion mit Kern  $V_k$ . Sei  $p \in P(0)$  eine beliebige Ecke von  $P$ ,  $q' \in \pi(Q)(0)$  eine Ecke von  $\pi(Q)$  und  $q \in Q(0)$  eine Ecke von  $Q$  mit  $\pi(q) = q'$ . Dann ist  $p + q \in (P + Q)(0)$ . Wegen Lemma 4.2.11 gibt es somit  $|\pi(Q)(0)|$  Kanten, die  $0 \times p$  mit  $e_0 \times Q$  verbinden. Weiter gibt es  $m$  Kanten von  $P$ , die  $p$  enthalten. Weil  $C$  einfach ist, folgt mit Lemma 1.9.7  $|\pi(Q)(0)| + m = d = m + n - k + 1$  und somit  $|\pi(Q)(0)| = n - k + 1$ . Deswegen sind  $\pi(P)$  bzw.  $\pi(Q)$  Simplizes der Dimension  $m - k$  bzw.  $n - k$ . Sei also  $\pi(P) = \text{conv}(p_0, \dots, p_{m-k})$  und  $\pi(Q) = \text{conv}(q_0, \dots, q_{n-k})$ .

Wir betrachten eine Ecke  $q \in Q(0)$  mit  $\pi(q) = q_0$ . Es sei  $V := \text{aff}(\pi^{-1}(q_0))$  und  $\dim(V) = k - l$  mit  $l \leq k$ . Dann hat  $P/V$  mindestens  $m - (k - l) + 1$  Ecken. Seien  $a_0, \dots, a_{m-k+l} \in P(0)$  Urbilder dieser Ecken. Dann sind  $q + a_0, \dots, q + a_{m-k+l} \in (P + Q)(0)$  Ecken der Minkowski-Summe von  $P$  und  $Q$ . Wegen Lemma 4.2.11 gibt es somit  $m - k + l + 1$  Kanten von  $P \star Q$ , die  $0 \times P$  und  $e_0 \times q$  verbinden. Weiter gibt es  $n$  Kanten von  $Q$ , die  $q$  enthalten. Zusammen liefert

dies uns  $m+n-k+l+1 = d+l$  Kanten von  $C$ , die  $q$  enthalten. Da  $C$  einfach ist, folgt  $l = 0$ . Also gilt  $\dim(\pi^{-1}(q_i)) = k \forall i \in \{0, \dots, n-k\}$  und genauso  $\dim(\pi^{-1}(p_i)) = k \forall i \in \{0, \dots, m-k\}$ .

Wir betrachten nun eine Ecke  $q \in Q(0)$  mit  $\pi(q) \notin \{q_0, \dots, q_{n-k}\}$ . Es gibt eine Ecke  $p \in P(0)$ , so dass  $p+q \in (P+Q)(0)$ . Weiter gibt es Ecken  $b_0, \dots, b_{n-k} \in Q(0)$  mit  $\pi(b_i) = q_i \forall i \in \{0, \dots, n-k\}$ , so dass  $p+b_i \in (P+Q)(0)$  eine Ecke der Minkowski-Summe von  $P$  und  $Q$  sind. Keine dieser Ecken ist  $p+q$ , weshalb es mit Lemma 4.2.11 mindestens  $n-k+1+1$  Kanten zwischen  $0 \times p$  und  $e_0 \times Q$  gibt. Zusätzlich gibt es  $m$  Kanten von  $P$ , die  $p$  enthalten. Zusammen liefert dies uns  $m+n-k+1+1 = d+1$  Kanten von  $C$ , die  $p$  enthalten. Dies ist ein Widerspruch zur Einfachheit von  $C$ . Also gibt es keine Ecke  $q \in Q(0)$  mit  $\pi(q) \notin \{q_0, \dots, q_{n-k}\}$  und genauso wenig eine Ecke  $p \in P(0)$  mit  $\pi(p) \notin \{p_0, \dots, p_{m-k}\}$ .

Deswegen ist  $C = P \star Q$  ein kombinatorisches Cayley-Polytop  $R_0 \star \dots \star R_{d-k}$  über  $\text{conv}(p_0, \dots, p_{m-k}) \star \text{conv}(q_0, \dots, q_{n-k})$  mit  $\text{aff}(R_i) \cong V_k \forall i \in \{0, \dots, d-k\}$ .  $\square$

**Definition 4.2.12.** Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Polytop und  $k_1, k_2 \subset P$  zwei Kanten. Eine *lokale Projektion von  $P$  bei  $k_1$  und  $k_2$*  ist eine affine Abbildung  $\pi : M_{\mathbb{Q}} \rightarrow M_{\mathbb{Q}}$  mit  $\pi^2 = \pi$ , so dass jede Ecke von  $k_1$  und  $k_2$  auf eine Ecke von  $\pi(P)$  abgebildet wird.

**Proposition 4.2.13.** Seien  $k_1, k_2$  zwei Kanten eines einfachen Polytops  $P$ . Die zugehörigen Kurven  $\mathcal{V}_{k_1}, \mathcal{V}_{k_2} \in \text{NE}(X_P)$  sind genau dann numerisch äquivalent, wenn es eine lokale Projektion  $\pi : M_{\mathbb{Q}} \rightarrow M_{\mathbb{Q}}$  bei  $k_1$  und  $k_2$  gibt, so dass  $k_1$  und  $k_2$  die Urbilder von Kanten einer simplizialen Seite von  $\pi(P)$  sind.

*Beweis.* Zunächst sei  $\pi : M_{\mathbb{Q}} \rightarrow M_{\mathbb{Q}}$  eine lokale Projektion bei  $k_1$  und  $k_2$ , so dass  $\pi(k_1)$  und  $\pi(k_2)$  zwei Kanten einer simplizialen Seite  $\Delta \subset \pi(P)$  sind. Wegen Lemma 4.2.7 können wir annehmen, dass  $k_1$  und  $k_2$  nicht in einer gemeinsamen simplizialen Seite von  $P$  enthalten sind, d.h.  $r := \dim(\Delta) < d$ .

Das Urbild  $\pi^{-1}(\Delta) =: C$  ist ein kombinatorisches einfaches Cayley-Polytop  $C = P_0 \star \dots \star P_r$ . Weil  $C$  einfach, aber kein Simplex ist, gilt wegen Proposition 4.2.9  $C = Q_0 \star \dots \star Q_s, s \geq r$ , mit  $L := \text{aff}(Q_i) \not\cong 0 \forall i$ . Jede Ecke von  $C$  ist in einer affinen Kopie von  $L$  enthalten. Diese bezeichnen wir ebenso mit  $L$ . Jede Facette, die  $L$  enthält, enthält sowohl eine Ecke von  $k_1$  als auch von  $k_2$ . Zu den zwei Kanten  $k_i = \text{conv}(p_i, q_i), i \in \{1, 2\}$ , gibt es an  $p_i$  bzw.  $q_i$  grenzende Kanten  $v_1^{(i)}, \dots, v_{d-1}^{(i)}$  und  $w_1^{(i)}, \dots, w_{d-1}^{(i)}$ , so dass die

Facetten

$$F_j^{(i)} := \text{aff}\{k_i, v_1^{(i)}, \dots, \widehat{v_j^{(i)}}, \dots, v_{d-1}^{(i)}\}, \quad j \in \{1, \dots, d-1\},$$

die Kante  $k_i$  als Schnitt haben. Weiter sei  $F_d^{(i)} := \text{aff}\{v_1^{(i)}, \dots, v_{d-1}^{(i)}\}$  und  $F_{d+1}^{(i)} := \text{aff}\{w_1^{(i)}, \dots, w_{d-1}^{(i)}\}$ . Weil  $P$  einfach ist, gibt es keine weitere Kanten und Facetten, die an  $p_i$  und  $q_i$  grenzen.

Sei nun  $F \in \text{supp}(k_1)$  eine Facette von  $P$  aus dem Träger von  $k_1$ . Enthält  $F$  alle an  $k_1$  grenzende Kanten, die in  $L$  liegen, so enthält  $F$  auch  $L$ , und es gilt  $F \in \text{supp}(k_2)$ . Insbesondere gilt wegen  $k_1 \notin L$ :  $F_d^{(1)}, F_{d+1}^{(1)} \supset L$  und  $F_d^{(1)}, F_{d+1}^{(1)} \in \text{supp}(k_2)$ .

Es gebe nun eine Kante  $v \subset L$ , die an  $k_1$  grenzt, aber nicht in  $F$  liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $v = v_1^{(1)}$ . Dann gilt

$$v_1^{(1)} = \bigcap_{j=2}^d F_j^{(1)} \supset \bigcap_{j=2}^{d-1} F_j^{(1)} \cap L \supset v_1^{(1)}.$$

Hieraus folgt

$$v_1^{(1)} = \bigcap_{j=2}^d F_j^{(1)} = \bigcap_{j=2}^{d-1} F_j^{(1)} \cap L,$$

was affin äquivalent zu

$$\bigcap_{j=2}^{d-1} F_j^{(1)} \cap L = \bigcap_{j=2}^{d-1} F_j^{(1)} \cap F_{d+1}^{(1)} = w_1^{(1)}$$

ist. Deswegen sind  $v_1^{(1)}$  und  $w_1^{(1)}$  parallel. Also kommt der Normalenvektor  $u_1$  von  $F$  wegen Korollar 4.2.4 nicht in der Relation zur Kante  $k_1$  vor.

Somit kommen in den Relationen von  $k_1$  und  $k_2$  die selben Normalenvektoren vor. Also sind die zugehörigen Kurven  $\mathcal{V}_{k_1}$  und  $\mathcal{V}_{k_2}$  in  $N_1(X_P)$  äquivalent.

Seien nun die Kurven zu  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , zueinander äquivalent. Der innere Normalenvektor von  $F_j^{(i)}$  sei mit  $u_j^{(i)} \in N$  bezeichnet, und die Relation zur Kante  $k_i$  durch

$$a_1^{(i)} u_1^{(i)} + \dots + a_{d+1}^{(i)} u_{d+1}^{(i)} = 0$$

gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $a_j^{(i)} = 0 \forall j \leq r$  und  $a_j^{(i)} \neq 0 \forall j > r$  mit  $0 \leq r \leq d-1$ . Somit reduziert sich die Relation auf

$$a_{r+1}^{(i)} u_{r+1}^{(i)} + \dots + a_{d+1}^{(i)} u_{d+1}^{(i)} = 0$$

mit  $a_j^{(1)} = a_j^{(2)}, F_j^{(1)} = F_j^{(2)} \forall r+1 \leq j \leq d+1$ . Wegen Korollar 4.2.4 sind die Kanten  $v_j^{(i)}$  und  $w_j^{(i)}$  parallel für alle  $j \leq r$ . Weiter ist  $L^{(i)} := \text{aff}(v_1^{(i)}, \dots, v_r^{(i)})$  ein  $r$ -dimensionaler affiner Untervektorraum von  $\bigcap_{j>r} \text{aff}(F_j^{(i)})$ . Da dieser aber auch  $r$ -dimensional ist und beide die Ecke  $p_i$  enthalten, sind sie gleich. Es gilt dann

$$L^{(1)} = \bigcap_{j>r} \text{aff}(F_j^{(1)}) = \bigcap_{j>r} \text{aff}(F_j^{(2)}) = L^{(2)}.$$

Genauso gilt  $\mathcal{Q}^{(1)} = \mathcal{Q}^{(2)}$ , wobei  $\mathcal{Q}^{(i)} := \text{aff}(w_1^{(i)}, \dots, w_r^{(i)})$  affin isomorph zu  $L^{(i)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , ist.

Wir betrachten nun die Projektion  $\pi$  mit Kern  $L^{(1)}$ .

Wegen  $\dim(L^{(1)}) = r$  ist  $\pi(P)$  ein  $(d-r)$ -dimensionales Polytop. Die Bilder der Facetten  $F_l^{(i)}$ ,  $r+1 \leq l \leq d-1$ , sind  $(d-r-1)$ -dimensional, denn

$$\begin{aligned} \dim(\pi(F_l^{(i)})) &= \dim \text{aff}(k_i, v_{r+1}^{(i)}, \dots, \widehat{v_l^{(i)}}, \dots, v_{d-1}^{(i)}) \\ &= d-r-1. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} \dim \pi(F_d^{(i)}) &= \dim \text{aff}(v_{r+1}^{(i)}, \dots, v_{d-1}^{(i)}) = d-r-1 \text{ und} \\ \dim \pi(F_{d+1}^{(i)}) &= \dim \text{aff}(w_{r+1}^{(i)}, \dots, w_{d-1}^{(i)}) = d-r-1. \end{aligned}$$

Weil  $\pi$  stetig ist, sind deswegen  $\pi(F_{r+1}^{(1)}), \dots, \pi(F_{d+1}^{(1)})$  Facetten von  $\pi(P)$ . Weiter ist für  $l \leq r$ :

$$\dim \pi(F_l^{(i)}) = \dim \text{aff}(k_i, v_{r+1}^{(i)}, \dots, v_{d-1}^{(i)}) = d-r.$$

Deswegen ist

$$\pi(p_i) = \bigcap_{j=1}^d \pi(F_j^{(i)}) = \bigcap_{j=r+1}^d \pi(F_j^{(i)})$$

als Schnitt von  $d-r$  Facetten des  $(d-r)$ -dimensionalen Polytops  $\pi(P)$  eine Ecke von  $\pi(P)$ . Genauso ist  $\pi(q_i)$  eine Ecke von  $\pi(P)$ , d.h.  $\pi$  ist eine lokale Projektion bei  $k_1$  und  $k_2$ . Weiter gilt  $|\text{supp}(\pi(k_1) \cup \pi(k_2))| = d-r+1$ . Wegen Lemma 4.2.5 sind  $\pi(k_1)$  und  $\pi(k_2)$  Kanten einer simplizialen Seite von  $\pi(P)$ .  $\square$

### 4.3 Beispiele

In den folgenden drei Beispielen seien stets

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 4.3.1.** Sei  $P = 3\Delta_3 \cap \{X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 4\}$  das abgeschnittene 3-Simplex  $3\Delta_3$  (vgl. Abbildung 4.4).

Die inneren Normalenvektoren von  $P$  sind durch  $u_1, u_2, u_3, u_4$  und  $u_5 = -u_1 - u_2 - 2u_3$  gegeben. Der Normalenfächer  $\Sigma(P)$  von  $P$  ist vollständig, terminal und besteht aus den Strahlen  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_i$ ,  $i \leq 5$ , und den Wänden  $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{34}$  und  $\omega_{45}$ . Dabei bezeichnet  $\omega_{ij}$  die Wand, die durch  $u_i$  und  $u_j$  aufgespannt wird.

Wohingegen die Strahlen von  $\Sigma(P)$  den Facetten von  $P$  entsprechen, entsprechen die Wände von  $\Sigma(P)$  den Kanten von  $P$ . Mit Proposition 4.2.13 sind die Relationen der inneren Normalenvektoren:

$$\begin{aligned} \omega_{12} : & u_1 + u_2 + 2u_3 + u_5 = 0 \\ \omega_{13} \sim \omega_{23} \sim \omega_{34} : & u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ \omega_{14} \sim \omega_{24} : & u_3 - u_4 + u_5 = 0 \\ \omega_{15} \sim \omega_{25} \sim \omega_{45} : & u_1 + u_2 + 2u_4 - u_5 = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(X_P)$ . Dabei sind jedoch nur  $R := [\omega_{14}] = [u_3 - u_4 + u_5]$  und  $R' := [\omega_{15}] = [u_1 + u_2 + 2u_4 - u_5]$  Seiten.

Nach Lemma 4.2.1 sind  $R$  und  $R'$  auch Mori-Extremalstrahlen.

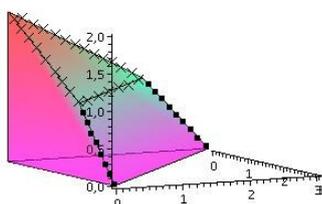


Abbildung 4.4:  $P = 3\Delta_3 \cap \{X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 4\}$ . Die Quadrate markieren die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R$ , die Kreuze die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R'$ .

Die Transformation  $\varphi_R$  (bzw.  $\varphi_{R'}$ ) erfüllt  $\alpha = 1$  mit der Notation aus 3.5.1 und ist damit eine Kontraktion der Facette zu  $u_4$  (bzw.

$u_5$ ). In beiden Fällen ist das Ergebnis ein Simplex. Seine inneren Normalenvektoren erfüllen die Relation  $u_1 + u_2 + 2u_3 + u_5 = 0$  (bzw.  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ ). Beide Fächer sind terminal, wie von Theorem 4.1.1 vorhergesagt.

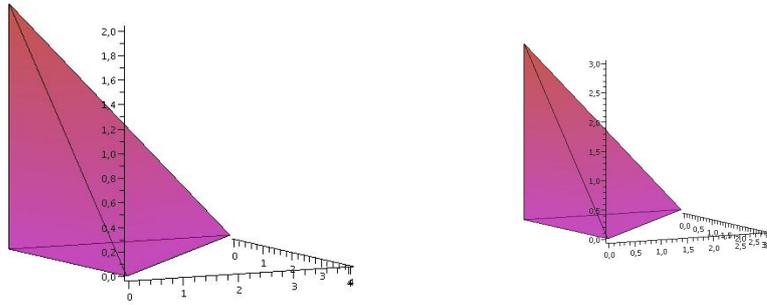


Abbildung 4.5:  $\varphi_R(P)$  bzw.  $\varphi_{R'}(P)$ .

**Beispiel 4.3.2.** Sei  $P = 3\Delta_3 \cap \{X_1 + X_2 - X_3 \geq -1\}$  das abgeschchnittene 3-Simplex  $3\Delta_3$ .

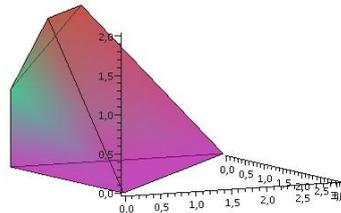


Abbildung 4.6:  $P = 3\Delta_3 \cap \{X_1 + X_2 - X_3 \geq -1\}$ .

Die inneren Normalenvektoren von  $P$  sind hier durch  $u_1, u_2, u_3, u_4$  und  $u_5 = u_1 + u_2 - u_3$  gegeben. Der Normalenfächer  $\Sigma(P)$  von  $P$  ist vollständig, aber nicht terminal, da  $\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}u_5 = -u_3 =: u_6$ . Die minimale terminale Auflösung wird durch Hinzunahme des Strahls  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_6$  erreicht. Der so definierte Fächer ist der Normalenfächer zum Polytop  $Q = P \cap \{X_3 \leq \frac{3}{2}\}$  (vgl. Abbildung 4.7).

Der Normalenfächer  $\Sigma(Q)$  besteht aus den Strahlen  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_i$ ,  $i \leq 6$ , und den Wänden  $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{26}, \omega_{34}, \omega_{46}, \omega_{56}$ . Mit Proposition 4.2.13 sind die Relationen der inneren

Normalenvektoren:

$$\begin{aligned}
 \omega_{12} &: -u_1 - u_2 + u_3 + u_5 = 0 \\
 \omega_{13} \sim \omega_{23} \sim \omega_{34} &: u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\
 \omega_{14} \sim \omega_{24} &: u_3 + u_6 = 0 \\
 \omega_{15} \sim \omega_{25} \sim \omega_{56} &: u_1 + u_2 - u_5 + u_6 = 0 \\
 \omega_{16} \sim \omega_{26} &: u_4 + u_5 - 2u_6 = 0 \\
 \omega_{46} &: u_1 + u_3 + u_4 - u_6 = 0.
 \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(X_Q)$ . Dabei sind jedoch nur  $R := [\omega_{15}] = [u_1 + u_2 - u_5 + u_6]$ ,  $R' := [\omega_{16}] = [-u_1 - u_2 + u_3 + u_5]$  und  $R'' := [\omega_{12}] = [u_4 + u_5 - 2u_6]$  Seiten dieses Kegels. Wegen Lemma 4.2.1 ist lediglich  $R$  ein Mori-Extremalstrahl.

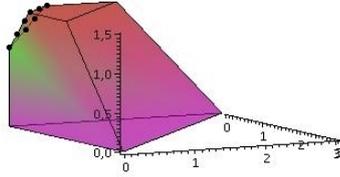


Abbildung 4.7:  $Q = P \cap \{X_3 \leq \frac{3}{2}\}$ . Die Punkte markieren die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R$ .

Die Transformation  $\varphi_R$  erfüllt  $\alpha = 1$  und ist damit eine Kontraktion der Facette zu  $u_5$ . Das Ergebnis ist der Pyramidenstumpf  $Q' := 3\Delta_3 \cap \{X_3 \leq \frac{3}{2}\}$  mit den inneren Normalenvektoren  $u_i$ ,  $i \neq 5$  (vgl. Abbildung 4.8).

Die Wände von  $\Sigma(Q')$  erfüllen mit Proposition 4.2.13 die Relationen

$$\begin{aligned}
 \omega_{12} \sim \omega_{14} \sim \omega_{24} &: u_3 + u_6 = 0 \\
 \omega_{13} \sim \omega_{23} \sim \omega_{34} &: u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\
 \omega_{16} \sim \omega_{26} \sim \omega_{46} &: u_1 + u_2 + u_4 - u_6 = 0.
 \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(X_{Q'})$ . Dabei sind jedoch nur  $R^{(3)} := [\omega_{12}] = [u_3 + u_6]$  und  $R^{(4)} := [\omega_{16}] = [u_1 + u_2 + u_4 - u_6]$  Seiten dieses Kegels. Wegen Lemma 4.2.1 sind beide auch Mori-Extremalstrahlen.

Die Transformation  $\varphi_{R^{(3)}}$  erfüllt  $\alpha = 0$  und ist damit eine Projektion auf den Fächer zu  $\mathbb{P}^2$ .

Die Transformation  $\varphi_{R^{(4)}}$  erfüllt  $\alpha = 1$  und ist damit eine Kontraktion der Facette zu  $u_6$ . Das Ergebnis ist das 3-Simplex  $3\Delta_3$ . Beide Fächer sind terminal, wie von Theorem 4.1.1 vorhergesagt.

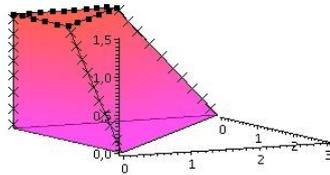


Abbildung 4.8:  $Q' = \varphi_R(Q)$ . Die Kreuze markieren die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R^{(3)}$ , die Quadrate die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R^{(4)}$ .

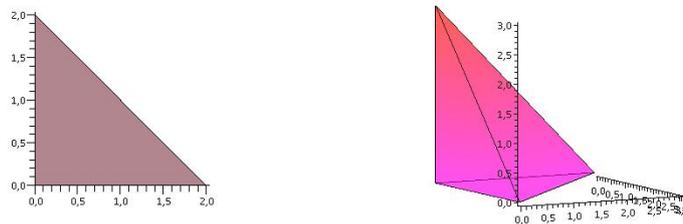


Abbildung 4.9:  $\varphi_{R^{(3)}} \circ \varphi_R(Q)$  bzw.  $\varphi_{R^{(4)}} \circ \varphi_R(Q)$ .

**Beispiel 4.3.3.** Sei  $P = 3\Delta_3 \cap \{X_1 + X_2 - X_3 \leq 1\}$  das abgeschnittene 3-Simplex  $3\Delta_3$ .

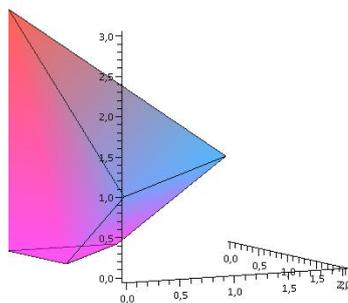


Abbildung 4.10:  $P = 3\Delta_3 \cap \{X_1 + X_2 - X_3 \leq 1\}$ .

Dann sind die inneren Normalenvektoren von  $P$  durch  $u_1, u_2, u_3, u_4$  und  $u_5 = -u_1 - u_2 + u_3$  gegeben. Der Normalenfächer  $\Sigma(P)$  von  $P$  ist nicht terminal. Die minimale terminale Auflösung wird durch die Hinzunahme des Strahls  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_6$ ,  $u_6 = -u_1 - u_2$ ,

erreicht. Der so definierte Fächer ist der Normalenfächer  $\Sigma(Q)$  von  $Q = P \cap \{X_1 + X_2 \leq \frac{3}{2}\}$  (vgl. Abbildung 4.11).

Er ist vollständig, besteht aus den Strahlen  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_i, i \leq 6$ , und den Wänden  $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{26}, \omega_{35}, \omega_{46}, \omega_{56}$ . Mit Proposition 4.2.13 sind die Relationen der inneren Normalenvektoren:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &: u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ \omega_{13} \sim \omega_{23} \sim \omega_{35} &: u_1 + u_2 - u_3 + u_5 = 0 \\ \omega_{14} \sim \omega_{24} \sim \omega_{46} \sim \omega_{56} &: u_1 + u_2 + u_6 = 0 \\ \omega_{15} \sim \omega_{25} &: u_3 - u_5 + u_6 = 0 \\ \omega_{16} \sim \omega_{26} &: u_4 + u_5 - 2u_6 = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(X_Q)$ . Dabei sind jedoch nur  $R := [\omega_{13}] = [u_1 + u_2 - u_3 + u_5]$ ,  $R' := [\omega_{15}] = [u_3 - u_5 + u_6]$  und  $R'' := [\omega_{16}] = [u_4 + u_5 - 2u_6]$  Seiten. Nach Lemma 4.2.1 sind nur  $R$  und  $R'$  Mori-Extremalstrahlen.

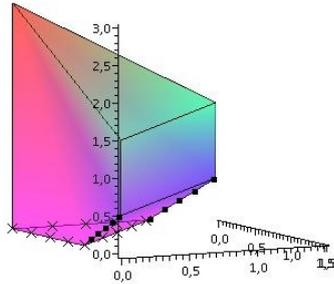


Abbildung 4.11:  $Q = P \cap \{X_1 + X_2 \leq \frac{3}{2}\}$ . Die Kreuze markieren die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R$ , die Quadrate die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R'$ .

Die Transformationen  $\varphi_R$  (bzw.  $\varphi_{R'}$ ) erfüllen jeweils  $\alpha = 1$  und sind damit Kontraktionen der Facetten zu  $u_3$  (bzw.  $u_5$ ).

Nach der Kontraktion  $\varphi_R$  erhält man mit Proposition 4.2.13 die Relationen

$$\begin{aligned} \omega_{12} &: 2u_1 + 2u_2 + u_4 + u_5 = 0 \\ \omega_{14} \sim \omega_{24} \sim \omega_{15} \sim \omega_{25} \sim \omega_{46} \sim \omega_{56} &: u_1 + u_2 + u_6 = 0 \\ \omega_{16} \sim \omega_{26} &: u_4 + u_5 - 2u_6 = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(\varphi_R(X_Q))$ . Dabei sind jedoch nur  $R^{(1,1)} := [\omega_{14}] = [u_1 + u_2 + u_6]$  und  $R^{(1,2)} := [\omega_{16}] = [u_4 + u_5 - 2u_6]$  Seiten. Nach Lemma 4.2.1 ist nur  $R^{(1,1)}$  ein Mori-Extremalstrahl.

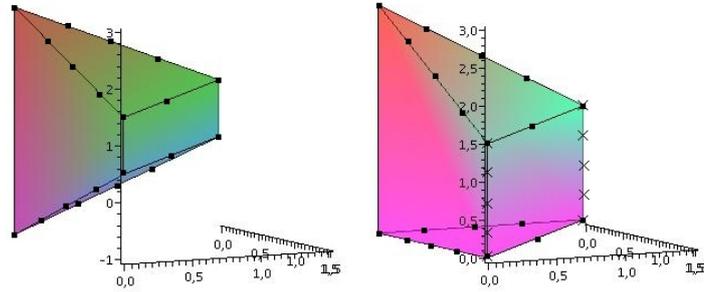


Abbildung 4.12:  $\varphi_R(Q)$  bzw.  $\varphi_{R'}(Q)$ . Die Quadrate markieren die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R^{(1,1)}$  bzw.  $R^{(2,1)}$ , die Kreuze zur Äquivalenzklasse  $R^{(2,2)}$ .

Die Transformation  $\varphi_{R^{(1,1)}}$  erfüllt  $\alpha = 0$  und  $\beta = 1$ . Dies entspricht einer Projektion des Fächers auf den eindimensionalen Fächer, der von den Strahlen  $\pm\mathbb{Q} \cdot u_3$  aufgespannt wird, der Fächer zu  $\mathbb{P}^1$ . Dieser ist terminal, wie von Theorem 4.1.1 vorhergesagt.

Nach der Kontraktion  $\varphi_{R'}$  erhält man mit Proposition 4.2.13 die Relationen

$$\begin{aligned} \omega_{12} &: u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ \omega_{13} \sim \omega_{23} \sim \omega_{14} \sim \omega_{24} \sim \omega_{36} \sim \omega_{46} &: u_1 + u_2 + u_6 = 0 \\ \omega_{16} \sim \omega_{26} &: u_3 + u_4 - u_6 = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(\varphi_{R'}(X_Q))$ . Dabei sind jedoch nur  $R^{(2,1)} := [\omega_{13}] = [u_1 + u_2 + u_6]$  und  $R^{(2,2)} := [\omega_{16}] = [u_3 + u_4 - u_6]$  Seiten. Diese sind nach Lemma 4.2.1 auch Mori-Extremalstrahlen.

Die Transformation  $\varphi_{R^{(2,1)}}$  erfüllt  $\alpha = 0$  und  $\beta = 1$ . Dies entspricht erneut einer Projektion des Fächers auf den Fächer zu  $\mathbb{P}^1$ . Die Transformation  $\varphi_{R^{(2,2)}}$  erfüllt  $\alpha = 1$  und kontrahiert die Facette zu  $u_6$ . Das Ergebnis ist das 3-Simplex  $3\Delta_3$ . Beide Fächer sind terminal, wie von Theorem 4.1.1 vorhergesagt.

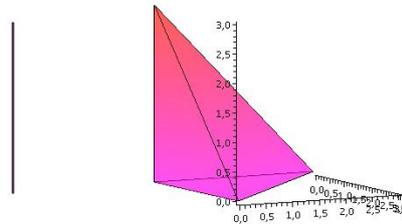


Abbildung 4.13:  $\varphi_{R^{(2,1)}} \circ \varphi_{R'}(Q)$  bzw.  $\varphi_{R^{(2,2)}} \circ \varphi_{R'}(Q)$ .

**Beispiel 4.3.4.** Wir betrachten das Polytop

$$P = \bigcap_{i=1}^5 \{x \in \mathbb{Q}^3 : \langle x, u_i \rangle \geq -2\}$$

(vgl. Abbildung 4.14) mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } u_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenfächer  $\Sigma(P)$  von  $P$  ist vollständig, terminal und besteht aus den Strahlen  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_i, i \leq 5$ , und den Wänden  $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{35}, \omega_{45}$ .

Mit Proposition 4.2.13 sind die Relationen der inneren Normalenvektoren:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &: -u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4 = 0 \\ \omega_{13} \sim \omega_{23} \sim \omega_{35} &: u_1 + u_2 - u_3 + u_5 = 0 \\ \omega_{14} \sim \omega_{24} \sim \omega_{45} &: u_1 + u_2 + u_4 + 2u_5 = 0 \\ \omega_{15} \sim \omega_{25} &: u_3 + u_4 + u_5 = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(X_P)$ . Dabei sind jedoch nur  $R := [\omega_{13}] = [u_1 + u_2 - u_3 + u_5]$  und  $R' := [\omega_{12}] = [-u_1 - u_2 + 2u_3 + u_4]$  Seiten. Nach Lemma 4.2.1 sind  $R$  und  $R'$  auch Mori-Extremalstrahlen.

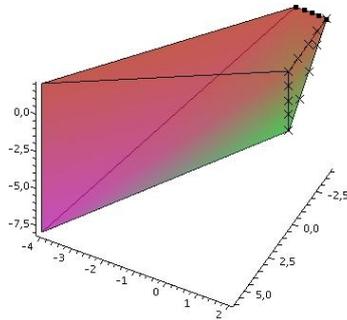


Abbildung 4.14:  $P = \bigcap_{i=1}^5 \{x \in \mathbb{Q}^3 : \langle x, u_i \rangle \geq -2\}$ . Die Kreuze markieren die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R$ , die Quadrate die Kante zur Äquivalenzklasse  $R'$ .

Die Transformation  $\varphi_R$  erfüllt  $\alpha = 1$  und ist eine Kontraktion der Facette zu  $u_3$ . Das Ergebnis ist ein 3-dimensionales Simplex. Seine inneren Normalenvektoren erfüllen die Relation  $u_1 + u_2 + u_3 + 2u_5 = 0$ . Der von ihnen aufgespannte Teilfächer ist terminal, wie von Theorem 4.1.1 vorhergesagt.

Die Transformation  $\varphi_{R'}$  erfüllt  $\alpha = 2$  und ist eine Flip-Transformation.

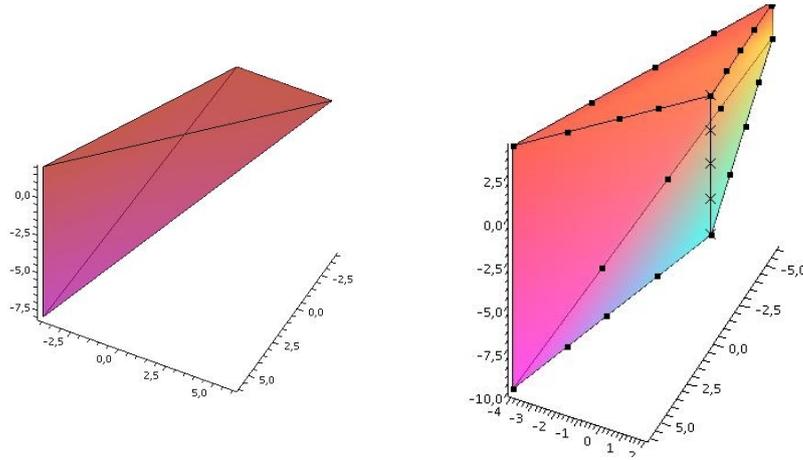


Abbildung 4.15:  $\varphi_R(P)$  bzw.  $\varphi_{R'}(P)$ . Die Kreuze markieren die Kante zur Äquivalenzklasse  $R^{(2)}$ , die Quadrate die Kanten zur Äquivalenzklasse  $R^{(3)}$ .

Das Ergebnis von  $\varphi_{R'}$  ist der Normalenfächer zum Polytop

$$Q = \bigcap_{i=1}^2 \{x \in \mathbb{Q}^3 : \langle x, u_i \rangle \geq -4\} \cap \bigcap_{i=3}^5 \{x \in \mathbb{Q}^3 : \langle x, u_i \rangle \geq -2\}.$$

Der Normalenfächer  $\Sigma(Q)$  von  $Q$  ist vollständig, terminal und besteht aus den Strahlen  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_i$ ,  $i \leq 5$ , und den Wänden  $\omega_{13}$ ,  $\omega_{14}$ ,  $\omega_{15}$ ,  $\omega_{23}$ ,  $\omega_{24}$ ,  $\omega_{25}$ ,  $\omega_{34}$ ,  $\omega_{35}$ ,  $\omega_{45}$ . Mit Proposition 4.2.13 sind die Relationen der inneren Normalenvektoren:

$$\begin{aligned} \omega_{13} \sim \omega_{14} \sim \omega_{15} \sim \omega_{23} \sim \omega_{24} \sim \omega_{25} : \quad & u_3 + u_4 + u_5 = 0 \\ \omega_{34} : \quad & u_1 + u_2 - 2u_3 - u_4 = 0 \\ \omega_{35} : \quad & u_1 + u_2 - u_3 + u_5 = 0 \\ \omega_{45} : \quad & u_1 + u_2 + u_4 + 2u_5 = 0. \end{aligned}$$

Dies liefert Erzeuger des Kegels  $\text{NE}(X_Q)$ . Dabei sind nur  $R^{(2)} := [\omega_{35}] = [u_1 + u_2 - u_3 + u_5]$ ,  $R^{(3)} := [\omega_{13}] = [u_3 + u_4 + u_5]$  und  $R^{(4)} := [\omega_{34}] = [u_1 + u_2 - 2u_3 - u_4]$  Seiten, jedoch nur  $R^{(2)}$  und

$R^{(3)}$  Mori-Extremalstrahlen wegen Lemma 4.2.1. Die Transformation  $\varphi_{R^{(2)}}$  erfüllt  $\alpha = 1$  und ist eine Kontraktion der Facette zu  $u_3$ . Das Ergebnis ist ein 3-dimensionales Simplex. Seine inneren Normalenvektoren erfüllen die Relation  $u_1 + u_2 + u_4 + 2u_5 = 0$ . Die Transformation  $\varphi_{R^{(3)}}$  erfüllt  $\alpha = 0$  und ist eine Projektion auf den 1-dimensionalen Fächer, der von den Strahlen  $\pm\mathbb{Q}_{>0} \cdot e_3$  aufgespannt wird. Also ist  $\varphi_{R^{(3)}} \circ \varphi_{R'}(X_P) \cong \mathbb{P}^1$ . Beide Fächer sind terminal, wie von Theorem 4.1.1 vorhergesagt.

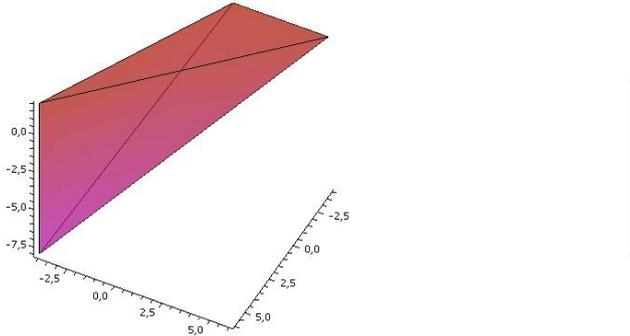


Abbildung 4.16:  $\varphi_{R^{(2)}} \circ \varphi_{R'}(P)$  bzw.  $\varphi_{R^{(3)}} \circ \varphi_{R'}(P)$ .

**Beispiel 4.3.5.** Sei  $P = l_1 \star \dots \star l_d$  ein kombinatorisches Cayley-Polytop mit  $\text{aff}(l_i) \cong \mathbb{Q} \forall i$ . Dann gibt es zwei simpliziale Facetten  $F_1, F_2 \subset P$ . Wegen Lemma 4.2.7 und Proposition 4.2.13 entsprechen alle ihrer Kanten numerisch äquivalenten Kurven. Die restlichen Facetten seien mit  $F_3, \dots, F_{d+1}$  bezeichnet (vgl. Abbildung 4.2 mit vertauschter Beschriftung). Der primitive innere Normalenvektor zur Facette  $F_i$  sei  $u_i$ . Dann gilt  $\sum_{i=3}^{d+2} a_i u_i = 0$  mit  $a_i > 0$ .

Wir betrachten nun zu einer Kante von  $F_1$  die zugehörige Wand  $\omega \in \Sigma(P)(d-1)$ . Es gilt  $\omega = \langle u_1, u_3, \dots, u_{d+2} \rangle$ , und die zugehörige Relation ist die obige. Damit ist die Transformation  $\varphi_{[\omega]}$  eine Projektion des Fächers  $\Sigma(P)$  auf den Fächer zu  $\mathbb{P}^1$ .

Die Relation zu den restlichen Kanten ist  $u_1 + u_2 = 0$ . Dies liefert eine Projektion auf den von  $u_3, \dots, u_{d+2}$  aufgespannten Fächer. Die zugehörige Varietät ist der Quotient eines gewichtet projektiven Raums.

Tatsächlich ist die torische Varietät zu  $\Sigma(P)$  das direkte Produkt von  $\mathbb{P}^1$  und diesem Quotienten.

# 5 Das Minimal Model Program für Divisoren von torischen Varietäten

Wohingegen im Kapitel 3 das Minimal Model Program für torische Varietäten kein Minimal Model finden konnte, weil alle torischen Varietäten rational mit negativer Kodaira-Dimension sind, wird sich dieses Kapitel Divisoren von torischen Varietäten widmen. Die Idee ist dabei, erneut die Fächertransformationen aus Kapitel 3 für die torische Varietät durchzuführen, und dabei den Divisor mit zu transformieren. Im zweiten Teil dieses Kapitels wird eine Methode zur expliziten Konstruktion eines Minimal Models angegeben. Dieses Kapitel orientiert sich am Artikel “The minimal model theorem for divisors of toric varieties” von Shihoko Ishii [Ish99a].

## 5.1 Torisch terminale Divisoren

**Definition 5.1.1.** Sei  $\Sigma$  ein Fächer und  $X = X_\Sigma$ . Ein Divisor  $D \subset X$  heißt  $\Sigma$ -regulär, wenn für jeden Kegel  $\sigma \in \Sigma$  gilt:  $D \cap \mathcal{V}_\sigma$  ist ein glatter Divisor von  $\mathcal{V}_\sigma$  oder leer. Dabei ist die Glattheit schematisch und nicht mengentheoretisch zu verstehen.

**Beispiel 5.1.2.** Sei  $\Sigma$  der Fächer von  $\mathbb{C}^2$ . Die Kurve  $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x(x-1)^2\}$  ist nicht  $\Sigma$ -regulär, obwohl der mengentheoretische Schnitt mit jeder  $(\mathbb{C}^*)^2$ -invarianten Bahn glatt ist. Allerdings ist in  $(1, 0)$  ein Doppelpunkt, weshalb der schematische Schnitt der Kurve mit der Bahn  $\{(x, 0) : x \neq 0\} \subset \mathbb{C}^2$  nicht glatt ist.

Ist  $D \subset X$   $\Sigma$ -regulär, so ist  $D \cap T \neq \emptyset$ , wobei  $T \subset X$  der dichte Torus ist. Denn wäre  $D \cap T = \emptyset$ , so enthielte  $D$  eine Bahn  $\mathcal{V}_\sigma$  der Dimension  $d-1$ . Dann wäre aber  $\emptyset \neq D \cap \mathcal{V}_\sigma = \mathcal{V}_\sigma$  kein Divisor von  $\mathcal{V}_\sigma$ . Somit ist  $D$  keine torische Varietät und die Behandlung gemäß Kapitel 3 nicht mehr möglich.

Außerdem ist  $D$  glatt, wenn  $X$  glatt ist, da die Torus-Bahnen ganz  $X$  überdecken. Umgekehrt ist ein glatter Divisor  $D \subset X$  im

Allgemeinen nicht  $\Sigma$ -regulär. Ist zum Beispiel  $X$  eine glatte Varietät und  $D = \mathcal{V}_\rho$  eine  $(d - 1)$ -dimensionale Bahn, so ist  $D$  nicht  $\Sigma$ -regulär.

**Proposition 5.1.3.** ([Bat94]) Sei  $f : X' = X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma = X$  der Morphismus zu einer Unterteilung  $\Sigma'$  eines Fächers  $\Sigma$ . Dann ist die Transformierte  $D'$  eines  $\Sigma$ -regulären Divisors  $D$  auch wieder  $\Sigma'$ -regulär.

*Beweis.* Sei  $\sigma' \in \Sigma'$  und  $\sigma \in \Sigma$ , so dass  $\sigma' \subset \sigma$ . Dann gilt

$$D' \cap \mathcal{V}_{\sigma'} \cong (D \cap \mathcal{V}_\sigma) \times \mathbb{C}^{\dim \sigma - \dim \sigma'}.$$

Weil  $D \cap \mathcal{V}_\sigma$  ein glatter Divisor von  $\mathcal{V}_\sigma$  oder leer ist, ist  $D' \cap \mathcal{V}_{\sigma'}$  auch ein glatter Divisor von  $\mathcal{V}_{\sigma'}$  oder leer.  $\square$

Sei  $X = X_\Sigma$  und  $X' = X_{\Sigma'}$ , wobei  $\Sigma'$  eine glatte Unterteilung des vollständigen Fächers  $\Sigma$  ist. Ist  $D \subset X$  ein  $\Sigma$ -regulärer Divisor, so ist die Transformierte  $D' \subset X'$  wegen Proposition 5.1.3  $\Sigma'$ -regulär und somit glatt. Also definiert  $\kappa(D)$  nach der Bemerkung 2.1.29 eine birationale Invariante für  $\Sigma$ -reguläre Divisoren  $D$ .

**Definition 5.1.4.** Sei  $X = X_\Sigma$  eine torische Varietät, die durch einen simplizialen Fächer  $\Sigma$  definiert ist. Wegen Proposition 2.1.14 ist  $X$   $\mathbb{Q}$ -faktoriell. Weiter sei  $D \subset X$  ein irreduzibler Divisor. Dann heißt der Divisor  $K_X + D$  *torisch terminal*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (1) Es gibt einen Morphismus  $f : X' = X_{\Sigma'} \rightarrow X$  zu einer glatten Unterteilung  $\Sigma'$  von  $\Sigma$ , so dass die Transformierte  $D'$  von  $D$   $\Sigma'$ -regulär ist. Insbesondere ist wegen der Bemerkung vor Proposition 5.1.3  $D \cap T \neq \emptyset$  für den dichten Torus  $T \subset X$ .
- (2) Für jeden solchen Morphismus aus (1) ist die Diskrepanz von  $K_X + D$  bei jedem exzeptionellen Divisor von  $X'$  positiv.

In Kapitel 3 haben wir den kanonischen Divisor  $K_X$  zu einer torischen Varietät  $X$  für das Minimal Model Program benutzt. In diesem Kapitel wäre es deswegen naheliegend, den Divisor  $K_D$  zu einem Divisor  $D \subset X$  zu betrachten. Weil  $D$  im Allgemeinen aber nicht torisch ist, betrachten wir stattdessen den Divisor  $K_X + D$  der torischen Varietät  $X$ , dessen Einschränkung auf  $D$  wegen der Adjunktionsformel 2.1.24 den kanonischen Divisor  $K_D$  von  $D$  ergibt.

**Lemma 5.1.5.** *Sei  $X = X_\Sigma$  eine glatte torische Varietät und  $D \subset X$  ein irreduzibler Divisor. Ist  $D$   $\Sigma$ -regulär, so ist  $K_X + D$  torisch terminal.*

*Beweis.* Sei  $\Sigma' \neq \Sigma$  eine glatte Unterteilung von  $\Sigma$  und  $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$  der zugehörige Morphismus. Wegen Proposition 5.1.3 ist die Transformierte  $D'$  von  $D$   $\Sigma'$ -regulär. Die exceptionellen Divisoren von  $f$  entsprechen den neu hinzukommenden Strahlen der Unterteilung eines Kegels  $\sigma \in \Sigma$ . Da  $D$   $\Sigma$ -regulär ist, gilt  $\mathcal{V}_\sigma \not\subset D$ . Damit gilt aber für jeden exceptionellen Divisor  $E$  von  $f$ :  $E \not\subset f^*(D)$ , d.h.  $D' = f^*D$ . Wegen Korollar 2.1.21 gilt  $K_{X'} = f^*K_X + \sum_i a_i E_i$  mit positiven Diskrepanzen  $a_i$ . Deswegen ist auch die Diskrepanz von  $K_X + D$  bei jedem irreduziblen Divisor  $E_i$  positiv.  $\square$

Umgekehrt folgt aus der Tatsache, dass  $K_X + D$  torisch terminal ist, im Allgemeinen nicht, dass  $D$  auch  $\Sigma$ -regulär ist:

Sei  $X = \mathbb{P}^3$  und  $D$  ein torusinvarianter irreduzibler Divisor. Weiter sei  $\Sigma$  der Fächer von  $\mathbb{P}^3$ . Dann ist  $D$  nicht  $\Sigma$ -regulär, aber torisch terminal:

Ist  $\pi : \text{Bl}_0(\mathbb{P}^3) \rightarrow \mathbb{P}^3$  die Aufblasung im Nullpunkt mit exceptionellem Divisor  $E$ , und  $D'$  die Transformierte von  $D$ , so gilt mit Korollar 2.1.21  $D' = \pi^*D - E$  und  $K_{\text{Bl}_0(\mathbb{P}^3)} = K_{\mathbb{P}^3} + 2E$ . Also gilt  $K_{\text{Bl}_0(\mathbb{P}^3)} + D' = K_{\mathbb{P}^3} + \pi^*D + E$ .

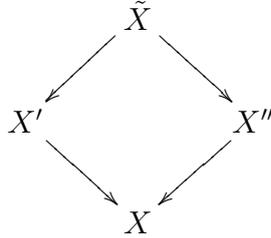
**Proposition 5.1.6.** *Sei  $X = X_\Sigma$  eine torische Varietät, die durch einen simplizialen Fächer  $\Sigma$  definiert ist, und  $D \subset X$  ein irreduzibler Divisor. Dann ist  $K_X + D$  torisch terminal genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- (1) *Es gibt einen Morphismus  $f : X' = X_{\Sigma'} \rightarrow X$  zu einer glatten Unterteilung  $\Sigma'$  von  $\Sigma$ , so dass die Transformierte  $D'$  von  $D$   $\Sigma'$ -regulär ist.*
- (2) *Für **einen** solchen Morphismus aus (1) ist die Diskrepanz von  $K_X + D$  bei jedem exceptionellen Divisor von  $X'$  positiv.*

*Beweis.* Ist  $K_X + D$  torisch terminal, so folgen offensichtlich die beiden Aussagen (1) und (2).

Es seien nun die beiden Eigenschaften erfüllt, und  $f : X' = X_{\Sigma'} \rightarrow X$  sei der Morphismus zu der glatten Unterteilung in (1). Außerdem sei  $g : X'' = X_{\Sigma''} \rightarrow X$  ein weiterer Morphismus mit der Eigenschaft (1). Durch weiteres Unterteilen von  $\Sigma'$  und  $\Sigma''$  erhalten wir eine

gemeinsame Unterteilung  $\tilde{\Sigma}$ .



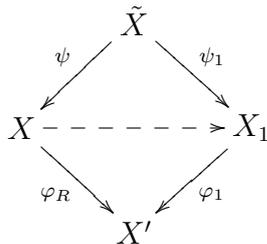
Weil  $D'$   $\Sigma'$ -regulär ist, ist  $K_{X'} + D'$  nach Lemma 5.1.5 torisch terminal. Da der Morphismus  $X_{\tilde{\Sigma}} \rightarrow X''$  nur einige Divisoren kontrahiert, ist auch die Diskrepanz von  $K_X + D$  bei jedem exceptionellen Divisor von  $X_{\tilde{\Sigma}}$  und damit auch an jedem exceptionellen Divisor von  $X''$  positiv.  $\square$

**Lemma 5.1.7.** *Sei  $\Sigma$  ein simplizialer Fächer,  $X = X_{\Sigma}$  und  $D$  ein irreduzibler Divisor von  $X$ . Wenn der Divisor  $K_X + D$  torisch terminal ist, so besitzt  $X$  höchstens terminale Singularitäten.*

*Beweis.* Sei  $f : X' := X'_{\Sigma'} \rightarrow X$  der Morphismus zu einer glatten Unterteilung  $\Sigma'$  von  $\Sigma$ , und  $E_i, i \in I$ , die exceptionellen Divisoren von  $X'$ . Weil  $D$  irreduzibel ist, gilt  $f^*D = D' + \sum_i b_i E_i$  mit  $b_i > 0$ . Außerdem ist  $f^*(K_X + D) + \sum_i a_i E_i = K_{X'} + D'$  mit  $a_i > 0$ , weil  $K_X + D$  torisch terminal ist. Durch Subtraktion erhalten wir  $f^*K_X + \sum_i a_i E_i = K_{X'} - \sum_i b_i E_i$  und schließlich  $f^*K_X + \sum_i (a_i + b_i) E_i = K_{X'}$  mit  $a_i + b_i > 0$ . Mit Korollar 2.1.21 folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 5.1.8.** *Sei  $\Sigma$  ein simplizialer Fächer,  $X = X_{\Sigma}$  projektiv und  $D$  ein irreduzibler Divisor von  $X$ , so dass  $K_X + D$  torisch terminal ist. Weiter sei  $R$  ein Extremalstrahl von  $NE(X)$  mit  $(K_X + D) \cdot R < 0$ .*

- (1) *Wenn  $\varphi_R : X \rightarrow X' = X'_{\Sigma'}$  eine Kontraktion eines Divisors ist (d.h. mit der Notation 3.5.1 gilt  $\alpha = 1$ ), so ist auch  $K_{X'} + D'$  torisch terminal. Dabei bezeichnet  $D'$  die Transformierte von  $D$ .*
- (2) *Sei  $\varphi_R : X \rightarrow X'$  eine Flip-Transformation, d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm,*



so dass alle Abbildungen Kontraktionen von Extremalstrahlen gemäß Theorem 3.8.1 sind. Weiter sei  $D_1 \subset X_1$  die Transformierte von  $D$  in  $X_1$ ,  $\tilde{E}$  der gemeinsame exzeptionelle Divisor von  $\psi$  und  $\psi_1$ ,  $\alpha$  die Diskrepanz von  $K_X + D$  bei  $\tilde{E}$  und  $\alpha_1$  die Diskrepanz von  $K_{X_1} + D_1$  bei  $\tilde{E}$ . Dann gilt  $\alpha < \alpha_1$ , und  $K_{X_1} + D_1$  ist torisch terminal.

*Beweis.* Wegen Theorem 3.5.4 sind  $\Sigma'$  und  $\Sigma_1$  wieder simplizial.

- (1) Sei  $E$  der exzeptionelle Divisor von  $\varphi_R$ . Wegen Korollar 3.5.5 und Lemma 3.5.2 gilt  $E \cdot R < 0$ . Sei  $K_X + D = \varphi_R^*(K_{X'} + D') + bE$  mit  $b \in \mathbb{Z}$ . Wegen  $(K_X + D) \cdot R < 0$ ,  $\varphi_R^*(K_{X'} + D') \cdot R \stackrel{3.2.2}{=} 0$  und  $E \cdot R < 0$  folgt  $b > 0$ . Weil  $K_X + D$  torisch terminal ist, gibt es eine glatte Unterteilung  $\bar{\Sigma}$  von  $\Sigma$ , so dass die Transformierte  $\bar{D}$  in  $\bar{X} = X_{\bar{\Sigma}}$   $\bar{\Sigma}$ -regulär ist. Dabei ist die Diskrepanz von  $K_X + D$  bei jedem exzeptionellen Divisor des Morphismus  $\bar{X} \rightarrow X$  positiv. Mit  $b > 0$  folgt, dass auch die Diskrepanzen von  $K_{X'} + D'$  bei jedem exzeptionellen Divisor des Morphismus  $\bar{X} \rightarrow X'$  positiv sind.
- (2) Da sich  $\Sigma$  und  $\Sigma_1$  in einer Wand unterscheiden, gibt es mindestens eine Kurve  $C \subset \bar{X}$ , die unter  $\psi_1$ , aber nicht unter  $\psi$  kontrahiert wird. Wie zuvor gilt  $\tilde{E} \cdot C < 0$ . Weil  $\varphi_R$  den 1-Zykel  $\psi_*(C)$  kontrahiert, ist auch  $\psi_*(C) \in R$ . Wegen der Projektionsformel folgt  $\psi^*(K_X + D) \cdot C = (K_X + D) \cdot \psi_*(C) < 0$ . Aus  $K_{\bar{X}} + \bar{D} = \psi^*(K_X + D) + \alpha\tilde{E}$  erhalten wir nun  $(K_{\bar{X}} + \bar{D}) \cdot C < \alpha\tilde{E} \cdot C$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{E} \cdot C &> (K_{\bar{X}} + \bar{D}) \cdot C = \left( \psi_1^*(K_{X_1} + D_1) + \alpha_1\tilde{E} \right) \cdot C \\ &= \alpha_1\tilde{E} \cdot C. \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit mit Lemma 3.2.2 aus der Definition von  $C$ . Wegen  $\tilde{E} \cdot C < 0$  ist damit  $\alpha < \alpha_1$ .

Da nach Korollar 2.1.21 die Positivität der Diskrepanz nicht von der Auflösung abhängt, ist auch  $K_{\bar{X}} + \bar{D}$  torisch terminal. Somit gibt es eine glatte Unterteilung  $\tilde{\Sigma}$  von  $\bar{\Sigma}$ , so dass die Transformierte  $\tilde{D}$  von  $\bar{D}$   $\tilde{\Sigma}$ -regulär ist. Sei  $f : \tilde{X} = X_{\tilde{\Sigma}} \rightarrow \bar{X}$  der zugehörige Morphismus. Dabei gilt

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{D} = f^*\psi^*(K_X + D) + \sum_i \beta_i E_i$$

mit positiven Diskrepanzen  $\beta_i$ . Somit folgt

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{D} = f^* \left( \psi_1^*(K_{X_1} + D_1) + (\alpha_1 - \alpha)\tilde{E} \right) + \sum_i \beta_i E_i,$$

d.h. die Diskrepanz von  $K_{X_1} + D_1$  bei jedem exzeptionellen Divisor von  $\tilde{X}$  ist positiv. Also ist  $K_{X_1} + D_1$  torisch terminal.  $\square$

## 5.2 Das Minimal Model Program für torisch terminale Divisoren

**Definition 5.2.1.** Ein Minimal Model  $Y$  von  $X$  heißt *Minimal Model mit Abundance*, wenn das Linearsystem  $|mK_Y|$  basispunktfrei für bestimmte  $m \in \mathbb{N}$  ist.

Ist  $Y$  ein Minimal Model mit Abundance einer glatten Varietät  $X$ , so folgt mit Definition 1.11.6 aus der Eigenschaft, dass  $|mK_Y|$  basispunktfrei ist, dass es einen Morphismus  $\varphi_{mK_Y} : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$  gibt. Weiter ist der Morphismus  $Y \rightarrow \text{Proj } \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(Y, nK_Y)$  wohldefiniert. Der graduierte Ring  $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(Y, nK_Y)$  heißt *kanonischer Ring von  $Y$*  und ist wegen Bemerkung 2.1.29 eine birationale Invariante. Die zugehörige projektive Varietät  $\text{Proj } \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(X, nK_X)$  ist ein Canonical Model von  $X$ . Seine Dimension ist die Kodaira-Dimension  $\kappa(X)$ .

Das 14. Hilbertsche Problem ist die Frage, ob der kanonische Ring endlich erzeugt ist. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, ein erstes Gegenbeispiel wurde 1950 von Nagata und Zariski angegeben. Zariski konnte jedoch beweisen, dass der kanonische Ring endlich erzeugt ist, falls  $|mK_X|$  basispunktfrei ist ([Rei87]).

**Theorem 5.2.2.** Sei  $\Sigma$  ein simplizialer Fächer,  $X = X_\Sigma$  projektiv und  $D$  ein irreduzibler Divisor von  $X$ , so dass  $K_X + D$  torisch terminal ist. Dann gibt es eine Folge von torischen birationalen Abbildungen

$$X = X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{r-1}} X_r,$$

wobei

- (1)  $\varphi_i$  wie in Theorem 3.8.1 eine Transformation von Extremalstrahlen ist, und  $X_i$  deswegen  $\mathbb{Q}$ -faktoriell ist,
- (2) der Divisor  $K_{X_i} + D_i$  torisch terminal ist, wobei  $D_i$  die transformierte von  $D$  in der projektiven Varietät  $X_i$  ist, und

(3) es gilt:  $K_{X_r} + D_r$  ist nef oder  $(K_{X_r} + D_r) \cdot R < 0$  für einen Extremalstrahl  $R \in \text{NE}(X_r)$ . In diesem Fall ist die Transformation  $\varphi_R : X_r \rightarrow Z$  eine Faserung auf eine niedrig-dimensionale Varietät  $Z$ .

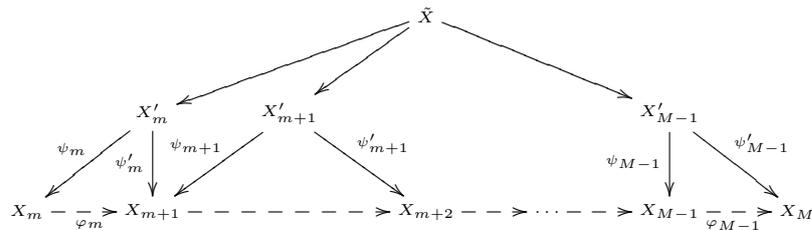
*Beweis.* Wenn  $K_X + D$  schon nef ist, so ist die Behauptung klar. Sei also  $K_X + D$  nicht nef, d.h. es gibt einen Extremalstrahl  $R \in \text{NE}(X)$ , so dass  $(K_X + D) \cdot R < 0$  gilt. Ist die Transformation  $\varphi_R : X \rightarrow X'$  eine Faserung auf eine niedrig-dimensionale Varietät, so ist die Behauptung auch klar. Sei also  $\varphi_R$  birational. Wir setzen  $\varphi_1 := \varphi_R$  und  $X_2 := X'$ . Wegen Lemma 5.1.8 ist, egal ob  $\varphi_1$  eine Kontraktion eines Divisors oder eine Flip-Transformation ist,  $X_2$  projektiv mit höchstens  $\mathbb{Q}$ -faktoriellen Singularitäten und  $K_{X_2} + D_2$  wieder torisch terminal.

Ist nun  $K_{X_2} + D_2$  nef, so ist die Behauptung bewiesen. Ansonsten setzen wir den Prozess weiter fort. So erhält man eine Folge von Kontraktionen und Flips:

$$X = X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{r-1}} X_r \xrightarrow{\varphi_r} \dots$$

Zu zeigen bleibt, dass sie nach endlich vielen Schritten abbricht. Wir nehmen deswegen an, dass diese Folge nicht abbricht. Jede Kontraktion von Divisoren reduziert die Picard-Zahl. Deswegen können wir annehmen, dass ab der  $m$ -ten Transformation nur noch Flips auftreten. Diese verändern die Menge der Strahlen von  $\Sigma_m$  nicht. Weil es nur endlich viele Fächer mit den Strahlen von  $\Sigma_m$  gibt, gibt es eine Zahl  $M > m$ , so dass  $\varphi_{M-1} \circ \dots \circ \varphi_m : X_m \rightarrow X_M$  die Identität ist.

Zu der Flip-Transformation  $\varphi_i$ ,  $m \leq i \leq M - 1$ , sei  $X'_i$  die Varietät zu einer gemeinsamen Unterteilung von  $\Sigma_i$  und  $\Sigma_{i+1}$  mit Morphismen  $\psi_i : X'_i \rightarrow X_i$  und  $\psi'_i : X'_i \rightarrow X_{i+1}$ . Sei  $E_i$  der gemeinsame exzeptionelle Divisor von  $\psi_i$  und  $\psi'_i$ . Da alle Divisoren  $K_{X_i} + D_i$  torisch terminal sind, gibt es eine Varietät  $\tilde{X}$  zu einer gemeinsamen Unterteilung aller  $X'_i$ ,



so dass die Transformierte  $\tilde{D}$  der Divisoren  $D_i$   $\tilde{\Sigma}$ -regulär ist. Weil die Fächer zu den Varietäten  $X_m, \dots, X_M$  die selben Strahlen haben, sind die exceptionellen Divisoren von  $\tilde{X} \rightarrow X_i$ ,  $m \leq i \leq M$ , identisch.

Wegen Lemma 5.1.8 ist die Diskrepanz  $\alpha$  von  $K_{X_i} + D_i$  bei  $E_i$  kleiner als die Diskrepanz  $\alpha'$  von  $K_{X_{i+1}} + D_{i+1}$  bei  $E_i$ . Zu einem exceptionellen Divisor  $E$  von  $\tilde{X}$  sei  $\alpha_E$ , bzw.  $\alpha'_E$ , die Diskrepanz von  $K_{X_i} + D_i$ , bzw. von  $K_{X_{i+1}} + D_{i+1}$ , bei  $E$ . Dann gilt also für mindestens einen exceptionellen Divisor  $E$  von  $\tilde{X}$ :  $\alpha_E \leq \alpha'_E$ . Folglich gibt es einen exceptionellen Divisor von  $\tilde{X}$ , bei dem die Diskrepanz von  $K_{X_m} + D_m$  kleiner ist als die Diskrepanz von  $K_{X_M} + D_M$ . Dies widerspricht aber  $\text{id} : X_m \rightarrow X_M$ .  $\square$

**Lemma 5.2.3** (Spezialfall von [Ish99b], Lemma 2.7). *Sei  $\Sigma$  ein simplizialer Fächer,  $X = X_\Sigma$  und  $D \subset X$  ein irreduzibler Weil-Divisor. Weiter sei  $f : \tilde{D} \rightarrow D$  eine Singularitätenauflösung von  $D$  und*

$$K_{\tilde{D}} = f^*((K_X + D)|_D) + \sum_i \underbrace{a_i}_{\geq 0} E_i$$

mit den exceptionellen Divisoren  $E_i$  von  $f$ . Dann ist  $D$  normal.

**Lemma 5.2.4.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Faserung (wie z.B. in Theorem 5.2.2). Ist  $-K_X$  relativ ample, so ist  $\kappa(X) = -\infty$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $\kappa(X) \geq 0$  gilt. Dann gibt es eine Zahl  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $mK_X$  ein effektiver Divisor ist. Dieser schneidet die allgemeine Faser  $C$  von  $f$ . Also gilt  $mK_X \cdot C > 0$ . Andererseits ist  $-K_X$  relativ ample, d.h. es gilt  $-K_X \cdot C > 0$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Sei  $D \subset \mathbb{P}^n$  ein irreduzibler torusinvarianter Divisor. Dann ist  $-K_{\mathbb{P}^n} = (n+1)D$  ample und somit  $\kappa(\mathbb{P}^n) = -\infty$ .

**Theorem 5.2.5.** *Sei  $X = X_\Sigma$  eine vollständige torische Varietät und  $D \subset X$  ein  $\Sigma$ -regulärer Divisor.*

*Ist  $\kappa(D) \geq 0$ , so hat  $D$  ein Minimal Model mit Abundance.*

*Ist  $\kappa(D) = -\infty$ , so ist  $D$  birational äquivalent zu einer projektiven Varietät  $S$  mit höchstens terminalen Singularitäten. In diesem Fall gibt es eine Faserung  $\varphi : S \rightarrow S'$ , wobei  $\dim(S') < \dim(S)$  und  $-K_S$  relativ ample ist.*

*Beweis.* Sei  $X_1 = X_{\Sigma_1}$  die torische Varietät zu einer glatten projektiven Unterteilung von  $\Sigma$  und  $D_1 \subset X_1$  die Transformierte von  $D$  gemäß Proposition 3.3.3. Wegen Proposition 5.1.3 ist  $D_1$   $\Sigma_1$ -regulär

und somit  $K_{X_1} + D_1$  nach Lemma 5.1.5 torisch terminal. Mit Theorem 5.2.2 erhält man eine Folge von birationalen Abbildungen

$$X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{r-1}} X_r.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass die Transformierten  $D_1, \dots, D_r$  höchstens terminale Singularitäten haben.

Wegen Theorem 5.2.2 ist  $K_{X_i} + D_i$  für  $1 \leq i \leq r$  torisch terminal. Also gibt es einen Morphismus  $f : \tilde{X} \rightarrow X_i$  zu einer glatten Unter-  
teilung  $\tilde{\Sigma}$  des Fächers  $\Sigma_i$  von  $X_i$ , so dass die Transformierte  $\tilde{D}$  von  $D_i$   $\tilde{\Sigma}$ -regulär ist. Außerdem gilt

$$(K_{\tilde{X}} + \tilde{D})|_{\tilde{D}} = f^*((K_{X_i} + D_i)|_{D_i}) + \sum_i a_i E_i|_{\tilde{D}}$$

mit positiven Diskrepanzen  $a_i > 0$ . Die Varietät  $\tilde{D}$  ist glatt. Wegen der Adjunktionsformel 2.1.24 ist  $K_{\tilde{D}} = (K_{\tilde{X}} + \tilde{D})|_{\tilde{D}}$ . Nach Lemma 5.2.3 ist  $D_i$  normal. Wegen Lemma 5.1.7 hat  $X_i$  höchstens terminale Singularitäten. Mit dem Hauptsatz aus [Rei83b] folgt  $\text{codim}(X_i)_{\text{sing}} > 2$ . Also gilt  $(K_{X_i} + D_i)|_{D_i} = K_{D_i}$  und somit  $K_{\tilde{D}} = f^*K_{D_i} + \sum_i a_i E_i|_{\tilde{D}}$ . Weil alle Diskrepanzen  $a_i$  positiv sind, hat  $D_i$  höchstens terminale Singularitäten.

Wegen Theorem 5.2.2 müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

- (1)  $K_{X_r} + D_r$  ist nef.

Hier ist für bestimmte  $m \in \mathbb{N}$  der Divisor  $m(K_{X_r} + D_r)$  ein nef Cartier-Divisor. Wegen Proposition 3.1.4 ist das Linear-system  $|m(K_{X_r} + D_r)|$  basispunktfrei. Deswegen ist auch die Einschränkung  $|mK_{D_r}|$  basispunktfrei und  $K_{D_r}$  nef, d.h.  $D_r$  ist ein Minimal Model von  $D$  mit Abundance. Da  $|mK_{D_r}|$  basispunktfrei ist, gibt es insbesondere einen globalen Schnitt, d.h.  $\kappa(D) = \kappa(D_r) \geq 0$ .

- (2) Es gibt einen Extremalstrahl  $R \in \text{NE}(X_r)$  mit  $(K_{X_r} + D_r) \cdot R < 0$ , so dass  $\varphi_R : X_r \rightarrow S'$  eine Faserung mit  $\dim(S') < \dim(X_r)$  ist.

Hier unterscheiden wir erneut zwei Fälle:

- (2a)  $\dim(D_r) > \dim \varphi_R(D_r)$ .

Es gilt  $(K_{X_r} + D_r) \cdot C < 0$  für jede Kurve  $C$  in der Faser von  $\varphi_R$ . Deswegen ist  $-(K_{X_r} + D_r)$  relativ ample über  $S'$ . Nach Einschränkung auf  $D_r$  ist  $-K_{D_r}$  relativ ample über  $\varphi_R(D_r)$ . Wegen Lemma 5.2.4 folgt  $\kappa(D) = \kappa(D_r) = -\infty$ , und  $\varphi_R|_{D_r} : D_r \rightarrow \varphi_R(D_r)$  ist die gesuchte Faserung.

(2b)  $\dim(D_r) = \dim \varphi_R(D_r)$ .

Hier gilt  $\dim(X_r) - 1 = \dim D_r = \dim \varphi_R(D_r) \leq \dim S' \leq \dim(X_r) - 1$ , also  $\dim S' = \dim(X_r) - 1$ . Wegen Theorem 3.5.4 ist jeder volldimensionale Kegel des Fächers  $\Sigma_r$  von der Form  $\sigma = \langle u_d, \omega \rangle$  oder  $\sigma = \langle -u_d, \omega \rangle$  mit  $\omega \in \Sigma_r(d - 1)$ . Die allgemeine Faser  $C$  von  $\varphi_R$  ist durch den eindimensionalen Fächer mit den Strahlen  $\pm u_d$  gegeben. Mit den Bezeichnungen aus Proposition 3.1.2 gilt dann:  $K_{X_r} \cdot C = \langle m_\sigma - (-m_\sigma), u_d \rangle = -1 - 1$ .

Wegen  $\dim(D_r) = \dim \varphi_R(D_r)$  muss der Schnitt von  $D_r$  mit  $C$  endlich sein:  $D_r \cdot C > 0$ . Nach Lemma 5.1.7 hat  $X_r$  höchstens terminale Singularitäten, und somit ist erneut wegen [Rei83b]  $\text{codim}(X_r)_{\text{sing}} > 2$ . Deswegen schneidet  $(X_r)_{\text{sing}}$  die allgemeine Faser nicht, und der Weil-Divisor  $D_r$  ist wegen Korollar 1.8.7 entlang der allgemeinen Faser  $C$  ein Cartier-Divisor, d.h.  $D_r \cdot C \in \mathbb{N}$ . Wegen

$$D_r \cdot C = (K_{X_r} + D_r) \cdot C - K_{X_r} \cdot C < -K_{X_r} \cdot C = 2$$

folgt sogar  $D_r \cdot C = 1$ . Es gibt also keine Verzweigung entlang der allgemeinen Faser, und  $\varphi_R|_{D_r} : D_r \rightarrow S'$  ist ein birationaler Morphismus. Da die torische Varietät  $S'$  rational ist, ist damit auch  $D_r$  rational. Somit ist auch  $D$  rational, hat also einen amplen antikanonischen Divisor und erfüllt wegen Lemma 5.2.4  $\kappa(D) = -\infty$ .  $\square$

**Korollar 5.2.6.** *Sei  $\Sigma$  ein Fächer,  $X = X_\Sigma$  projektiv und  $D$  ein  $\Sigma$ -regulärer Divisor von  $X$  mit  $\kappa(D) \geq 0$ . Dann gibt es eine glatte Unterteilung  $\tilde{\Sigma}$  von  $\Sigma$ , so dass  $\tilde{X} = X_{\tilde{\Sigma}}$  und die Transformierte  $\tilde{D} \subset \tilde{X}$  von  $D$  die Eigenschaft  $\kappa(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} + \tilde{D}) \geq 0$  erfüllt.*

*Beweis.* Wir benützen erneut die Notation aus dem Beweis von Theorem 5.2.5. Sei  $\Sigma_r$  der Fächer zu  $X_r$  und  $\tilde{\Sigma}$  eine gemeinsame glatte Unterteilung von  $\Sigma$  und  $\Sigma_r$ . Weiter sei  $f : \tilde{X} \rightarrow X_r$  der zugehörige proper Morphismus. Dann ist die Transformierte  $\tilde{D} \subset \tilde{X} = X_{\tilde{\Sigma}}$  von  $D$  nach Proposition 5.1.3  $\tilde{\Sigma}$ -regulär. Da  $K_{X_r} + D_r$  torisch terminal und  $|m(K_{X_r} + D_r)|$  für bestimmte  $m \in \mathbb{N}$  basispunktfrei ist, gilt für diese  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} 0 &\neq \Gamma(X_r, m(K_{X_r} + D_r)) = \Gamma(\tilde{X}, mf^*(K_{X_r} + D_r)) \\ &\subset \Gamma\left(\tilde{X}, mf^*(K_{X_r} + D_r) + \sum_i a_i E_i\right) = \Gamma(\tilde{X}, m(K_{\tilde{X}} + \tilde{D})), \end{aligned}$$

weil  $\sum_i a_i E_i$  mit  $a_i > 0$  ein effektiver Divisor ist. Also ist  $\kappa(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} + \tilde{D}) \geq 0$ .  $\square$

### 5.3 Konstruktion eines Minimal Model

Sei  $P = \bigcap_{i=1}^r H_i \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Polytop mit Halbräumen  $H_i = \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u_i \rangle \geq -c_i\}$ ,  $c_i \in \mathbb{Z}$  und  $u_i \in N$ . Der Halbraum  $H_i = \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u_i \rangle \geq -c_i\}$  mit  $c \in \mathbb{Z}$  und  $u \in N$  heißt *relevant für  $P$* , wenn  $P \cap \partial H \neq \emptyset$  gilt. Also ist  $H_i$  genau dann nicht relevant für  $P$ , wenn  $c_i + \langle x, u_i \rangle > 0$  für alle  $x \in P$  gilt.

Der Halbraum  $H_i$  heißt *echt relevant für  $P$* , wenn  $P \neq \bigcap_{j \neq i} H_j$  gilt.

**Definition 5.3.1.** Sei  $f(t) = \sum_{m \in M} c_m t^m$ ,  $c_m \in \mathbb{C}$ , ein Laurentpolynom, d.h.  $\mathcal{M} = \{m \in M : c_m \neq 0\}$  ist endlich. Das *Newtonpolytop zu  $f$*  ist die konvexe Hülle von  $\mathcal{M}$  in  $M_{\mathbb{Q}}$ .

Im Folgenden sei  $f(t) = \sum_{m \in M} c_m t^m$ ,  $c_m \in \mathbb{C}$ , ein Laurentpolynom mit zugehörigem Newton-Polytop  $\Delta$ , so dass die durch  $f = 0$  bestimmte Hyperfläche  $D \subset X_{\Sigma(\Delta)}$   $\Sigma(\Delta)$ -regulär ist.

Weiter sei  $\Sigma := \Sigma(\Delta)$  und  $\kappa(D) \geq 0$ . Das Ziel ist es, ein Minimal Model von  $D$  explizit anzugeben. Nach Korollar 5.2.6 gibt es eine Auflösung von Singularitäten  $\tilde{X} \rightarrow X$ , so dass  $\kappa(\tilde{X}, K_{\tilde{X}} + D) \geq 0$  gilt. Deswegen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $X$  glatt ist und  $\kappa(X, K_X + D) \geq 0$  gilt.

Dann ist wegen Korollar 1.8.7 jeder Weil-Divisor ein Cartier-Divisor. Nach Bemerkung 1.8.3 gibt es einen torusinvarianten Divisor, der linear äquivalent zu  $K_X + D$  ist. Das Polytop  $P_h = P_{(D_h)}$  ist wegen  $\kappa(X, K_X + D) \geq 0$  und den Propositionen 1.9.21 und 1.9.28 nicht leer. Die Erzeugenden der Strahlen von  $\Sigma$  seien  $\{u_1, \dots, u_s\} \subset N$ , und für  $1 \leq i \leq s$  sei  $H_i := \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u_i \rangle \geq h(u_i)\}$ . Dann gilt  $P_h = \bigcap_i H_i$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Halbräume  $H_1, \dots, H_r$  mit  $r \leq s$  relevant für  $P_{(D_h)}$ .

Im Allgemeinen ist  $P_h$  nicht volldimensional. Wir betrachten deswegen stattdessen

$$P(\varepsilon) := \bigcap_{i=1}^r H_{i,\varepsilon_i}$$

mit  $H_{i,\varepsilon_i} := \{x \in M_{\mathbb{Q}} : \langle x, u_i \rangle \geq h(u_i) - \varepsilon_i\}$  für  $1 \leq i \leq r$  und  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ . Es entsteht aus  $P_h$ , indem man die relevanten Halbräume um  $\varepsilon_i > 0$  nach außen verschiebt. Sein Normalenfächer  $\Sigma'$  besitzt die Strahlen  $\Sigma'(1) = \{u_1, \dots, u_r\}$  und ist simplizial. Die Menge aller möglicher Vektoren  $\varepsilon \in \mathbb{Q}^r$  mit dieser Eigenschaft entspricht einem Kegel der Oda-Park-Unterteilung von  $\text{NE}(X_{\Sigma})$ . Sei  $D'$  die Transformierte von  $D$  in  $X_{\Sigma'}$ . Da  $\Sigma'$  der Normalenfächer des

volldimensionalen Polytops  $P(\varepsilon)$  ist, ist  $X_{\Sigma'}$  nach Korollar 1.11.8 projektiv. Somit ist auch  $D'$  projektiv. Im Folgenden zeigen wir, dass  $D'$  ein Minimal Model für  $D$  ist.

**Lemma 5.3.2.** *Der Divisor  $K_{X_{\Sigma'}} + D'$  ist äquivalent zum torusinvarianten Divisor  $-\sum_{i=1}^r h(u_i)\mathcal{V}_{u_i}$ . Sei  $k \in \text{SF}(\Sigma')$  die zugehörige stückweise lineare Funktion. Dann gilt  $h(u_i) = k(u_i) \forall i \in \{1, \dots, r\}$  und  $P_h = P_k$ .*

*Beweis.* Wegen  $K_{X_{\Sigma}} + D \sim -\sum_{i=1}^s h(u_i)\mathcal{V}_{u_i}$  gilt auch  $K_{X_{\Sigma'}} + D' \sim -\sum_{i=1}^r h(u_i)\mathcal{V}_{u_i}$ . Per Definition der zugehörigen stückweisen linearen Funktion gilt dann auch  $h(u_i) = k(u_i) \forall i \in \{1, \dots, r\}$ . Wegen Proposition 1.9.26 besitzt  $P_h$  die Facetten  $\{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, u_i \rangle = -h(u_i)\}$  mit  $1 \leq i \leq r$ , genauso wie  $P_k$ .  $\square$

**Lemma 5.3.3.** *Die stückweise lineare Funktion  $k \in \text{SF}(\Sigma')$  sei durch  $m_{\sigma}, \sigma \in \Sigma'$ , gegeben. Dann gilt  $m_{\sigma} \in P_k \forall \sigma \in \Sigma'$ .*

*Beweis.* Es sei  $\{\varepsilon^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^r$  eine monoton fallende Nullfolge, so dass der Normalenfächer zu  $P(\varepsilon^{(n)})$  auch  $\Sigma'$  ist. Weiter sei  $D(\varepsilon^{(n)}) := \sum_{i=1}^r \left(-h(u_i) + \varepsilon_i^{(n)}\right) \mathcal{V}_{u_i}$  der zugehörige Divisor und  $k^{(n)} \in \text{SF}(\Sigma')$  die stückweise lineare Funktion zu  $D(\varepsilon^{(n)}) = D_{k^{(n)}}$ . Wegen Lemma 1.9.26 ist  $P_{k^{(n)}} = P(\varepsilon^{(n)})$ . Also ist der Normalenfächer von  $P_{k^{(n)}}$   $\Sigma'$ . Somit ist  $D_{k^{(n)}}$  mit Korollar 1.11.8 ample. Ist  $k^{(n)}$  auf  $\sigma \in \Sigma'(d)$  durch  $k_{\sigma}^{(n)} \in M$  gegeben, so folgt mit Proposition 1.11.4:  $m_{\sigma}^{(n)} \in P(\varepsilon^{(n)})$ .

Weil die Folge  $\{\varepsilon^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, gilt  $P(\varepsilon^{(1)}) \supset P(\varepsilon^{(2)}) \supset \dots$ . Somit liegt  $m_{\sigma}^{(n)}$  im kompakten Polytop  $P(\varepsilon^{(1)})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\sigma \in \Sigma'(d)$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass  $\{m_{\sigma}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. Sei

$$m'_{\sigma} := \lim_{n \rightarrow \infty} m_{\sigma}^{(n)}.$$

Wegen  $m_{\sigma}^{(n)} \in P(\varepsilon^{(n)})$  ist auch  $m'_{\sigma} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P(\varepsilon^{(n)}) = P_k$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $m_{\sigma}^{(n)} = m_{\sigma'}^{(n)}$  als Linearform auf  $\sigma \cap \sigma'$  und deswegen auch  $m'_{\sigma} = m'_{\sigma'}$  als Linearform auf  $\sigma \cap \sigma'$ . Somit definiert die Menge  $\{m'_{\sigma} : \sigma \in \Sigma(d)\}$  eine stückweise lineare Funktion  $k' \in \text{SF}(\Sigma')$ . Zu  $i \in \{1, \dots, r\}$  sei  $\sigma_i \in \Sigma'(d)$  mit  $u_i \in \sigma_i$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} k'(u_i) &= \langle m'_{\sigma_i}, u_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle m_{\sigma_i}^{(n)}, u_i \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( h(u_i) - \varepsilon_i^{(n)} \right) = h(u_i) = k(u_i). \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $k' = k$  und insbesondere  $m_{\sigma} = m'_{\sigma} \in P_k \forall \sigma \in \Sigma'(d)$ .  $\square$

**Korollar 5.3.4.** *Sei nun  $D_k$  der zugehörige  $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor und  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $nD_k$  ein Cartier-Divisor ist. Dann ist das Linear-system  $|nD_k| = |n(K_{X_{\Sigma'}} + D')|$  basispunktfrei.*

*Beweis.* Sei  $nD_k$  ein Cartier-Divisor. Dann ist die stückweise lineare Funktion  $nk$  ganz. Wegen den Lemmata 5.3.3 und 1.9.25 ist  $P_{nk} = \text{conv}(nm_\sigma : \sigma \in \Sigma'(d))$ . Weil  $nk$  ganz ist, folgt mit Proposition 1.11.4, dass  $|nD_k|$  basispunktfrei ist.  $\square$

Sei nun  $\tilde{\Sigma}$  eine gemeinsame glatte Unterteilung von  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ ,  $\varphi : X_{\tilde{\Sigma}} \rightarrow X_{\Sigma'}$  und  $\psi : X_{\tilde{\Sigma}} \rightarrow X_{\Sigma}$  die zugehörigen Morphismen und  $\tilde{D} \subset X_{\tilde{\Sigma}}$  die Transformierte von  $D$ . Wegen Proposition 5.1.3 ist mit  $D$  auch die Transformierte  $\tilde{D}$   $\tilde{\Sigma}$ -regulär.

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\Sigma} & \\ \psi \swarrow & & \searrow \varphi \\ \Sigma & \longrightarrow & \Sigma' \end{array}$$

**Lemma 5.3.5.** *Es gilt*

$$K_{X_{\tilde{\Sigma}}} + \tilde{D} = \varphi^*(K_{X_{\Sigma'}} + D') + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)} a_\rho \mathcal{V}_\rho$$

mit positiven Diskrepanzen  $a_\rho > 0 \forall \rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)$ . Also ist  $K_{X_{\Sigma'}} + D'$  torisch terminal.

*Beweis.* Da wir  $X$  als glatt vorausgesetzt haben, und  $D$  ebenso glatt ist, gilt wegen Korollar 2.1.21

$$K_{X_{\tilde{\Sigma}}} + \tilde{D} = \psi^*(K_{X_{\Sigma}} + D) + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma(1)} b_\rho \mathcal{V}_\rho$$

mit  $b_\rho > 0$  für alle  $\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma(1)$ . Wir setzen  $b_\rho = 0$  für  $\rho \in \Sigma(1)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} K_{X_{\tilde{\Sigma}}} + \tilde{D} &= \psi^*(K_{X_{\Sigma}} + D) + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma(1)} b_\rho \mathcal{V}_\rho \\ &\sim \psi^*(D_h) + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1)} b_\rho \mathcal{V}_\rho \\ &= \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1)} (-h(u_\rho) + b_\rho) \mathcal{V}_\rho. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$K_{X_{\tilde{\Sigma}}} + \tilde{D} = \varphi^*(K_{X_{\Sigma'}} + D') + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)} a_\rho \mathcal{V}_\rho.$$

Wir setzen  $a_\rho = 0$  für  $\rho \in \Sigma'(1)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} K_{X_{\tilde{\Sigma}}} + \tilde{D} &= \varphi^*(K_{X_{\Sigma'}} + D') + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)} a_\rho \mathcal{V}_\rho \\ &\sim \varphi^*(D_k) + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}'(1)} a_\rho \mathcal{V}_\rho \\ &= \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1)} (-k(u_\rho) + a_\rho) \mathcal{V}_\rho. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1)} (-h(u_\rho) + b_\rho) \mathcal{V}_\rho \sim \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1)} (-k(u_\rho) + a_\rho) \mathcal{V}_\rho.$$

Wegen  $h(u_\rho) = k(u_\rho)$  und  $a_\rho = b_\rho = 0 \forall \rho \in \Sigma'(1)$  folgt daraus

$$\sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)} (-h(u_\rho) + b_\rho + k(u_\rho) - a_\rho) \mathcal{V}_\rho \sim 0.$$

Da die Divisoren  $\mathcal{V}_\rho, \rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)$  alle exzeptionelle Divisoren von  $\varphi$  sind, gilt sogar

$$\sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)} (-h(u_\rho) + b_\rho + k(u_\rho) - a_\rho) \mathcal{V}_\rho = 0,$$

d.h.  $a_\rho = k(u_\rho) - h(u_\rho) + b_\rho$  für alle  $\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)$ . Wegen Lemma 5.3.3 ist  $k_\sigma \in P_k \stackrel{5.3.2}{=} P_h$ . Somit folgt mit Lemma 1.9.25:  $k(u_\rho) = \inf_{m \in P_h} \langle m, u_\rho \rangle$  für alle  $\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)$ . Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(1) Sei  $\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma(1)$ .

Hier ist

$$\begin{aligned} a_\rho &= k(u_\rho) - h(u_\rho) + b_\rho \\ &= \inf_{m \in P_h} \langle m, u_\rho \rangle - h(u_\rho) + b_\rho \\ &\geq \inf_{m \in P_h} h(u_\rho) - h(u_\rho) + b_\rho = b_\rho > 0. \end{aligned}$$

(2) Sei  $\rho \in \Sigma(1) \setminus \Sigma'(1)$ .

Hier ist

$$\begin{aligned} a_\rho &= k(u_\rho) - h(u_\rho) + b_\rho \\ &= \inf_{m \in P_h} \langle m, u_\rho \rangle - h(u_\rho) > 0, \end{aligned}$$

da der Halbraum  $\{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, u_\rho \rangle \geq h(u_\rho)\}$  per Definition nicht für  $P_h$  relevant ist.  $\square$

Da  $\Sigma'$  simplizial ist, ist  $D'$  mit Lemma 5.2.3 normal. Wegen den Lemmata 5.3.5 und 5.1.7 hat  $X_{\Sigma'}$  höchstens terminale Singularitäten. Mit der Adjunktionsformel 2.1.24 folgt  $(K_{X_{\Sigma'}} + D')|_{D'} = K_{D'}$ . Aus Lemma 5.3.5 folgt nach Einschränkung auf  $\tilde{D}$ :

$$K_{\tilde{D}} = \varphi^* K_{D'} + \sum_{\rho \in \tilde{\Sigma}(1) \setminus \Sigma'(1)} a_\rho \mathcal{V}_\rho,$$

d.h.  $D'$  hat höchstens terminale Singularitäten. Wegen Korollar 5.3.4 ist das Linearsystem  $|n(K_{X_{\Sigma'}} + D')|$  basispunktfrei für bestimmte  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist auch die Einschränkung  $|nK_{D'}| = |n(K_{X_{\Sigma'}} + D')|_{D'}$  basispunktfrei. Zusammenfassend ist  $D'$  ein Minimal Model von  $D$  mit Abundance.

Eine weitere Methode, ein Minimal Model von  $D$  mit Abundance zu konstruieren, findet man bei Osamu Fujimo und Hiroshi Sato [FS04].

## 5.4 Beispiele

Die Facetten der folgenden Polytope  $P \subset \mathbb{Q}^3$  haben die folgenden inneren Normalenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 5.4.1.** Wir betrachten das Polytop

$$P = \bigcap_{i=1}^6 \{x : \langle x, u_i \rangle \geq -1\} \cap \bigcap_{i=1}^8 \left\{x : \langle x, v_i \rangle \geq -\frac{4}{3}\right\}$$

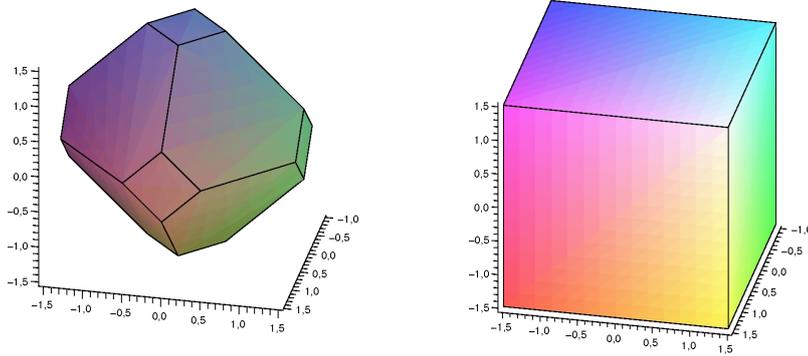


Abbildung 5.1:  $P$  und  $Q$ .

(das linke Polytop in Abbildung 5.1) und den Divisor

$D = \sum_{i=1}^6 \mathcal{V}_{u_i} + \sum_{i=1}^8 \frac{4}{3} \mathcal{V}_{v_i}$  in  $X := X_{\Sigma(P)}$ . Man beachte, dass der Normalenfächer  $\Sigma(P)$  glatt ist. Es gilt  $K_X + D = \sum_{i=1}^8 \frac{1}{3} \mathcal{V}_{v_i}$ . Das zugehörige Polytop ist

$$\begin{aligned} Q' &= \bigcap_{i=1}^6 \left\{ x : \langle x, u_i \rangle \geq 0 \right\} \cap \bigcap_{i=1}^8 \left\{ x : \langle x, v_i \rangle \geq -\frac{1}{3} \right\} \\ &= \bigcap_{i=1}^6 \left\{ x : \langle x, u_i \rangle \geq 0 \right\} = \{0\}. \end{aligned}$$

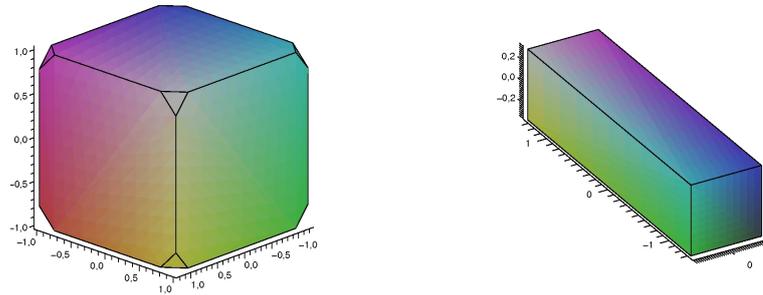
Verschiebt man die relevanten Facetten leicht nach außen, erhält man das Polytop  $Q = \bigcap_{i=1}^6 \{x : \langle x, u_i \rangle \geq -\varepsilon\}$  (das rechte Polytop in Abbildung 5.1). Dann ist die Transformierte  $D'$  von  $D$  in  $X' = X_{\Sigma(Q)}$  ein Minimal Model von  $D$ . Wegen  $D' = \sum_{i=1}^6 \mathcal{V}_{u_i}$  ist  $K_{X'} + D' = 0$  und somit  $\kappa(D) = \kappa(D') = 0$ .

**Beispiel 5.4.2.** Wir betrachten das Polytop

$$P = \bigcap_{i=1}^6 \left\{ x : \langle x, u_i \rangle \geq -1 \right\} \cap \bigcap_{i=1}^8 \left\{ x : \langle x, v_i \rangle \geq -\frac{4}{3} \right\}$$

(das linke Polytop in Abbildung 5.2) und den Divisor

$D = 2\mathcal{V}_{u_1} + 2\mathcal{V}_{u_2} + \sum_{i=3}^6 \mathcal{V}_{u_i} + \sum_{i=1}^8 3\mathcal{V}_{v_i}$  in  $X := X_{\Sigma(P)}$ . Der Normalenfächer  $\Sigma(P)$  ist glatt. Es gilt  $K_X + D = \mathcal{V}_{u_1} + \mathcal{V}_{u_2} + \sum_{i=1}^8 2\mathcal{V}_{v_i}$ .

Abbildung 5.2:  $P$  und  $Q$ .

Das zugehörige Polytop ist

$$\begin{aligned}
 Q' &= \bigcap_{i=1}^2 \left\{ x : \langle x, u_i \rangle \geq -1 \right\} \cap \bigcap_{i=3}^6 \left\{ x : \langle x, u_i \rangle \geq 0 \right\} \\
 &\quad \cap \bigcap_{i=1}^8 \left\{ x : \langle x, v_i \rangle \geq -2 \right\} \\
 &= \bigcap_{i=1}^2 \left\{ x : \langle x, u_i \rangle \geq -1 \right\} \cap \bigcap_{i=3}^6 \left\{ x : \langle x, u_i \rangle \geq 0 \right\},
 \end{aligned}$$

eine Strecke. Verschiebt man die relevanten Facetten leicht nach außen, erhält man das Polytop  $Q = \bigcap_{i=1}^2 \{x : \langle x, u_i \rangle \geq -1 - \varepsilon\} \cap \bigcap_{i=3}^6 \{x : \langle x, u_i \rangle \geq -\varepsilon\}$  (das rechte Polytop in Abbildung 5.2). Dann ist die Transformierte  $D'$  von  $D$  in  $X_{\Sigma(Q)}$  ein Minimal Model von  $D$ . Hier ist  $\kappa(D) = \kappa(D') = 1$ .



# 6 Generische Flächen vom Geschlecht 0

Wir betrachten in diesem Kapitel generische algebraische Flächen als Hyperflächen von torischen Varietäten. Rationale Flächen haben das geometrische Geschlecht 0. Umgekehrt ist eine Fläche vom Geschlecht 0 “nahezu” rational. Wir wählen in diesem Kapitel ein dreidimensionales Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ohne innere Gitterpunkte und betrachten die Fläche in der torischen Varietät  $X_P$ , die durch  $\sum_{m \in P \cap M} a_m x^m = 0$  bestimmt ist. Dabei wird eine offene Bedingung für die Koeffizienten gefordert. Dann hat die Fläche das Geschlecht 0. Wir untersuchen, wie “nah” diese Flächen an rationalen Flächen sind.

## 6.1 Endlichkeitssätze für Gitterpolytope

Die folgenden beiden Sätze liefern eine Endlichkeitsaussage für  $d$ -dimensionale Gitterpolytope mit einer festen Anzahl  $i > 0$  an inneren Gitterpunkten:

**Theorem 6.1.1** (Hensley). *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop mit  $|P^\circ \cap M| = i > 0$ . Dann kann das Volumen  $\text{vol}(P)$  durch eine Konstante abgeschätzt werden, die nur von der Dimension  $d$  und  $i$  abhängt.*

Dieses Resultat wurde erstmals von Douglas Hensely [Hen83] bewiesen und von Jeffrey C. Lagarias und Günter M. Ziegler [LZ91] verschärft zu  $\text{vol}(P) \leq i(7(i+1))^{d2^{d+1}}$ .

Speziell für Gitterpolygone ist der Satz von Scott [Sco76] nochmals eine deutliche Verschärfung dieser Aussage:  $\text{Vol}(P) \leq 4(i+1)$  mit der einzigen Ausnahme  $P \sim 3\Delta_2$ .

Diese Aussage gilt sogar allgemeiner für Gitterpolytope beliebiger Dimension vom Grad 2 [Tre10].

**Theorem 6.1.2** (Lagarias, Ziegler). *Sei  $F$  eine Familie von  $d$ -dimensionalen Gitterpolytopen. Dann sind äquivalent:*

- (1)  $\text{vol}(P) < C \forall P \in F$  mit einer Konstante  $C > 0$ .
- (2) Bis auf unimodulare Transformationen ist  $F$  eine endliche Menge.

Hieraus folgt die Endlichkeit bis auf unimodulare Transformation von  $d$ -dimensionalen Gitterpolytopen mit genau  $i > 0$  inneren Gitterpunkten. Insbesondere gibt es wegen Korollar 3.7.2 nur endlich viele  $d$ -dimensionale terminale Fano-Fächer.

Da ein reflexives Polytop nur einen inneren Gitterpunkt enthält, folgt hieraus außerdem die Endlichkeit von reflexiven Polytopen.

Es verbleibt, den Fall  $i = 0$  zu betrachten, um alle  $d$ -dimensionalen Gitterpolytope zu klassifizieren. Dies soll in diesem Kapitel speziell für  $d = 3$  getan werden. Betrachten wir jedoch zunächst den 2-dimensionalen Fall:

John R. Arkininstall [Ark80a], [Ark80b], Askold Khovanskii [Kho97], Robert J. Koelman [Koe91] und Josef Schicho [Sch03] bewiesen, dass ein Gitterpolygon ohne innere Gitterpunkte entweder das zweifache unimodulare 2-Simplex ist ( $P \cong 2\Delta_2$ ) oder  $P \cong \text{conv}(0, e_1, h_1e_2, e_1 + h_2e_2)$  mit den Höhen  $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ . Letzteres wird Lawrence-Polygon genannt. Also besitzt ein Gitterpolygon ohne innere Gitterpunkte entweder eine Projektion auf  $\Delta_1$ , welches das einzige 1-dimensionale Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte ist, oder es ist äquivalent zu  $2\Delta_2$ .

Victor Batyrev vermutete nun, dass jedes 3-dimensionale Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte entweder eine Projektion auf  $\Delta_1$  oder auf  $2\Delta_2$  besitzt, oder aber sein Volumen durch eine Konstante beschränkt ist. Aus dem Theorem 6.1.2 würde damit folgen, dass es bis auf unimodulare Transformationen nur endlich viele (exzeptionelle) Gitterpolytope in dieser letzten Klasse gibt.

Die Gitterpolytope mit Projektion auf  $\Delta_1$  sind offensichtlich genau die Cayley-Polytope.

**Definition 6.1.3.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Ein  $d$ -dimensionales Gitterpolytop heißt

- (1)  $k$ -fache Gitterpyramide über einem  $(d-k)$ -dimensionalen Gitterpolytop  $Q$ , wenn es das Cayley-Polytop von  $Q$  und  $k$  Gitterpunkten ist.
- (2) Lawrence-Polytop, wenn es das Cayley-Polytop von  $d$  Intervallen ist.

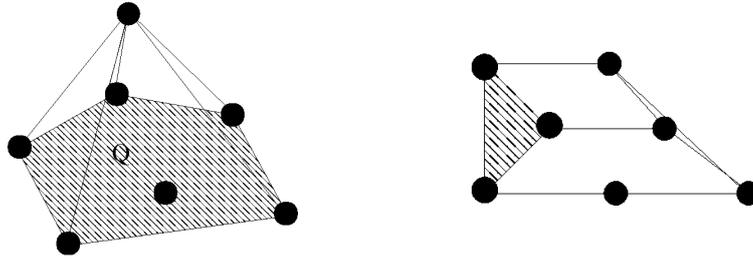


Abbildung 6.1: Eine dreidimensionale Gitterpyramide und ein dreidimensionales Lawrence-Polytop.

Sei  $P$  eine Gitterpyramide über  $Q$ . Dann sind die zugehörigen  $h^*$ -Polynome gleich ([Bat06]). Insbesondere stimmen das normalisiertes Volumen und der Grad der beiden Polytope überein.

## 6.2 Saubere 3-dimensionale Gitterpolytope

Ein Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$ , dessen einzige Gitterpunkte seine Eckpunkte sind, heißt *sauber*.

Beispielsweise ist das unimodulare Simplex  $\Delta_d \subset M_{\mathbb{Q}}$  oder der Einheitswürfel  $[0, 1]^d \subset M_{\mathbb{Q}}$  sauber.

**Proposition 6.2.1.** *Ein  $d$ -dimensionales sauberes Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  hat höchstens  $2^d$  Ecken.*

*Beweis.* Wir nehmen  $|P \cap M| > 2^d$  an. Dann gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei Ecken  $p, q \in P \cap M$ , so dass  $2|(p + q)$ . Weil  $P$  konvex ist, folgt  $r := \frac{p+q}{2} \in P \cap M$ . Es ist aber  $r$  keine Ecke von  $P$ , was der Sauberkeit von  $P$  widerspricht.  $\square$

Natürlich hat jedes Gitterpolytop mit einer Projektion auf  $\Delta_1$  oder  $2\Delta_2$  keine inneren Gitterpunkte. Umgekehrt muss ein Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte aber noch keine Projektion auf eines dieser Simplizes haben, wie das Beispiel  $d\Delta_d$  zeigt. Roger Howe zeigte jedoch 1977 das Folgende:

**Theorem 6.2.2** (Howe). *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales sauberes Gitterpolytop. Dann gilt  $|P \cap M| \leq 8$ , und  $P$  ist ein Cayley-Polytop.*

Dieses Theorem klassifiziert 3-dimensionale terminale Fächer. Da Roger Howe es nicht veröffentlichte, tat dies Herbert E. Scarf [Sca85]. Inzwischen gibt es weitere Beweise, z.B. von David R. Morrison und Glenn Stevens [MS84], Bruce Reznick [Rez06], András Sebő [Seb99] und G.K. White [Whi64].

Wir präsentieren im Folgenden einen leicht modifizierten Beweis von [Sca85]. Dabei bezeichnet  $\{e_1, e_2, e_3\} \subset M_{\mathbb{Q}}$  eine Gitterbasis des 3-dimensionalen Gitters  $M$ .

**Lemma 6.2.3.** *Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales Gittersimplex, dessen einzige Gitterpunkte seine Ecken  $e_1, e_2, e_3, p := p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \in M$ ,  $p_1, p_2, p_3 \geq 1$ , sind. Wir definieren für  $1 \leq h \leq D - 1$  den Ausdruck*

$$f(h) = \left\lceil \frac{p_1 h}{D} \right\rceil + \left\lceil \frac{p_2 h}{D} \right\rceil + \left\lceil \frac{p_3 h}{D} \right\rceil,$$

wobei  $D = p_1 + p_2 + p_3 - 1$  ist. Dann sind die Zahlen  $p_1, p_2, p_3$  teilerfremd zu  $D$ , und es gilt  $f(h) = h + 2 \forall h \in \{1, \dots, D - 1\}$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, dass für ein  $1 \leq h \leq D - 1$  gilt  $f(h) \leq h + 1$ . Dann gibt es ganze Zahlen  $a \geq \lceil \frac{p_1 h}{D} \rceil$ ,  $b \geq \lceil \frac{p_2 h}{D} \rceil$ ,  $c \geq \lceil \frac{p_3 h}{D} \rceil$  mit  $a + b + c = h + 1$ . So folgt

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = \left(a - \frac{p_1 h}{D}\right)e_1 + \left(b - \frac{p_2 h}{D}\right)e_2 + \left(c - \frac{p_3 h}{D}\right)e_3 + \frac{h}{D}p$$

mit positiven Koeffizienten, weshalb es in  $\Delta$  noch weitere Gitterpunkte außer seinen Ecken gibt, ein Widerspruch. Also gilt  $f(h) \geq h + 2$ .

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1)  $p_1, p_2$  und  $p_3$  sind teilerfremd zu  $D$ .  
Wegen  $\lceil r \rceil + \lceil n - r \rceil = n + 1 \forall n \in \mathbb{N}, r \notin \mathbb{N}$ , ist  $f(h) + f(D - h) = p_1 + p_2 + p_3 + 3 = D + 4$ . Außerdem gilt  $f(h) \geq h + 2$  und  $f(D - h) \geq (D - h) + 2$ . Hieraus folgt  $f(h) = h + 2$ .
- (2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\gcd(p_1, D) = q > 1$ . Hier gilt für  $h_0 := \frac{D}{q} \in \{1, \dots, D - 1\}$ :  $\frac{p_1 h_0}{D} \in \mathbb{N}$  und  $f(h) + f(D - h) \leq D + 3$ . Doch dies widerspricht  $f(h) \geq h + 2$  und  $f(D - h) \geq (D - h) + 2$ .  $\square$

**Proposition 6.2.4.** *Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales Gittersimplex, dessen einzige Gitterpunkte seine Ecken  $e_1, e_2, e_3, p := p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \in M$ ,  $p_i \geq 1$ , sind. Dann sind nicht alle Zahlen  $p_1, p_2, p_3$  größer als 1.*

*Beweis.* Sei  $D = p_1 + p_2 + p_3 - 1$  und  $1 \leq h \leq D - 1$ . Dann gibt es  $r_i, q_i \in \mathbb{N}$  mit  $r_i < D$ , so dass  $hp_i = q_i D + r_i$  gilt. Daraus folgt

$$\left\lceil \frac{(h-1)p_i}{D} \right\rceil = \left\lceil q_i + \frac{(r_i - p_i)}{D} \right\rceil = \left\lceil \frac{hp_i}{D} \right\rceil + \delta_i$$

mit  $\delta_i = -1$  falls  $r_i < p_i$  und  $\delta_i = 0$  sonst. Wegen Lemma 6.2.3 folgt hieraus  $-1 = f(h-1) - f(h) = \sum_i \delta_i$ , d.h. genau eine der Bedingungen  $r_i < p_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , ist erfüllt. Wir schreiben die Reste  $r_i = hp_i \pmod{D}$ ,  $h \in \{1, \dots, D-1\}$ , in Zeilen und unterstreichen den Eintrag zur Ungleichung  $r_i < p_i$ .

Da  $p_1, p_2$  und  $p_3$  wegen Lemma 6.2.3 zu  $D$  teilerfremd sind, sind alle Spalten Permutationen von  $\{1, \dots, D-1\}$ , und es gibt  $h_1, h_2, h_3 \in \{1, \dots, D-1\}$ , so dass die entsprechenden Zeilen die Folgenden sind:

$$\begin{array}{lcl} h_1 p & : & (D-1) \quad \underline{a_2} \quad a_3 \\ h_2 p & : & b_1 \quad (D-1) \quad b_3 \\ h_3 p & : & c_1 \quad c_2 \quad (D-1) \end{array} \quad (\star)$$

Wir nehmen im Folgenden  $p_i \geq 2 \forall i$  an.

Wäre ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $h_1 = h_2$ , so würde  $(D - h_1)p_1 \equiv 1 \equiv (D - h_1)p_2 \pmod{D}$  folgen, weshalb es in der Zeile  $D - h_1$  zwei unterstrichene Elemente gibt, ein Widerspruch. Also sind  $h_1, h_2$  und  $h_3$  paarweise verschieden.

Als nächstes zeigen wir, dass alle Einträge in  $(\star)$  von 1 verschieden sind:

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a_2 = 1$  an. Dann gibt es eine Reihe mit den Einträgen  $p_2(D-1), p_2, p_2 a_3 \pmod{D}$ . Da  $p_2$  nur in der ersten Zeile in der zweiten Spalte auftaucht, folgt  $p_2(D-1) \equiv p_1 \pmod{D}$ . Deswegen gilt  $p_1 + p_2 \equiv 0 \pmod{D}$ . Also teilt  $p_1 + p_2 + p_3 - 1$  die Zahl  $p_1 + p_2$ , was  $p_3 \geq 2$  widerspricht.

Nun zeigen wir, dass in den 3 Spalten  $(\star)$  jeweils genau ein Eintrag unterstrichen ist:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir  $a_2 < p_2$  und  $b_1 < p_1$  an. Somit sind in der Summenzeile

$$(D-1) + b_1 \quad (D-1) + a_2 \quad a_3 + b_3 \pmod{D}$$

wegen  $a_2 \neq 1$  die ersten beiden Einträge unterstrichen, ein Widerspruch.

Wir können deswegen ohne Beschränkung annehmen, dass die Zeilen  $(\star)$  wie folgt aussehen:

$$\begin{array}{lcl} h_1 p & : & (D-1) \quad \underline{a_2} \quad a_3 \\ h_2 p & : & b_1 \quad (D-1) \quad \underline{b_3} \\ h_3 p & : & \underline{c_1} \quad c_2 \quad (D-1) \end{array} \quad (\star\star)$$

Addieren wir die ersten beiden Zeilen aus  $(\star\star)$ , erhalten wir die Zeile  $b_1 - 1, a_2 - 1, a_3 + b_3 \pmod{D}$ . Wegen  $0 \neq a_2 - 1 < p_2$ , muss für den dritten Eintrag  $a_3 + b_3 \pmod{D} > p_3$  gelten. Andererseits ist  $a_3 + b_3 < (D - 1) + p_3$ . Wäre nun  $a_3 + b_3 \geq D$ , so wäre  $p_3 < a_3 + b_3 \pmod{D} < p_3 - 1$ , ein Widerspruch. Also gilt  $a_3 + b_3 < D$  und genauso  $b_1 + c_1 < D$  und  $a_2 + c_2 < D$ .

Nun addieren wir die drei Zeilen aus  $(\star\star)$  und erhalten die Zeile

$$b_1 + c_1 - 1 \quad a_2 + c_2 - 1 \quad a_3 + b_3 - 1.$$

Wegen  $b_1 > p_1, c_2 > p_2$  und  $a_3 > p_3$  ist in dieser Zeile kein Eintrag unterstrichen, ein Widerspruch.  $\square$

**Lemma 6.2.5.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales sauberes Gitterpolytop mit 5 Ecken, wovon vier in einer Ebene enthalten sind. Dann hat die fünfte Ecke den Abstand 1 von dieser Ebene.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $P$  eine Pyramide über der Grundfläche  $\text{conv}(0, e_2, e_3, e_2 + e_3)$  mit Spitze  $p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$ . Wir können annehmen, dass  $p_1 > 1$  und  $1 \leq p_2, p_3 \leq p_1$  gilt und unterscheiden die folgenden beiden Fälle:

**Fall 1:** Es gilt  $q := p_1 - p_2 - p_3 + 1 < 0$ .

Hier ist

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{-q}{p_1} 0 + \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) e_2 + \left(1 - \frac{p_3}{p_1}\right) e_3 + \frac{1}{p_1} p$$

ein Gitterpunkt von  $P$ , der keine Ecke ist, ein Widerspruch zur Sauberkeit von  $P$ .

**Fall 2:** Es gilt  $q \geq 0$ .

Hier ist

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{q}{p_1} (e_2 + e_3) + \frac{p_3 - 1}{p_1} e_2 + \frac{p_2 - 1}{p_1} e_3 + \frac{1}{p_1} p$$

ein Gitterpunkt von  $P$ , der keine Ecke ist, ein Widerspruch zur Sauberkeit von  $P$ .  $\square$

**Korollar 6.2.6.** *Der Kegel  $\langle e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 \rangle \subset M_{\mathbb{Q}}$  ist bis auf Isomorphie der einzige 3-dimensionale terminale Kegel, der nicht simplizial ist.*

*Beweis.* Sei  $\sigma$  ein solcher Kegel. Dann enthält  $\sigma$  mindestens 4 Strahlen, und die Hütte  $\text{shed}(\sigma)$  ist eine Pyramide. Wegen Lemma 6.2.5 hat ihre Spitze die Höhe 1 von der Grundseite, und die Grundseite ist sauber. Da  $\text{conv}(0, e_2, e_3, e_2 + e_3)$  bis auf Isomorphie das einzige saubere Gitterpolygon mit vier Ecken ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 6.2.7.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales sauberes Gitterpolytop mit fünf Ecken, wovon keine vier in einer Ebene enthalten sind. Dann ist  $P \cong \text{conv}(0, e_1, e_2, e_3, p)$  ein Cayley-Polytop mit  $p = e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ ,  $p_2, p_3 \geq 0$ .*

*Beweis.* Die fünf Ecken von  $P$  erfüllen eine lineare Relation, wobei alle Koeffizienten ungleich 0 sind, weil sonst vier von ihnen in einer Ebene enthalten wären. Da die fünf Gitterpunkte Ecken sind, kann es auch nicht sein, dass genau vier der fünf Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben. Also haben genau drei der Koeffizienten das gleiche Vorzeichen, und die übrigen beiden das andere Vorzeichen. Sei also  $\Delta = \text{conv}(e_1, e_2, e_3, p) \subset P$  mit den Ecken  $e_1, e_2, e_3, p$  von  $P$ , die fünfte Ecke von  $P$  sei  $q := q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ . Wegen Proposition 6.2.4 können wir  $p = e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$  mit  $p_2, p_3 \geq 0$  annehmen. Da die Verbindungsstrecke von  $p$  und  $q$  durch das Innere von  $P$  verläuft, gilt

$$\begin{aligned} q &= p + a(e_1 - p) + b(e_2 - p) + c(e_3 - p) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -p_2 \\ 1 - p_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit  $a, b, c > 0$ . Also gilt  $q_1 = 1 - b - c < 1$  und deswegen  $q_1 \leq 0$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} q_2 &= b + p_2(1 - a - b - c) < (1 - q_1) + p_2q_1 = 1 + q_1(p_2 - 1) \leq 1, \\ q_3 &= c + p_3(1 - a - b - c) < (1 - q_1) + p_3q_1 = 1 + q_1(p_3 - 1) \leq 1. \end{aligned}$$

So folgt  $q_1, q_2, q_3 \leq 0$ . Wäre  $q \neq 0$ , so wäre

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-q_1}{-q_1 - q_2 - q_3 + 1} e_1 + \frac{-q_2}{-q_1 - q_2 - q_3 + 1} e_2 \\ &\quad + \frac{-q_3}{-q_1 - q_2 - q_3 + 1} e_3 + \frac{1}{-q_1 - q_2 - q_3 + 1} q, \end{aligned}$$

ein Widerspruch zur Sauberkeit von  $P$ . Also ist  $q = 0$  und  $P$  ein Cayley-Polytop.  $\square$

Aus der Proposition 6.2.4 und den Lemmata 6.2.5, 6.2.7 folgt nun:

**Proposition 6.2.8.** *Jedes 3-dimensionale saubere Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  mit höchstens fünf Ecken ist ein Cayley-Polytop.*

Mit Hilfe dieser Proposition können wir nun auch leicht saubere Gitterpolytope mit mehr als fünf Ecken klassifizieren:

**Proposition 6.2.9.** *Jedes 3-dimensionale saubere Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  mit höchstens sechs Ecken ist ein Cayley-Polytop.*

*Beweis.* Wegen Proposition 6.2.8 können wir annehmen, dass  $P$  genau sechs Ecken besitzt. Wir unterscheiden die folgenden beiden Fälle:

**Fall 1:** In  $P$  sind keine vier Ecken in einer Ebene enthalten.

Nach Proposition 6.2.8 können wir annehmen, dass  $P$  die konvexe Hülle von  $0, e_1, e_2, e_3, p = e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$  und  $q \in M$  ist. Wegen Proposition 6.2.8 ist auch  $Q := \text{conv}(e_1, e_2, e_3, p, q)$  ein Cayley-Polytop.

Sind  $p_2$  und  $p_3$  größer als 1, so sind die einzigen parallelen Ebenen mit Abstand 1, die  $Q$  umfassen durch  $X_1 = 0$  und  $X_1 = 1$  gegeben. Dann ist auch  $P$  ein Cayley-Polytop mit genau diesen Ebenen.

Ähnlich argumentiert man im Fall  $p_2 = 1$  oder  $p_3 = 1$ .

**Fall 2:** Es gibt vier Ecken von  $P$ , die in einer Ebenen enthalten sind.

Diese vier Ecken seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $0, e_1, e_2, e_1 + e_2$ . Nach Lemma 6.2.5 haben die übrigen zwei Ecken den Abstand 1 von der Ebene  $X_3 = 0$ . Liegen sie auf der selben Seite dieser Ebene, so ist  $P$  ein Cayley-Polytop. Sind dagegen  $e_3$  und  $p = p_1e_1 + p_2e_2 - e_3$  die übrigen zwei Ecken, so folgt  $p_2 = 1$  oder  $p_3 = 1$ , weil alle sechs Gitterpunkte Ecken sind. Somit ist auch dann  $P$  ein Cayley-Polytop.  $\square$

*Beweis von Theorem 6.2.2.* Nach Proposition 6.2.1 hat  $P$  höchstens acht Ecken. Wegen Proposition 6.2.9 können wir annehmen, dass  $P$  sieben oder acht Ecken hat. Genauso wie im Beweis von Proposition 6.2.9 beweisen wir die Vermutung auch in diesen Fällen.  $\square$

### 6.3 Generische Flächen vom Geschlecht 0

Das Ziel ist nun, die Vermutung aus Abschnitt 6.1 von Victor Batyrev zu beweisen und damit das Theorem von Howe 6.2.2 zu verallgemeinern:

Ein Element der folgenden Klasse sei  
ein Gitterpolytop der Dimension 3.  
Innere Gitterpunkte gebe es nicht,  
denn sonst ist mit Hensley schon Ende der Schicht.  
Ein Polytop verlasse die Klasse,  
wenn es eine Projektion auf ein andres der Klasse zulasse.  
Es zeigt sich nun sehr verständlich:  
die verbleibende Menge ist endlich.

Etwas formaler bedeutet dies:

**Theorem 6.3.1.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte. Dann ist  $P$  ein Cayley-Polytop, oder  $P$  besitzt eine Projektion auf das zweifache unimodulare 2-Simplex, oder  $P$  ist ein exceptionelles Polytop, wobei es von diesen bis auf unimodulare Transformationen nur endlich viele gibt.*

Einige der exceptionellen Simplizes  $(P_1, \dots, P_6)$  sind in Abbildung 6.2 dargestellt. Alle anderen exceptionellen Simplizes (es gibt 15 weitere) sind in einem dieser enthalten. Deswegen nennen wir die exceptionellen Gittersimplizes  $P_1, \dots, P_6$  maximal.

Weiter gibt es maximale exceptionelle Gitterpolytope, die keine Simplizes sind, wie z.B.  $P_7, P_8, P_9$  und  $P_{10}$  in Abbildung 6.3. Es ist unbekannt, ob es weitere maximale exceptionellen Gitterpolytope gibt.

Dies sind die bekannten maximalen exceptionellen Gitterpolytope:

$$\begin{aligned}
 P_1 &:= \text{conv}(0, e_1, 2e_1 + 5e_2, 3e_1 + 5e_3) \\
 P_2 &:= \text{conv}(0, 3e_1, e_1 + 3e_2, 2e_1 + 3e_3) \\
 P_3 &:= \text{conv}(0, 3e_1, 3e_2, 3e_3) \\
 P_4 &:= \text{conv}(0, 4e_1, 4e_2, 2e_3) \\
 P_5 &:= \text{conv}(0, 4e_1, 2e_1 + 4e_2, e_1 + 2e_3) \\
 P_6 &:= \text{conv}(0, 6e_1, 3e_2, 2e_3) \\
 P_7 &:= \text{conv}(\pm 2e_1, \pm 2e_2, e_1 + e_2 + 2e_3) \\
 P_8 &:= \text{conv}(\pm e_1, 2e_2, e_1 + 2e_3 \pm e_1, e_1 + 2e_2 + 2e_3) \\
 P_9 &:= \text{conv}(\pm e_1, \pm e_2, e_1 + e_2 + 2e_3 \pm e_1, e_1 + e_2 + 2e_3 \pm e_2) \\
 P_{10} &:= \text{conv}(0, 2e_1, 3e_1 + 3e_2, 2e_1 + 3e_2, e_1 + 3e_3).
 \end{aligned}$$

Sie wurden mit Hilfe des Maple-Pakets Convex [Fra06] und PALP [KS04] gefunden.

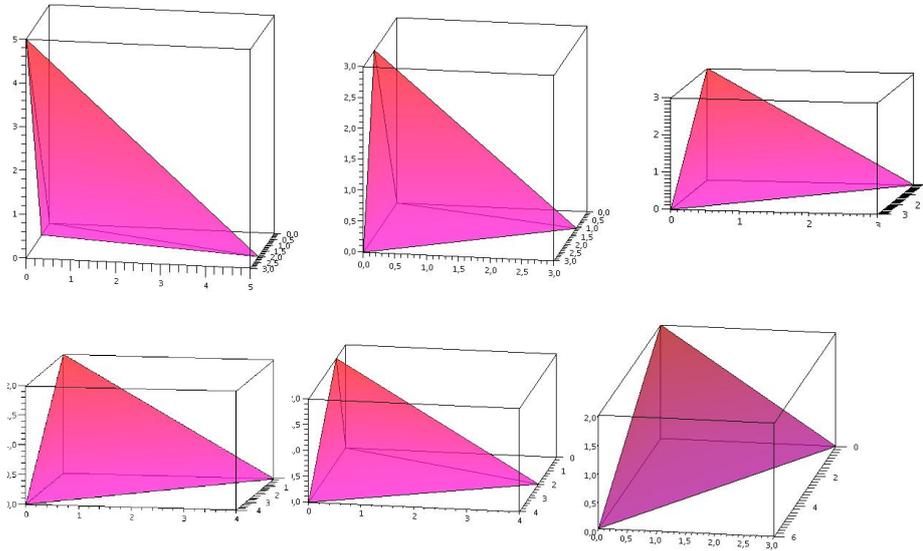


Abbildung 6.2: Die maximalen exzeptionellen Gittersimplizes

**Vermutung 6.3.2.** Bis auf endlich viele Ausnahmen besitzt jedes  $d$ -dimensionale Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte eine Projektion auf ein niedrig-dimensionaleres Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte.

**Beispiel 6.3.3.** Christian Haase und Günter M. Ziegler bewiesen in [HZ00], dass das 4-dimensionale Gittersimplex  $\text{conv}(e_1, e_2, e_3, e_4, 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 + (k - 6)e_4)$  genau dann sauber ist, wenn  $\text{gcd}(k, 6) = 1$  gilt. Weiter zeigten sie, dass das 5-dimensionale Gittersimplex  $\text{conv}(0, e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3 + 6e_4, 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 9e_5)$  sauber ist. Beide Beispiele haben eine Projektion auf  $2\Delta_2$ .

Im Folgenden konstruieren wir zu einem 3-dimensionalen Gitterpolytop eine glatte projektive Hyperfläche in einer 3-dimensionalen torischen Varietät.

Sei  $K$  ein Körper,  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop mit Normalenfächer  $\Sigma(P)$  und zugehöriger projektive torische Varietät  $X_P$ . Wir betrachten die Kompaktifizierung  $\mathcal{S}_P \subset X_P$  der Fläche

$$\left\{ \sum_{m \in P \cap M} a_m X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3} = 0 \right\} \subset (\overline{K}^*)^3 \hookrightarrow X_P$$

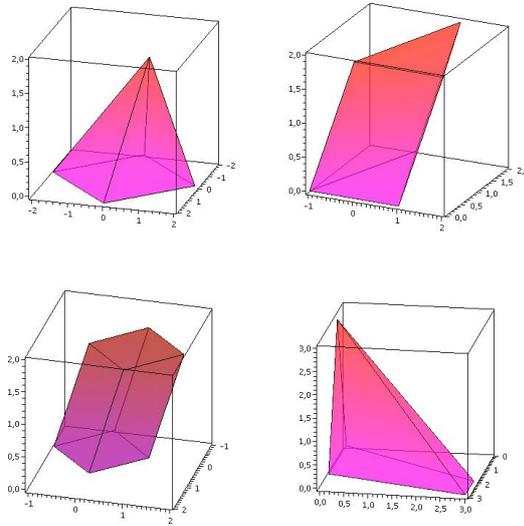


Abbildung 6.3: Einige weitere maximale exzeptionelle Gitterpolytope

in  $X_P$ , wobei  $\overline{K}$  den algebraischen Abschluss von  $K$  bezeichnet und die Koeffizienten  $a_m \in K$  die folgende generische Bedingung erfüllen:

$$\left\{ \sum_{m \in \theta \cap M} a_m X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3} = 0 \right\} \subset (\overline{K}^*)^3$$

ist glatt für jede Seite  $\theta \subset P$ . Dies entspricht der Bedingung, dass  $\mathcal{S}_P$   $\Sigma(P)$ -regulär ist. Außerdem ist  $P$  das Newton-Polytop zu  $\mathcal{S}_P$ . Wählt man speziell die Koeffizienten  $a_m, m \in P \cap M$ , algebraisch unabhängig und setzt  $K := \mathbb{Q}(a_m : m \in P \cap M)$ , so ist die generische Bedingung automatisch erfüllt.

Unterteilen wir nun den Fächer  $\Sigma(P)$  geeignet, so erhält man wie in Kapitel 2 eine glatte Varietät  $X_{\Sigma'}$ . Die Transformierte  $\mathcal{S}'_P$  von  $\mathcal{S}_P$  ist wegen Proposition 5.1.3  $\Sigma'$ -regulär und damit glatt.

Askold G. Khovanskii zeigte, dass die Anzahl der inneren Gitterpunkte von  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  mit dem geometrischen Geschlecht der Fläche  $\mathcal{S}'_P$  übereinstimmt [Kho78]. Deswegen erhalten wir, nachdem wir mit einem Gitterpolytop starten und eventuelle Singularitäten auflösen, eine glatte projektive Fläche vom Geschlecht 0, d.h. eine glatte projektive Fläche, die “nahezu rational” ist.

Wenn  $P$  ein Cayley-Polytop ist, dann ist die zugehörige Fläche sogar tatsächlich rational: Seien die parallelen Ebenen von  $P$  durch  $X_1 = 0$  und  $X_1 = 1$  gegeben. Dann ist  $\mathcal{S}_P$  die Kompaktifizierung

von  $\{(X_1, X_2, X_3) \in (\overline{K}^*)^3 : X_1 f(X_2, X_3) = g(X_2, X_3)\}$  in  $X_P$  mit zwei Polynomen  $f, g \in K[X_2, X_3]$ . Hieraus folgt  $X_1 = \frac{g(X_2, X_3)}{f(X_2, X_3)}$ , und

$$\begin{aligned} \overline{K}(\mathcal{S}_P) &\longrightarrow \overline{K}(X_2, X_3) \\ X_1 &\mapsto \frac{g(X_2, X_3)}{f(X_2, X_3)} \\ X_i &\mapsto X_i, \quad i \in \{2, 3\} \end{aligned}$$

liefert eine birationale Abbildung  $\mathcal{S}_P \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ .

Wenn  $P$  dagegen eine Projektion auf  $2\Delta_2$  besitzt, erhalten wir ein *Konik-Bündel*: Das Polytop  $P$  habe eine Projektion auf  $2\Delta_2 = \text{conv}(0, 2e_1, 2e_2)$ . Dann ist die zugehörige homogenisierte Gleichung

$$\begin{aligned} f_0(X_3)X_0^2 + f_1(X_3)X_1^2 + f_2(X_3)X_2^2 + f_{12}(X_3)X_1X_2 \\ + f_{02}(X_3)X_0X_2 + f_{01}(X_3)X_0X_1 = 0 \end{aligned}$$

mit Polynomen  $f_0, f_1, f_2, f_{12}, f_{02}, f_{01} \in \overline{K}[X_3]$ . Durch eine lineare Substitution erreicht man die Gleichung

$$g_0(Y_3)Y_0^2 + g_1(Y_3)Y_1^2 + g_2(Y_3)Y_2^2 = 0$$

mit Polynomen  $g_0, g_1, g_2 \in \overline{K}[Y_3]$ . Fixiert man  $Y_3$ , so definiert dies einen Kegelschnitt, eine Konik. Somit ist  $\mathcal{S}_P$  eine Fläche mit Projektion auf  $\overline{K}$ , so dass jede Faser eine Konik ist.

Mit Hilfe einer verallgemeinerten stereographischen Projektion sieht man, dass eine Konik genau dann rational ist, wenn sie einen abgeschlossenen Punkt enthält. Insbesondere ist die Konik  $\{x \in \mathbb{P}^2 : a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = 0\}$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(a_0, a_1, a_2)$  nicht rational, da  $a_0, a_1$  und  $a_2$  algebraisch unabhängig sind.

Somit ist auch jedes generische Konik-Bündel über diesem Körper nicht rational.

Sei nun  $P$  eines der exzeptionellen Polytope. Ist  $P$  in einem maximalen exzeptionellen Polytop  $Q$  enthalten, so entspricht die Hyperfläche von  $P$  einer Spezifizierung der Koeffizienten in der Gleichung zur Hyperfläche von  $Q$ . Somit reicht es, die maximalen exzeptionellen Gitterpolytope zu betrachten:

Die Normalenvektoren

$$u_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

von  $P_1$  erfüllen die Relation  $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0$ . Außerdem folgt aus  $\sum_{i=0}^3 \alpha_i u_i \in \mathbb{Z}^4$  bis auf Addition ganzer Zahlen  $\alpha_i = c + \frac{i}{5}$  mit

$c \in \mathbb{Q}$ . Wegen Korollar 1.7.5 folgt hieraus  $X_{P_1} = \mathbb{P}^3/\mu_5$ , wobei  $\mu_5 = (\{\zeta^i, i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}, \cdot)$ ,  $\zeta^5 = 1$ , auf  $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3$  gemäß  $\zeta.x_i := \zeta^i x_i$  wirkt. Im Untergitter  $M := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 : b + 2c + 3d \in 5\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^4$  ist  $P_1 \cong \text{conv}(5e_1, 5e_2, 5e_3, 5e_4)$ . Somit ist  $\mathcal{S}_{P_1}$  die Fläche

$$\left\{ \sum_{i=0}^3 x_i^5 = 0, x \in \mathbb{P}^3 \right\} / \mu_5.$$

Sie heißt *Godeaux-Fläche* nach Lucien Godeaux und ist eine algebraische Fläche vom allgemeinen Typ.

Analog erhält man aus den anderen maximalen Polytopen die zugehörigen Flächen:

Da die Polytope  $P_5, P_7, P_8$  und  $P_9$  Quotienten eines reflexiven Polytops in einem Untergitter des Index 2 sind, sind die zugehörigen Flächen  $\mathcal{S}_{P_5}, \mathcal{S}_{P_7}, \mathcal{S}_{P_8}$  und  $\mathcal{S}_{P_9}$  *Enrique-Flächen*, d.h. Quotienten einer *K3-Fläche* mit  $\mu_2$ .

K3-Flächen sind nach Erich Kähler, Kunihiko Kodaira und Ernst Kummer benannt, Enrique-Flächen sind benannt nach Federigo Enriques.

$\mathcal{S}_{P_5}$  kann man wie oben realisieren als

$$\mathcal{S}_{P_5} := \{x \in \mathbb{P}^3(1, 1, 2, 4) : x_0^8 + x_1^8 + x_2^4 + x_3^2 = 0\} / \mu_2,$$

wobei  $(-1).x := (-x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ .

$\mathcal{S}_{P_8}$  ist der Abschluss von

$$\left\{ \begin{aligned} &((u : v), (x : y : z)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2(1, 1, 2) : \\ &(u^2 + v^2)(x^4 y^4 + x^4 z^2 + y^4 z^2) = 0 \end{aligned} \right\} / \mu_2,$$

wobei  $(-1).((u : v), (x : y : z)) := ((u : -v), (x : -y : -z))$ .

$\mathcal{S}_{P_9}$  ist der Abschluss von

$$\left\{ \begin{aligned} &((x_0 : x_1), (y_0 : y_1), (z_0 : z_1)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 : \\ &(x_0^2 + x_1^2)(y_0^2 + y_1^2)(z_0^2 + z_1^2) = 0 \end{aligned} \right\} / \mu_2,$$

wobei  $(-1).(x, y, z) := ((x_0 : -x_1), (y_0 : -y_1), (z_0 : -z_1))$ .

$\mathcal{S}_{P_3}$  ist die kubische *del-Pezzo-Fläche*

$$\left\{ \sum_{i=0}^3 x_i^3 = 0, x \in \mathbb{P}^3 \right\}.$$

Del-Pezzo-Flächen sind 2-dimensionale Fano-Varietäten, d.h. ihr antikanonischer Divisor ist ample. Sie sind benannt nach Pasquale del Pezzo.

$\mathcal{S}_{P_2}$  ist die quasi-homogene Nonic im gewichtet projektiven Raum

$$\mathcal{S}_{P_2} := \{x \in \mathbb{P}^3(1, 1, 1, 3), x_0^9 + x_1^9 + x_2^9 + x_3^3 = 0\} / \mu_9,$$

wobei  $\zeta.x := (\zeta x_0 : \zeta^4 x_1 : x_2 : \zeta^6 x_3), \zeta^9 = 1$ .

$\mathcal{S}_{P_4}$  ist die quasi-homogene Quartic im gewichtet projektiven Raum

$$\{x \in \mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2) : x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^2 = 0\}.$$

$\mathcal{S}_{P_6}$  ist die quasi-homogene Sextic im gewichtet projektiven Raum

$$\{x \in \mathbb{P}^3(1, 1, 2, 3) : x_0^6 + x_1^6 + x_2^3 + x_3^2 = 0\}.$$

Es ergibt sich folgende Vermutung:

**Vermutung 6.3.4.** Die Fläche  $\mathcal{S}_P$  ist genau dann rational über  $K = \mathbb{Q}(a_m : m \in M \cap P)$ , wenn  $P$  ein Cayley-Polytop ist.

Der Grad eines 3-dimensionalen Gitterpolytops ohne innere Gitterpunkte ist wegen Korollar 1.10.15 0, 1 oder 2. Die Gitterpolytope vom Grad kleiner oder gleich 2 sind bereits klassifiziert (siehe [BN07]), was gleichzeitig das Resultat von Arkinstall, Khovanskii, Koelman und Schicho verallgemeinert:

**Theorem 6.3.5** (Batyrev, Nill). *Sei  $P$  ein  $d$ -dimensionales Gitterpolytop. Ist  $P$  vom Grad 0, so ist  $P \cong \Delta_d$ . Ist  $P$  vom Grad 1, so ist  $P$  eine  $(d - 2)$ -fache Gitterpyramide über  $2\Delta_2$  oder ein Lawrence-Polytop.*

**Korollar 6.3.6.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$ , ein  $d$ -dimensionales Gitterpolytop,  $d \geq 3$  und  $\deg(P) \leq 1$ . Dann ist  $P$  ein Cayley-Polytop.*

Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte. Dann gilt  $\deg(P) \leq 2$ . Somit reicht es, den Fall  $\deg(P) = 2$  zu betrachten. Im Folgenden werden wir das Theorem von Howe 6.2.2 Schritt für Schritt verallgemeinern und am Ende das Theorem 6.3.1 beweisen.

## 6.4 White Gittersimplizes

Wir nennen ein 3-dimensionales Gitterpolytop *white*, wenn seine einzigen Gitterpunkte in seinen Kanten enthalten sind.

Aus dem Abschnitt 6.1 folgt, dass für eine Facetten  $F$  eines 3-dimensionalen white Gitterpolytops gilt:  $F \cong 2\Delta_2$ , oder  $F$  ist ein Lawrence-Polytop.

G.K. White bewies in [Whi64] die folgende Verallgemeinerung von Theorem 6.2.2, indem er Ungleichungen mit Gauss-Klammern benutzt. Wir präsentieren hier einen neuen Beweis:

**Lemma 6.4.1.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales white Gittersimplex mit  $F \not\cong 2\Delta_2$  für jede Facette  $F \subset P$  von  $P$ . Dann ist  $P$  ein Cayley-Polytop.*

*Beweis.* Da jede Facette von  $P$  ein Lawrence-Polygon ist, gibt es höchstens zwei Kanten von  $P$ , die länger als 1 sind, d.h. mehr als zwei Gitterpunkte haben. Nach Theorem 6.2.2 können wir annehmen, dass es zumindest eine Kante gibt, die länger als 1 ist.

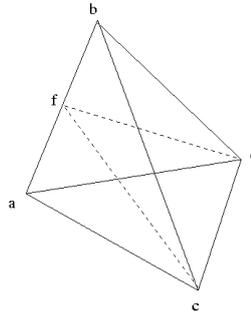


Abbildung 6.4: Das Simplex  $P$ .

**Fall 1:** Es gibt genau eine Kante der Länge  $l_1 > 1$ .

Die Ecken von  $P$  seien  $a, b, c, d \in M$ . Weiter sei  $f \in \text{conv}(a, b)^\circ \cap M$  ein innerer Gitterpunkt der Kante  $\text{conv}(a, b)$ .

**Fall A:** Es gilt  $l_1 = 2$ .

Die Gittersimplizes  $\Delta := \text{conv}(a, c, d, f)$  und  $\Delta' := \text{conv}(b, c, d, f)$  sind Cayley-Polytope wegen Theorem 6.2.2. Deswegen liegt  $\Delta$  zwischen zwei parallelen Ebenen  $E_1, E_2$  mit Abstand 1, und  $\Delta'$  liegt zwischen  $E'_1$  und  $E'_2$ , die ebenso Abstand 1 haben.

Wenn  $a$  und  $f$  beide in  $E_1$  oder  $E_2$  enthalten sind, dann muss  $b$  auch in der selben Ebene enthalten sein. Also

ist  $P$  ein Cayley-Polytop, das zwischen  $E_1$  und  $E_2$  liegt. Genauso verhält es sich, wenn  $b$  und  $f$  beide in  $E'_1$  oder  $E'_2$  enthalten sind.

Wenn  $\Delta$  eine Gitterpyramide ist, so ist  $\Delta$  unimodular. Also ist  $P = \Delta \cup \Delta' \cong \text{conv}(-e_1, e_1, e_2, e_3)$  ein Cayley-Polytop. Die gleichen Überlegungen gelten auch für  $\Delta'$ . Wir nehmen deswegen im Folgenden an, dass weder  $\Delta$  noch  $\Delta'$  eine Gitterpyramide ist.

Sei  $f = 0, c = e_1, d = e_2, b = -a$  und  $0 \leq a_1, a_2 < a_3 \neq 1$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\Delta$  das Cayley-Polytop von  $\text{conv}(0, e_1)$  und  $\text{conv}(e_2, a)$ . Daher gilt  $\text{gcd}(a_2 - 1, a_3) = a_3$ , was  $a_3 | (a_2 - 1)$  impliziert. Wegen  $a_2 < a_3$  folgt  $a_2 = 1$ . Somit reicht es, die folgenden beiden Fälle zu betrachten:

**Fall a:**  $\Delta'$  ist das Cayley-Polytop von  $\text{conv}(0, e_1)$  und  $\text{conv}(e_2, -a)$ .

Hier ist  $\text{gcd}(a_2 + 1, a_3) = a_3$ , woraus  $a_3 | (a_2 + 1) = 2$  folgt. Wegen  $a_3 \neq 1$  gilt  $a_3 = 2$ . Somit ist  $a_1 \in \{0, 1\}$ .

Wenn  $a_1 = 0$  gilt, so ist  $P \subset \{0 \leq x_1 \leq 1\}$  ein Cayley-Polytop. Wenn dagegen  $a_1 = 1$  ist, so haben  $e_1$  und  $e_2$  den Abstand 1 von der Ebene  $\text{lin}(a, e_1 - e_2)$ , die  $0, a$  und  $-a$  enthält. Deswegen ist  $P$  wieder ein Cayley-Polytop.

**Fall b:**  $\Delta'$  ist das Cayley-Polytop von  $\text{conv}(0, e_2)$  und  $\text{conv}(e_1, -a)$ .

Hier ist  $\text{gcd}(a_1 + 1, a_3) = a_3$ , woraus  $a_3 | (a_1 + 1)$  folgt. Deswegen haben auch hier  $e_1$  und  $e_2$  den Abstand 1 von der Ebene  $\text{lin}(a, e_1 - e_2)$ , die  $0, a$  und  $-a$  enthält. Somit ist  $P$  ein Cayley-Polytop.

**Fall B:** Es gilt  $l_1 > 2$ .

Nach Induktionsvoraussetzung sind  $\Delta$  und  $\Delta'$  Cayley-Polytope, wobei wir die selbe Bezeichnung wie zuvor übernehmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $|\text{conv}(a, f)^\circ \cap M| > 0$ . Dann liegen  $a$  und  $f$  – und deswegen auch  $b$  – in  $E_1$  oder  $E_2$ . Also ist  $P$  ein Cayley-Polytop, das zwischen  $E_1$  und  $E_2$  liegt.

**Fall 2:** Es gibt zwei Kanten der Längen  $l_1 > 1, l_2 > 1$ .

Sei  $l_1 + 1 = |\text{conv}(a, b) \cap M|$  und  $l_2 + 1 = |\text{conv}(c, d) \cap M|$ . Es gibt einen inneren Gitterpunkt  $f \in \text{conv}(a, b)^\circ \cap \mathbb{Z}^3$ , so dass  $|\text{conv}(b, f)^\circ \cap M| = 0$  gilt.

Nach Induktionsvoraussetzung und mit Fall 1 sind  $\Delta^{(1)} := \text{conv}(a, c, d, f)$  und  $\Delta^{(2)} := \text{conv}(b, c, d, f)$  Cayley-Polytope, d.h. es gibt eine ganze Zahl  $z^{(i)} \in \mathbb{Z}$  und eine Linearform  $y^{(i)} \in N$ , so dass  $\Delta^{(i)}$  in  $W^{(i)} := \{x \in M_{\mathbb{Q}} : z^{(i)} \leq \langle x, y^{(i)} \rangle \leq z^{(i)} + 1\}, i \in \{1, 2\}$ , enthalten ist. Jede Facette von  $\Delta^{(i)}, i \in \{1, 2\}$ , ist ein Lawrence-Polygon.

Wenn  $a$  und  $f$  beide in der gleichen Randebene von  $W^{(1)}$  enthalten sind, so liegt  $b$  auch darin. In diesem Fall ist  $P \subset W^{(1)}$  ein Cayley-Polytop.

Seien nun  $a$  und  $f$  in unterschiedlichen Randebenen von  $W^{(1)}$ . Dann ist  $l_1 = 2$ . Wegen  $l_2 > 1$  sehen wir, dass  $c$  und  $d$  in der selben Randebene von  $W^{(2)}$  liegen.

Deswegen ist  $\Delta^{(i)}$  für  $i \in \{1, 2\}$  eine Gitterpyramide und daher ein Lawrence-Polytop. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\Delta^{(1)} = \text{conv}(0, e_1, l_2 e_2, e_1 + e_3)$ . Dann ist  $P \subset \{0 \leq X_1 \leq 1\}$  ein Cayley-Polytop.  $\square$

**Proposition 6.4.2.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales white Gittersimplex. Dann ist  $P$  ein Cayley-Polytop oder  $P \cong 2\Delta_3$ .*

*Beweis.* Wegen Lemma 6.4.1 können wir  $P = \text{conv}(0, 2e_1, 2e_2, p)$  mit  $p \in \mathbb{Z}^3$  und  $p_3 > 1$  annehmen.

Wenn  $P$  eine Facette  $F \cong 2\Delta_2$  mit  $F \neq P \cap X_3^\perp$  hat, so ist jede Facette von  $P$  von dieser Form, und  $\frac{1}{2}P$  ist ein Gitterpolytop vom Grad 0 oder 1 mit nur unimodularen Facetten. Daher ist  $P \cong 2\Delta_3$ .

Sei nun jede Facette  $F \neq P \cap X_3^\perp$  ein Lawrence-Polygon. Dann gilt  $P \cap \{X_3 > 0\} \cap M = p$ . Wir wählen vier Gitterpunkte  $a, b, c, d \in P \cap \{X_3 = 0\} \cap M$ , so dass  $\text{conv}(a, b, c, d, p)$  sauber ist. Mit Lemma 6.2.5 folgt  $p_3 = 1$ . Also ist  $P$  ein Cayley-Polytop.  $\square$

## 6.5 White Gitterpolytope

**Proposition 6.5.1.** *Sei  $F \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolygon,  $p \in M$  und  $P = \text{conv}(F, p) \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales white Gitterpolytop. Dann ist  $P$  ein Cayley-Polytop.*

*Beweis.* Wegen  $|F^\circ \cap M| = 0$  können wir mit Theorem 6.3.5 und Proposition 6.4.2 annehmen, dass  $F$  ein Lawrence-Polytop mit mehr als drei Ecken ist. Also sei  $F$  ein Cayley-Polytop von zwei parallelen Kanten  $l_1$  und  $l_2$ . Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $X_3(l_1) = X_3(l_2) = 0$  und  $X_1(l_1) = 0, X_1(l_2) = 1$ .

Wir wählen zwei Strecken  $\Delta_1 \cong q_i \subset l_i, i \in \{1, 2\}$ , und betrachten das Gitterpolytop  $Q := \text{conv}(p, q_1, q_2) \subset P$ . Sei  $p = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$  mit  $0 \leq p_1, p_2 < p_3$  und  $p_3 > 1$ .

Wir nehmen an, dass  $Q$  sauber ist. Dann folgt mit Lemma 6.2.5  $p_3 = 1$ , ein Widerspruch. Es gilt also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\text{conv}(0, p)^\circ \neq \emptyset, q_1 = \text{conv}(0, e_2)$  und  $q_2 = \text{conv}(e_1, e_1 + e_2)$ . Wir zeigen nun  $p_1 = 0$ , was schließlich  $P \subset \{0 \leq X_1 \leq 1\}$  impliziert.

Unterteile  $Q$  in  $\Delta^{(1)} := \text{conv}(0, e_1, e_1 + e_2, p)$  und  $\Delta^{(2)} := \text{conv}(0, e_2, e_1 + e_2, p)$ . Nach Proposition 6.4.2 sind diese beide Cayley-Polytope mit normiertem Volumen  $p_3$ .

Wenn  $\Delta^{(1)}$  eine Gitterpyramide ist, so ist es sogar ein Lawrence-Polytop. Deswegen gilt hier  $p_1 = p_2 = 0$ .

Sei nun also  $\Delta^{(1)}$  das Cayley-Polytop von  $\text{conv}(0, p)$  und  $\text{conv}(e_1, e_1 + e_2)$ . Hier ist  $\text{gcd}(p_1, p_3) = p_3$ , weshalb  $p_3 | p_1$  folgt. Somit erhalten wir  $p_1 = 0$ . □

**Proposition 6.5.2.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales white Gitterpolytop mit höchstens fünf Ecken. Dann ist  $P$  ein Cayley-Polytop, oder  $P \hookrightarrow 3\Delta_3$  und  $(2\Delta_2)^\circ \hookrightarrow P^\circ$ .*

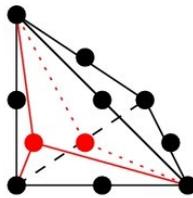


Abbildung 6.5: Ein Polytop  $P$  mit  $P \hookrightarrow 3\Delta_3$  und  $(2\Delta_2)^\circ \hookrightarrow P^\circ$

*Beweis.* Nach den Propositionen 6.4.2 und 6.5.1 können wir annehmen, dass  $P$  ein *Circuit* ist, d.h. die konvexe Hülle eines 2-dimensionalen Gittersimplex  $\Delta$  und eines 1-dimensionalen Gitterpolytops  $\text{conv}(a, b)$ , beide ohne innere Gitterpunkte, so dass  $\text{conv}(a, b)^\circ, \Delta^\circ \subset P^\circ$ . Nach Theorem 6.2.2 können wir zudem voraussetzen, dass es eine Kante von  $P$  der Länge  $n \geq 2$  gibt. Betrachte nun die folgenden beiden Fälle:

**Fall A:**  $\Delta \cong \Delta_2$ .

Es gibt Gitterpunkte  $c, c' \in P \cap M$ , so dass  $\text{conv}(\Delta, c, c')$  ein sauberes Circuit ist. Nach Theorem 6.2.2 können wir annehmen, dass  $\text{conv}(\Delta, c, c') = \text{conv}(0, e_1, e_2, -e_3, f)$  mit  $\Delta = \text{conv}(0, e_1, e_2)$ ,  $f = e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$  und  $f_2, f_3 \in \mathbb{N}$ . Da  $P$  ein Circuit ist, erkennen wir zudem  $f_2 > 0$  und  $1 + f_2 < f_3$ , insbesondere  $f_3 > 1$ . Um  $P$  aus  $\Delta' := \text{conv}(\Delta, c, c')$  zurückzubekommen, müssen wir  $\Delta'$  entlang  $f$  oder  $-e_3$  verlängern. Wenn wir  $\Delta'$  entlang der Strecke  $\text{conv}(e_1, f)$  verlängern, bleibt  $P \subset \{0 \leq X_1 \leq 1\}$  ein Cayley-Polytop. Das gleiche gilt, wenn wir  $\Delta'$  entlang der Strecke  $\text{conv}(-e_3, 0)$  verlängern.

Wir werden zeigen, dass man in den verbleibenden drei Fällen kein Teilpolytop von  $P$  erreichen kann.

**Fall 1:** Verlängere  $\Delta'$  entlang der Strecke  $\text{conv}(f, 0)$ .

Hier bekommen wir das Circuit  $\text{conv}(0, e_1, e_2, -e_3, 2f) \subset P$ . Nach Proposition 6.4.2 ist das Teilsimplex  $\text{conv}(0, e_1, e_2, 2f)$  ein Cayley-Polytop.

Ist es eine Gitterpyramide, so folgt mit Theorem 6.3.5  $f_3 | f_1$  und  $f_3 | f_2$ , was ein Widerspruch ist.

Deswegen ist  $\text{conv}(0, e_1, e_2, 2f)$  das Cayley-Polytop von  $\text{conv}(0, 2f)$  und  $\text{conv}(e_1, e_2)$ . Also gilt  $1 + f_2 = f_3$  im Widerspruch zu  $1 + f_2 < f_3$ .

**Fall 2:** Verlängere  $\Delta'$  entlang der Strecke  $\text{conv}(f, e_2)$ .

Hier erhalten wir das Circuit  $\text{conv}(0, e_1, e_2, -e_3, 2f - e_2) \subset P$ . Wie zuvor erhalten wir  $2f_3 | (2f_2 + 1)$ , ein Widerspruch.

**Fall 3:** Verlängere  $\Delta'$  entlang der Strecke  $\text{conv}(-e_3, e_1)$ .

Hier erhalten wir das Circuit  $\text{conv}(0, e_1, e_2, -e_1 - 2e_3, f) \subset P$  (vgl. Abbildung 6.6). Weil das Circuit konvex ist, folgt  $f_3 = 1$ , was erneut ein Widerspruch ist.

**Fall B:** Es gibt eine Kante von  $\Delta$  der Länge  $n \geq 2$ .

Nach Theorem 6.3.5 können wir  $\Delta = \text{conv}(0, ne_1, \delta e_2)$  mit  $\delta \in \{1, 2\}$ ,  $a_3 > 0 > b_3$  annehmen. Unterteile  $P$  in  $\Delta' := P \cap \{X_3 \geq 0\}$  und  $\Delta'' := P \cap \{X_3 \leq 0\}$ . Nach Proposition 6.4.2 sind diese Cayley-Polytope oder äquivalent zu  $2\Delta_3$ .

Wenn  $\Delta' \cong 2\Delta_3$  gilt, so folgt  $n = \delta = 2$  und ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a = 2e_3$ . Somit ist wegen Proposition

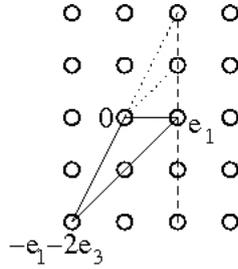


Abbildung 6.6: Das Circuit modulo  $\text{lin}(e_2)$

6.4.2  $\Delta'' \cong 2\Delta_3$  oder  $b_3 = -1$ . Im ersten Fall gilt  $\deg\left(\frac{P}{2}\right) \leq 1$ , und  $\frac{P}{2}$  hat nur unimodulare Facetten. Dies ist jedoch für ein Circuit nicht möglich. Im zweiten Fall erhalten wir  $P \hookrightarrow 3\Delta_3$ .

Seien deswegen im Folgenden  $\Delta'$  und  $\Delta''$  beide Cayley-Polytope.

**Fall 1:**  $\Delta'$  und  $\Delta''$  sind Gitterpyramiden über  $P \cap X_3^\perp$ .

Hier erhalten wir  $a_3 = -b_3 = 1$ . Deshalb können wir  $a = e_3$  annehmen. Wenn  $\delta = n = 2$  gilt, so ist  $b \in \{e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 + e_2 - e_3, e_1 + 2e_2 - e_3\}$ , insbesondere  $P \hookrightarrow 3\Delta_3$ .

Sei nun  $\delta = 1$ . Da  $P$  ein Circuit ist, folgt  $b_2 = 1$ . Deswegen ist  $P \subset \{0 \leq X_2 \leq 1\}$  ein Cayley-Polytop.

**Fall 2:**  $\Delta'$  und  $\Delta''$  sind Gitterpyramiden.

Sei  $\Delta'$  eine Gitterpyramide über  $\text{conv}(0, ne_1, a)$ . Dann ist  $\delta = 1$  und  $\text{conv}(0, ne_1, a)$  ein Lawrence-Polytop. Deswegen ist  $\Delta'$  ein Lawrence-Polytop und somit ist dieser Fall auf den Fall 1 zurückgeführt.

**Fall 3:** Genau eines der Simplizes  $\Delta'$  und  $\Delta''$  ist eine Gitterpyramide.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\Delta''$  eine Gitterpyramide, und  $\Delta'$  sei das Cayley-Polytop von  $\Delta'_1 = \text{conv}(0, ne_1)$  und  $\Delta'_2 = \text{conv}(e_2, a)$ . Weiter sei  $0 \leq a_2 < a_3 > 1$ . Wie in Fall 1 und Fall 2 erhalten wir  $b_3 = -1$  und  $\delta = 1$ .

Ebenso gilt  $\text{gcd}(a_3, a_2 - 1) = a_3$ , woraus  $a_3 | (a_2 - 1)$  folgt. Also ist  $a_2 = 1$ . Da  $P$  ein Circuit ist, folgt  $b_2 = 0$ . Daher ist  $P \subset \{0 \leq X_2 \leq 1\}$  ein Cayley-Polytop.

**Fall 4:** Weder  $\Delta'$  noch  $\Delta''$  ist eine Gitterpyramide.

Wie in Fall 3 können wir wieder  $a_2 = 1$  und  $b_3 | (b_2 - 1)$  annehmen. Betrachte die Projektion von  $P$  auf  $X_1^\perp$ :

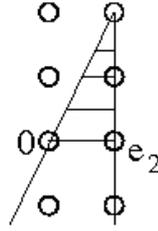


Abbildung 6.7:  $P$  modulo  $\text{lin}(e_1)$

Da  $\Delta'$  keine Gitterpyramide ist, gilt  $a_3 \geq 2$ . Somit ist  $b_2 \leq 0$  und  $b_3 - a_3 b_2 < 0$ , weil  $P$  ein Circuit ist. Nun folgt  $-b_3 | (1 - b_2)$ , was kleiner als  $1 + \frac{-b_3}{a_3}$  ist. Dies impliziert  $-b_3 < 1 + \frac{-b_3}{a_3} \leq 1 - \frac{b_3}{2}$ , also  $b_3 \geq -1$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

**Proposition 6.5.3.** *Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein 3-dimensionales white Gitterpolytop. Dann ist  $P$  ein Cayley-Polytop oder  $\text{Vol}(P) \leq C^{(6.5.3)}$ .*

*Beweis.* Wenn  $2\Delta_2 \hookrightarrow P$  gilt, so hat jeder Gitterpunkt von  $P$  wegen Proposition 6.4.2 höchstens den Abstand 2 von  $2\Delta_2$ . Dies beschränkt  $P$ . Sei also  $2\Delta_2 \not\hookrightarrow P$ . In diesem Fall ist jede Facette von  $P$  ein Lawrence-Polytop.

Sei  $\text{conv}(0, ne_3)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  die längste Kante von  $P$  mit angrenzenden Facetten  $F_1, F_2$ . Wegen dem Theorem von Howe 6.2.2 und den Propositionen 6.4.2, 6.5.2 sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $n \geq 2$ , und  $P$  habe mehr als fünf Ecken. Wir wählen nun zwei Ecken  $a \in F_1$ ,  $b \in F_2$ , so dass  $\Delta := \text{conv}(0, a, b, ne_3) \subset P$  ein 3-dimensionales Gittersimplex ist.

Wenn es keinen Gitterpunkt  $p \in P \setminus \{F_1 \cup F_2\} \cap M$  gibt, dann enthält  $P$  eine Gitterpyramide und ist nach Proposition 6.5.1 auch ein Cayley-Polytop. Sei also  $p \in P \setminus \{F_1 \cup F_2\} \cap M$ .

Nach Proposition 6.5.2 ist  $\text{conv}(0, ne_3, a, b, p)$  ein Cayley-Polytop. Also ist einer der folgenden drei Fälle erfüllt:

- A Der Abstand von  $p$  und  $b$  zu  $F_1$  ist 1.
- B Der Abstand von  $p$  und  $a$  zu  $F_2$  ist 1.
- C Eine Ebene durch  $a, b$  und  $p$  hat den Abstand 1 zu den Punkten  $0$  und  $ne_3$ .

Wenn es einen Gitterpunkt  $q \in P \cap M$  vom Typ A aber nicht vom Typ B gibt, und es weiter einen Gitterpunkt  $q' \in P \cap M$

vom Typ B aber nicht vom Typ A gibt, so erhalten wir nach unimodularer Transformation  $a = e_1$  und  $b = e_2$ . Dann jedoch ist  $\text{conv}(0, ne_3, q, q')$  kein Cayley-Polytop im Widerspruch zu Proposition 6.4.2.

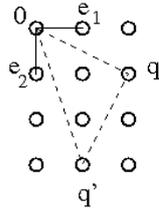


Abbildung 6.8:  $P$  modulo  $\text{lin}(e_3)$ .

Wenn es einen Gitterpunkt  $q \in P \cap M$  vom Typ A aber nicht vom Typ B gibt, und es weiter einen Gitterpunkt  $q' \in P \cap M$  vom Typ C gibt, so erhalten wir nach unimodularer Transformation  $a = e_1$  und  $b = e_2$ . Aber dann gibt es keine Möglichkeit für  $q'$  mehr.

Deswegen müssen sämtliche Gitterpunkte  $p \in P \setminus \{F_1 \cup F_2\} \cap M$  entweder vom Typ A oder vom Typ B oder vom Typ C sein. Somit ist  $P$  ein Cayley-Polytop.  $\square$

## 6.6 Gitterpolytope ohne innere Gitterpunkte

Nun verbleibt es, Gitterpolytope mit mindestens einer Facette, die innere Gitterpunkte hat, zu betrachten, um Theorem 6.3.1 zu beweisen.

*Bemerkung 6.6.1.* Sei  $F \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolygon mit  $\text{Vol}(F) \leq 4$  und  $F^\circ \cap M \neq \emptyset$ . Wegen der Formel von Pick 1.10.17 gilt  $\text{Vol}(F) = |F \cap M| + |F^\circ \cap M| - 2$ . Daher gilt  $|F^\circ \cap M| = 1$ , und  $F$  ist eines der folgenden reflexiven Gitterpolygone:

$$\begin{aligned} & \text{conv}(e_1, e_2, -e_1 - e_2), \text{conv}(\pm e_1, 2e_2), \\ & \text{conv}(\pm e_1, \pm e_2), \text{conv}(e_1, e_2, \pm(e_1 + e_2)). \end{aligned}$$

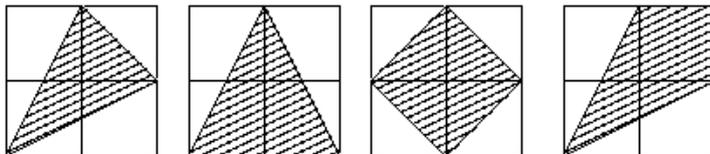


Abbildung 6.9: Die vier kleinsten Gitterpolygone mit innerem Gitterpunkt

**Proposition 6.6.2.** Sei  $P = \text{conv}(F, p) \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gittersimplex ohne innere Gitterpunkte und sei  $|F^{\circ} \cap M| = 1, p = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$  mit  $p \in M, p_3 > 0$ . Jede weitere Facette von  $P$  habe keine innere Gitterpunkte. Dann ist  $p_3$  durch eine Konstante  $C^{(6.6.2)} > 0$  beschränkt.

Tatsächlich kann man sogar zeigen dass  $C^{(6.6.2)} = 6$  gilt.

*Beweis.* Es gibt einen Gitterpunkt  $q \in M \setminus P$ , so dass  $\text{conv}(q, P) = P \cup \text{conv}(q, F)$  und  $|\text{conv}(q, P)^{\circ} \cap M| = 1$ . Mit dem Theorem 6.1.2 folgt die Behauptung.  $\square$

Es ist nicht schwierig, diese Idee zu verallgemeinern und das Folgende zu beweisen:

**Proposition 6.6.3.** Sei  $F \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein  $(d - 1)$ -dimensionales Gitterpolytop mit  $i > 0$  inneren Gitterpunkten und  $p \in M$ , so dass  $P = \text{conv}(F, p)$  ein  $d$ -dimensionales Gitterpolytop ohne innere Gitterpunkte ist. Dann ist das Volumen von  $P$  durch eine Konstante beschränkt, die nur von  $d$  und  $i$  abhängt.

**Proposition 6.6.4.** Sei  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop und  $F \subset P$  eine Facette von  $P$  mit  $|F^{\circ} \cap M| > 0$ . Dann hat  $P$  eine Projektion auf  $\Delta_1$ , d.h.  $P$  ist ein Cayley-Polytop, auf  $2\Delta_2$ , oder es gilt  $\text{Vol}(P) < C^{(6.6.4)}$ .

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $F = P \cap X_3^{\perp}$  und  $X_3|_P \geq 0$ . Wir definieren  $s := \{x \in P : x_3 = 1\}$  und nehmen an, dass  $P$  nicht in  $\{0 \leq X_3 \leq 1\}$  enthalten ist, d.h.  $s^{\circ} \subset P^{\circ}$ .

Es gibt eine Projektion  $\pi : M \rightarrow \mathbb{Z}^2$ , die  $s$  auf ein Intervall  $I$  der Länge  $l = \text{vol}(I) \geq 1$  abbildet, so dass  $l \leq L := \max_{x,y \in s} |\langle v, x - y \rangle|$ , wobei  $v$  ein primitiver Normalenvektor von  $I$  ist.

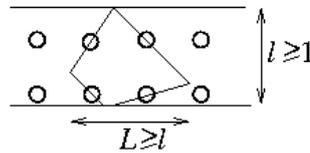


Abbildung 6.10: Das Polygon  $s$ .

Gilt  $l = 1$ , so ist  $\pi(P) \cong 2\Delta_2$ , denn  $\pi(P)$  ist ein Gitterpolygon, und es gibt einen Gitterpunkt  $p = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \in P \cap M$  mit  $p_3 > 1$ . Sei also  $l > 1$ . Wegen  $l \leq L$  und  $s^{\circ} \cap M = \emptyset$  folgt nach einigen Abschätzungen  $l \leq 2$ .

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

**Fall 1:**  $1 < l \leq \frac{3}{2}$ .

Da  $\pi(P)$  ein Gitterpolytop ist, und es einen Gitterpunkt  $p = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \in P \cap M$  mit  $p_3 > 1$  gibt, gilt  $p_3 \leq 4 \forall p \in P$  und  $l \in \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\}$ . Deswegen erhalten wir nach erneuten Abschätzungen  $\text{Vol}(s) \leq \frac{16}{3}$ . Somit ist  $P$  im Kegelstumpf enthalten, der von  $F$  und  $s$  aufgespannt und von  $\{0 \leq X_3 \leq 4\}$  begrenzt wird. Dies beschränkt das Volumen  $\text{Vol}(P)$ .

**Fall 2:**  $\frac{3}{2} < l \leq 2$ ,  $\text{Vol}(F) > 4$ .

Nach ähnlicher Abschätzung erhalten wir  $\text{Vol}(s) \leq \frac{9}{2}$ . Wegen  $\text{Vol}(F) \geq 5$  folgt  $p_3 \leq 20 \forall p = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \in P$ . Daher ist  $P$  im Kegelstumpf enthalten, der von  $F$  und  $s$  aufgespannt und durch  $0 \leq X_3 \leq 20$  begrenzt wird. Dies beschränkt das Volumen  $\text{Vol}(P)$ .

**Fall 3:**  $\frac{3}{2} < l \leq 2$ ,  $\text{Vol}(F) \leq 4$ .

Wieder gilt  $\text{Vol}(s) \leq \frac{9}{2}$ . Wegen Bemerkung 6.6.1, ist  $F$  äquivalent zu einem der vier Polygone aus Abbildung 6.9. Weiter sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit jede Facette von  $P$  mit inneren Gitterpunkten eines dieser Polygone. Sei  $p = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \in P \cap M$  mit maximalem  $p_3$  und betrachte das Gitterpolytop  $\Delta^{(p)} := \text{conv}(F, p)$ .

Ist  $F$  die einzige Facette von  $\Delta^{(p)}$  mit inneren Gitterpunkten, so folgt  $p_3 \leq 6$  mit der Bemerkung nach Proposition 6.6.2.

Gibt es dagegen noch eine weitere Facette  $F' \neq F$  von  $\Delta^{(p)}$  mit einem inneren Gitterpunkt  $q \in F'^{\circ} \cap M$ , so muss  $F'$  zum Rand von  $P$  gehören, da  $P$  keine inneren Gitterpunkte besitzt. Deswegen ist  $F'$  eines der vier Gitterpolygone aus Bemerkung 6.6.1. Wegen  $q_3 \leq 6$  folgt  $p_3 \leq 3q_3 = 18$ .

Daher ist  $P$  im Kegelstumpf enthalten, der von  $F$  und  $s$  aufgespannt und von  $\{0 \leq X_3 \leq 18\}$  begrenzt wird. Dies beschränkt das Volumen  $\text{Vol}(P)$ .  $\square$

*Beweis von Theorem 6.3.1.* Wenn ein 3-dimensionales Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ohne innere Gitterpunkte weder eine Projektion auf  $\Delta_1$  noch auf  $2\Delta_2$  hat, so folgt mit den Propositionen 6.5.3 und 6.6.4  $\text{Vol}(P) \leq \max\{C^{(6.5.3)}, C^{(6.6.4)}\}$ . Wegen Theorem 6.1.2 gibt es nur endlich viele solcher exzeptioneller Polytope.  $\square$

## 7 Simplizes mit leerem F-Inneren

Im Abschnitt 5.3 haben wir zu einem Polytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein weiteres Polytop gebildet, indem wir Hyperebenen, die das Polytop im Rand schneiden, nach innen verschoben haben. War das verbleibende Polytop  $Q$  nicht leer, so konnten wir explizit ein Minimal Model für die zugehörige torische Hyperfläche konstruieren. Es verbleibt somit, Polytope  $P$  zu betrachten, bei denen das zugehörige Polytop  $Q$  leer ist. In diesem Kapitel tun wir dies speziell für Simplizes.

### 7.1 Höhen eines $d$ -Simplex

Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein  $d$ -dimensionales Gittersimplex mit den Ecken  $a_0, \dots, a_d \in M$ , den Facetten  $F_0, \dots, F_d \in \Delta(d-1)$  und den zugehörigen primitiven inneren Normalenvektoren  $u_0, \dots, u_d \in N$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir  $a_0 = 0$ . Die Höhen  $\langle a_i - a_j, u_i \rangle \in \mathbb{N}, j \neq i$ , bezeichnen wir mit  $h_i, i \in \{0, \dots, d\}$ .

Da die Normalenvektoren  $u_0, \dots, u_d \in N$  linear abhängig sind, erfüllen sie eine Relation  $\sum_{i=0}^d b_i u_i = 0$  mit  $b_0, \dots, b_d \in \mathbb{N}$ . Im Folgenden wird ein Zusammenhang der Koeffizienten mit den Höhen  $h_0, \dots, h_d \in \mathbb{N}$  gesucht. Daraus ergibt sich eine notwendige Bedingung an einen Vektor  $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{N}_{>0}^{d+1}$ , der Höhenvektor eines Gittersimplex zu sein.

**Beispiel 7.1.1.** • Ist  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Dreieck mit  $h_0 = 1$ , so ist  $\Delta$  ein Cayley-Polygon, und es gilt  $h_1 = h_2$ .

- Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Dreieck mit  $h_1 = h_2 = 2$ . Weil das normalisierte Volumen das Produkt aus der Höhe  $h_i$  und der Länge der zugehöriger Grundseite  $l_i$  ist, ist das Verhältnis der Grundseiten  $l_0 : l_1 : l_2 = 2 : h_0 : h_0$ . Andererseits ist  $l_0, l_2 \leq h_1$ , da die Länge einer Grundseite die um 1 verminderte Anzahl der Gitterpunkte dieser Grundseite ist. Daraus folgt  $h_0 = \frac{2l_2}{l_0} \leq \frac{4}{l_0}$  und  $l_1 = l_2$ . Wäre  $h_0 = 4$ , so wäre  $l_0 = 1$  und  $l_0 = l_2 = 2$ , ein Widerspruch. Also gilt  $h_0 \leq 2$ , und es sind nur die Tripel  $(h_0, h_1, h_2) \in \{(1, 2, 2), (2, 2, 2)\}$  möglich. Diese werden auch tatsächlich realisiert, nämlich durch die Dreiecke  $\text{conv}(0, 2e_1, e_2)$  und  $2\Delta_2$ .

- Mit den gleichen Überlegungen ist es möglich zu zeigen, dass es kein Dreieck mit dem Höhentripel  $(2, 3, 3)$  gibt.

Der Nachteil dieser Methode ist jedoch, dass man sie nicht auf  $d$ -Simplizes mit  $d \geq 3$  übertragen kann. Deswegen braucht man hier eine andere Methode:

*Sei  $\Delta$  ein Gittersimplex und  $d$ -dimensional mit Höhen  $h_0, \dots, h_d$ , jede eine ganze Zahl. Diese schreiben wir in eine erste Zeile und verdecken eine Höhe für eine Weile. Wir schreiben nun den größten gemeinsamen Teiler der Produkte der restlichen Höhen bis auf einer unter den zugedeckten Ort und fahren mit den anderen Höhen fort. In einer letzten Zeile schließlich verwalte die Produkte der Einträge von jeder Spalte. Diese Zeile ist an Schönheit reich: Ihre  $d+1$  Einträge sind alle gleich.*

Etwas formaler bedeutet dies:

**Proposition 7.1.2.** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$c_0 h_0 = c_1 h_1 = \dots = c_d h_d,$$

wobei

$$c_i = \gcd \left( \prod_{j \notin \{i, k\}} h_j \right).$$

**Beispiel 7.1.3.** Wir analysieren die obigen Beispiele im Licht von Proposition 7.1.2:

- Ist  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Dreieck mit  $h_0 = 1$ , so ist  $c_1 = c_2 = 1$  und deswegen  $h_1 = h_2 = c_0$ .
- Ist  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Dreieck mit  $h_1 = h_2 = 2$ , so ist  $c_0 = 2$  und  $c_1 = c_2 = \gcd(2, h_0)$ . Mit Proposition 7.1.2 folgt  $h_0 = \gcd(2, h_0)$  und somit  $h_0 \leq 2$ .

- Ist  $h_0 = 2$  und  $h_1 = h_2 = 3$ , so folgt  $c_0 = 3, c_1 = c_2 = 1$ . Weil  $c_0 h_0 = 6 \neq 3 = c_1 h_1$  folgt mit Proposition 7.1.2, dass es kein Dreieck mit dem Höhentripel  $(2, 3, 3)$  gibt.

*Beweis von Proposition 7.1.2.* Die Linearform

$$u''_0 := - \sum_{i=1}^d \frac{1}{h_i} u_i \in N_{\mathbb{Q}}$$

erfüllt wegen  $a_0 = 0$ :  $\langle a_i, u''_0 \rangle = -1 \forall i \in \{1, \dots, d\}$ , und es gilt

$$u'_0 := \frac{\prod_{j=1}^d h_j}{c_0} u''_0 = - \sum_{i=1}^d \frac{1}{c_0} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d h_j u_i \in N.$$

Im Allgemeinen ist  $u'_0$  aber nicht primitiv. Deswegen sei  $g \in \mathbb{N}$  die Länge von  $u'_0$  und  $\tilde{u}_0 := \frac{1}{g} u'_0 \in N$ . Diese Linearform erfüllt

$$\langle a_i, \tilde{u}_0 \rangle = - \frac{1}{g} \frac{\prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j}{c_0} \langle a_i, u_i \rangle = - \frac{\prod_{j=1}^d h_j}{g c_0} \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Damit ist  $\tilde{u}_0 \in N$  primitiv, konstant auf  $\text{aff}(a_1, \dots, a_d)$ , nicht kleiner als  $-\frac{\prod_{j=1}^d h_j}{g c_0}$  auf  $\Delta$  und somit  $\tilde{u}_0 = u_0$ . Daraus folgt für  $i \neq 0$ :  $h_0 = \langle 0 - a_i, u_0 \rangle = \frac{1}{g c_0} \prod_{j=1}^d h_j$  und schließlich

$$h_0 c_0 = \frac{\prod_{j=1}^d h_j}{g}. \tag{7.1}$$

Weiter ist für  $l \neq 0$

$$\begin{aligned} h_l c_l &= h_l \gcd_{i \in \{0, \dots, d\} \setminus \{l\}} \left( \prod_{j \in \{0, \dots, d\} \setminus \{i, l\}} h_j \right) \\ &= h_l \gcd_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}} \left( \prod_{j \notin \{0, l\}} h_j, h_0 \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, l\}} h_j \right) \\ &\stackrel{(7.1)}{=} \gcd_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}} \left( \prod_{j=1}^d h_j, \frac{\prod_{j=1}^d h_j}{g c_0} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j \right) \\ &= \frac{\prod_{j=1}^d h_j}{g} \cdot \gcd_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}} \left( g, \frac{1}{c_0} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j \right). \end{aligned}$$

Es reicht deswegen zu zeigen, dass

$$\gcd_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}} \left( g, \frac{1}{c_0} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j \right) = 1$$

gilt.

Hierzu sei  $q \in \mathbb{N}$  ein gemeinsamer Teiler von  $g$  und  $\frac{1}{c_0} \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j$   $\forall i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}$ . Wegen  $q|g$  gilt per Definition von  $g$ :

$$q \left| \sum_{i=1}^d \frac{1}{c_0} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j u_i \in N.$$

Wegen  $q \left| \frac{1}{c_0} \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j \quad \forall i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}$  folgt weiter

$$q \left| \frac{1}{c_0} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}} h_j \cdot u_l.$$

Da  $u_l \in N$  primitiv ist, gibt es mit dem Lemma von Bézout ganze Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\sum_{i=1}^d \alpha_i (u_l)_i = 1$  gilt, wobei  $(u_l)_1, \dots, (u_l)_d \in \mathbb{N}$  die Koordinaten von  $u_l$  bezüglich einer Gitterbasis von  $N$  sind. Deswegen ist

$$q \left| \sum_{i=1}^d \frac{1}{c_0} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}} h_j \cdot (u_l)_i \alpha_i = \frac{1}{c_0} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{l\}} h_j.$$

Also gilt  $q \left| \gcd\left(\frac{1}{c_0} \prod_{j \neq 1} h_j, \dots, \frac{1}{c_0} \prod_{j \neq d} h_j\right) = 1$  und somit  $q = 1$ .  $\square$

Natürlich erfüllt nicht nur der Vektor  $(c_0, \dots, c_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  aus Proposition 7.1.2 die dort angegebenen Relationen, sondern auch jedes Vielfache des Vektors.

Im Allgemeinen ist der Vektor  $(c_0, \dots, c_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  aus Proposition 7.1.2 nicht primitiv. Zum Beispiel gilt für  $\Delta = 2\Delta_2$ :  $c_0 = c_1 = c_2 = 2$ .

*Bemerkung 7.1.4.* Der Vektor  $(c_0, \dots, c_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  aus Proposition 7.1.2 kann als der Vektor der Koeffizienten der Relation der Vektoren  $u_0, \dots, u_d$  interpretiert werden. Es gilt nämlich

$$-u_0 = \frac{-u'_0}{g} = \sum_{i=1}^d \frac{\prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}} h_j}{g c_0} u_i$$

und deswegen

$$\begin{aligned} -c_0 u_0 &= \sum_{i=1}^d \frac{\prod_{j=1}^d h_j}{gh_i} u_i \stackrel{(7.1)}{=} \sum_{i=1}^d \frac{1}{h_i} (h_0 c_0) u_i \\ &\stackrel{7.1.2}{=} \sum_{i=1}^d \frac{1}{h_i} (h_i c_i) u_i = \sum_{i=1}^d c_i u_i. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\sum_{i=0}^d c_i u_i = 0$ .

Deswegen können wir mit Proposition 3.2.3 den Vektor  $(c_0, \dots, c_d)$  mit dem Erzeuger von  $N_1(X_\Sigma)$  identifizieren. Dabei ist  $\Sigma$  der vollständige Fächer, der von den Strahlen  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cdot u_i$ ,  $i \in \{0, \dots, d\}$ , erzeugt wird.

Die Umkehraussage zur Proposition 7.1.2 ist falsch, wie das Beispiel  $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4) = (2, 6, 6, 7, 7) \in \mathbb{N}^5$  zeigt. Hier ist zwar  $h_0 c_0 = h_1 c_1 = h_2 c_2 = h_3 c_3 = h_4 c_4 = 84$  mit dem Koeffizientenvektor  $c = (42, 14, 14, 12, 12)$ , es gibt aber kein 4-Simplex mit diesen Höhen.

Tatsächlich wird im Beweis von Proposition 7.1.2 nicht nur die Gleichheit der Produkte  $c_i h_i$ ,  $i \in \{0, \dots, d\}$  gefordert, sondern dass ihr Wert mit dem aus Gleichung (7.1) übereinstimmt.

**Definition 7.1.5.** Ein ganzzahliger Vektor  $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  heißt *simplizial*, wenn es ein  $d$ -Simplex mit den Höhen  $h_0, \dots, h_d$  gibt.

Selbst wenn es zu einem ganzzahligen Vektor  $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  ein  $d$ -Simplex mit diesen Höhen gibt, so ist dieses im Allgemeinen nicht eindeutig. Dies zeigt das Beispiel  $\Delta^{(1)} = \text{conv}(0, 2e_1 - e_2, 2e_3, xe_2)$ ,  $\Delta^{(2)} = \text{conv}(0, 2e_1, 2e_3, xe_2)$ , wobei  $x$  eine ungerade Zahl ist. Hier ist  $\Delta^{(1)} \not\cong \Delta^{(2)}$ , aber beide haben den Höhenvektor  $(2, 2, 2x, 2x) \in \mathbb{N}^4$ . Es gilt aber folgende Endlichkeitsaussage:

**Proposition 7.1.6.** Zu jedem ganzzahligen Vektor  $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  gibt es höchstens endlich viele  $d$ -Simplizes mit den Höhen  $h_0, \dots, h_d$ .

*Beweis.* Nach affinen unimodularen Transformationen können wir annehmen, dass die zugehörigen Simplizes im Quader

$$\bigoplus_{i=1}^d \text{conv}(0, h_i e_i)$$

liegen. □

## 7.2 Das F-Innere

Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop mit den Facetten  $F_i, i \in I$ , und den zugehörigen primitiven inneren Normalenvektoren  $u_i \in N, i \in I$ , d.h.

$$\Delta = \bigcap_{i \in I} \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, u_i \rangle \geq -a_i\}$$

mit ganzen Zahlen  $a_i \in \mathbb{Z}, i \in I$ .

Wir nennen das Polytop  $\Delta^{Fine} = \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \forall u \in N \exists p \in \Delta \text{ mit } \langle m - p, u \rangle \geq 1\} \subset P$  das *Fine-Innere* von  $\Delta$  nach Jonathan Fine, der sich erstmals mit diesem Polytop beschäftigte.

Weiter nennen wir das Polytop

$$\Delta^F = \bigcap_{i \in I} \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, u_i \rangle \geq -a_i + 1\}$$

das *F-Innere* von  $\Delta$ .

Ist  $\Delta^{Fine} \neq \emptyset$ , so findet man mit der Konstruktion aus 5.3 ein Minimal Model für die durch  $\sum_{m \in \Delta \cap M} a_m x^m = 0$  bestimmte  $\Sigma(\Delta)$ -reguläre Hyperfläche in  $X_{\Delta}$ . Es verbleibt also, den Fall  $\Delta^{Fine} = \emptyset$  zu betrachten.

Diese Bedingung ist zum Beispiel für jedes Cayley-Polytop und jedes Gitterpolytop mit Projektion auf  $2\Delta_2$  erfüllt. Diese entsprechen rationalen Hyperflächen und Konik-Bündeln. Allgemeiner hat jedes Polytop mit einer Faserung auf ein niedrig-dimensionaleres Polytop mit leerem Fine-Inneren selbst leeres Fine-Inneres. Wir vermuten:

**Vermutung 7.2.1.** Ist  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop mit leerem Fine-Inneren, so besitzt die durch  $\sum_{m \in P \cap M} a_m x^m = 0$  bestimmte  $\Sigma(\Delta)$ -reguläre Hyperfläche  $D \subset X_P$  kein Minimal Model. Insbesondere gilt  $\kappa(D) = -\infty$ .

Es gilt  $\Delta^{\circ} \cap M \subset \Delta^{Fine} \subset \Delta^F \subset \Delta$ . Insbesondere folgt aus  $\Delta^F = \emptyset$  schon  $\Delta^{\circ} \cap M = \emptyset$ . Umgekehrt folgt aus  $\Delta^{\circ} \cap M = \emptyset$  im Allgemeinen nicht  $\Delta^F = \emptyset$ . Die maximalen exzeptionellen 3-dimensionalen Gitterpolytope aus 6.3 zum Beispiel haben die folgenden F-Inneren:

$$\begin{aligned} P_1^F &= \text{conv}\left(\frac{7}{5}e_1 + e_2 + e_3, \frac{8}{5}e_1 + 2e_2 + e_3, \right. \\ &\quad \left. \frac{9}{5}e_1 + e_2 + 2e_3, \frac{6}{5}e_1 + e_2 + e_3\right) \\ P_2^F &= \text{conv}\left(\frac{5}{3}e_1 + e_2 + e_3, \frac{13}{9}e_1 + \frac{4}{3}e_2 + e_3, \right. \\ &\quad \left. \frac{11}{9}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + e_3, \frac{8}{9}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + e_3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{14}{9}e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3, \frac{4}{3}e_1 + e_2 + e_3 \right) \\
P_3^F &= \emptyset \\
P_4^F &= \emptyset \\
P_5^F &= \frac{3}{2}e_1 + e_2 + e_3 \\
P_6^F &= \emptyset \\
P_7^F &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3 \\
P_8^F &= \frac{1}{2}e_1 + e_2 + e_3 \\
P_9^F &= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3 \\
P_{10}^F &= \text{conv}\left(\frac{4}{3}e_1 + e_2 + e_3, \frac{5}{3}e_1 + e_2 + e_3\right).
\end{aligned}$$

Die Polytope  $P_5, P_7, P_8$  und  $P_9$  sind die einzigen bekannten maximalen exzeptionellen Polytope  $P$ , so dass  $P^{Fine}$  ein Punkt  $p \in P$  ist. Tatsächlich lässt sich sogar zeigen, dass für jedes 3-dimensionale Gitterpolytop  $P \subset M_{\mathbb{Q}}$  mit der Eigenschaft  $P^{Fine} = p$  der Punkt  $p$  entweder ganz oder halbganzzahlig ist, d.h.  $2p \in M$ . Diese rein konvexgeometrische Aussage lässt sich bemerkenswerterweise mit Hilfe algebraisch-geometrischer Methoden beweisen: Wegen  $P^{Fine} \neq \emptyset$  hat die zugehörige generische Fläche positive Kodaira-Dimension und damit ein Minimal Model, das man mit der Konstruktion aus Abschnitt 5.3 findet. Mittels der Klassifikation algebraischer Flächen [Sha96] und konvexgeometrischen Argumenten wie Korollar 7.2.3 ist diese Fläche entweder eine K3-Fläche oder eine Enriques-Fläche. Ein Artikel mit den Details hierzu ist in Arbeit.

Da die Bedingung  $\Delta^{Fine} = \emptyset$  selbst für ein Simplex schwierig zu untersuchen ist, betrachten wir stattdessen die stärkere Forderung  $\Delta^F = \emptyset$ . Durch sie können wir garantieren, dass  $\Delta^{Fine} = \emptyset$  gilt. Außerdem ist  $\Delta^F$  wieder ein Simplex oder leer. Deswegen betrachten wir im restlichen Kapitel Simplizes mit leerem F-Inneren.

Wir werden nun das F-Innere eines Simplex durch seine Höhen charakterisieren.

**Proposition 7.2.2.** *Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein  $d$ -dimensionales Gittersimplex mit den Höhen  $h_0, h_1, \dots, h_d \in \mathbb{N}$ .*

*Gilt  $\sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} < 1$ , so ist  $\dim(\Delta^F) = d$ .*

*Gilt  $\sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} = 1$ , so ist  $\Delta^F$  ein Punkt.*

Gilt  $\sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} > 1$ , so ist  $\Delta^F = \emptyset$ .

*Beweis.* Sei  $\Delta = \bigcap_{i=0}^d \{m \in M : \langle m, u_i \rangle \geq -a_i\}$  mit  $u_i \in N, a_i \in \mathbb{Z} \forall i \in \{0, \dots, d\}$ . Wir bezeichnen für  $j \in \{0, \dots, d\}$  das Teilpolytop

$$\bigcap_{i=0}^j \{m \in M : \langle m, u_i \rangle \geq -a_i + 1\} \cap \bigcap_{i=j+1}^d \{m \in M : \langle m, u_i \rangle \geq -a_i\} \subset \Delta$$

mit  $\Delta^{(j)}$ . Insbesondere ist  $\Delta^{(d)} = \Delta^F$ . Formal setzen wir  $\Delta^{(-1)} = \Delta$ . In  $M_{\mathbb{Q}}$  gilt bis auf Verschiebung die Gleichung  $\Delta^{(i)} = \theta_i \Delta^{(i-1)}$  mit  $\theta_i > 0 \forall i \in \{0, \dots, d\}$ . Folglich ist

$$\Delta^F = \prod_{i=0}^d \theta_i \cdot \Delta.$$

Wir werden nun zeigen, dass

$$\prod_{i=0}^k \theta_i = 1 - \sum_{i=0}^k \frac{1}{h_i}$$

gilt. Daraus folgt dann

$$\Delta^F = \left(1 - \sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i}\right) \cdot \Delta$$

und schließlich die Behauptung.

Es gilt  $\theta_0 = \frac{h_0-1}{h_0} = 1 - \frac{1}{h_0}$ . Sei nun  $k > 0$  und

$$\prod_{i=0}^{k-1} \theta_i = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{h_i}.$$

Die Höhe zum Normalenvektor  $n_k$  in  $\Delta^{(k-1)}$  ist gegeben durch  $h'_k = \prod_{i=0}^{k-1} \theta_i h_k$ . Deswegen ist

$$\theta_k = \frac{h'_k - 1}{h_k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \theta_i h_k - 1}{\prod_{i=0}^{k-1} \theta_i h_k}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung noch mit  $\prod_{i=0}^{k-1} \theta_i$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^k \theta_i &= \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \theta_i h_k - 1}{h_k} = \prod_{i=0}^{k-1} \theta_i - \frac{1}{h_k} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^k \frac{1}{h_i}. \end{aligned}$$

□

**Korollar 7.2.3.** *Sei  $\Delta$  ein  $d$ -dimensionales Gittersimplex mit leerem F-Inneren. Dann ist der Divisor  $D := D_\Delta$  in  $X_\Delta$  Fano. Ist dagegen das F-Innere ein Punkt, so ist  $K_D$  numerisch trivial.*

*Beweis.* Seien  $u_0, \dots, u_d$  die Normalenvektoren zu den Facetten von  $\Delta$  und  $D_i := \mathcal{V}_{u_i} \subset X_\Delta$ . Wegen (1.1) sind die Relationen zwischen den Divisoren  $D_i$  durch  $\sum_{i=0}^d \langle m, u_i \rangle D_i = 0 \forall m \in M$  gegeben. Dies stellt ein Gleichungssystem mit  $d$  Gleichungen für  $d + 1$  Variablen dar. Somit gibt es Zahlen  $a_i \in \mathbb{Q}$ , so dass  $D_i = a_i D_0$  gilt. Wegen  $\langle m, \sum_{i=0}^d a_i u_i \rangle = 0 \forall m \in M$  gilt  $\sum_{i=0}^d a_i u_i = 0$ , und deshalb wegen Bemerkung 7.1.4  $a_i = \frac{c_i}{c_0}$ .

Der kanonische Divisor von  $X := X_\Delta$  ist somit

$$K_X = - \sum_{i=0}^d D_i = - \frac{1}{c_0} \left( \sum_{i=0}^d c_i \right) D_0.$$

Der Divisor  $D = D_\Delta$  ist wegen Korollar 1.9.23 durch  $D = h_0 D_0$  gegeben. Mit der Adjunktionsformel 2.1.24 folgt

$$\begin{aligned} K_D &= K_X + D = \frac{1}{c_0} \left( h_0 c_0 - \sum_{i=0}^d c_i \right) D_0 \\ &= \frac{1}{c_0} \left( h_0 c_0 - \sum_{i=0}^d \frac{h_i c_i}{h_i} \right) D_0 \\ &\stackrel{7.1.2}{=} h_0 \left( 1 - \sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} \right) D_0. \end{aligned}$$

Dabei ist wegen Proposition 7.2.2  $1 - \sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} < 0$ . Aus Korollar 3.1.3 und Proposition 3.3.4 folgt nun, dass  $-K_D$  ample ist, d.h.  $D$  ist Fano.  $\square$

**Proposition 7.2.4.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  beliebig. Es gibt nur endlich viele Vektoren  $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$ , so dass*

$$\sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} \geq 1 \text{ und } \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^d \frac{1}{h_i} < 1 \forall l \in \{0, \dots, d\}.$$

*Beweis.* Es sei  $\varepsilon > 0$  und

$$\mathcal{A}_d(\varepsilon) := \left\{ (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d : \sum_{i=1}^d \frac{1}{a_i} \geq \varepsilon, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d \frac{1}{a_i} < \varepsilon, 1 \leq j \leq d \right\}.$$

Wir zeigen, dass  $\mathcal{A}_d(\varepsilon)$  für jede positive Zahl  $\varepsilon > 0$  eine endliche Menge ist. Speziell für  $\varepsilon = 1$  folgt dann die Behauptung.

Es ist  $\mathcal{A}_1(\varepsilon) = \{a \in \mathbb{N} : \frac{1}{a} \geq \varepsilon\} = \{a \in \mathbb{N} : a \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$  eine endliche Menge. Sei nun  $d \geq 1$  und  $|\mathcal{A}_d(\varepsilon)| < \infty$  für jede positive Zahl  $\varepsilon > 0$ . Weiter sei  $(a_1, \dots, a_{d+1}) \in \mathcal{A}_{d+1}(\varepsilon)$ , d.h.  $\sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{a_i} \geq \varepsilon$ ,  $\sum_{i=1, i \neq j}^{d+1} \frac{1}{a_i} < \varepsilon \quad \forall j \in \{1, \dots, d+1\}$ , und ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a_1 \leq \dots \leq a_{d+1}$ . Es ist also  $a_1 \leq \frac{d+1}{\varepsilon}$ . Da  $(a_2, \dots, a_{d+1}) \in \mathcal{A}_d(\varepsilon - \frac{1}{a_1})$  und  $0 < \varepsilon - \frac{1}{a_1}$  ist, gilt  $|\mathcal{A}_{d+1}(\varepsilon)| \leq \sum_{a_1 \leq \frac{d+1}{\varepsilon}} \frac{d+1}{\varepsilon} \cdot |\mathcal{A}_d(\varepsilon - \frac{1}{a_1})| < \infty$ .  $\square$

**Korollar 7.2.5.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  beliebig. Es gibt nur endlich viele Vektoren  $(h_0, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  mit  $\sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} = 1$ .*

### 7.3 $d$ -Simplizes mit leerem F-Inneren

Mit Hilfe des letzten Abschnitts und des folgenden Lemma werden wir nun eine Endlichkeitsaussage für Gittersimplizes mit leerem F-Inneren beweisen.

**Lemma 7.3.1.** *Sei  $(h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^d$  ein ganzzahliger Vektor. Dann gibt es nur endlich viele  $h_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $(h_0, h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$  simplizial ist.*

*Beweis.* Ist  $(h_0, \dots, h_d)$  simplizial, so gilt wegen Proposition 7.1.2  $h_0 c_0 = h_d c_d$ . Deswegen ist  $h_0$  ein Teiler von

$$h_d \operatorname{gcd}_{i \neq d} \left( \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{d-1} h_j \right)$$

und somit ein Teiler von  $h_1 \cdots h_d$ .  $\square$

Hieraus folgt nun der Hauptsatz dieses Kapitels:

*Wir bilden eine Klasse, an 6.3 wirst Dich erinnern durch alle Simplizes mit leerem F-Innern.*

*Ein Simplex verlasse nun diese Klasse,*

*wenn es eine Projektion auf ein andres der Klasse zulasse.*

*Es zeigt sich nun sehr verständlich:*

*die verbleibende Menge ist endlich.*

Etwas formaler bedeutet dies:

**Theorem 7.3.2.** *Bis auf affine unimodulare Transformation und Projektionen auf niedrig-dimensionale Gittersimplizes mit leerem  $F$ -Inneren gibt es nur endlich viele  $d$ -Simplizes mit leerem  $F$ -Inneren.*

Umgekehrt hat ein  $d$ -Simplex, das eine Projektion auf ein niedrig-dimensionales Gittersimplex mit leerem  $F$ -Inneren hat, im Allgemeinen nicht leeres  $F$ -Inneres. Dies zeigt das Beispiel eines Cayley-Polytops  $\text{conv}(0, e_1, e_2, e_1 + 3e_2 + 4e_3)$ . Sein  $F$ -Inneres ist der Punkt  $\frac{1}{2}e_1 + e_2 + e_3$ .

*Beweis von Theorem 7.3.2.* Wegen Proposition 7.2.2 gilt für ein  $d$ -Simplex mit leerem  $F$ -Inneren  $\sum_{i=0}^d \frac{1}{h_i} > 1$ . Es gibt drei Klassen von  $d$ -Simplizes mit leerem  $F$ -Inneren:

- (1)  $d$ -Simplizes, deren Höhenvektor  $\sum_{i \neq k} \frac{1}{h_i} < 1 \quad \forall k \in \{0, \dots, d\}$  erfüllt,
- (2)  $d$ -Simplizes, deren Höhenvektor  $\sum_{i \neq k} \frac{1}{h_i} \geq 1$  für ein  $k \in \{0, \dots, d\}$  erfüllt, aber  $\sum_{i \notin \{k, l\}} \frac{1}{h_i} < 1 \quad \forall k \neq l \in \{0, \dots, d\}$ , und
- (3)  $d$ -Simplizes, deren Höhenvektor  $\sum_{i \notin \{k, l\}} \frac{1}{h_i} \geq 1$  für ein  $k \neq l \in \{0, \dots, d\}$  erfüllt.

Wegen den Propositionen 7.2.4 und 7.1.6 gibt es nur endlich viele  $d$ -Simplizes in der Klasse (1).

Zu einem  $d$ -Simplex aus der Klasse (2) sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\sum_{i=1}^d \frac{1}{h_i} \geq 1$  und  $\sum_{i=1, i \neq l} \frac{1}{h_i} < 1 \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}$ . Wegen Proposition 7.2.4 gibt es nur endlich viele solcher Vektoren  $(h_1, \dots, h_d)$ . Wegen Lemma 7.3.1 gibt es auch nur endlich viele  $h_0 \in \mathbb{N}$ , die den Höhenvektor zu einem simplizialen Vektor komplettieren. Hieraus folgt die Endlichkeit dieser Klasse.

Sei nun  $\Delta$  ein  $d$ -Simplex aus der Klasse (3), und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{h_i} \geq 1$ . Die Facetten  $F_1, \dots, F_{d-1} \subset \Delta$  zu den Höhen  $h_1, \dots, h_{d-1}$  haben eine Kante  $a \subset \Delta$  gemeinsam. Betrachte die kanonische Projektion  $\pi : M_{\mathbb{Q}} \rightarrow M_{\mathbb{Q}}/\langle a \rangle$ . Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\langle a \rangle = \langle e_1 \rangle$  und die Elemente von  $N$  als Vektoren bezüglich der Gitterbasis  $\{e_1, \dots, e_d\}$  dargestellt. Das Bild der Facette  $F_i \subset \{m \in M_{\mathbb{Q}} : \langle m, u_i \rangle = h_i\}$  ist  $\pi(F_i) = \{m \in M_{\mathbb{Q}}/\langle a \rangle : \langle m, \tilde{u}_i \rangle = h_i\}$ , wobei  $\tilde{u}_i$  aus  $u_i$  durch Ersetzen des ersten Eintrags durch 0 entsteht. Deshalb ist das Bild von  $\Delta$  unter  $\pi$  ein  $(d-1)$ -Simplex mit den Höhen  $h'_1, \dots, h'_{d-1}, h'_0 \in \mathbb{N}$ . Dabei gilt  $h'_i \leq h_i$ . Damit ist  $\pi(F_i) = \{m \in M_{\mathbb{Q}}/\langle a \rangle : \langle m, u'_i \rangle = h'_i\}$

mit einem primitiven Gittervektor  $u'_i \in (M/\langle a \rangle)^*$  und  $h'_i | h_i$ . Insbesondere ist

$$\sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{h'_i} > \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{h'_i} \geq \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{h_i} \geq 1.$$

Mit Proposition 7.2.2 hat das  $(d-1)$ -Simplex  $\pi(\Delta)$  leeres F-Inneres.  $\square$

**Beispiel 7.3.3** (2-Simplizes mit leerem F-Inneren). Sei  $\Delta$  ein Gitterdreieck mit leerem F-Inneren. Dann gilt wegen Proposition 7.2.2  $\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} > 1$ . Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $h_0 \leq h_1 \leq h_2$ . Dann folgt  $h_0 \leq 2$ . Ist  $h_0 = 1$ , so ist  $\Delta$  ein Cayley-Dreieck. Sei also  $h_0 = 2$ . Dann ist  $h_1 \leq 3$ . Hieraus folgt  $(h_0, h_1, h_2) \in \{(2, 2, h_2), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\}$ . Wegen Proposition 7.1.2 gehört aber nur  $h_0 = h_1 = h_2 = 2$  zu einem Gitterdreieck. Dieses ist das exzeptionelle Dreieck  $2\Delta_2$ . Also sind in diesem Fall die Eigenschaften  $\Delta^F = \emptyset$  und  $\Delta^\circ \cap M = \emptyset$  äquivalent.

Die zugehörigen Divisoren zu den Cayley-Dreiecken und  $2\Delta_2$  in der jeweiligen torischen Varietät  $X_\Delta$  sind rationale Kurven und die Konik  $\{x \in \mathbb{P}^2 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ .

**Beispiel 7.3.4** (3-Simplizes mit leerem F-Inneren). Die einzigen 3-dimensionalen Gittersimplizes mit leerem F-Inneren, die weder eine Projektion auf  $\Delta_1$  noch auf  $2\Delta_2$  haben, sind

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)} &= \text{conv}(0, 4e_1, 4e_2, 2e_3), \\ \Delta^{(2)} &= \text{conv}(0, 2e_1, 3e_2, 6e_3), \\ \Delta^{(3)} &= \text{conv}(0, 3e_1, 3e_2, 3e_3), \\ \Delta^{(4)} &= \text{conv}(0, 3e_1, 3e_2, 2e_3), \\ \Delta^{(5)} &= \text{conv}(0, 2e_1, 3e_2, 5e_3), \\ \Delta^{(6)} &= \text{conv}(0, 2e_1, 3e_2, 4e_3), \\ \Delta^{(7)} &= \text{conv}(0, e_1, 3e_2, 2e_1 + 4e_3). \end{aligned}$$

Dabei sind die ersten drei Beispiele die Beispiele  $P_4$ ,  $P_6$  und  $P_3$  aus der Liste der maximalen Ausnahmen in Abschnitt 6.3. Die restlichen vier Beispiele sind in einem der maximalen Ausnahmen enthalten. Die zugehörigen Divisoren zu  $\Delta^{(1)}$ ,  $\Delta^{(2)}$ ,  $\Delta^{(3)}$  sind die quasi-homogene Quartic im gewichtet projektiven Raum

$$\{x \in \mathbb{P}^3(2, 1, 1, 1) : x_0^2 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0\},$$

die quasi-homogene Sextic im gewichtet projektiven Raum

$$\{x \in \mathbb{P}^3(3, 2, 1, 1) : x_0^2 + x_1^3 + x_2^6 + x_3^6 = 0\}$$

und die Fermat-Kubik  $\{x \in \mathbb{P}^3 : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\}$ .

Diese haben höchstens terminale Singularitäten und sind wegen Korollar 7.2.3 Fano. Somit ist die Faserung aus Theorem 5.2.5 durch die Projektion dieser Flächen auf einen Punkt gegeben. Insbesondere haben diese Fläche kein Minimal Model.

Die Flächen zu  $\Delta^{(4)}, \Delta^{(5)}, \Delta^{(6)}, \Delta^{(7)}$  sind

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{P}^3(3, 2, 2, 1) : x_0^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^6 = 0\}, \\ \{x \in \mathbb{P}^3(15, 10, 6, 1) : x_0^2 + x_1^3 + x_2^5 + x_3^{30} = 0\}, \\ \{x \in \mathbb{P}^3(6, 4, 3, 1) : x_0^2 + x_1^3 + x_2^4 + x_3^{12} = 0\} \end{aligned}$$

und  $\{x \in \mathbb{P}^3(6, 4, 3, 1) : x_0^2 + x_1^3 + x_2^4 + x_3^{12} = 0\}/\mu_2$ , wobei  $\mu_2$  auf  $\mathbb{P}^3(6, 4, 3, 1)$  gemäß  $(-1).x := (-x_0 : x_1 : -x_2 : x_3)$  wirkt.

**Beispiel 7.3.5** (4-Simplizes mit leerem  $F$ -Inneren). Mit dem Computeralgebrasystem Maple ist es möglich zu zeigen, dass es 71 mögliche simpliziale Höhenvektoren  $(h_0, \dots, h_4)$  mit  $\sum_{i=0}^4 \frac{1}{h_i} > 1$  gibt, die keine Projektion auf ein niedrig-dimensionaleres Simplex mit leerem  $F$ -Inneren besitzen.

Die folgenden vier Simplizes haben alle den Höhenvektor  $(2, 3, 7, 42, 42)$ . Es gibt sogar noch weitere acht Simplizes mit diesem Höhenvektor. Dabei sind die Zeilen der ersten Matrix die primitiven inneren Normalenvektoren zu den Facetten des Simplex, welche 0 enthalten. Den verbleibenden Normalenvektor bekommt man wie im Beweis von Theorem 7.1.2. Die Spalten der zweiten Matrix sind die Eckpunkte des Simplex außer der Null. Das Produkt der beiden Matrizen ist jeweils die Matrix  $\text{diag}(2, 3, 7, 42)$ .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 14 \\ & & 7 & 0 \\ & & & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ & 7 & & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 14 \\ & & 1 & 6 \\ & & & 42 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 \\ & & 7 & 0 \\ & & & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 7 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 \\ & & 1 & 6 \\ & & & 42 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Hyperfläche zum ersten Beispiel ist

$$\{x \in X_\Delta : x_0^2 + x_1^3 + x_2^7 + x_3^{42} + x_4^{42} = 0\}$$

in der torischen Varietät  $X_\Delta = \mathbb{P}^4(21, 14, 6, 1, 1)/\mu_3$ , wobei  $\mu_3$  auf  $\mathbb{P}^4(21, 14, 6, 1, 1)$  gemäß  $\zeta.(x_0 : \dots : x_4) := (x_0 : \zeta x_1 : x_2 : \zeta x_3 : x_4)$  wirkt.

Das zweite Beispiel entspricht der Hyperfläche

$$\{x \in X_\Delta : x_0^2 + x_1^3 + x_2^7 + x_3^{42} + x_4^{42} = 0\}$$

in der torischen Varietät  $X_\Delta = \mathbb{P}^4(21, 14, 6, 1, 1)/\mu_3 \times \mu_7$ , wobei  $\mu_3 \times \mu_7$  auf  $\mathbb{P}^4(21, 14, 6, 1, 1)$  gemäß  $\zeta_3.(x_0 : \cdots : x_4) := (x_0 : \zeta_3 x_1 : x_2 : \zeta_3 x_3 : x_4)$ ,  $\zeta_7.(x_0 : \cdots : x_4) := (x_0 : x_1 : \zeta_7 x_2 : \zeta_7 x_3 : x_4)$  wirkt.

Die Fläche zum dritten Beispiel ist

$$\{x \in X_\Delta : x_0^2 + x_1^3 + x_2^7 + x_3^{42} + x_4^{42} = 0\}$$

in der torischen Varietät  $X_\Delta = \mathbb{P}^4(21, 14, 6, 1, 1)$ .

Das vierte Beispiel entspricht dem Divisor

$$\{x \in X_\Delta : x_0^2 + x_1^3 + x_2^7 + x_3^{42} + x_4^{42} = 0\}$$

in der torischen Varietät  $X_\Delta = \mathbb{P}^4(21, 14, 6, 1, 1)/\mu_3$ , wobei  $\mu_3$  auf  $\mathbb{P}^4(21, 14, 6, 1, 1)$  gemäß  $\zeta_3.(x_0 : \cdots : x_4) := (x_0 : x_1 : \zeta_3 x_2 : \zeta_3 x_3 : x_4)$  wirkt.

# 8 Rationalität generischer Konik-Bündel

In Kapitel 6 untersuchten wir das geometrische Geschlecht von glatten generischen Hyperflächen torischer Varietäten. Da dieses eine birationale Invariante ist, folgt aus ihrer Positivität die Nicht-Rationalität der zugehörigen Hyperfläche. In diesem Kapitel werden wir die Nicht-Rationalität von generischen Konik-Bündel mit Hilfe einer weiteren birationalen Invariante, der Brauergruppe, detektieren.

## 8.1 Rationalität

Sei im Folgenden  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und alle Varietäten über  $k$  definiert.

**Definition 8.1.1.** Eine irreduzible Varietät  $X$  heißt *unirational*, wenn es eine dominante rationale Abbildung  $\mathbb{P}^d \dashrightarrow X$  gibt.

Jede rationale Varietät ist insbesondere unirational. Eine unirationale Varietät ist genau dann rational, wenn es eine Einbettung  $k(X) \hookrightarrow k(T_1, \dots, T_d)$  gibt.

Ein Problem der birationalen algebraischen Geometrie ist die Suche nach unirationalen Varietäten über  $k$ , die nicht rational sind. Äquivalent dazu ist die Existenz einer endlichen separablen Körpererweiterung  $K \subset k(T_1, \dots, T_d)$ , so dass  $K$  aber nicht zu  $k(T_1, \dots, T_d)$  isomorph ist. Dieses Problem heißt Lüroth-Problem. Im Fall  $d = 1$  verläuft diese Suche ergebnislos:

**Proposition 8.1.2 (Lüroth).** *Jede unirationale Kurve ist rational.*

Diese Aussage gilt selbst dann, wenn  $k$  nicht algebraisch abgeschlossen oder  $K \subset k(T)$  nicht separabel ist.

Das gleiche Ergebnis gilt auch für Flächen. Einen Beweis für  $\text{char}(k) = 0$  findet man in [SAV<sup>+</sup>65] oder [BPVdV84] und für den allgemeinen Fall in [BH75].

Jedoch gibt es 3-dimensionale unirationale Varietäten, die nicht rational sind. Dies wurde 1972 auf drei verschiedene Weisen gezeigt: Michael Artin und David Mumford untersuchten die Brauergruppe von einem bestimmten Konik-Bündel, um zu zeigen, dass dieses nicht rational ist ([AM72]). Herb Clemens und Philipp Griffiths untersuchten die Intermediate Jacobian von glatten kubischen Hyperflächen in  $\mathbb{P}^4$  und zeigten so, dass diese nicht rational sind ([CG72]). Vasilii Alekseevich Iskovskikh und Yuri Manin untersuchten die Gruppe der birationalen Automorphismen einer glatten Quartic in  $\mathbb{P}^4$  und zeigten so, dass diese nicht rational ist ([IM71]). Manuel Ojanguren und Jean-Louis Colliot-Thélène [CTO89] untersuchten 1989 ebenso glatte Quarticen, allerdings anhand höherer cohomologischer Invarianten. Vasilii Alekseevich Iskovskikh gab eine notwendige Bedingung für die Rationalität von Konik-Bündeln mit bestimmten Eigenschaften an ([Isk91], [Isk96]).

Im Folgenden präsentieren wir eine Methode, wie man die Brauergruppe von generischen Konik-Bündeln berechnen kann.

## 8.2 Rationalität von generischen Konik-Bündeln

Im Folgenden betrachten wir Konik-Bündel  $W \subset (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{P}^2$  mit Konik-Faserung auf  $(\mathbb{C}^*)^2$ . Um zu zeigen, dass einige dieser nicht rational sind, untersuchen wir ihre Brauergruppe  $B(W)$ . Diese ist eine birationale Invariante. Ist  $B(W)$  also nicht trivial, so ist  $W$  nicht rational. Wie in Abschnitt 6.3 können wir annehmen, dass  $W$  durch die Gleichung

$$f_1(x, y)u_0^2 + f_2(x, y)u_1^2 + f_3(x, y)u_2^2 = 0 \quad (8.1)$$

gegeben ist, wobei  $u_0, u_1$  und  $u_2$  homogene Koordinaten von  $\mathbb{P}^2$  sind. Weiter nehmen wir an, dass die Polynome  $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , eine generische Bedingung erfüllen, die wir später noch angeben werden. Da die Brauergruppe eine birationale Invariante ist, können wir diese Gleichung bzw. ihre Transformierte in jeder 4-dimensionalen torischen Varietät betrachten.

Wir bezeichnen das Newtonpolygon von  $f_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , mit  $P_i$ .

Sei  $M \cong \mathbb{Z}^4$  und  $N = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$  das zu  $M$  duale Gitter,  $M = M_1 \times M_2$  und  $N_1 = \text{Hom}(M_1, \mathbb{Z})$ ,  $N_2 = \text{Hom}(M_2, \mathbb{Z})$ , wobei  $M_1$  und  $M_2$  2-dimensionale Gitter sind. Außerdem sei  $P = P_1 + P_2 + P_3 \subset$

$(M_2)_{\mathbb{Q}}$  die Minkowski-Summe von  $P_1, P_2, P_3 \subset (M_2)_{\mathbb{Q}}$ . und  $X_P$  die zugehörige projektive torische Varietät über  $\mathbb{C}$ .

Im restlichen Kapitel beweisen wir den folgenden Satz:

*Wir berechnen die Brauergruppe von  $\mathcal{W}$ :  
dazu sei jede Ecke von  $P$   
die Minkowski-Summe von drei Ecken,  
die sich in  $P_1$  bis  $P_3$  verstecken.  
Der Flächeninhalt des Dreiecks daraus  
falle aus den ganzen Zahlen heraus.  
Desweiteren sei auch jede Kante  
des Polygons, welche  $P$  ich nannte,  
die Summe zweier Ecken mit Abstand  
ungerade zur Kante, dem 3. Summand.  
Genau dann ist  $B(\mathcal{W})$  nicht trivial  
und  $\mathcal{W}$  insbesondere nicht rational.*

Etwas formaler bedeutet dies:

**Theorem 8.2.1.** *Sei  $W$  eine Hyperfläche in  $(\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{P}^2$ , die durch die Gleichung*

$$f_1(x, y)u_0^2 + f_2(x, y)u_1^2 + f_3(x, y)u_2^2 = 0$$

*bestimmt ist. Weiter sei  $P_i$  das Newtonpolygon von  $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , und  $P = P_1 + P_2 + P_3$ . Die Kompaktifizierung  $X_P$  von  $(\mathbb{C}^*)^2$  besteht aus  $(\mathbb{C}^*)^2$  und endlich vielen rationalen Kurven  $C_i \cong \mathbb{P}^1$ ,  $i \in I$ . Weiter setzen wir voraus, dass  $\{f_1 f_2 f_3 = 0\} \cup \bigcup_i C_i$  aus glatten irreduziblen Komponenten besteht, die sich in einfachen Doppelpunkten schneiden.*

*Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, gilt  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ansonsten  $B(W) \cong 0$ .*

- (A) *Für jede Ecke  $a = a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} \in P$ ,  $a^{(i)} \in P_i$  und  $i \in \{1, 2, 3\}$ , ist  $\text{Vol}(\text{conv}(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}))$  ungerade.*
- (B) *Jede Kante  $K \subset P$  von  $P$  ist die Minkowski-Summe aus einer Kante und zwei Ecken, wobei diese beiden Ecken ungerade Höhen über der Kante haben.*

**Beispiel 8.2.2.** Die Newtonpolygone aus (8.1) seien durch  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = e_3$  und  $P_3 = \text{conv}(e_3 - e_4, -e_3 + 3e_4, 2e_3 + e_4)$  gegeben. Dann sind die Bedingungen (A) und (B) aus Theorem 8.2.1 erfüllt.

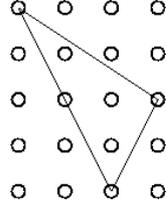


Abbildung 8.1:  $P_3 \cong P$

Die inneren Normalenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } u_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

von  $\Delta$  erfüllen die Relation

$$8u_1 + 8u_2 + 2u_3 + u_4 + u_5 = 0.$$

Mit Korollar 1.7.5 gilt  $X_\Delta = \mathbb{P}^4(8, 8, 2, 1, 1)/H$ , wobei

$$H = \{(e^{\pi i(a+b)}, e^{\pi i a}, e^{\frac{\pi i(4a+b)}{4}}, e^{\frac{7\pi i b}{4}}, 1) \in \mathbb{C}^5 : a, b \in \mathbb{Z}\} \cong \mu_2 \times \mu_8.$$

Wir betten nun  $\Delta$  in ein Untergitter von  $\mathbb{Z}^6$  ein, so dass seine Eckpunkte auf den Achsen liegen. Dann ist die zugehörige Hyperfläche durch

$$W = \{x \in \mathbb{P}^4(8, 8, 2, 1, 1) : x_0^2 + x_1^2 + x_2^8 + x_3^{16} + x_4^{16} = 0\} / \mu_2 \times \mu_8$$

gegeben, wobei  $\mu_2 \times \mu_8$  auf  $x \in \mathbb{P}^4(8, 8, 2, 1, 1)$  gemäß

$$\begin{aligned} (-1).x &:= (-x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3 : x_4), \\ \zeta_8.x &:= (-x_0 : x_1 : \zeta_8 x_2, \zeta_8^7 x_3 : x_4) \end{aligned}$$

wirkt.

Weil  $\Delta = \text{conv}(0 \times P_1, 2e_1 \times P_2, 2e_2 \times P_3)$  ein Simplex ist, und alle Koeffizienten außer denen zu den Ecken null sind, ist die generische Bedingung erfüllt. Mit Theorem 8.2.1 folgt  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , insbesondere ist  $W$  nicht rational.

**Beispiel 8.2.3.** Sei  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Wenn die Newtonpolygone der Polynome aus (8.1) durch  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = e_3$  und  $P_3 = \text{conv}(e_3 + e_4, 3e_3 + e_4, 2e_3 + (2l + 1)e_4)$  gegeben sind, so sind die Bedingungen (A) und (B) aus Theorem 8.2.1 erfüllt.

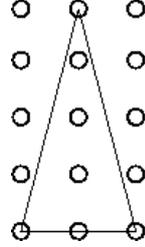


Abbildung 8.2:  $P_3 \cong P$

Die inneren Normalenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2l \\ 2l - 1 \\ -4l \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2l \\ -6l - 1 \\ 4l \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } u_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von  $\Delta(l) = \text{conv}(0 \times P_1, 2e_1 \times P_2, 2e_2 \times P_3)$  erfüllen die Relation

$$u_1 + u_2 + 2u_3 + 4lu_4 + 4lu_5 = 0.$$

Mit Korollar 1.7.5 gilt  $X_\Delta = \mathbb{P}^4(1, 1, 2, 4l, 4l)/H$ , wobei

$$H = \{(e^{\frac{\pi ia}{2l}}, 1, e^{\frac{\pi i(a+2lb)}{2l}}, e^{\pi ib}, e^{\pi i(a+b)}) \in \mathbb{C}^5 : a, b \in \mathbb{Z}\} \cong \mu_2 \times \mu_{4l}.$$

Wir betten nun  $\Delta$  in ein Untergitter von  $\mathbb{Z}^6$  ein, so dass seine Eckpunkte auf den Achsen liegen. Dann ist die zugehörige Hyperfläche durch

$$W(l) := \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 + x_1^2 + x_2^{4l} + x_3^{8l} + x_4^{8l} = 0 : \\ x \in \mathbb{P}^4(4l, 4l, 2, 1, 1) \end{array} \right\} / \mu_2 \times \mu_{4l}$$

gegeben, wobei  $\mu_2 \times \mu_{4l}$  auf  $x \in \mathbb{P}^4(4l, 4l, 2, 1, 1)$  gemäß

$$\begin{aligned} (-1).x &:= (x_0 : x_1 : -x_2 : -x_3 : -x_4) \text{ und} \\ \zeta_{4l}.x &:= (\zeta_{4l}x_0 : x_1 : \zeta_{4l}x_2 : x_3 : -x_4) \end{aligned}$$

wirkt.

Weil  $\Delta(l)$  ein Simplex ist, und alle Koeffizienten außer denen zu den Ecken null sind, ist die generische Bedingung erfüllt. Wegen Theorem 8.2.1 gilt  $B(W(l)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , insbesondere ist jede der 3-dimensionalen Varietäten  $W(l)$ ,  $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , nicht rational.

**Beispiel 8.2.4.** Die Newtonpolygone aus (8.1) seien durch  $P_1 = \text{conv}(0, 2e_3)$ ,  $P_2 = \text{conv}(e_3 + e_4, e_3 + 3e_4)$  und  $P_3 = \text{conv}(2e_3 + e_4, 4e_3 + 3e_4)$  gegeben. Dann ist  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , weil jede Ecke und jede Kante von

$$P = \text{conv}(3e_3 + 2e_4, 5e_3 + 2e_4, 7e_3 + 4e_4, 7e_3 + 6e_4, 5e_3 + 6e_4, 3e_3 + 4e_4)$$

die Bedingungen (A) und (B) aus Theorem 8.2.1 erfüllt.

**Beispiel 8.2.5.** Die Newtonpolygone aus (8.1) seien durch  $P_1 = \text{conv}(e_4, 4e_3, 4e_3 + 3e_4, 4e_4)$ ,  $P_2 = e_3 + e_4$  und  $P_3 = e_3$  gegeben.

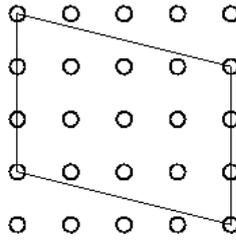


Abbildung 8.3:  $P_1 \cong P$

Dann ist  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , weil jede Ecke und jede Kante von

$$P = \text{conv}(2e_3 + 2e_4, 6e_3 + e_4, 6e_3 + 4e_4, 2e_3 + 5e_4)$$

die Bedingungen (A) und (B) aus Theorem 8.2.1 erfüllt.

**Beispiel 8.2.6.** Die Newtonpolygone aus (8.1) seien Vielfache des 2-dimensionalen Standardsimplex  $\Delta_2$ . Dann ist  $P$  auch ein Vielfaches des 2-dimensionalen Standardsimplex. Jede Kante  $K \subset P$  von  $P$  ist die Summe von 3 Kanten  $K_i \subset P_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Deswegen ist die Bedingung (B) in Theorem 8.2.1 nicht erfüllt, und folglich die zugehörige Brauergruppe trivial.

**Beispiel 8.2.7.** Die Newtonpolygone aus (8.1) seien durch  $P_1 = \text{conv}(0, ke_3)$ ,  $P_2 = \text{conv}(a_1e_3 + a_2e_4, b_1e_3 + b_2e_4)$  und  $P_3 = c_1e_3 + c_2e_4$  mit  $a_2, b_2, c_2, k \equiv 1 \pmod{2}$  gegeben. Wir bezeichnen mit  $\nu_2(n)$  die größte natürliche Zahl  $r \in \mathbb{N}$ , so dass  $n = 2^r q$  mit  $q \in \mathbb{Z}$ .

Wenn  $\nu_2(a_1 - b_1) = \nu_2(a_2 - b_2)$  und  $0 \equiv a_1 \equiv b_1 \not\equiv c_1 \pmod{2}$  gilt, dann ist  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Wenn  $\nu_2(a_1 - b_1) > \nu_2(a_2 - b_2)$  und  $1 \equiv$

$a_1 \equiv b_1 \not\equiv c_1 \pmod{2}$ , dann ist ebenso  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Andernfalls ist die Brauergruppe trivial. Sie ist ebenso trivial, wenn  $a_2 b_2 c_2 k \equiv 0 \pmod{2}$  gilt.

**Beispiel 8.2.8.** Die Newtonpolygone aus (8.1) seien durch  $P_1 = \text{conv}(0, k e_3, z_1 e_3 + z_2 e_4)$ ,  $P_2 = a_1 e_3 + a_2 e_4$  und  $P_3 = b_1 e_3 + b_2 e_4$  mit  $a_2, b_2 \equiv 1 \pmod{2}$  und  $z_2 \equiv 0 \pmod{2}$  gegeben. Wenn  $\nu_2(z_1) > \nu_2(z_2)$  und  $\nu_2(z_1 - k) > \nu_2(z_2)$  und  $a_1 \not\equiv b_1 \equiv 0 \pmod{2}$  ist, dann ist  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Andernfalls ist die Brauergruppe trivial.

Die letzten beiden Beispiele liefern eine Vielzahl von nicht rationalen 3-dimensionalen Varietäten.

### 8.3 Die generische Bedingung

**Definition 8.3.1.** Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein Gitterpolytop. Ein Laurentpolynom

$$f_{\Delta}(t) := \sum_{m \in \Delta \cap M} c_m t^m \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_4^{\pm 1}]$$

heißt  $\Delta$ -regulär, wenn zu jeder Seite  $\theta \subset \Delta$  von  $\Delta$  das Laurentpolynom  $f_{\theta}$  eine glatte Hyperfläche in  $(\mathbb{C}^*)^4$  definiert.

Dies ist äquivalent dazu, dass die durch  $f = 0$  definierte Hyperfläche in der torischen Varietät  $X_{\Sigma(\Delta)}$   $\Sigma(\Delta)$ -regulär ist. Ist  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  ein sauberes Gittersimplex, so ist  $f_{\Delta}$  automatisch  $\Delta$ -regulär.

Das folgende Theorem von Victor Batyrev und Maximilian Kreuzer [BK06] ermöglicht es, die Brauergruppe der generischen torischen Hyperfläche  $W \subset (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{P}^2$  zu bestimmen, die durch die Gleichung  $f_1(x, y)u_0^2 + f_2(x, y)u_1^2 + f_3(x, y)u_2^2 = 0$  gegeben ist, indem wir die Newtonpolygone  $P_i \subset M_{\mathbb{Q}}$  der Polynome  $f_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , betrachten. Da die Brauergruppe eine birationale Invariante ist, reicht es die Hyperfläche  $W \subset (\mathbb{C}^*)^4$  zu betrachten, die durch die Gleichung  $f_1(x, y) + f_2(x, y)u_1^2 + f_3(x, y)u_2^2 = 0$  definiert wird.

**Theorem 8.3.2** (Spezialfall von [BK06], 3.8). *Sei  $W \subset (\mathbb{C}^*)^4$  eine Hyperfläche, die durch das Polynom  $f \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$  gegeben ist. Zusätzlich sei  $f$   $\Delta$ -regulär, wobei  $\Delta$  das Newtonpolytop von  $f$  ist. Dann ist die Brauergruppe  $B(W)$  isomorph zu*

$$\Lambda^2 N / (N \wedge N_{\Delta}^{(2)}),$$

wobei  $N_{\Delta}^{(2)}$  das Untergitter in  $N$  ist, das durch alle ganzzahligen Linearformen  $u \in N$  erzeugt wird, so dass das Minimum von  $u$  auf  $\Delta$  in einer Seite von  $\Delta$  der Dimension  $\geq 2$  angenommen wird.

Die Menge  $\sigma_s$  aller Linearformen, deren Minimum auf  $\Delta$  in einer Seite  $s \subset \Delta$  der Dimension  $\geq 2$  angenommen wird, ist ein 2-dimensionaler Kegel. Er wird von den inneren Normalenvektoren der Facetten von  $\Delta$ , die sich in  $s$  schneiden, aufgespannt. Wir bezeichnen den Fächer, der von all diesen Kegeln erzeugt wird, mit  $\Sigma_{\Delta}^{(2)}$ .

**Korollar 8.3.3.** *Unter den Voraussetzungen von Theorem 8.3.2 gilt genau dann  $B(W) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , wenn  $N/N_{\Delta}^{(2)} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/nk\mathbb{Z}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis.* Sei zunächst  $N/N_{\Delta}^{(2)} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/nk\mathbb{Z}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , d.h. es gibt eine Gitterbasis  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset N$ , so dass  $\{b'_1 := b_1, b'_2 := b_2, b'_3 := nb_3, b'_4 := nkb_4\}$  eine Gitterbasis von  $N_{\Delta}^{(2)}$  ist. Weil  $\{b_i \wedge b'_j : i > j\} = \{b_i \wedge b_j : i > j > 3\} \cup \{b_4 \wedge nb_3\}$  eine Gitterbasis von  $N \wedge N_{\Delta}^{(2)}$  ist, folgt  $B(W) \stackrel{8.3.2}{\cong} \Lambda^2 N / (N \wedge N_{\Delta}^{(2)}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Sei nun  $B(W) \stackrel{8.3.2}{\cong} \Lambda^2 N / (N \wedge N_{\Delta}^{(2)}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Es gibt eine Gitterbasis  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  von  $N$  und eine Gitterbasis  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  von  $N_{\Delta}^{(2)} \subset N$ , so dass  $g_i = \lambda_i f_i \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  und  $\lambda_1 | \lambda_2 | \lambda_3 | \lambda_4$ . Deswegen ist  $\{f_i \wedge g_j : i > j\} = \{f_i \wedge \lambda_j f_j : i > j\}$  eine Gitterbasis von  $N \wedge N_{\Delta}^{(2)}$ . Wir nehmen an, dass  $\lambda_2 \neq 1$  gilt. Dann ist auch  $\lambda_3, \lambda_4 \neq 1$  und somit  $\Lambda^2 N / (N \wedge N_{\Delta}^{(2)})$  nicht zyklisch, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also ist  $\lambda_2 = 1$  und  $\Lambda^2 N / (N \wedge N_{\Delta}^{(2)}) \cong \mathbb{Z}/\lambda_3\mathbb{Z}$ . Daher gilt  $\lambda_3 = n$ . Somit ist  $N/N_{\Delta}^{(2)} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\lambda_4\mathbb{Z}$  mit  $n | \lambda_4$ .  $\square$

Es ist einfach, dieses Korollar zu beliebiger Gitterdimension  $d$  zu verallgemeinern. Aus diesem Grund ist es bewußt dimensions-frei formuliert.

**Definition 8.3.4.** Seien  $\Delta_1, \Delta_2 \subset M_{\mathbb{Q}}$  zwei Gitterpolytope. Zwei Laurentpolynome

$$f_{\Delta_i}(t) = \sum_{m \in \Delta_i \cap M} c_m^{(i)} t^m \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_4^{\pm 1}], \quad i \in \{1, 2\},$$

schneiden sich  $(\Delta_1 + \Delta_2)$ -transversal, wenn sich für jede Seite  $\theta = \theta_1 + \theta_2 \subset \Delta_1 + \Delta_2$  von  $\Delta_1 + \Delta_2$  die Nullstellengebilde der Laurentpolynome  $f_{\theta_i} = \sum_{m \in \theta_i \cap M} c_m^{(i)} t^m$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , nur transversal in  $(\mathbb{C}^*)^4$  schneiden.

**Definition 8.3.5.** Seien  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \subset M_{\mathbb{Q}}$  drei Gitterpolytope. Die Laurentpolynome

$$f_{\Delta_i}(t) = \sum_{m \in \Delta_i \cap M} c_m^{(i)} t^m \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_4^{\pm 1}], \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

schneiden sich  $(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)$ -leer, wenn sich für jede Seite  $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \subset \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$  von  $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$  die Nullstellengebilde der Laurentpolynome  $f_{\theta_i} = \sum_{m \in \theta_i \cap M} c_m^{(i)} t^m$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , nicht in  $(\mathbb{C}^*)^4$  schneiden.

Im Folgenden werden die Ecken des doppelten 2-dimensionalen Standardsimple  $2\Delta_2$  mit  $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)} \in M_1$ , bezeichnet.

**Proposition 8.3.6.** *Sei  $\Delta = \text{conv}(y_{(1)} \times P_1, y_{(2)} \times P_2, y_{(3)} \times P_3)$  das Newtonpolytop zum Polynom*

$$f(x, y, u_1, u_2) = f_1(x, y) + u_1^2 f_2(x, y) + u_2^2 f_3(x, y). \quad (8.2)$$

*Dann ist  $f$  genau dann  $\Delta$ -regulär wenn die Polynome  $f_1, f_2$  und  $f_3$  die folgenden Bedingungen erfüllen:*

- (G1)  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  ist  $f_i$   $P_i$ -regulär.
- (G2)  $\forall i \neq j \in \{1, 2, 3\}$  schneiden sich  $f_i$  und  $f_j$   $(P_i + P_j)$ -transversal.
- (G3)  $f_1, f_2$  und  $f_3$  schneiden sich  $(P_1 + P_2 + P_3)$ -leer.

*Diese Bedingungen sind äquivalent dazu, dass die irreduziblen Komponenten von  $\{f_1 f_2 f_3 = 0\} \cup \bigcup_i C_i$  glatt sind, und ihre Kreuzungen in  $X_P$  nur einfache Doppelpunkte sind. Dabei ist  $\bigcup C_i \cup (\mathbb{C}^*)^2 = X_P$ .*

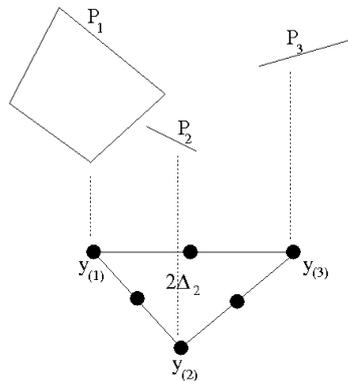


Abbildung 8.4:  $\Delta = \text{conv}(y_{(1)} \times P_1, y_{(2)} \times P_2, y_{(3)} \times P_3)$

Im Folgenden sei  $\pi : M \rightarrow M_1$  die Projektion auf den ersten und  $\pi' : M \rightarrow M_2$  die Projektion auf den zweiten Summand. Die Projektionen von  $N$  seien in der selben Weise bezeichnet. Mit  $x_{(i)} \in N_1$  bezeichnen wir einen Normalenvektor von  $y_{(j)} - y_{(k)}$ , wobei  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  gilt. Sei  $\Delta \subset M_{\mathbb{Q}}$  das 4-dimensionale kombinatorische Cayley-Polytop von  $P_1, P_2, P_3$  über  $2\Delta_2$ , das die konvexe Hülle der Polygone  $y_{(i)} \times P_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  ist, also das Newtonpolytop zum Polynom  $f$  aus (8.2).

*Beweis von Proposition 8.3.6.* Sei  $f$  das Polynom aus (8.2). Zu jeder Seite  $\theta \subset \Delta$  sei  $\mathcal{M}_\theta$  die Menge  $\{f_\theta = \partial_{u_1} f_\theta = \partial_{u_2} f_\theta = \partial_x f_\theta = \partial_y f_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^4$  und

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\theta \subset \Delta} \mathcal{M}_\theta = \bigcup_{\substack{\theta \subset \Delta \\ \dim \pi(\theta)=0}} \mathcal{M}_\theta \cup \bigcup_{\substack{\theta \subset \Delta \\ \dim \pi(\theta)=1}} \mathcal{M}_\theta \cup \bigcup_{\substack{\theta \subset \Delta \\ \dim \pi(\theta)=2}} \mathcal{M}_\theta.$$

Ist  $\theta \subset \Delta$  eine Seite mit  $\pi(\Delta) = y_{(i)}$  – ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $i = 1$  –, dann ist  $f_\theta = (f_1)_\theta$ . Deswegen gilt  $\mathcal{M}_\theta = \{(f_1)_\theta = \partial_x(f_1)_\theta = \partial_y(f_1)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^4$ .

Ist  $\theta \subset \Delta$  eine Seite mit  $\pi(\Delta) = \text{conv}(y_{(i)}, y_{(j)})$  – ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $(i, j) = (1, 2)$  –, dann ist  $f_\theta = (f_1)_\theta + u_1^2(f_2)_\theta$ . Deswegen gilt  $\mathcal{M}_\theta = \{(f_1)_\theta = (f_2)_\theta = \partial_x(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_x(f_2)_\theta = \partial_y(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_y(f_2)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^4$ .

Ist  $\theta \subset \Delta$  eine Seite mit  $\pi(\Delta) = 2\Delta_2$ , dann ist  $f_\theta = (f_1)_\theta + u_1^2(f_2)_\theta + u_2^2(f_3)_\theta$ . Deswegen gilt  $\mathcal{M}_\theta = \{(f_1)_\theta = (f_2)_\theta = (f_3)_\theta = \partial_x(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_x(f_2)_\theta + u_2^2 \partial_x(f_3)_\theta = \partial_y(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_y(f_2)_\theta + u_2^2 \partial_y(f_3)_\theta\} \cap (\mathbb{C}^*)^4$ .

Daher ist  $\mathcal{M}$  die Vereinigung der Mengen

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\substack{i \in \{1,2,3\}, \theta \subset \Delta \\ \pi(\theta) = y_{(i)}}} \{(f_i)_\theta = \partial_x(f_i)_\theta = \partial_y(f_i)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^4, \\ & \bigcup_{\substack{i \in \{1,2,3\}, \theta \subset \Delta \\ \pi(\theta) = \text{conv}(y_{(j)}, y_{(k)})}} \left\{ \begin{aligned} & (f_i)_\theta = (f_j)_\theta = \partial_x(f_i)_\theta + u^2 \partial_x(f_j)_\theta \\ & = \partial_y(f_i)_\theta + u^2 \partial_y(f_j)_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \cap (\mathbb{C}^*)^4 \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\substack{\theta \subset \Delta \\ \pi(\theta) = 2\Delta_2}} \left\{ \begin{aligned} & (f_1)_\theta = (f_2)_\theta = (f_3)_\theta = \partial_x(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_x(f_2)_\theta + u_2^2 \partial_x(f_3)_\theta \\ & = \partial_y(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_y(f_2)_\theta + u_2^2 \partial_y(f_3)_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \cap (\mathbb{C}^*)^4. \end{aligned}$$

Sei nun  $f(x, y, u_1, u_2) = f_1(x, y) + f_2(x, y)u_1^2 + f_3(x, y)u_2^2$   $\Delta$ -regulär, d.h.  $\mathcal{M} = \emptyset$ . Insbesondere gilt dann  $\{(f_i)_\theta = \partial_x(f_i)_\theta = \partial_y(f_i)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \emptyset \forall i \in \{1, 2, 3\}$  für jede Seite  $\theta \subset \Delta$  mit  $\dim \pi(\theta) = 0$ . Also ist  $f_i$   $P_i$ -regulär.

Weiter gilt für  $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} (f_i)_\theta &= (f_j)_\theta = \partial_x(f_i)_\theta + u^2 \partial_x(f_j)_\theta \\ &= \partial_y(f_i)_\theta + u^2 \partial_y(f_j)_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \cap (\mathbb{C}^*)^3 = \emptyset,$$

also sind die Vektoren  $\begin{pmatrix} \partial_x(f_i)_\theta \\ \partial_y(f_i)_\theta \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \partial_x(f_j)_\theta \\ \partial_y(f_j)_\theta \end{pmatrix}$  in  $\{(f_i)_\theta = (f_j)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^2$  nicht zueinander proportional. Dies ist äquivalent dazu, dass in  $\{(f_i)_\theta = (f_j)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^2$  die Determinante von  $\begin{pmatrix} \partial_x(f_i)_\theta & \partial_x(f_j)_\theta \\ \partial_y(f_i)_\theta & \partial_y(f_j)_\theta \end{pmatrix}$  nicht verschwindet. Also schneiden sich  $(f_i)_\theta$  und  $(f_j)_\theta$  nur  $(P_i + P_j)$ -transversal.

Zudem gilt

$$\left\{ \begin{aligned} (f_1)_\theta &= (f_2)_\theta = (f_3)_\theta = \partial_x(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_x(f_2)_\theta + u_2^2 \partial_x(f_3)_\theta \\ &= \partial_y(f_1)_\theta + u_1^2 \partial_y(f_2)_\theta + u_2^2 \partial_y(f_3)_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \emptyset.$$

Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \partial_x(f_2)_\theta & \partial_x(f_3)_\theta \\ \partial_y(f_2)_\theta & \partial_y(f_3)_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x(f_1)_\theta \\ -\partial_y(f_1)_\theta \end{pmatrix}$$

hat wegen obigen Überlegungen eine Lösung in  $\{(f_1)_\theta = (f_2)_\theta = (f_3)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^4$ , weswegen  $\{(f_1)_\theta = (f_2)_\theta = (f_3)_\theta = 0\} \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \emptyset$  gilt, d.h.  $f_1, f_2$  und  $f_3$  schneiden sich  $(P_1 + P_2 + P_3)$ -leer.

Seien nun die Bedingungen (G1), (G2) und (G3) erfüllt. Dann gilt  $\mathcal{M} = \emptyset$ . Deswegen ist  $f(x, y, u_1, u_2) = f_1(x, y) + f_2(x, y)u_1^2 + f_3(x, y)u_2^2$   $\Delta$ -regulär.  $\square$

Im Folgenden seien die Bedingungen (G1),(G2) und (G3) stets erfüllt.

**Korollar 8.3.7.**  $B(W)$  ist trivial genau dann wenn  $N/N_\Delta^{(2)}$  zyklisch ist.

*Beweis.* Wegen Proposition 8.3.6 ist das Polynom  $f(x, y, u_1, u_2)$  aus (8.1)  $\Delta$ -regulär. Mit Korollar 8.3.3 folgt die Behauptung.  $\square$

## 8.4 Der Beweis des Theorems

**Lemma 8.4.1.** Sei  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  und  $a^{(i)} \neq b^{(i)}, a^{(j)}, a^{(k)} \in M_2$ . Wir definieren  $F := \text{aff}\{y_{(i)} \times a^{(i)}, y_{(i)} \times b^{(i)}, y_{(j)} \times a^{(j)}, y_{(k)} \times$

$a^{(k)}\}$ . Dann ist  $m = (-u_F, 2u) \in N$  ein auf  $F$  orthogonaler Vektor, wobei  $u \in N_2$  orthogonal zu  $a^{(i)} - b^{(i)}$  ist, und  $u_F \in N_1$  eine Linearform auf  $M_1$  mit

$$\begin{aligned} \left\langle u_F, \frac{y^{(j)}}{2} \right\rangle - \left\langle u_F, \frac{y^{(i)}}{2} \right\rangle &= \langle u, a^{(j)} \rangle - \langle u, a^{(i)} \rangle \text{ und} \\ \left\langle u_F, \frac{y^{(k)}}{2} \right\rangle - \left\langle u_F, \frac{y^{(i)}}{2} \right\rangle &= \langle u, a^{(k)} \rangle - \langle u, a^{(i)} \rangle \text{ ist.} \end{aligned}$$

Sei  $n \in N$  ein Normalenvektor von  $F$ . Ist  $N_2/\langle \pi'(n) \rangle$  nicht zyklisch, so gilt  $m = \pm n$ .

*Beweis.* Die drei Vektoren  $(0, b^{(i)} - a^{(i)})$ ,  $(y^{(j)} - y^{(i)}, a^{(j)} - a^{(i)})$  und  $(y^{(k)} - y^{(i)}, a^{(k)} - a^{(i)})$  bilden eine affine Basis von  $F$ . Wegen

$$\begin{aligned} \langle 2u, a^{(i)} - b^{(i)} \rangle &= 0 \\ \langle -u_F, y^{(j)} - y^{(i)} \rangle + \langle 2u, a^{(j)} - a^{(i)} \rangle &= 0 \\ \langle -u_F, y^{(k)} - y^{(i)} \rangle + \langle 2u, a^{(k)} - a^{(i)} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

gilt  $m \perp F$ .

Ist  $m \neq \pm n$ , so gilt  $\pi'(n) = u$ . Da jeder primitive Gittervektor von  $N_2$  zu einer Gitterbasis ergänzt werden kann, ist hier  $N_2/\langle \pi'(n) \rangle$  zyklisch.  $\square$

**Lemma 8.4.2.** Sei  $u \in N_1 \setminus 2N_1$ , und  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Wenn  $\left\langle u, \frac{y^{(i)} - y^{(j)}}{2} \right\rangle$  gerade ist, dann gilt  $u + x_{(k)} \in 2N_1$ .

*Beweis.* Wegen  $u, x_{(k)} \notin 2N_1$  und weil  $\left\{ \frac{y^{(i)} - y^{(j)}}{2}, \frac{y^{(i)} - y^{(k)}}{2} \right\}$  eine Gitterbasis von  $M_1$  ist, gilt  $\left\langle u, \frac{y^{(i)} - y^{(k)}}{2} \right\rangle \equiv \left\langle u, \frac{y^{(j)} - y^{(k)}}{2} \right\rangle \equiv 1 \pmod{2}$  und  $\left\langle x_{(k)}, \frac{y^{(i)} - y^{(k)}}{2} \right\rangle \equiv \left\langle x_{(k)}, \frac{y^{(j)} - y^{(k)}}{2} \right\rangle \equiv 1 \pmod{2}$ . Daher ist  $u + x_{(k)} \in 2N_1$ .  $\square$

Die folgende Proposition wird zeigen, dass die Bedingung (B) aus Theorem 8.2.1 notwendig für  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist:

**Proposition 8.4.3.** Sei  $K = K_1 + K_2 + K_3$  eine Kante von  $P$ ,  $K_i \subset P_i, i \in \{1, 2, 3\}$ . Ist mehr als ein Summand  $K_1, K_2$  oder  $K_3$  eine Kante, so ist die Brauergruppe  $B(W)$  trivial.

Wenn genau einer dieser Summanden eine Kante ist und eine der übrigen beiden Ecken eine gerade Höhe über dieser Kante besitzt, dann ist ebenso  $B(W)$  trivial.

In allen Fällen gilt  $N_1 \times 0 \subset N_{\Delta}^{(2)}$ .

*Beweis.* Wegen Korollar 8.3.7 reicht es zu zeigen, dass  $N/N_\Delta^{(2)}$  zyklisch ist. Sei  $K = K_1 + K_2 + K_3$  und  $a^{(i)} \in K_i \cap M_2$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $K_1$  eindimensional mit Normalenvektor  $u \in N_2$ . Wir bezeichnen mit  $m \in N$  einen Normalenvektor der Facette  $F_K = \text{aff}\{y_{(1)} \times K_1, y_{(2)} \times K_2, y_{(3)} \times K_3\} \cap \Delta$ . Wegen Lemma 8.4.1 gilt  $m \sim (-u_{F_K}, 2u)$ , wobei  $u_{F_K} \in N_1$  durch  $\left\langle u_{F_K}, \frac{y_{(1)} - y_{(i)}}{2} \right\rangle = \langle u, a^{(1)} \rangle - \langle u, a^{(i)} \rangle \forall i \in \{2, 3\}$  bestimmt ist.

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Höhe von  $a^{(2)}$  über  $K_1$ , d.h.  $\langle u, a^{(1)} \rangle - \langle u, a^{(2)} \rangle$ , gerade. Dann gilt  $\left\langle u_{F_K}, \frac{y_{(1)} - y_{(2)}}{2} \right\rangle \equiv 0 \pmod{2}$  und folglich wegen Lemma 8.4.2  $u_{F_K} + x_{(3)} \in 2N_1$  oder  $u_{F_K} \in 2N_1$ . Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle:

**Fall 1:**  $\dim(P_1 + P_2) = 2$ .

Wegen Lemma 4.2.11 ist  $F := \pi^{-1}(y_{(1)}, y_{(2)}) \cap \Delta$  eine Facette von  $\Delta$ . Sie enthält die 2-dimensionale Seite  $\text{aff}\{y_{(1)} \times K_1, y_{(2)} \times K_2\} \cap \Delta$ , die auch in der Facette  $F_K$  enthalten ist. Also gilt  $\langle m, x_{(3)} \rangle \in \Sigma_\Delta^{(2)}$ .

**Fall 2:**  $\dim(P_1 + P_2) = 1$ .

Es gibt eine Seite  $K'_3 \subset P_3$  von  $P_3$ , so dass  $K' := K_1 + K_2 + K'_3 \subset P$  eine zu  $K$  parallele Seite von  $P$  ist. Wegen Lemma 4.2.11 ist  $F_{K'} = \text{aff}\{y_{(1)} \times K_1, y_{(2)} \times K_2, y_{(3)} \times K'_3\} \cap \Delta$  eine Facette von  $\Delta$ . Sei  $m'$  ein Normalenvektor von  $F_{K'}$ . Weil  $F_K \cap F_{K'} = \text{aff}\{y_{(1)} \times K_1, y_{(2)} \times K_2\} \cap \Delta$  wegen Lemma 4.2.11 eine 2-dimensionale Seite von  $\Delta$  ist, gilt  $\langle m, m' \rangle \in \Sigma_\Delta^{(2)}$ .

Wegen  $\left\langle u_{F_K} - u_{F_{K'}}, \frac{y_{(1)} - y_{(2)}}{2} \right\rangle = 0$  ist  $u_{F_K} - u_{F_{K'}} = kx_{(3)}$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$ . Somit ist der Vektor  $r := \frac{1}{k}(-u_{F_{K'}}, 2u) + (1 - \frac{1}{k})(-u_{F_K}, 2u) \in \langle m, m' \rangle \cap N$  ganzzahlig und erfüllt  $r = (x_{(3)} - u_{F_K}, 2u) \in \langle m, m' \rangle \in \Sigma_\Delta^{(2)}$ .

In beiden Fällen ist  $x_{(3)} \in N_\Delta^{(2)}$ . Genauso erhalten wir  $x_{(2)} \in N_\Delta^{(2)}$ . Deswegen ist  $N_1 = \pi(N_\Delta^{(2)})$ . Dies gilt unabhängig von Voraussetzungen an Kanten und deren Höhen.

Wir können annehmen, dass  $u_{F_K} \notin 2N_1$  gilt, denn sonst ist  $N_2/\pi'(N_\Delta^{(2)})$  zyklisch. Dann gilt also  $u_{F_K} + x_{(3)} \in 2N_1$ .

Außerdem ist in beiden Fällen  $r := m + x_{(3)} \in N_\Delta^{(2)}$ . Jedoch erfüllt  $\frac{1}{2}r \in N_\Delta^{(2)}$  die Bedingung  $\pi'(r) = u$ . Somit ist  $N/N_\Delta^{(2)}$  zyklisch.

Sei schließlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\dim K_1 = \dim K_2 = 1$ , und die Höhen von  $a^{(1)}$  und  $a^{(3)}$  über  $K_2$  und die Höhen

von  $a^{(2)}$  und  $a^{(3)}$  über  $K_1$  ungerade. Doch dann ist die Höhe von  $a^{(3)}$  über  $K_1$  gleichzeitig gerade und ungerade, ein Widerspruch.  $\square$

Nun zeigen wir, dass auch die Bedingung (A) aus Theorem 8.2.1 notwendig für  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist.

**Proposition 8.4.4.** *Seien  $K, L \subset P$  zwei Kanten von  $P$  mit  $K \cap L = a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} \in P$ ,  $a^{(i)} \in P_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Wenn das normalisierte Volumen von  $\text{conv}(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$  gerade ist, dann ist  $B(W)$  trivial.*

*Beweis.* Seien  $u, v \in N_2$  Normalenvektoren von  $K$  und  $L$ . Wegen Lemma 4.2.11 gibt es Facetten  $F_K, F_L \subset \Delta$  von  $\Delta$  mit  $\dim \pi(F_K) = \dim \pi(F_L) = 2$ . Wegen Proposition 8.4.1 und Proposition 8.4.3, können wir annehmen, dass die Normalenvektoren  $m$  und  $n$  durch  $m = (-u_{F_K}, 2u)$  und  $n = (-v_{F_L}, 2v)$  gegeben sind. Es gibt einen primitiven Gittervektor  $w \in \langle u, v \rangle \cap N_2$ , so dass  $\det(u, w) = 1$  gilt. Dann gilt  $(-w_{F_K}, 2w) \in \langle m, n \rangle$ . Wir nehmen  $w_{F_K} \notin 2N_2$  an. Sei  $K = K_1 + K_2 + K_3$  und  $a^{(i)} \in K_i \cap M_2 \forall i \in \{1, 2, 3\}$ . Wegen

$$\begin{aligned} \pm \text{Vol}\left(\text{conv}(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})\right) &= \det(a^{(2)} - a^{(1)}, a^{(3)} - a^{(1)}) \\ &= \det\left((u, w)^t \cdot (a^{(2)} - a^{(1)}, a^{(3)} - a^{(1)})\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \langle u, a^{(2)} - a^{(1)} \rangle & \langle u, a^{(3)} - a^{(1)} \rangle \\ \langle w, a^{(2)} - a^{(1)} \rangle & \langle w, a^{(3)} - a^{(1)} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \langle u_{F_K}, \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{2} \rangle & \langle u_{F_K}, \frac{y^{(3)} - y^{(1)}}{2} \rangle \\ \langle w_{F_K}, \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{2} \rangle & \langle w_{F_K}, \frac{y^{(3)} - y^{(1)}}{2} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \det\left((u_{F_K}, w_{F_K})^t \cdot \left(\frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{2}, \frac{y^{(3)} - y^{(1)}}{2}\right)\right) \\ &= \det(u_{F_K}, w_{F_K}), \end{aligned}$$

erhalten wir  $u_{F_K} + w_{F_K} \in 2N_1$ . Also gilt

$$\begin{aligned} r &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_{F_K} \\ 2u \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -w_{F_K} \\ 2w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_{F_K} - \frac{1}{2}w_{F_K} \\ u + w \end{pmatrix} \in \langle m, n \rangle \cap N \end{aligned}$$

und  $\det(2u, u+w) = 2$ . Deswegen ist  $\pi'(\langle m, n \rangle) \cap N_2$  ein Untergitter von  $N_2$  vom Index höchstens 2. Da nach Proposition 8.4.3  $N_1 \times 0 \subset N_\Delta^{(2)}$  gilt, ist  $N/N_\Delta^{(2)}$  zyklisch.  $\square$

Nun verbleibt es zu zeigen, dass die Bedingungen (A) und (B) auch hinreichend für  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sind.

*Beweis von Theorem 8.2.1.* Seien  $K, L \subset P$  zwei Kanten von  $P$  mit Normalenvektoren  $u, v \in N_2$  und  $K \cap L = a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)}$ ,  $a^{(i)} \in P_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$ . Wegen den Propositionen 8.4.3 und 8.4.4, können wir annehmen, dass die Bedingungen (A) und (B) erfüllt sind. Also sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $K = K_1 + K_2 + K_3$  mit  $K_1 = \text{conv}(a^{(1)}, b^{(1)}) \subset P_1$ ,  $K_2 = a^{(2)} \in P_2$  und  $K_3 = a^{(3)} \in P_3$ .

Wegen Lemma 4.2.11, gibt es Facetten  $F_K, F_L \subset \Delta$  von  $\Delta$  mit  $\dim \pi(F_K) = \dim \pi(F_L) = 2$ . Wegen Proposition 8.4.1 erfüllen die Normalenvektoren  $m, n \in N$  von  $F_K$  und  $F_L$ :  $m \sim (-u_{F_K}, 2u)$  und  $n \sim (-v_{F_L}, 2v)$  mit  $\langle u, a^{(2)} - a^{(1)} \rangle = \left\langle u_{F_K}, \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{2} \right\rangle$  und  $\langle u, a^{(3)} - a^{(1)} \rangle = \left\langle u_{F_K}, \frac{y^{(3)} - y^{(1)}}{2} \right\rangle$ . Mit (B) folgt

$$\left\langle u_{F_K}, \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{2} \right\rangle \equiv \left\langle u_{F_K}, \frac{y^{(3)} - y^{(1)}}{2} \right\rangle \equiv 1 \pmod{2},$$

und deswegen mit Lemma 8.4.2  $u_{F_K} + x_{(1)} \in 2N_1$ . Also ist  $m = (-u_{F_K}, 2u)$  und genauso  $n = (-v_{F_L}, 2v)$ .

Wegen (A) erhalten wir wie im Beweis von Proposition 8.4.4:  $1 \equiv \text{Vol}(\text{conv}(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})) \equiv \det(u_{F_K}, w_{F_K}) \pmod{2}$ , wobei  $w \in \langle u, v \rangle \cap N_2$  ein primitiver Gittervektor ist, der  $\det(u, w) = 1$  erfüllt. Sei  $r := (-w_{F_K}, 2w) \in \langle m, n \rangle \cap N$ . Der größte gemeinsame Teiler der Minoren der Matrix  $(m, r)$  ist 1, woraus  $\langle \langle m, n \rangle \cap N \rangle = \langle m, r \rangle$  folgt. Deswegen ist  $\pi'(\langle \langle m, n \rangle \cap N \rangle) = 2N_2$ . Aber es gibt noch weitere  $x \in N$ , so dass  $\langle m, x \rangle \in \Sigma_{\Delta}^{(2)}$  gilt. Diese sind jedoch abhängig von den Dimensionen von  $P_1 + P_2$  und  $P_1 + P_3$ :

**Fall 1:** Sei zuerst  $\dim(P_1 + P_2) = \dim(P_1 + P_3) = 2$ .

Dann enthalten  $F_K$  und die Facette  $\pi^{-1}(y_{(1)}, y_{(2)}) \cap \Delta$  eine gemeinsame 2-dimensionale Seite. Also ist  $\langle m, x_{(3)} \rangle \in \Sigma_{\Delta}^{(2)}$ . Genauso gilt  $\langle m, x_{(2)} \rangle \in \Sigma_{\Delta}^{(2)}$ . Aus  $u_{F_K} + x_{(1)} \in 2N_1$  folgt  $u_{F_K} + x_{(2)}, u_{F_K} + x_{(3)} \notin 2N_1$ . Deswegen ist  $\det(u_{F_K}, x_{(2)}) \equiv \det(u_{F_K}, x_{(3)}) \equiv 1 \pmod{2}$ , und der größte gemeinsame Teiler der Minoren der Matrizen  $(m, x_{(2)})$  und  $(m, x_{(3)})$  ist jeweils 1. Somit gilt  $\langle \langle x_{(2)}, m \rangle \cap N \rangle = \langle x_{(2)}, m \rangle$  und  $\langle \langle x_{(3)}, m \rangle \cap N \rangle = \langle x_{(3)}, m \rangle$ . Mit Lemma 4.2.11 erkennen wir  $\pi'(\langle \sigma \cap N : \exists 0 \neq x \in N \sigma = \langle m, x \rangle \in \Sigma_{\Delta}^{(2)} \rangle) = 2N_2$ .

**Fall 2:** Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\dim(P_1 + P_2) = 1$ .

Dann ist  $K_1 = P_1$  und  $K = P_1 + P_2 + K_3$  mit  $\dim P_2 = \dim K_3 = 0$ .

Es gibt eine Seite  $K'_3 \subset P_3$ , so dass  $K' = P_1 + P_2 + K'_3$  eine zu  $K$  parallele Seite von  $P$  ist. Wie zuvor ist der Normalenvektor  $m'$  von  $F_{K'}$  durch  $m' = (-u_{F_{K'}}, 2u)$  gegeben, wobei  $\left\langle u_{F_K} - u_{F_{K'}}, \frac{y(1)-y(2)}{2} \right\rangle = 0$  gilt. Deswegen ist  $u_{F_K} - u_{F_{K'}} = kx_{(3)}$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$ . Der Vektor  $r := \frac{1}{k}m' + (1 - \frac{1}{k})m \in \langle m, m' \rangle$  ist ganzzahlig, erfüllt  $r = (x_{(3)} - u_{F_{K'}}, 2u)$  und ist somit primitiv. Der größte gemeinsame Teiler der Minoren der Matrix  $(m, r)$  ist 1, und es gilt  $\pi'(r) = 2u$ . Also ist  $\pi'(\langle \langle m, m' \rangle \cap \Delta \rangle) = \pi'(\langle m, r \rangle) = 2N_2$ .

Wegen Lemma 4.2.11, gilt  $\pi'(\langle \sigma \cap N : \exists 0 \neq x \in N \sigma = \langle m, x \rangle \in \Sigma_{\Delta}^{(2)} \rangle) = 2N_2$ .

Da dies für jeden Normalenvektor gilt, folgt  $\pi'(N_{\Delta}^{(2)}) = 2N_2$ . Zusammen mit  $\pi(N_{\Delta}^{(2)}) = N_1$  führt dies auf  $N/N_{\Delta}^{(2)} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Wegen Korollar 8.3.3 gilt nun  $B(W) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  $\square$

# Index

- $h^*$ -Polynom, 37–41, 127
- Äquivalenz von Gitterpolytopen, 29
- 1-Parametergruppe, 11
- 1-Zykel, 63
  
- Algebraischer Torus, 11
- Aufblasung, 21, 54
- Auflösung von Singularitäten, 54–56, 59, 117
  
- Bahn-Kegel-Korrespondenz, 16
- Baryzentrische Unterteilung, 22, 33
- Brauergruppe, 164
  
- Canonical Model, 71, 81, 112
- Cayley-Polytop, 93–95, 106, 126, 127, 131–133, 139, 141, 142, 145
- Charakter, 11
- Circuit, 142
  
- Dach, 58, 78, 79
- Del-Pezzo-Fläche, 138
- Divisor
  - $\mathbb{Q}$ -Cartier-Divisor, 52
  - $\mathbb{Q}$ -Divisor, 52
  - $\mathbb{Q}$ -Hauptdivisor, 52
  - $\Sigma$ -regulär, 135, 169
  - $\Sigma$ -regulärer, 107–109, 114, 116
  - ample, 47
  - basispunktfreier, 45
  - nef, 62
  - numerisch trivial, 63
  - sehr ample, 47
  - torisch terminaler, 108–110, 112
  
- Ecke, 27
- Ehrhart-Polynom, 36, 39
- Enrique-Fläche, 137, 155
- Enriques-Kodaira-Klassifikation, 70
- Extremalstrahl, 74
- Exzeptioneller Ort, 54
  
- F-Inneres, 154, 155, 157, 159
- Fächer, 15
  - Fano, 79, 85, 89, 126
  - glatter, 16, 86
  - kanonischer, 57
  - projektiver, 49, 85
  - terminaler, 57, 81, 85, 127
  - Träger eines, 15
  - vollständiger, 16
- Facette, 13, 27
- Fine-Inneres, 154
- Flip, 71, 78, 105
- Formel von Pick, 42
  
- Geometrisches Geschlecht, 58, 125, 135
- Gewichtet projektiver Raum, 20
- Gittermonoid, 13
  - saturiert, 14
- Gitterpolytop, 27
  - Cograd eines, 41
  - Grad eines, 39, 125
  - normales, 30

- reflexives, 28, 137
- sauberes, 127, 130–132, 134
- sehr ample, 30
- unimodulares, 29
- white, 139
- Gitterpyramide, 126
- Globaler Schnitt, 44
- Godeaux-Fläche, 137
- Gorenstein-Index, 55
  
- Hütte, 57, 58
- Hirzebruchfächer, 47
- Hirzebruchfläche, 47, 71
  
- K3-Fläche, 137, 155
- Kanonischer Ring, 112
- Kante, 27
- Kegel
  - Dimension eines, 13
  - dualer, 13
  - glatter, 16
  - kanonischer, 56
  - polyhedraler, 12
  - Seite eines, 13
  - spitzer, 12
  - terminaler, 56, 130
  - volldimensionaler, 13
- Klassengruppe, 22, 23
- Kleiman-Kriterium, 67
  - relatives, 67
- Kodaira-Dimension, 59, 112
- Konik-Bündel, 136, 154, 160, 163, 164
  
- Lüroth-Problem, 163
- Laurentpolynom
  - $\Delta$ -leer, 171
  - $\Delta$ -regulär, 169, 171
  - $\Delta$ -transversal, 170
- Lawrence-Polytop, 126
- Lemma von Gordan, 13
- Lineare Äquivalenz, 22
- Linienbündel, 44
  - Grad eines, 61
  
- Lokale Projektion, 95
  
- Minimal Model, 71, 81, 107, 114, 117, 121–123
  - mit Abundance, 112
- Minkowski-Summe, 27
- Mori fibre space, 70
- Mori-Extremalstrahl, 74, 88
- Mori-Kegel, 63, 64, 73
- Morphismus
  - abgeschlossener, 53
  - projektiver, 65–68
  - proper, 53, 54, 66
  - torischer Varietäten, 12
  - von Fächern, 15, 54
  
- Nef-Kegel, 64
- Newtonpolytop, 117, 135, 165, 169, 171
- Normalenfächer, 31
- Numerische Äquivalenz, 63, 64, 73, 93, 95
  
- Oda-Park-Unterteilung, 65, 117
  
- Picard-Zahl, 23, 113
- Picardgruppe, 23, 61
- Plurigenus, 58
- Polyeder, 26
- Polytop, 26
  - Dimension eines, 26
  - duales, 27
  - einfaches, 28, 93
  - glattes, 31
  - Inneres eines, 27
  - Rand eines, 27
  - Seite eines, 26
  - simpliziales, 28
  - Träger eines, 90
- Primitive Menge, 17, 86
- Pullback-Divisor, 54
- Push-Forward-Morphismus, 63
  
- Raum der globalen Schnitte, 45, 117

- 
- Regelfläche, 70  
Relevanter Halbraum, 117, 120  
Reziprozitätsgesetz von Ehrhart,  
40
- Satz von  
Castelnuovo, 69  
Ehrhart, 36  
Hensley, 125  
Hironaka, 59  
Howe, 127  
Lüroth, 163  
Lagarias-Ziegler, 125  
Scott, 125
- Schnittprodukt, 61  
Simplex, 28  
Simplizialer Vektor, 153, 158,  
161
- Singularitäten  
kanonische, 55, 57, 70, 81  
log terminale, 55, 56  
terminale, 55, 57, 59, 70,  
81, 83
- Stückweise lineare Funktion, 25  
konvexe, 42, 43, 45  
strikt konvexe, 42, 43, 48,  
49, 66, 86
- Standardsimplex, 29  
Standardtorus, 11  
Stern, 16, 75  
Strahlen, 13
- Torische Varietät, 12  
Torisches Chow Lemma, 66  
Transformierte eines Divisors,  
54, 108–110, 112, 164
- Unimodulare Transformation,  
29
- Unterteilung, 53
- Varietät  
Q-faktorielle, 52  
vom allgemeinen Typ, 59  
faktorielle, 51  
Fano, 79  
global Q-faktorielle, 52  
global faktorielle, 51  
normale, 14  
rationale, 71, 163, 165  
unirationale, 163  
vollständige, 54  
zu einem Fächer, 15
- Vollständiges Linearsystem, 35  
Volumen, 27  
normalisiertes, 27
- Wand, 15, 71, 78



# Literaturverzeichnis

- [AM72] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **25** (1972), 75–95.
- [Ark80a] J.R. Arkininstall, *Minimal requirements for Minkowski's theorem in the plane I*, Bull. Aust. Math. Soc. **22** (1980), 259–274.
- [Ark80b] ———, *Minimal requirements for Minkowski's theorem in the plane II*, Bull. Aust. Math. Soc. **22** (1980), 275–283.
- [Aud91] M. Audin, *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math. 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [Bat91] V.V. Batyrev, *On the classification of smooth projective toric varieties*, Tohoku Math J. **43** (1991), 569–585.
- [Bat94] ———, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebr. Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535.
- [Bat06] ———, *Lattice polytopes with a given  $h^*$ -polynomial*, Athanasiadis, C.A. (ed.), AMS, Contemp. Math., 2006, pp. 1–10.
- [BGT97] W. Bruns, J. Gubeladze, and N.V. Trung, *Normal polytopes, triangulations, and Koszul algebras*, J. Reine Angew. Math. **485** (1997), 123–160.
- [BH75] E. Bombieri and D.H. Husemoller, *Classification and embeddings of surfaces*, Proc. Symp. Pure Math. **29** (1975), 329–420.
- [BK06] V.V. Batyrev and M. Kreuzer, *Integral cohomology and mirror symmetry for Calabi-Yau 3-folds*, Mirror symmetry V, AMS/IP Stud. Adv. Math. 38, 255–270, 2006.

- [BN07] V. Batyrev and B. Nill, *Multiples of lattice polytopes without interior lattice points*, Mosc. Math. J. **7** (2007), no. 2, 195–207.
- [BPVdV84] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Bd. 4. Springer-Verlag, Berlin, x, 1984.
- [CG72] C.H. Clemens and P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Matematika, Moskva **16** (1972), no. 6, 3–32.
- [CLS91] D. Cox, J. Little, and H. Schenck, *Toric Varieties*, <http://www.cs.amherst.edu/~dac/toric.html>, 1991.
- [Cox95] D.A. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 1, 17–50.
- [Cox03] D. Cox, *What is a toric variety?*, Providence, RI: AMS. Contemp. Math. 334, 203–223, 2003.
- [CTO89] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: Au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), no. 1, 141–158.
- [Dan78] V.I. Danilov, *Geometry of toric varieties*, Russ. Math. Surv. **33** (1978), no. 2, 97–154.
- [Deb01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry.*, Universitext. Springer-Verlag, New York, xiii, 2001.
- [Fra06] M. Franz, *Convex – a Maple package for convex geometry, version 1.1*, available at <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~franz/convex/>, 2006.
- [FS04] O. Fujino and H. Sato, *Introduction to the toric Mori theory*, Mich. Math. J. **52** (2004), no. 3, 649–665.
- [Ful89] W. Fulton, *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. xix, 1989.
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics. 52. : Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, xvi, 1977.

- 
- [Hen83] D. Hensley, *Lattice vertex polytopes with interior lattice points*, Pac. J. Math. **105** (1983), 183–191.
- [HZ00] Ch. Haase and G.M. Ziegler, *On the maximal width of empty lattice simplices*, Eur. J. Comb. **21** (2000), no. 1, 111–119.
- [IM71] V.A. Iskovskikh and Yu.I. Manin, *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem*, Mat. Sbo. Novaya Seriya **86** (1971), 140–166.
- [Ish99a] S. Ishii, *The minimal model theorem for divisors of toric varieties*, Tohoku Math. J., II. Ser. **51** (1999), no. 2, 213–226.
- [Ish99b] ———, *The minimal model theorem for divisors of toric varieties*, Tohoku Math. J., II. Ser. **51** (1999), no. 2, 213–226.
- [Isk91] V.A. Iskovskikh, *Towards the problem of rationality of conic bundles*, Algebraic geometry, Lect. Notes Math. 1479, 50–56, 1991.
- [Isk96] ———, *A rationality criterion for conic bundles*, Sb. Math. **187** (1996), no. 7, 1021–1038.
- [Izm03] I. Izmostiev, *Einführung in die Konvergeometrie*, Vorlesungsskript, FU Berlin, 2003.
- [Kho78] A.G. Khovanskii, *Newton polyhedra and the genus of complete intersections*, Funct. Anal. Appl. **12** (1978), no. 1, 38–46.
- [Kho97] ———, *Newton polygons, curves on torus surfaces, and the converse Weil theorem*, Russian Math. Surveys **52** (1997), 1251–1279.
- [Koe91] R.J. Koelmann, *The number of moduli of families of curves on toric surfaces*, Proefschrift, 1991, Katholieke Universitet te Nijmegen.
- [KS04] M. Kreuzer and H. Skarke, *PALP: A package for analyzing lattice polytopes with applications to toric geometry*, Computer Phys. Comm. **157** (2004), 87–106.

- [LZ91] J.C. Lagarias and G.M. Ziegler, *Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice*, Can. J. Math. **43** (1991), no. 5, 1022–1035.
- [Mat02] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext. Springer-Verlag, New York, xxiii, 2002.
- [MS84] D.R. Morrison and G. Stevens, *Terminal quotient singularities in dimensions three and four*, Proc. Am. Math. Soc. **90** (1984), 15–20.
- [Mus94] I.M. Musson, *Differential operators on toric varieties*, J. Pure Appl. Algebra **95** (1994), no. 3, 303–315.
- [Oda88] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Bd. 15. Springer-Verlag, Berlin. viii, 1988.
- [OP91] T. Oda and H.S. Park, *Linear Gale transforms and Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decompositions*, Tohoku Math. J. **43** (1991), 375–399.
- [Rei80] M. Reid, *Canonical 3-folds*, Journées de géométrie algébrique d’Angers, 273–310, 1980.
- [Rei83a] ———, *Decomposition of toric morphisms*, Arithmetic and geometry, Pap. dedic. I. R. Shafarevich, Vol. II: Geometry, Prog. Math. 36, 395–418, 1983.
- [Rei83b] ———, *Minimal models of canonical 3-folds*, Algebraic varieties and analytic varieties, Proc. Symp., Tokyo 1981, Adv. Stud. Pure Math. 1, 131–180, 1983.
- [Rei87] ———, *Young person’s guide to canonical singularities*, Algebraic geometry, Proc. Symp. Pure Math. 46, part 1, 345–414, 1987.
- [Rez06] B. Reznick, *Clean lattice tetrahedra*, Preprint, 2006, math.CO/0606227v1.
- [SAV<sup>+</sup>65] I.R. Shafarevich, B.G. Averbukh, J.R. Vajnberg, A.B. Zizhchenko, Yu.I. Manin, B.G. Mojshezon, G.N. Tyurina, and A.N. Tyurin, *Algebraische Flächen*, Tr. Mat. Inst. Steklova **75** (1965).

- [Sca85] H.E. Scarf, *Integral polyhedra in three space*, Math. Oper. Res. **10** (1985), 403–438.
- [Sch03] J. Schicho, *Simplification of surface parametrizations – a lattice polygon approach*, J. Symb. Comput. **36** (2003), no. 3-4, 535–554.
- [Sco76] P.R. Scott, *On convex lattice polygons*, Bull. Aust. Math. Soc. **15** (1976), 395–399.
- [Seb99] A. Sebő, *An introduction to empty lattice simplices*, Integer programming and combinatorial optimization. Springer-Verlag, Berlin. Lect. Notes Comput. Sci. 1610, 400–414, 1999.
- [Sen10] M. Senger, *Einführung in die Theorie der Gitterpolytope*, Zulassungsarbeit, Universität Tübingen, 2010.
- [Sha96] I.R. Shafarevich, *Algebraic geometry II. Cohomology of algebraic varieties. Algebraic surfaces*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences. 35. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Tre10] J. Treutlein, *Lattice polytopes of degree 2*, Journal of Comb. Theory, Series A **117** (2010), no. 3, 354–360.
- [Whi64] G.K. White, *Lattice tetrahedra*, Can. J. Math. **16** (1964), 389–396.
- [Zie95] G.M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics. Vol. 152. Springer-Verlag, Berlin. ix, 1995.



## Appendix – Lebenslauf

25.10.1980	geboren in Reutlingen
1987-1991	Besuch der Hohbuchschole in Reutlingen
1991-2000	Besuch des Johannes-Kepler-Gymnasiums in Reutlingen
2000	Abitur am Johannes-Kepler-Gymnasium in Reutlingen
2000-2001	Zivildienst im Treffpunkt für Ältere, Bruderhaus-Diakonie Reutlingen
2001-2006	Mathematikdiplomstudium mit Nebenfach Physik an der Universität Tübingen
2003-2006	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen
2006	Diplomarbeit über “Endlichkeitssätze für Gitterpolytope”, betreut von Prof. Dr. V. Batyrev
Oktober 2006	Diplom in Mathematik an der Universität Tübingen, Beginn der Promotion, betreut von Prof. Dr. V. Batyrev
2008-2009	Lehrauftrag an der BA Stuttgart
seit Oktober 2006	Wissenschaftlicher Angestellter im Arbeitsbereich Algebra am Mathematischen Institut der Universität Tübingen

### **Zu meinen akademischen Lehrern in Mathematik gehören:**

V. Batyrev, J. Hausen, W. Kaup, W. Knapp, C. Lubich, R. Nagel, P. Schmid, H. Yserentant