

Visualisierung der Relativitätstheorie

Koordinatenfreie und interaktive Werkzeuge

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Corvin Zahn
aus Stuttgart

Tübingen, 2008

Tag der mündlichen Prüfung: 7.12.2007

Dekan:

Prof. Dr. Nils Schopohl

1. Berichterstatter:

Prof. Dr. Jörg Frauendiener

2. Berichterstatter:

Prof. Dr. Daniel Weiskopf

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Übersicht	9
1.1	Motivation und Zielsetzung	9
1.2	Aufbau der Arbeit	10
1.3	Koordinatenfreie und interaktive Werkzeuge	10
1.3.1	Lokale und globale Sichtweise	10
1.3.2	Interaktivität	11
1.3.3	Repräsentation der Raumzeit	11
1.3.4	Die Werkzeuge im Einzelnen und ihre Anwendungsbereiche	11
1.4	Die Projekte	12
I	Projekte	15
2	Rollende Räder	17
2.1	Wie sieht ein fast lichtschneller Körper aus?	17
2.2	Lichtlaufzeiteffekte	19
2.2.1	Spezialfall: auf die Kamera zu- oder von ihr wegbewegtes Objekt	21
2.2.2	Spezialfall: tangential vorbeibewegtes Objekt	21
2.2.3	Die Lichtlaufzeiteffekte	22
2.3	Relativistisches Fahrrad	22
2.4	Ruhende, rotierende und rollende Räder	24
2.5	Schneller als sein Schatten	26
2.6	Modellparameter	26
3	Relativistischer Flugsimulator	27
3.1	Problemstellung	27
3.2	Das Projekt	28
3.3	Anwendungen	29
3.3.1	Visualisierung allgemeinrelativistischer Simulationen	29
3.3.2	Didaktik und Öffentlichkeitsarbeit	29
3.3.3	Drehbuch	29
3.4	Überblick über das Verfahren	29
3.4.1	Raytracing	30
3.4.2	Repräsentation der Raumzeit im Rechner	31
3.4.3	Geodäten in Regge-Raumzeiten	31
3.4.4	Implementierung	32
3.4.5	Szenenbeschreibungssprache	32
3.5	Ergebnisse	33
3.5.1	Die erste Szene: senkrechte Stäbe	33
3.5.2	Das Wurmloch von außen	35
3.5.3	Durchflug	35

3.5.4	Die zweite Szene: parallele Stäbe	41
3.6	Fazit	47
4	Wir basteln ein Schwarzes Loch	49
4.1	Einleitung	49
4.2	Regge-Calculus	50
4.3	Pappmodell des Schwarzen Lochs	51
4.4	Visualisierung des Riemantensors	55
4.5	Experimente	57
4.5.1	Geodäten	57
4.5.2	Paralleltransport – geodätische Präzession	59
4.6	Warum kann man nicht einfach einen gekrümmten Raum abbilden?	60
4.7	Ausblick	60
5	Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch	63
5.1	Kann man in ein verdampfendes Schwarzes Loch hineinfallen, bevor...? . .	63
5.2	Die Metrik	64
5.2.1	Schwarzschildartige Modellmetrik	64
5.2.2	Kombinierte Vaidya-Metriken	65
5.3	Die einzelnen Metriken	67
5.3.1	Zusammenhang mit „Standardkoordinaten“	68
5.3.2	Ereignishorizont	68
5.3.3	Massenfunktion	69
5.4	Geodäten	70
5.4.1	Vaidya-Metrik für einlaufende Strahlung	71
5.4.2	Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung	71
5.4.3	Lichtkegel	72
5.5	Zusammensetzen der Metriken	72
5.5.1	Strahlungszonenmodell	74
5.5.2	Transformation von Vektoren auf \mathcal{D} zwischen II und III	74
5.6	Globale Koordinaten	75
5.6.1	Globale V - r -Koordinaten	75
5.6.2	Globale \tilde{V} - r -Koordinaten	76
5.6.3	T - r -Koordinaten	76
5.7	Der Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch	77
5.7.1	Verlauf der Geodäten	77
5.7.2	Fazit	78
6	Lichtkurven von Röntgenpulsaren	85
6.1	Röntgenpulsare	85
6.2	Lichtablenkung	87
6.3	Raytracing als Methode zur Berechnung von Pulsprofilen	87
6.3.1	Berechnung der Lichtkurven	87
6.3.2	Visualisierung	92
6.3.3	Validierung	92
6.4	Anwendung: Modell für einen Röntgenpulsar mittlerer Leuchtkraft	92
6.4.1	Modell der Akkretionssäule	93

6.4.2	Modellparameter	94
6.4.3	Strahlungscharakteristiken der einzelnen Komponenten	95
6.4.4	Modell 1: Isotrope Emission	96
6.4.5	Modell 2: Gerichtete Emission	98
6.5	Zusammenfassung und Ausblick	98
II Grundlagen		101
7 Grundlagen		103
7.1	Mathematische Grundbegriffe der allgemeinen Relativitätstheorie	103
7.1.1	Notation	103
7.1.2	Raumzeit	103
7.1.3	Koordinatensysteme	103
7.1.4	Tangentialraum	104
7.1.5	Dualraum	104
7.1.6	Koordinatenbasis	104
7.1.7	Tensoren	104
7.1.8	Metrik	105
7.1.9	Tetraden	105
7.1.10	Paralleltransport und kovariante Ableitung	105
7.1.11	Geodäten	106
7.1.12	Lichtausbreitung	106
7.1.13	Riemanntensor	106
7.1.14	Einsteinsche Feldgleichungen	107
7.2	Die Schwarzschildmetrik	107
7.2.1	Metrik	107
7.2.2	Lichtausbreitung	108
7.3	Das Morris-Thorne-Wurmloch	109
7.3.1	Metrik und Topologie	109
7.3.2	Energieimpulstensor	109
7.3.3	Einbettungsdiagramm	110
7.4	Regge-Calculus	110
7.4.1	Die Regge-Zerlegung	110
7.4.2	Geodäten	112
III Methoden		113
8 d-dimensionales Raytracing		115
8.1	Das Prinzip	115
8.2	Das Verfahren im Einzelnen	117
8.2.1	Die Kamera	117
8.2.2	Der Beobachter	118
8.2.3	Die Photonenbahn	118
8.2.4	Objekte	119
8.2.5	Spektrum	119

8.2.6	Schatten	120
8.2.7	Die Photonenbahn (zum zweiten)	121
8.2.8	Das Pixel	121
8.2.9	Das Bild	121
8.2.10	Der Film	121
8.2.11	Anzeige des Live-Bildes	121
8.3	Optimierung	121
9	Triangulierung d-dimensionaler Räume	123
9.1	Triangulierungen	123
9.2	Datenstrukturen	124
9.2.1	Bezeichnungen	124
9.2.2	Vertexdatenstruktur	125
9.2.3	Simplexdatenstruktur	125
9.2.4	Celldatenstruktur	125
9.2.5	Container	125
9.2.6	Raumzeit	125
9.3	Dimensionsunabhängiger Triangulierungsalgorithmus	125
9.4	Algorithmen zur Topologieänderung	127
9.4.1	Zusammennähen zweier Ränder	127
9.4.2	Vereinigen zweier Vertizes	127
9.5	Konsistenz	129
9.6	Geometrische Struktur	129
9.6.1	Wahl der Gitterpunkte	129
9.6.2	Vertexkoordinaten	129
9.6.3	Kantenlängen	130
9.6.4	Metrik	130
9.7	Koordinatensysteme	130
9.7.1	Globale Koordinaten	131
9.7.2	Simplexkoordinatensystem	131
9.7.3	Metrik innerhalb eines Simplexes	131
9.7.4	Koordinatentransformation zwischen originaler und Regge-Raumzeit	132
9.7.5	Koordinatentransformation zwischen zwei Simplizes	133
9.8	Geodäten in Regge-Raumzeiten	137
9.9	Objekte in der Regge-Raumzeit	139
9.9.1	Datenstrukturen	140
9.9.2	Darstellbare Objekte	140
9.9.3	Schnittpunktsuche	141
10	Tests des Regge-Raytracers	143
11	Implementierung des relativistischen Flugsimulators	147
11.1	Übersicht über die Komponenten	147
11.2	Implementierungen auf verschiedenen Systemen	149
11.3	Programmstruktur des <code>flachland_servers</code>	149
11.4	Speichern der Welt	150
11.5	Bedienung des Flugsimulators	150

11.5.1	Installation	150
11.5.2	Programmstart	150
11.5.3	Bedienung	152
11.5.4	Tastenbelegung	152
11.6	Szenenbeschreibungssprache	153
11.6.1	Sprache	153
11.6.2	Flugsimulatorspezifische Erweiterungen	153
11.6.3	Beispiel	156
12	Untersuchte Welten	159
12.1	Zwei- und dreidimensionaler euklidischer Raum	159
12.1.1	Kartesishe Koordinaten	159
12.1.2	Kugelkoordinaten	159
12.2	Zweidimensionaler Raum konstanter positiver Krümmung	160
12.3	Dreidimensionaler Raum konstanter positiver Krümmung	160
12.4	Zweidimensionales Wurmloch	161
12.5	Dreidimensionales Wurmloch	161
12.6	Schwarzschildmetrik	162
12.7	Vaidya-Metrik	163
12.7.1	Vaidya-Metrik für einlaufende Strahlung	163
12.7.2	Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung	164
	Literaturverzeichnis	167

1 Einführung und Übersicht

1.1 Motivation und Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Grundlagen der Relativitätstheorie besser zu verstehen (ein ganz egoistisches Motiv). Sie ist Teil des D4-Teilprojekts *Visualisierung vierdimensionaler gekrümmter Raumzeiten* des SFB 382¹.

Ein Problem beim Verständnis der Relativitätstheorie besteht darin, dass sie einerseits Aussagen über grundlegende Konzepte unseres Alltags, Raum und Zeit, macht, andererseits diese Aussagen in einer wenig anschaulichen, weil mathematischen Sprache formuliert.

Verständnis, das über bloßes „Ausrechnen können“ hinausgeht, muss auf Fähigkeiten, Begriffen, Schlussfolgerungen und Vorstellungen beruhen, die durch lebenslange Alltagserfahrungen *Bedeutung* gewonnen haben, also z. B. auf Sinneseindrücken wie Sehen, Tasten und Hören, auf räumlichem Vorstellungsvermögen oder auf elementaren visuellen Mustererkennungsfähigkeiten wie dem Erkennen räumlicher Tiefe.

D. h. die Frage lautet, ob man zu einem tieferen Verständnis der Relativitätstheorie kommen kann, wenn man nur mit Hilfe dieser Alltagsmethoden und Sinne einfache Modelle unserer Raumzeit erforscht. Erforschen ist hier gemeint im Sinne von Betrachten, Betasten, Puzzeln, interaktiv Erkunden (also kurz gesagt durch Spielen).

Mit dieser Arbeit wird der Versuch gemacht, sich mit verschiedenen Ansätzen von verschiedenen Seiten an ein solches Verständnis heranzutasten. Dabei werden unterschiedliche Seiten oder Aspekte der Relativitätstheorie beleuchtet, wie Raum, Zeit, flacher Raum versus gekrümmter Raum, Kausalstruktur oder Sehen versus Messen.

In unserer Erfahrungswelt gibt es keine Koordinatensysteme; wir erfassen unsere Umwelt über visuelle Eindrücke, wir bestimmen die Größe eines Gegenstandes durch haptische Interaktion mit einem Meterstab, ein Blick auf unsere Armbanduhr misst mehr oder weniger zuverlässig die verstreichende Eigenzeit am Ort unseres Körpers. Die für konkrete Berechnungen physikalischer Prozesse unerlässlichen koordinatenbasierten Darstellungen sind für ein intuitives Verständnis eher hinderlich, man denke beispielsweise an die verbreiteten Fehlvorstellungen zu Schwarzen Löchern.

Ein wichtiges Ziel dieser Arbeit war daher, *koordinatenfreie* Darstellungen relativistischer Phänomene zu entwickeln, wie die (auch interaktive) Visualisierung aus der Ich-Perspektive, maßstabgetreue, „anfassbare“ 3D-Modelle gekrümmter Räume oder die zeichnerische Darstellung globaler Kausalstrukturen.

Die Vielfalt der aus der Alltagserfahrung heraus „ungewohnten“ Auswirkungen der Relativitätstheorie spiegelt sich in einer Anzahl unabhängiger Projekte wieder, die aus unterschiedlichen Perspektiven einzelne Aspekte deutlich machen.

Der gemeinsame Nenner dieser Projekte ist die *Koordinatenfreiheit* der jeweiligen Sichtweisen auf das physikalische Problem.

¹Sonderforschungsbereich 382, Verfahren und Algorithmen zur Simulation physikalischer Prozesse auf Höchstleistungsrechnern an den Universitäten Tübingen und Stuttgart, 1994–2006, <http://www.uni-tuebingen.de/uni/opx/>.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die genannten Aspekte wurden anhand verschiedener exemplarischer Fragestellungen in fünf eigenständigen Projekten (Abschnitt 1.4, S. 12) untersucht. Die Projekte und ihre physikalischen Ergebnisse stehen im Mittelpunkt der Arbeit und werden im ersten Teil (*Projekte*, Kapitel 2 bis 6) vorgestellt. Für die einzelnen Projekte wurde eine Reihe von Werkzeugen entwickelt, die auf verschiedene Weise koordinatenfreie Darstellungen verwirklichen. In den Projektkapiteln werden die Grundprinzipien dieser Werkzeuge sowie ihre Anwendung im konkreten Projekt erläutert. Da die den Werkzeugen zugrunde liegenden Verfahren meist in mehreren Projekten genutzt wurden, verzichte ich in den Projektkapiteln auf eine genauere Darstellung und verweise auf den dritten Teil der Arbeit. Im zweiten Teil (*Grundlagen*, Kapitel 7) werden kurz die mathematischen und physikalischen Grundlagen angerissen. Der dritte Teil schließlich (*Methoden*, Kapitel 8 bis 12) baut auf den Projektkapiteln auf und beschreibt im Detail die für die einzelnen Projekte neu entwickelten Methoden und Algorithmen sowie Daten- und Programmstrukturen.

1.3 Koordinatenfreie und interaktive Werkzeuge

Ich möchte hier anhand verschiedener Kriterien einen kurzen Überblick über das aus der Vielfalt der untersuchten Aspekte resultierende Spektrum an entwickelten Werkzeugen und Methoden sowie über die dahinterstehenden gemeinsamen Konzepte geben.

1.3.1 Lokale und globale Sichtweise

Wir können zwei Sichtweisen auf eine relativistische Fragestellung unterscheiden: Einerseits eine lokale Sichtweise, in der wir versuchen, die Besonderheiten eines relativistischen Szenarios in einer gegebenen Raumzeit zu erfassen, indem wir uns *in* dieser Raumzeit aufhalten, uns aus einer Ich-Perspektive eine *lokale* Sicht der Umgebung schaffen und eventuell durch *Herumreisen* einen Gesamteindruck zu gewinnen suchen. Andererseits können wir einen globalen Standpunkt einnehmen, die Raumzeit *von außen* betrachten und versuchen, die Struktur der Raumzeit als Ganzes zu erfassen.

Zur lokalen Sichtweise gehören Werkzeuge, die es erlauben, von einem gegebenen Punkt in der Raumzeit mit einer virtuellen Kamera ein Bild zu machen. Ein solches Bild ist per se koordinatenfrei und entspricht unserem gewohnten Zugang zu unserer Umwelt, nämlich uns in einer neuen Umgebung einfach mal umzuschauen. Als Verfahren eignet sich hierzu eine Erweiterung des aus der Computergrafik bekannten Raytracing auf die vier Dimensionen einer gekrümmten Raumzeit. Die vierte Dimension, die Zeit, muss berücksichtigt werden, da bei relativistisch interessanten Szenen Objekt- oder Kamerageschwindigkeiten in die Nähe der Geschwindigkeit des das Bild erzeugenden Lichts rücken können. Die Krümmung der Raumzeit hat zur Folge, dass beispielsweise anfangs parallele Lichtstrahlen nicht parallel bleiben und sich daraus Verzerrungen des Bildes ergeben.

Aus einer globalen Sicht betrachten wir einen gekrümmten *Raum*, dessen metrische Eigenschaften durch direktes Abmessen mit einem Meterstab an einem maßstabgerechten Modell ohne Zuhilfenahme eines Koordinatensystems bestimmt werden können. Eine aus einer gekrümmten Raumzeit resultierende, der gewohnten Newtonschen Physik widersprechende Kausalstruktur kann ebenfalls am Besten in einer globalen Darstellung erfasst werden.

1.3.2 Interaktivität

Des Weiteren können wir zwischen interaktiven und nichtinteraktiven Werkzeugen unterscheiden. Interaktivität ist für ein intuitives Kennenlernen einer relativistischen Raumzeit eine wichtige Grundlage, da nur so eine unmittelbare Rückkopplung von einer eigenen (simulierten) Bewegung im Raum bzw. Interaktion mit der Umwelt zum sich daraus ergebenden Sinneseindruck besteht. So ist eines der Projekte die Entwicklung eines interaktiven Flugsimulators, der es erlaubt, in einer solchen Raumzeit herumzufliegen und sich in dieser von verschiedenen Standpunkten aus umzusehen.

Heutige Computersysteme erlauben es jedoch leider noch nicht, hochqualitative immersive Virtual-Reality-Simulationen allgemeinrelativistischer Raumzeiten in Echtzeit zu berechnen. Das bedeutet, dass wir je nach gewünschtem Schwerpunkt der Darstellung (Interaktivität versus Bildqualität versus Komplexität der darzustellenden Szene) unterschiedliche Werkzeuge einsetzen müssen.

1.3.3 Repräsentation der Raumzeit

Betrachten wir noch die methodische Ebene, können wir die hier entwickelten Werkzeuge anhand des mathematischen Modells der zu untersuchenden, eventuell gekrümmten Raumzeit in zwei Klassen unterteilen: Die Beschreibung der Raumzeit als differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Metrik oder die Modellierung der Raumzeit mit dem Regge-Calculus.

Der Regge-Calculus wurde ursprünglich als Methode zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen entwickelt. Er stellt eine koordinatenfreie, nur auf messbaren Abständen beruhende Beschreibung der Raumzeit dar. Die Beschreibung basiert auf der approximativen Zerlegung einer beliebigen (gekrümmten) Mannigfaltigkeit in ungekrümmte Teilsektoren.

Auf den Regge-Calculus gründen sich auch die wesentlichen Neuentwicklungen dieser Arbeit. Er wird hier erstmalig in einem schnellen Raytracingverfahren zur Berechnung von Bildern in gekrümmten Raumzeiten eingesetzt.

Außerdem hat er sich aufgrund seiner intrinsischen Koordinatenfreiheit als Werkzeug zur Vermittlung der Grundgedanken der Relativitätstheorie bewährt. Mit zwei- und dreidimensionalen maßstabsgerechten Pappmodellen von gekrümmten Raumzeiten können die Grundbegriffe der allgemeinen Relativitätstheorie wie Raumzeitkrümmung, Geodäten oder Paralleltransport ohne den sonst notwendigen mathematischen Apparat der Differentialgeometrie eingeführt werden.

1.3.4 Die Werkzeuge im Einzelnen und ihre Anwendungsbereiche

Die Werkzeuge für eine lokale, koordinatenfreie Sicht basieren alle auf relativistischem Raytracing. Zur *illustrativen Visualisierung in der speziellen Relativitätstheorie* wurde der in meiner Diplomarbeit (Zahn, 1991) entwickelte relativistische Raytracer für Minkowski-Raumzeiten um die Darstellung beschleunigter Objekte und um die relativistisch korrekte Berechnung von Schatten erweitert. Der gleiche Raytracer kann zur *Visualisierung astrophysikalischer Modelle in der allgemeinen Relativitätstheorie* und für die *Modellierung des Strahlungsflusses astronomischer Objekte mit komplexen Geometrien* eingesetzt werden. Er ist für diese Aufgaben für die Schwarzschildmetrik optimiert. Die vorstehenden Werkzeuge basieren

1 Einführung und Übersicht

auf der Darstellung der Raumzeit als glatte Mannigfaltigkeit und dienen zur Berechnung exakter Bilder in hoher Auflösung.

Die *interaktive Visualisierung der allgemeinen Relativitätstheorie* ist das Thema des Hauptprojekts der Arbeit, der Entwicklung eines allgemeinrelativistischen Flugsimulators. Hier liegt im Gegensatz zu den vorher beschriebenen Werkzeugen der Schwerpunkt nicht in einer hohen Bildqualität, sondern in der interaktiven Benutzbarkeit, welche eine extrem hohe Rechenleistung erfordert. Basierend auf der Modellierung der Raumzeit mit dem Regge-Calculus wurde ein neuartiges schnelles Real-Time-Raytracing-Verfahren für gekrümmte Raumzeiten entwickelt. Das dimensionsunabhängige Verfahren ist allgemein gehalten und kann prinzipiell für beliebige Raumzeiten eingesetzt werden.

Werkzeuge für globale Darstellungen dienen dazu, die Struktur einer Raumzeit als Ganzes erfassbar zu machen. Zur Konstruktion *dreidimensionaler haptischer Modelle gekrümmter Räume* wurde ein Bastelbogengenerator entwickelt, der einen mit dem Regge-Calculus zerlegten gekrümmten Raum als dreidimensionales maßstabsgerechtes Pappmodell nachbaubar macht. Anwendungsbeispiele sind Modelle eines raumartigen Schnittes durch die Schwarzschildmetrik oder durch eine Gravitationswelle. Bei der zweiten globalen Darstellung steht die „gekrümmte Zeit“ im Mittelpunkt. Es geht um die *Visualisierung komplexer Kausalstrukturen*. In der Relativitätstheorie kann die Kausalstruktur lokal durch einen Lichtkegel beschrieben werden. Verteilt man Lichtkegel in der Art eines Millimeterpapiers in einem feinen Raster über eine geeignete Karte einer Raumzeit, können die Kausalstrukturen und der mögliche Verlauf von Weltlinien direkt abgelesen werden. Diese Methode ist zur Illustration beliebiger 1+1-Raumzeiten geeignet und wurde im Projekt auf ein komplexes, aus mehreren Raumzeitbereichen mit unterschiedlichen Metriken (Vaidya-Metrik, Schwarzschildmetrik und Minkowskimetrik) zusammengesetztes Modell eines verdampfenden Schwarzen Lochs angewandt.

1.4 Die Projekte

Hier möchte ich eine kurze Übersicht geben, wie sich die in Abschnitt 1.1, S. 9 genannten Aspekte der Relativitätstheorie in den einzelnen Projekten widerspiegeln.

Die Projekte sind unabhängig und stehen in gewissem Sinne nebeneinander. Sie stellen den Versuch dar, eine vielfältige Sicht auf die Relativitätstheorie zu bieten und möglichst viele interessante Facetten dieser Theorie zu beleuchten. Das verbindende Element ist die Suche nach einem intuitiven Zugang, was sich in der Koordinatenfreiheit der entwickelten Darstellungen ausdrückt.

Für die spezielle Relativitätstheorie wird der Aspekt *Sehen versus Messen* illustriert in dem relativistischen Visualisierungsprojekt **Rollende Räder**: Angeregt durch die in George Gamovs Buch „Mr Tompkins in Wonderland“ (Gamow, 1940) dargestellten Szenen des auf einem Fahrrad durch eine Welt mit einer Lichtgeschwindigkeit von ca. 30 km/h fahrenden Mr Tompkins wurde in diesem Projekt berechnet, wie ein fast lichtschnell rollendes Rad inklusive Schattenwurf *wirklich* aussieht (Kraus, Ruder, Weiskopf und Zahn, 2002).

In der allgemeinen Relativitätstheorie kommt der Aspekt des *gekrümmten Raumes* hinzu. Beim **Relativistischen Flugsimulator** geht es darum, die Geometrie und Topologie eines nichttrivialen gekrümmten Raumes interaktiv zu erkunden. Der Flugsimulator erlaubt es, in einem Wurmloch herumzufliegen, sich nach allen Seiten umzusehen und die Auswirkungen der Raumkrümmung auf die räumlichen Beziehungen einfacher geometrischer

Objekte zu untersuchen.

Der Unterschied zwischen *flachem Raum* und *gekrümmtem Raum* wird haptisch erkundet im Projekt **Wir basteln ein Schwarzes Loch**: Pappmodelle eines raumartigen Schnitts der gekrümmten Raumzeit um ein Schwarzes Loch verdeutlichen Grundbegriffe der allgemeinen Relativitätstheorie (Zahn und Kraus, 2004; Kraus und Zahn, 2005a; Kraus und Zahn, 2005b; Kraus und Zahn, 2005c).

Ein interessantes Beispiel illustriert die durch die Relativitätstheorie stark modifizierten Bedeutungen der Begriffe *Zeit* und *Kausalstruktur*: der **Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch**. Lichtkegel-„Millimeterpapier“ macht die Kausalstruktur einer Raumzeit deutlich. Untersucht wurde die Frage, ob man in ein verdampfendes Schwarzes Loch hineinfallen kann, bevor es verdampft ist.

Die entwickelten Verfahren werden in der Astrophysik praktisch angewendet im Projekt **Lichtkurven von Röntgenpulsaren**: Die entwickelten allgemeinrelativistischen Ray-tracingverfahren eignen sich zur Berechnung des Strahlungsflusses der bei Röntgenpulsaren durch Akkretion von Materie erzeugten Strahlung. Das Verfahren erlaubt die Modellierung auch komplexer geometrischer Verhältnisse (Kraus, Zahn, Weth und Ruder, 2003).

Die in den verschiedenen Projekten entstandenen Medien können hervorragend eingesetzt werden in **Öffentlichkeitsarbeit und Didaktik**: Die berechneten Filme und Modelle flossen in mehrere Einstein-Ausstellungen (Ulm 2004, Bern 2005) ein und werden als Unterrichtsmaterialien auf Lehrerfortbildungen und in Schulveranstaltungen eingesetzt (Weiskopf et al., 2006).

Parallel wurde ein Webangebot aufgebaut, das Artikel, Bilder und Filme einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich macht:

Tempolimit Lichtgeschwindigkeit

<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/>

Teil I
Projekte

2 Rollende Räder

Angeregt durch die in George Gamovs Buch „Mr Tompkins in Wonderland“ (Gamow, 1940) dargestellten Szenen des auf einem Fahrrad durch eine Welt mit einer Lichtgeschwindigkeit von ca. 30 km/h fahrenden Mr Tompkins (Bild 2.1) wurde in diesem Projekt berechnet, wie ein rollendes Rad *wirklich* aussieht (Kraus, Ruder, Weiskopf und Zahn, 2002).

Die Bilder und Filme wurden mit einem vierdimensionalen Raytracingverfahren berechnet, das Lichtlaufzeit und Längenkontraktion berücksichtigt. Dieses ist in Kapitel 8 *d-dimensionales Raytracing*, S. 115 beschrieben.

Filme der relativistisch rollenden Räder sind im Internet unter

<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/rad/rad.html>

(Zahn, 2002) zu sehen.

2.1 Wie sieht ein fast lichtschneller Körper aus?

Einer der grundlegenden Effekte der speziellen Relativitätstheorie ist die Längenkontraktion. Ein bewegter Körper ist in Bewegungsrichtung um den Faktor $1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzt (v ist die Geschwindigkeit des Körpers, c die Lichtgeschwindigkeit). Sieht also ein schnell vorbeifliegender Körper in Flugrichtung gestaucht aus?

Dies wurde in etlichen Fällen inkorrekterweise behauptet und in Illustrationen dargestellt. So schrieb Einstein in „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ (Einstein, 1905):

Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande – vom ruhenden System aus betrachtet – die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R.$$

Während also die Y- und Z-Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X-Dimension im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - (v/V)^2}$ verkürzt, also um so stärker, je größer v ist. Für $v = V$ schrumpfen alle bewegten Objekte – vom „ruhenden“ System aus betrachtet – in flächenhafte Gebilde zusammen¹,

wobei „betrachtet“ als visuelle Beobachtung gemeint sein könnte.

Und auch George Gamov hat in seinem erstmals 1940 herausgegebenen Buch „Mr Tompkins in Wonderland“ (Gamow, 1940) diese Behauptung aufgestellt: Er beschreibt eine fiktive Welt, in der die Lichtgeschwindigkeit nur etwa 30 km/h beträgt, so dass sich bereits ein Radfahrer mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Mr Tompkins sieht diesen Radfahrer bei 93 % der Lichtgeschwindigkeit dann so, wie in Bild 2.1 dargestellt, nämlich in Fahrtrichtung auf 37 % der Ruhelänge kontrahiert. Gamov korrigierte diese Darstellung später (Gamow, 1961), allerdings ohne die Drehung der Räder zu berücksichtigen.

¹V bezeichnet hier die Lichtgeschwindigkeit.

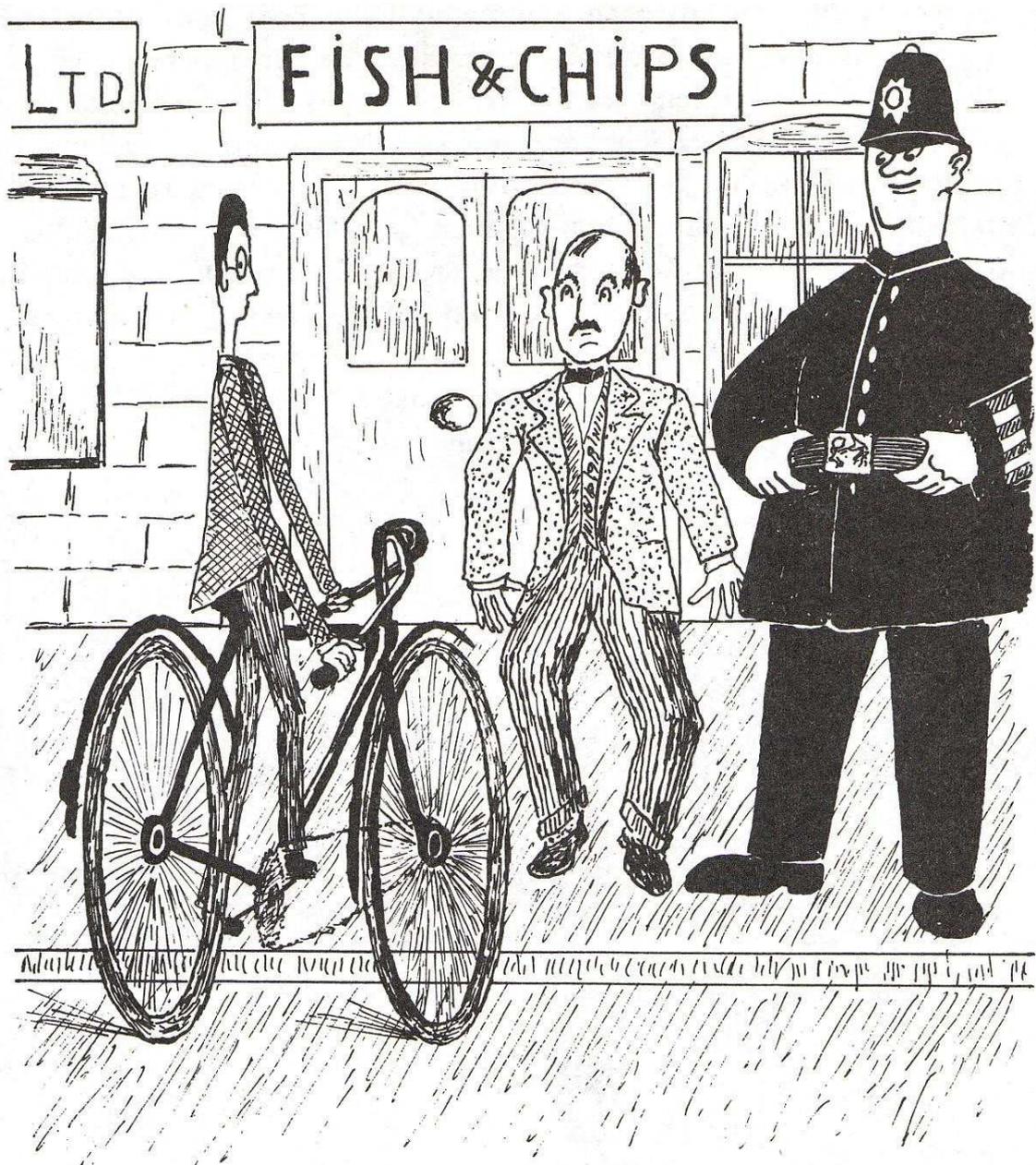


Bild 2.1: Illustration aus George Gamovs Buch „Mr Tompkins in Wonderland“ (Gamow, 1940); Bild aus einer späteren Ausgabe (Gamow, 1993): Angebliches Aussehen eines Radfahrers, der sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegt.

Tatsächlich spielt beim Erscheinungsbild eines schnellbewegten Objekts die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit eine wichtige Rolle. Seitdem bekannt ist (Rømer, 1677), dass Licht sich mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreitet, hätte man unmittelbar folgern können, dass fast lichtschnelle Objekte verzerrt aussehen müssen; es ist jedoch nicht bekannt, dass solche Überlegungen im Rahmen der klassischen Physik angestellt worden wären.

Es wurde erstmals von Lampa (Lampa, 1924) gezeigt, dass die visuelle Länge eines bewegten Stabs nicht die lorentzkontrahierte Länge ist. Diese Arbeit blieb jedoch weitgehend unbeachtet und erst ab 1959 wurde, ausgehend von den Arbeiten von Penrose und Terrell (Penrose, 1959; Terrell, 1959), das Aussehen schnell bewegter Objekte in zahlreichen Veröffentlichungen beschrieben. Es wurde gezeigt, dass weit entfernte oder kleine Objekte, die unter einem kleinen Raumwinkel gesehen werden, gedreht aber unverzerrt erscheinen (Terrell, 1959; Weisskopf, 1960), wohingegen Objekte, die einen großen Raumwinkel einnehmen, sowohl gedreht als auch verzerrt gesehen werden. In weiteren Arbeiten wurde das Aussehen einfacher geometrischer Objekte bei hoher Geschwindigkeit untersucht und mit Strichzeichnungen illustriert (Penrose, 1959; Weisskopf, 1960; Boas, 1961; Scott und Viner, 1965; Moskowitz, 1967; Scott und van Driel, 1970; Lang, 1970; Mathews und Lakshmanan, 1972; Hickey, 1979; Suffern, 1988). Realistischere Abbildungen und Abbildungen komplexerer Szenen entstanden mit Methoden der Computergrafik (Hsiung und Dunn, 1989; Hsiung et al., 1990a,b,c; Gekelman et al., 1991; Chang et al., 1996; Betts, 1998; Weisskopf et al., 2000; Searle et al., 2005; Savage et al., 2007). Physikalisch korrekt werden solche Bilder erst sein, wenn der Dopplereffekt und die Transformation der Intensität vollständig und richtig berücksichtigt sind (McKinley und Doherty, 1979; Weisskopf et al., 1999; Kraus, 2000).

Beispiele für die Berechnung von Schatten gibt es wenige. Lai (Lai, 1975) berechnet den Schatten einer Mauer, über die eine Lichtquelle fliegt. Grafisch anspruchsvollere Darstellungen finden sich auf der Webseite von Searle und Savage².

Das Projekt *Rollende Räder* erweitert diese Reihe von Arbeiten um die Darstellung beschleunigter Objekte mit relativistischem Schattenwurf.

2.2 Lichtlaufzeiteffekte

Das von einer Kamera aufgenommene Bild entsteht aus Licht, das zu einem bestimmten Zeitpunkt t_A bei der Kamera ankommt. Aufgrund der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit ist dieses Licht zu einem *früheren* Zeitpunkt gestartet.

Bei einem räumlich ausgedehnten Objekt sind die von verschiedenen Punkten stammenden Lichtstrahlen, die gleichzeitig bei der Kamera eintreffen, zu unterschiedlichen Zeiten emittiert worden. Bewegt sich das Objekt, während diese Lichtstrahlen nach und nach starten, hat die Vereinigung der Emissionspunkte eine andere Form als das Objekt selbst. Diese verzerrte Form ist das, was die Kamera „sieht“, sie wird im Folgenden *Phantomobjekt* genannt.

Wir berechnen nun für einen bestimmten Objektpunkt den Raumzeitpunkt, an dem ein Lichtstrahl loslaufen muss um zu einem festgelegten Zeitpunkt (dem Auslösezeitpunkt) bei der Kamera anzukommen. Dazu verwenden wir (s. Bild 2.2) ein Koordinatensystem K mit dem Ursprung am Ort der in diesem System ruhenden Kamera und der x -Achse in

²Through Einstein's Eyes: <http://www.anu.edu.au/Physics/Savage/TEE/>.

2 Rollende Räder

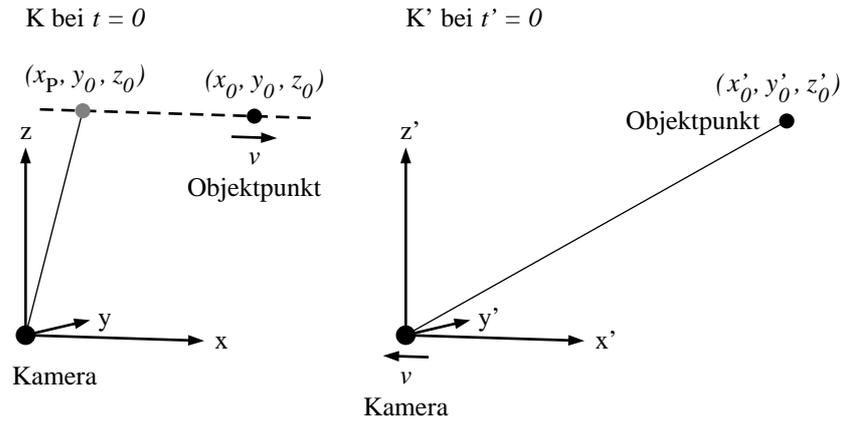


Bild 2.2: Zur Herleitung der Phantompunktformel: Positionen von Objektpunkt und Kamera zum Aufnahmezeitpunkt, links im Ruhesystem K der Kamera, rechts im Ruhesystem K' des Objekts.

Bewegungsrichtung des Objekts. Zusätzlich definieren wir ein zweites Koordinatensystem K' , das sich mit dem Objekt mitbewegt. Seine Achsen sind parallel zu den entsprechenden Achsen von K und sein Ursprung fällt mit dem Ursprung von K in dem Augenblick zusammen, in dem die Kamera ausgelöst wird. Gleichzeitig werden in beiden Systemen die Uhren auf null gestellt.

Die Koordinaten x, y, z, t eines Ereignisses bezüglich K sind dann mit den Koordinaten x', y', z', t' desselben Ereignisses bezüglich K' durch die Lorentztransformation in der Form

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma(x - \beta ct) & x &= \gamma(x' + \beta ct') \\
 y' &= y & y &= y' \\
 z' &= z & z &= z' \\
 ct' &= \gamma(ct - \beta x) & ct &= \gamma(ct' + \beta x')
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

verknüpft. Dabei ist v die Geschwindigkeit des Objekts, c die Lichtgeschwindigkeit, $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Insbesondere findet das Ereignis „Die Kamera wird ausgelöst“ im Ursprung von K bei $t = 0$ bzw. im Ursprung von K' bei $t' = 0$ statt.

Wir greifen einen beliebigen Objektpunkt heraus. Seine Position im Ruhesystem des Objekts K' sei $x'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$. Gesucht ist seine Position in K zu dem früheren Zeitpunkt, als er das Licht aussandte, das zum Aufnahmezeitpunkt die Kamera erreicht.

Licht, das von x'_0 kommt und zum Aufnahmezeitpunkt $t' = 0$ am Ursprung eintrifft, muss bei

$$t'_0 = -\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}/c$$

emittiert worden sein. Damit sind die Koordinaten des Emissionsereignisses in K' bekannt und seine Koordinaten in K , d. h. der gesuchte Ort des Phantompunkts, folgen aus einer Lorentztransformation:

$$x_P = \gamma \left(x'_0 - \beta \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0} \right), \quad y_P = y'_0, \quad z_P = z'_0. \tag{2.2}$$

2.2.1 Spezialfall: auf die Kamera zu- oder von ihr weg bewegtes Objekt

Betrachten wir einen in x -Richtung ausgedehnten Stab, der sich direkt auf die Kamera zubewegt und berechnen seine scheinbare Länge.

Mit $y'_0 = z'_0 = 0$ erhält man aus Gleichung (2.2):

$$x_P = \gamma (x'_0 - \beta |x'_0|),$$

also:

$$x_P = \begin{cases} \gamma(1 + \beta)x'_0 & \text{für } x'_0 < 0 \\ \gamma(1 - \beta)x'_0 & \text{für } x'_0 > 0. \end{cases}$$

Die Länge l' eines Stabes ist die Differenz der beiden x' -Koordinaten der Endpunkte x'_0 und x'_1 im Ruhesystem des Stabes, die scheinbare Länge l_P (die Länge des „Phantomstabes“) die Differenz der x -Koordinaten der Endpunkte im Ruhesystem der Kamera, also

$$l_P = \begin{cases} \gamma(1 + \beta) l' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} l' & \text{für } x'_0, x'_1 < 0 \\ \gamma(1 - \beta) l' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} l' & \text{für } x'_0, x'_1 > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Man sieht, dass der Stab länger erscheint, wenn er auf die Kamera zufliegt ($x'_0, x'_1 < 0$) und kürzer, wenn er von ihr wegfliegt ($x'_0, x'_1 > 0$). Im ersten Fall ist seine scheinbare Länge trotz Lorentzkontraktion immer *größer* als seine Ruhelänge. Sie wird für $\beta \rightarrow 1$ beliebig groß.

2.2.2 Spezialfall: tangential vorbeibewegtes Objekt

Betrachten wir einen Stab der Länge l , der quer vor der Kamera in x -Richtung vorbeifliegt und in y -Richtung ausgerichtet ist; z sei 0. Ohne Berücksichtigung der Lichtlaufzeiteffekte würde man den Stab, wenn er die y -Achse passiert, nur als Punkt sehen.

Sei die y -Koordinate des kameranahen Stabendes $y_0 = y'_0$ und die des kamerafernen Stabendes $y_1 = y'_1 = y'_0 + l$. Die Koordinaten der zu berechnenden Phantompunkte werden mit x_P, y_P für das kameranahe Ende und x_Q, y_Q für das kameraferne Ende bezeichnet.

Möchte man das nähere Ende des Stabes zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ auf der y -Achse *sehen* (d. h. $x_P = 0$), so muss dieses aufgrund der Lichtlaufzeit dort früher vorbeigekommen sein, seine x'_0 -Koordinate muss größer null sein.

In diesem Fall lässt sich die x'_0 -Koordinate des Stabes aus Gleichung (2.2) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} 0 =: x_P &= \gamma \left(x'_0 - \beta \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0} \right) \\ x'_0 / \beta &= \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0} \\ x'_0 &= y'_0 \beta \gamma. \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (2.2) ergibt sich für die x -Koordinate des hinteren Endes des Phantomobjekts:

$$x_Q = \gamma \left(y'_0 \beta \gamma - \beta \sqrt{y'^2_0 \beta^2 \gamma^2 + (y'_0 + l)^2} \right).$$

2 Rollende Räder

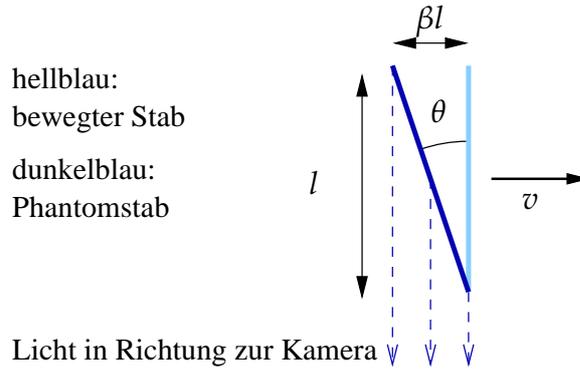


Bild 2.3: Ein mit der Geschwindigkeit v nach rechts fliegender Stab erscheint um den Winkel $\theta = \arctan \beta$ gedreht zu sein ($\beta = v/c$).

Die scheinbare Position des hinteren Endes des Stabes x_Q lässt sich für einen kurzen und weit entfernten Stab ($l \ll y_0$) annähern:

$$x_Q \approx \gamma \left(y'_0 \beta \gamma - \beta \sqrt{y'_0{}^2 \beta^2 \gamma^2 + y'_0{}^2 + 2y'_0 l} \right),$$

mit $\beta^2 \gamma^2 + 1 = \gamma^2$ ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$x_Q \approx -\beta l.$$

Dieses Ergebnis kann auch direkt aus der Überlegung hergeleitet werden, dass das Licht vom hinteren Ende des Stabes um die Zeit l/c länger unterwegs ist als das Licht vom vorderen Ende und damit in x -Richtung an einem βl weiter vorne liegenden Punkt gestartet sein muss.

Der Stab scheint um den Winkel $\theta = \arctan \beta$ gedreht zu sein (Bild 2.3).

2.2.3 Die Lichtlaufzeiteffekte

Zusammengefasst sehen wir im Wesentlichen also folgende Effekte:

- Ein auf die Kamera zubewegtes Objekt erscheint in die Länge gezogen
- Ein von der Kamera wegbewegtes Objekt erscheint verkürzt
- Ein tangential vorbeibewegtes Objekt erscheint verdreht

2.3 Relativistisches Fahrrad

Die bisherigen Überlegungen betrafen geradlinig gleichförmige Bewegungen. Komplexer sind beschleunigte Bewegungen, wie sie an den rollenden Rädern von Mr Tompkins Fahrrad auftreten. Prinzipiell folgt wiederum alles aus dem Zusammenspiel von Lorentzkontraktion und Lichtlaufzeiten. Für die Entstehung eines Bildes sind die Positionen und Geschwindigkeiten der einzelnen Objektpunkte zum Emissionszeitpunkt der Lichtstrahlen entscheidend. Im Gegensatz zu den oben behandelten unbeschleunigten Objekten können jedoch bei einem beschleunigten Objekt die einzelnen Objektbestandteile *unterschiedliche*

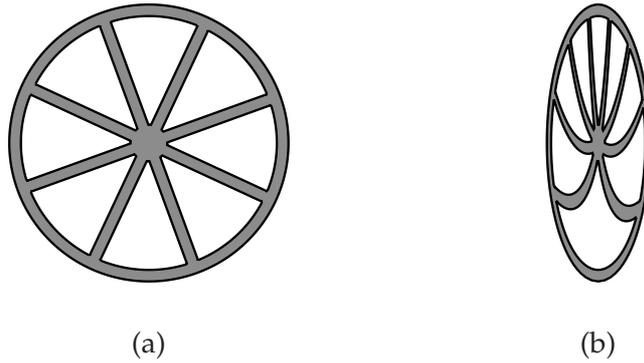


Bild 2.4: Gemessene geometrische Form eines stationär rotierenden Rades (a) und eines nach rechts rollenden Rades (b). In beiden Fällen hat ein Punkt auf dem Radmantel die Geschwindigkeit $v = 0,93c$ relativ zur Radnabe.

Geschwindigkeiten haben. Als Beispielobjekt entnehmen wir Gamovs Bild ein einzelnes Rad und berechnen unter Berücksichtigung der Rotation, wie es richtig „aussieht“.

Der Gamovsche Radfahrer ist mit 93 % der Lichtgeschwindigkeit unterwegs, wie man anhand der Längenkontraktion der Räder in Bild 2.1 leicht berechnen kann. Das bedeutet für die Bewegung eines einzelnen Rades: Der Punkt auf dem Radmantel, der gerade die Straße berührt, ist in Ruhe, die Radnabe bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0,93c$, und der Mantelpunkt oben auf dem Rad bewegt sich relativ zur Nabe mit $0,93c$, relativ zur Straße also mit $2v/(1 + v^2/c^2) = 0,997c$ gemäß der relativistischen Geschwindigkeitsaddition.

Wenn man ein Rad aus der Ruhe in eine Rotation mit annähernd Lichtgeschwindigkeit bringen möchte, stößt man allerdings auf ein gravierendes mechanisches Problem: Der Mantel wird, da er sich längs seines Umfangs bewegt, längenkontrahiert, bei einer Mantelgeschwindigkeit von $v = 0,93c$ um den Faktor $\gamma = 2,7$. Die Speichen hingegen bewegen sich senkrecht zu ihrer Ausdehnung und werden somit nicht verkürzt.

Ohne auf technische Details einzugehen, stattdessen wir das relativistische Fahrrad deshalb mit Rädern aus, die in Rotation zusammengebaut werden. Dies geschieht so, dass sie stationär rotierend dieselbe geometrische Form haben wie übliche Räder in Ruhe (Bild 2.4a).

Eine auf der Radfelge lebende Ameise würde dann allerdings einen Radumfang messen, der nicht das π -fache, sondern das 8,5-fache des Durchmessers beträgt: die innere Geometrie des so definierten Rades ist nicht euklidisch. Die Metrik eines mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Bezugssystems in Zylinderkoordinaten ist (mit $c = 1$):

$$ds^2 = -(1 - r^2\omega^2) \left[dt - \frac{r^2\omega}{1 - r^2\omega^2} d\phi \right]^2 + dr^2 + \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2} d\phi^2 + dz^2$$

(Rindler, 2001, S. 199). In dieser kanonischen Form hat die Metrik einen zeitunabhängigen räumlichen Anteil. Die räumliche Metrik auf einem starr rotierenden Rad ist demnach:

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - r^2\omega^2} d\phi^2 + dz^2.$$

Mit $v = r\omega$, der Tangentialgeschwindigkeit beim Radius r , ist $1 - r^2\omega^2 = 1 - v^2 = \gamma^{-2}$. Der Umfang bei einem gegebenen Radius $\oint \gamma r d\phi$ ist also wie oben beschrieben $2\pi r\gamma$.

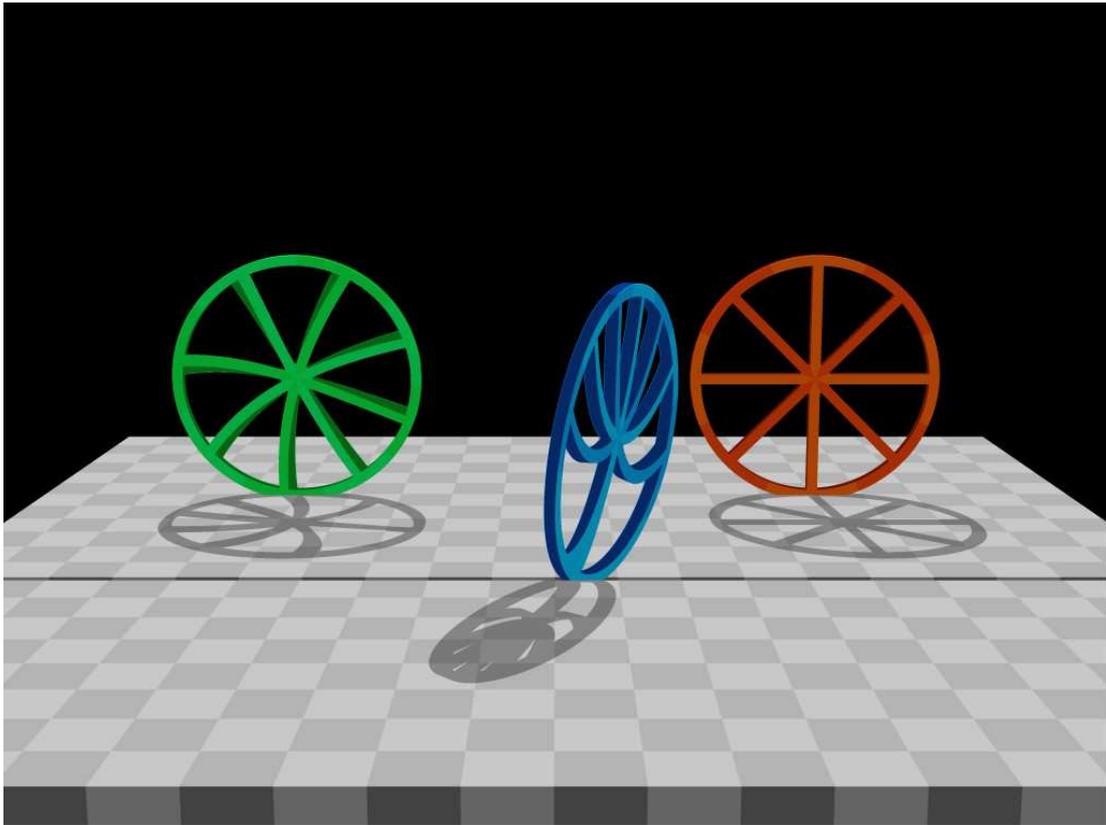


Bild 2.5: Das rote Rad ruht, das grüne rotiert stationär im Uhrzeigersinn, so dass ein Punkt auf dem Mantel die Geschwindigkeit $v = 0,93 c$ hat, und das blaue Rad rollt mit $v = 0,93 c$ von links nach rechts durch die Szene. (a), (b), (c) zeigen dieselbe Szene aus drei verschiedenen Blickrichtungen.

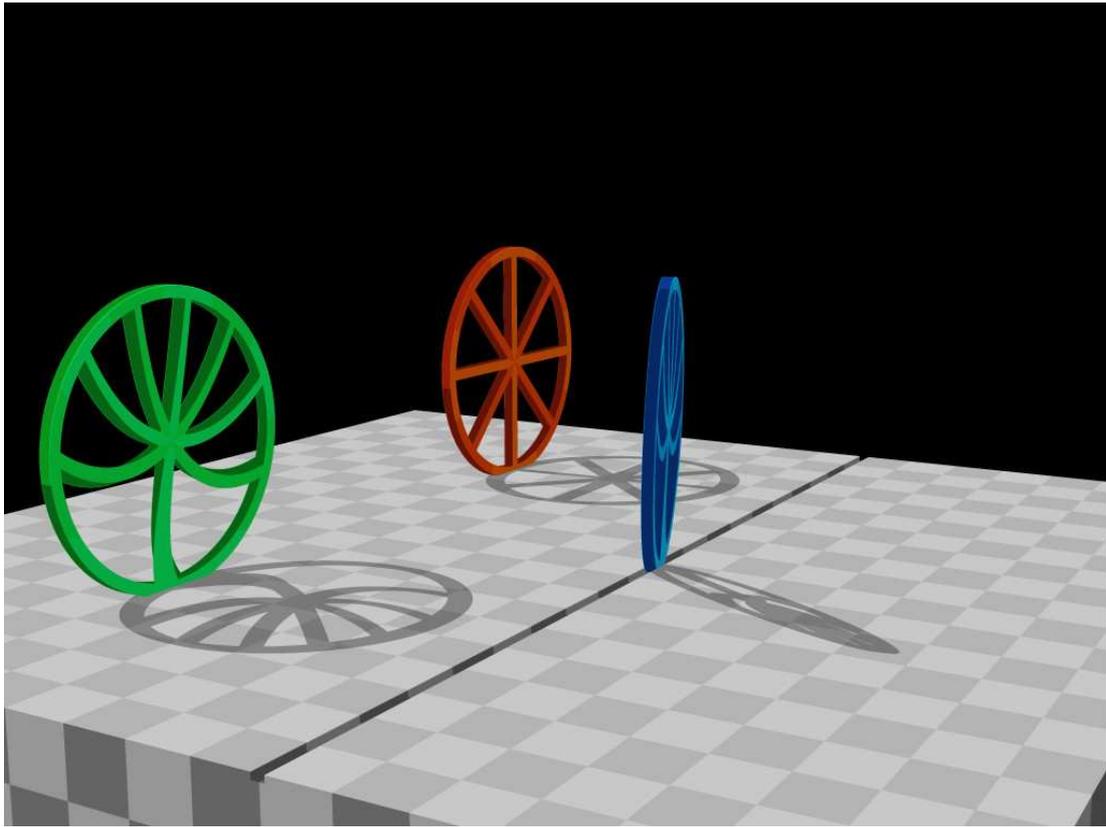
2.4 Ruhende, rotierende und rollende Räder

Im Ruhesystem des Fahrrads sind die Radnaben in Ruhe und die Räder rotieren stationär (Bild 2.4a). Im Ruhesystem der Straße führen die Räder eine Kombination aus Translation und Rotation aus. Wird ein solches abrollendes Rad *vermessen*, findet man die in Bild 2.4b dargestellte verzerrte geometrische Form. Der Radmantel des rollenden Rades bewegt sich oben am schnellsten, wird also hier am stärksten längenkontrahiert, so dass die Speichen zusammenrücken. Am Auflagepunkt bewegt sich der Radmantel nicht, ist also auch nicht längenkontrahiert, so dass die Speichen hier einen größeren Abstand haben als beim stationär rotierenden Rad.

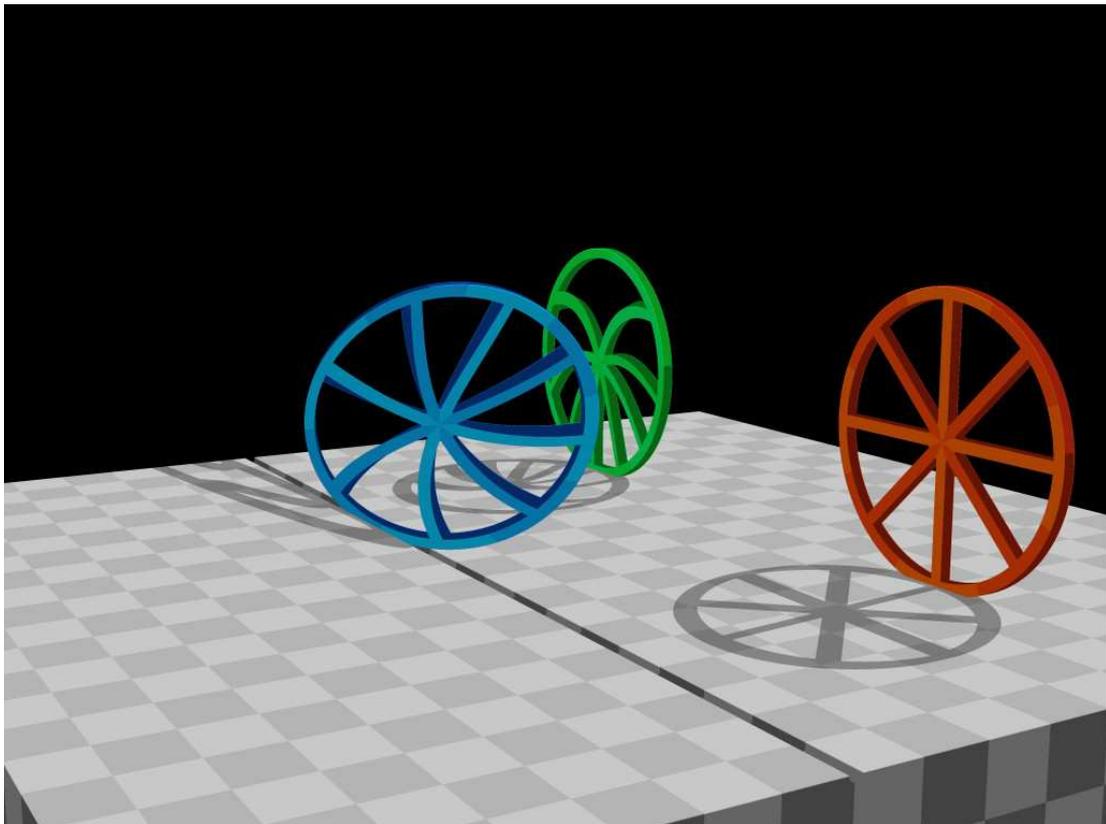
Wenn man rotierende und rollende Räder *ansieht*, kommen zu den gemessenen Verzerrungen noch die oben beschriebenen Lichtlaufzeiteffekte hinzu. Sie lassen sich in Bild 2.5a,b,c entdecken. Diese Bilder zeigen dieselbe Szene aus drei verschiedenen Blickwinkeln. Man sieht drei Räder, von denen eines ruht (rot), eines stationär im Uhrzeigersinn rotiert (grün) und eines in einer flachen Schiene von links nach rechts rollt (blau). Die genauen Parameter der Szene sind am Ende des Kapitels aufgelistet.

Blickt man von vorne auf die Szene (Bild 2.5a), so dass die Blickrichtung näherungsweise senkrecht auf den Radflächen steht, dann spielen Lichtlaufzeiteffekte nur eine geringe Rolle, da die Lichtlaufzeit zur Kamera von allen Objektpunkten aus ungefähr gleich groß ist.

2.4 Ruhende, rotierende und rollende Räder



(b)



(c)

2 Rollende Räder

Man sieht also im Wesentlichen, was man auch misst (Bild 2.4). Das rollende Rad erscheint – wie erwartet – verdreht und auch etwas nach vorne gekippt. Dies liegt daran, dass wir leicht schräg von oben auf das Rad blicken, der untere Teil deswegen weiter entfernt ist und durch die längere Lichtlaufzeit etwas zurückzubleiben scheint.

Wenn man dem rollenden Rad hinterherschaut (Bild 2.5b), dann fällt auf, dass aus diesem Blickwinkel auch die Speichen des stationär rotierenden grünen Rades oben enger zusammenliegen als unten. Diese Verzerrung ist ein reiner Lichtlaufzeiteffekt: Der untere Teil des Rades, der sich auf den Betrachter zubewegt, erscheint gedehnt, der obere, der sich wegbewegt, gestaucht.

Beim Blick aus der entgegengesetzten Richtung (Bild 2.5c) dreht sich die Verzerrung des stationär rotierenden Rades um. Die Speichen des rollenden Rades, dem man hier entgegenblickt, erscheinen fast unverzerrt, weil sich die Wirkungen der Längenkontraktion (Speichen oben rücken enger zusammen) und der Lichtlaufzeit (oberer Teil des Rades nähert sich dem Betrachter und erscheint gedehnt) in der Projektion auf das Bild fast genau aufheben.

2.5 Schneller als sein Schatten

Eine Lichtquelle beleuchtet die Szene mit den drei Rädern aus großer Entfernung von hinten und schräg oben, wie der Schatten des ruhenden roten Rades zeigt. Es ist deutlich zu sehen, dass das rollende Rad stets seinem Schatten davonläuft. Außerdem fällt auf, dass der Schatten in seiner Form nicht zum Objekt zu passen scheint, besonders deutlich ist das bei dem grünen Rad in Bild 2.5b. Auch diese Beobachtungen lassen sich durch Lichtlaufzeiten erklären, wenn man die unterschiedlichen Wegstrecken direkt vom Objekt zum Auge bzw. indirekt vom Objekt über den Schatten zum Auge betrachtet. Die Berechnung der Schatten ist im Abschnitt 8.2.6 *Schatten*, S. 120 beschrieben.

2.6 Modellparameter

Koordinatensystem auf der Plattform: x -Richtung nach vorne, y -Richtung nach rechts, z -Richtung nach oben.

Plattform	$(-50 \dots 50, -50 \dots 50, -11,5)$
Kameraposition in Bild 2.5a	$(130 \cdot \cos 10^\circ, 0, 130 \cdot \sin 10^\circ)$
Kameraposition in Bild 2.5b, c	wie a, 60° um z -Achse gedreht
Kamerablickrichtung	Kamera ist auf $(0, 0, 0)$ ausgerichtet
horizontaler Öffnungswinkel der Kamera	40°
Tiefe des Grabens	0,5
Radius der Räder	12
Dicke der Räder	1
Ort der Nabe des rollenden Rades (Vorderkante)	$(10, y, 0)$
Ort der Nabe des grünen Rades (Vorderkante)	$(-20, -25, 0)$
Ort der Nabe des roten Rades (Vorderkante)	$(-20, 25, 0)$
Richtungsvektor zur Lichtquelle	$(-1, -0,1, 1)$
Geschwindigkeit des rollenden Rades	$0,93 c$
Mantelgeschwindigkeit des rotierenden Rades	$0,93 c$

3 Relativistischer Flugsimulator

Ziel dieses Projektes ist es, einen Flugsimulator für beliebige Raumzeiten zu entwickeln.

3.1 Problemstellung

Räumliches Bewusstsein und die Bedeutung physikalischer Grundgesetze wie des Gravitationsgesetzes lernt ein Kind in den ersten Lebensjahren, wenn es einen Gegenstand „begreift“, eine räumliche Anordnung „begeht“, mit der Welt direkt interagiert. Dadurch werden Verbindungen zwischen zweidimensionalen Bildern bzw. Bildfolgen auf der Netzhaut und den „realen“ dreidimensionalen räumlichen Strukturen bzw. dem vierdimensionalen raumzeitlichen Geschehen unserer (pseudoeuklidischen) Raumzeit geschaffen. Dabei ist essentiell, dass eine unmittelbare Rückkopplung von einer eigenen Bewegung im Raum bzw. Interaktion mit der Umwelt zum sich daraus ergebenden Sinneseindruck existiert.

Erwachsene Physiker haben das gleiche Problem. Sie wollen aus vorliegenden Messwerten oder zweidimensionalen Bildern bzw. Filmen ein Verständnis dieser Welt gewinnen.

Moderne Visualisierungstechniken erlauben es, mit Hilfe von fotorealistischer Computergrafik, interaktiven Caves¹ und Stereoprojektion eine künstlich geschaffene Umgebung zu „begehen“ und mittels spezieller Eingabegeräte wie z. B. eines Datenhandschuhs auf „natürliche“ Weise zu manipulieren. Die genannten Werkzeuge aus dem Bereich der *virtual reality* basieren auf einem euklidischen, ungekrümmten Raum, so dass wir uns dort mit unseren im realen Raum gewonnenen Erfahrungen und Fertigkeiten unmittelbar zu-rechtfinden können.

Die Orientierung in der gekrümmten Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie stellt jedoch völlig neue Anforderungen:

Gekrümmter Raum: Die Abbildung des dreidimensionalen Raums auf ein zweidimensionales Bild kann nicht mehr mit projektiver Geometrie beschrieben werden. D. h. ein Betrachten aus der Ferne von einem unveränderbaren Beobachtungspunkt erlaubt nur noch bedingt einen Rückschluss auf die tatsächlichen räumlichen Verhältnisse.

Gekrümmte Raumzeit: Der Zeitablauf ist nicht nur geschwindigkeitsabhängig wie in der speziellen Relativitätstheorie, sondern zusätzlich ortsabhängig. Dabei ergeben sich *qualitative* Unterschiede, z. B. abhängig davon, ob man sich innerhalb oder außerhalb des Ereignishorizontes eines Schwarzen Lochs befindet.

Andersartige Topologien: In der allgemeinen Relativitätstheorie sind Topologien der Raumzeit möglich, die unser Vorstellungsvermögen übersteigen (Wurmlöcher, geschlossene Universen, Singularitäten). Topologien sind ebenfalls globale Eigenschaften, die eventuell durch „Abtasten“ begriffen werden können.

Koordinatensysteme bzw. koordinatenbasierte Darstellungen physikalischer Größen bieten zwar eine gewisse Hilfe, verleiten aber in allgemeinrelativistisch komplexeren Umgebungen (z. B. Schwarzen Löchern) immer wieder zu je nach Wahl des Koordinatensystems

¹Cave Automatic Virtual Environment: eine Rundumprojektion auf vier bis sechs Seitenflächen eines würfelförmigen Raumes, die es erlaubt, sich in einer virtuellen Welt nach allen Seiten umzusehen (Cruz-Neira et al., 1992).

unterschiedlichen und damit auch falschen Vorstellungen. Für ein intuitives Verständnis ist eine *koordinatenfreie* Beschreibung unerlässlich. Eine solche Beschreibung bietet z. B. ein am eigenen Standort mit einer Kamera aufgenommener Film.

Bisherige Arbeiten zur Visualisierung der Relativitätstheorie beschränkten sich meist auf die Erstellung von nichtinteraktiven Bildern und Filmen. Ein Überblick über die Literatur zur Visualisierung der speziellen Relativitätstheorie ist in Kapitel 2 *Rollende Räder*, S. 17 zu finden. In der Visualisierung der allgemeinen Relativitätstheorie sind als hervorstechende Effekte die gravitative Lichtablenkung und die Rotverschiebung zu nennen. Praktische Auswirkungen in der Astrophysik haben diese Effekte beispielsweise bei der Untersuchung von Akkretionsscheiben um Schwarze Löcher, der Erklärung von Gravitationslinsen oder bei der Modellierung von Röntgenpulsarlichtkurven (s. a. Kapitel 6 *Lichtkurven von Röntgenpulsaren*, S. 85). Eine frühe Darstellung einer Akkretionsscheibe um ein Schwarzes Loch unter Berücksichtigung der relativistischen Lichtablenkung erstellte Luminet (1979); eine farbige Darstellung wurde von Fukue und Yokoyama (1988) berechnet. Nollert et al. (1989) beschreiben das relativistische Aussehen eines Neutronensterns. In der Diplomarbeit des Autors (Zahn, 1991) werden verschiedene Objekte in der Schwarzschildmetrik „gefilmt“, Nemiroff (1993) zeigt ebenfalls die visuellen Effekte in der Nähe von Neutronensternen und Schwarzen Löchern. Als weitere interessante Metriken wurden z. B. die Warpmetrik (Weiskopf, 2000b) oder die Wurmlochmetrik (Müller, 2004) visualisiert.

Interaktive Visualisierungen der Relativitätstheorie sind aufgrund der hohen Anforderungen an die Rechenleistung erst in den letzten Jahren möglich geworden. Beispiele sind ein interaktives Cave (Weiskopf, 2000a), eine relativistische Fahrradfahrt durch Tübingen (Borchers, 2005) oder das Programm *Real Time Relativity* (Savage et al., 2007), alle jedoch zur speziellen Relativitätstheorie. Interaktive Visualisierungen zur allgemeinen Relativitätstheorie sind aufgrund der noch höheren Ansprüche an die Rechenleistung nur für Spezialfälle machbar. Weeks (2002) beschreibt ein interaktives Programm² zur Erkundung von Räumen mit ungewöhnlichen Topologien. Mit einem „interaktiven Schwarzen Loch“³ (Zahn, 2006) kann auf der Webseite *Tempolimit Lichtgeschwindigkeit* experimentiert werden.

3.2 Das Projekt

Die beste Möglichkeit, sich in einer allgemeinrelativistischen Raumzeit bewegen zu lernen, ist ein interaktiver Flugsimulator, der es erlaubt, in einer solchen Welt herumzufliegen und sich in dieser von verschiedenen Standpunkten aus umzusehen. Als Weiterentwicklung kann man sich die Möglichkeit vorstellen, einfache physikalische Experimente zu machen, wie z. B. das Herumstochern in einem Wurmloch mit einer Stange oder das Hineinwerfen einer Leuchtboje in ein Schwarzes Loch.

Ziel dieses Projekts sind *nicht* computergrafisch hochqualitative Bilder oder Filme. Der Schwerpunkt soll auf der interaktiven Benutzbarkeit liegen. Da interaktives Raytracing schon im „normalen“ euklidischen dreidimensionalen Raum selbst größere Rechnercluster an die Grenzen ihrer Leistungsfähigkeit treiben kann, sind in vierdimensionalen gekrümmten Raumzeiten gewisse Kompromisse in der Darstellungsqualität (z. B. geringe Auflösung, einfache Texturen, Verzicht auf Beleuchtung und Schattenwurf) erforderlich.

²Auf <http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/> zum Download angeboten.

³Interaktives Schwarzes Loch (Zahn, 2006):

<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/isl/isl.html>.

Auch ist dieses Ziel nur durch die Entwicklung neuer, an nichteuklidische Räume angepasster Verfahren zur Beschleunigung der Lichtstrahlberechnung erreichbar.

3.3 Anwendungen

Neben dem wertfreien eigenen Verständnissgewinn ergeben sich natürlich auch ein paar praktische Anwendungen:

3.3.1 Visualisierung allgemeinrelativistischer Simulationen

Aus numerischen Simulationen ergeben sich riesige, auf einem willkürlichen Koordinatensystem definierte Datenmengen. Aus diesen ein physikalisches Verständnis zu gewinnen oder sie mit in anderen Koordinatensystemen gewonnenen Daten zu vergleichen ist schwierig. Hier könnte eine koordinatenunabhängige „Begehung“ der Raumzeit helfen.

3.3.2 Didaktik und Öffentlichkeitsarbeit

Bei dem Versuch, die allgemeine Relativitätstheorie einer interessierten Öffentlichkeit nahezubringen, tauchen immer wieder grundlegende Verständnisfragen auf, wie: „Kann man in ein Schwarzes Loch hineingreifen?“, „Kann man in ein verdampfendes Schwarzes Loch hineinfallen, bevor es verdampft ist?“, „Das Hubble-Teleskop schaut bis ans Ende des Universums. Was befindet sich dahinter?“, „Kann ich in einem geschlossenen Universum meinen Hinterkopf sehen?“. Selbst mit einem tieferen Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie ist es schwer, diese Fragen auf einfache Weise zu beantworten. Die Möglichkeit, diese Fragen quasi durch eigene Beobachtungen zu beleuchten, könnte hier sehr hilfreich sein.

3.3.3 Drehbuch

Dieses Projekt gehört zum Teilprojekt D4 des SFB 382⁴. In einer weiteren Arbeit dieses Teilprojektes (Müller, 2006) wurden mit einem anderen Verfahren hochqualitative Filme von allgemeinrelativistischen Phänomenen gerechnet. Da diese sehr viel Rechenzeit benötigen, ist es sinnvoll, im Vorfeld mit einem interaktiven Programm interessante Szenarien herauszufinden und ein „Drehbuch“ zu entwickeln. Der Flugsimulator bietet die Möglichkeit, während eines interaktiven Fluges die Position und Orientierung der Kamera zu exportieren. Aus einer so aufgezeichneten Flugroute kann dann im Batchbetrieb ein Film in hoher Qualität nachgerechnet werden.

3.4 Überblick über das Verfahren

Für den interaktiven Raytracer wurde ein neues Verfahren entwickelt, das hier kurz skizziert werden soll. Eine ausführliche Darstellung der entwickelten Methoden findet sich im Teil *Methoden* (s. 113 ff).

An die Implementierung wurde eine Reihe von Anforderungen gestellt, wie:

⁴Sonderforschungsbereich 382, Verfahren und Algorithmen zur Simulation physikalischer Prozesse auf Höchstleistungsrechnern an den Universitäten Tübingen und Stuttgart, 1994–2006, <http://www.uni-tuebingen.de/uni/opx/>.

3 Relativistischer Flugsimulator

- hohe Geschwindigkeit für die Interaktivität mit Kompromissen bei der Bildqualität
- beliebige Metriken, Topologien und Dimensionen sowie leichte Erweiterbarkeit
- Dimensionsunabhängigkeit der Algorithmen
- Konfigurierbarkeit zur Laufzeit
- Testbarkeit des Verfahrens

Die sich aus diesen Anforderungen ergebenden Designentscheidungen werden in der folgenden Übersicht über das Verfahren angesprochen.

3.4.1 Raytracing

Warum Raytracing? Gängige interaktive Computergrafikanwendungen arbeiten heutzutage meist mit projizierenden Verfahren. Dabei werden die Vertices der in Dreiecksnetze zerlegten Objekte mittels Matrixoperationen direkt auf die Bildfläche abgebildet. Die dazwischenliegenden Pixel werden hardwareunterstützt mit Scan-Line-Verfahren gefüllt bzw. texturiert.

Raytracing hingegen ist ein Verfahren, um fotorealistische Bilder mit Schattenwurf und Lichtbrechung zu berechnen. Dazu wird an die Beobachtersposition eine virtuelle Kamera gesetzt, die für jedes Bildpixel den dort auftreffenden Lichtstrahl in die Vergangenheit bis zum Emissionspunkt zurückverfolgt und dem Bildpixel dann die Farbe des Emissionsgebietes gibt. Genauer siehe Kapitel 8 *d-dimensionales Raytracing*, S. 115. Dies ist deutlich aufwendiger als ein projizierendes Verfahren, da für *jedes einzelne Pixel* komplexe Schnittpunktberechnungen durchgeführt werden müssen. In der Regel ist Raytracing für eine schnelle interaktive Echtzeitcomputergrafik nicht das Verfahren der Wahl.

In der allgemeinen Relativitätstheorie haben wir eine andere Situation. Hier sind Lichtstrahlen Geodäten in einer gekrümmten Raumzeit. Sie können nicht mehr mit den auf linearer Algebra beruhenden klassischen Computergrafikalgorithmen berechnet werden, sondern müssen durch numerische Integration der Geodätengleichung (eine nichtlineare vierdimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung, siehe Abschnitt 7.1.11, S. 106) bestimmt werden. Insbesondere ist es extrem aufwendig, die für die Projektion eines gegebenen Objektpunktes benötigte Verbindungsgeodäte zwischen Kameraort und Objektpunkt zu berechnen. Dieses Randwertproblem kann beispielsweise mit einem iterativen Schießverfahren über einem Geodätenintegrator gelöst werden. Außerdem sind Mehrdeutigkeiten zu beachten: Unter Umständen gibt es mehr als eine Geodäte zwischen zwei gegebenen Punkten. Beim Raytracing ist dagegen „nur“ eine eindeutige von der Kamera ausgehende Geodäte aufzuintegrieren.

Ältere Arbeiten konnten mangels verfügbarer Rechenkapazität nur sehr spezielle Fälle mit zum Teil analytischen Methoden betrachten. Heutige allgemeinrelativistische Visualisierungen, die auch komplexere Objekte in weniger symmetrischen Raumzeiten darstellen können, basieren aus den genannten Gründen auf Raytracing (verbessert durch Tabellierungs- und Caching-Verfahren). Die Renderingzeiten erlauben aber auch mit modernen Rechnerclustern immer noch keine interaktiven Bildraten.

Das Ziel dieses Projekts ist es, das Raytracingverfahren aus der klassischen Computergrafik so zu modifizieren, dass einerseits der Geschwindigkeitsvorteil der linearen Abbildungen erhalten bleibt, es andererseits aber auch in beliebig gekrümmten Raumzeiten einsetzbar ist. Dazu wird der Raum oder die Raumzeit in kleine (pseudo-)euklidische Stücken aufgeteilt, in denen mit den Methoden der linearen Algebra Standardraytracing betrieben werden kann.

3.4.2 Repräsentation der Raumzeit im Rechner

In dem neuen, in Kapitel 9 *Triangulierung d -dimensionaler Räume*, S. 123 genauer beschriebenen Verfahren, wird die d -dimensionale Raumzeit als irreguläres Gitter aus flachen d -Simplizes⁵ (Regge-Calculus, Abschnitt 7.4, S. 110) dargestellt. Damit können auch beliebige aus numerischen Simulationen resultierende Raumzeiten visualisiert werden.

Simplizes haben als Grundelemente gegenüber anderen Zerlegungen mehrere Vorteile: Ihre Form ist durch die Längen der Kanten eindeutig bestimmt, Winkel müssen nicht beachtet werden. Des Weiteren sind einige nützliche kombinatorische Beziehungen dimensionsunabhängig formulierbar. So ist jeder Vertex mit jedem anderen durch eine Kante verbunden. Bei einem d -Simplex mit $d + 1$ Vertices bildet jede beliebige Kombination von d Vertices (also alle bis auf einen) eine der $d + 1$ „Randflächen“, welche dem übriggebliebenen Vertex gegenüberliegt.

Die von einem Vertex ausgehenden, zu den genau d anderen Vertices führenden Kanten können als Basisvektoren eines lokalen affinen Koordinatensystems dienen. Die Koordinatenwerte laufen von 0 bis 1. Die zur Geodätenberechnung sehr oft benötigte Bestimmung des Schnittpunkts einer Geraden mit dem Rand des Simplex ist einfach und unabhängig von der Metrik und ist damit schnell (Abschnitt 9.8 *Geodäten in Regge-Raumzeiten*, S. 137).

Leerer Raum ist unsichtbar. Um die Struktur eines Raumes zu erkennen, müssen in diesen Raum Objekte platziert werden, die betrachtet werden können und mit denen interagiert werden kann. Aufgrund der begrenzten verfügbaren Rechenleistung wurden nur einfache Objekte wie Tetraeder, Würfel und Stäbe realisiert. Objekte in einer d -dimensionalen Raumzeit setzen sich aus einer Anzahl von $(d - 1)$ -dimensionalen *Oberflächenelementen*, hier $(d - 1)$ -Simplizes zusammen (Abschnitt 9.9 *Objekte in der Regge-Raumzeit*, S. 139).

3.4.3 Geodäten in Regge-Raumzeiten

Sowohl für die Berechnung der Lichtstrahlen für das Raytracing als auch für die Beschreibung von Bewegungen in der Raumzeit oder für die Definition von geometrischen Konstruktionen wie „gerade“ Stäbe werden Geodäten benötigt. Die Berechnung der Geodäten muss schnell erfolgen, da sie sehr häufig (für jeden Bildpunkt) benötigt wird.

Die d -dimensionalen Regge-Raumzeiten bestehen aus flachen Teilstücken (d -dimensionalen Simplizes), innerhalb derer eine Geodäte eine Gerade ist. Zwei solche Simplizes sind durch einen $(d - 1)$ -dimensionalen Randsimplex verbunden, über den eine Geodäte ebenfalls geradlinig fortgesetzt werden kann. Abschnitt 9.8 *Geodäten in Regge-Raumzeiten*, S. 137 beschreibt diese Berechnung der Geodäten genauer.

Die prinzipielle Eignung eines solchen Verfahrens zur Berechnung von Geodäten wurde bereits in den 1980er-Jahren untersucht (Williams und Ellis, 1981, 1984; Brewin, 1993; Chakrabarti et al., 1999); dass dieses Verfahren zur Berechnung von Bildern verwendet wurde, ist mir nicht bekannt. Die Tauglichkeit hierfür wird in Kapitel 10 *Tests des Regge-Raytracers*, S. 143 näher untersucht: Ein parallel mitgeführter Geodätenintegrator erlaubt es, die Abweichungen der in der Regge-Zerlegung berechneten Geodäten von der „korrekten“ Lösung zu bestimmen. Vergleiche von Testbildern, die einerseits mit dem neuen Regge-Verfahren und andererseits durch Integration der Geodätengleichung berechnet wurden, zeigen, dass die Abweichungen mit höherer Gitterauflösung kleiner werden und dass bei

⁵Ein d -Simplex ist die konvexe Hülle von $d + 1$ affin unabhängigen Punkten.

der in den folgenden Beispielen verwendeten Auflösung für unsere Zwecke akzeptable Bilder resultieren.

3.4.4 Implementierung

Das komplette Programmsystem umfasst etwa 44000 Programmzeilen (davon ca. 8000 aus externen Bibliotheken wie etwa einem Interpreter für die Programmiersprache *Scheme* oder dem RTSP⁶-Server zur Darstellung des Live-Bildes auf einem entfernten Rechner). Dazu kommen diverse Standardbibliotheken wie OpenGL zur Darstellung der Triangulierung zu Debug-Zwecken, die Gnu Scientific Library⁷, die HDF5-Library⁸ zur Speicherung der Triangulierung sowie einige Routinen aus den Numerical Recipes (Press et al., 2002). Das Programm ist objektorientiert in C++ geschrieben, was zum einen eine gute Erweiterbarkeit und zum anderen eine hohe Rechengeschwindigkeit ermöglicht.

Da der Flugsimulator auch auf größeren, eventuell räumlich entfernten Rechnerclustern laufen soll, wurde er als Client-Server-System implementiert. Das Clientprogramm läuft auf einem beliebigen Standard-PC, sendet die Benutzereingaben (Flugsteuerung) über ein UDP-Netzwerkprotokoll⁹ zum Serverrechner und empfängt von diesem die berechneten Bilder als MPEG4-kodierten Video-Stream. Der Bandbreitenbedarf ist aufgrund der Komprimierung und der geringen Bildauflösung sehr gering (einige 10 kByte/s), so dass eine Nutzung auch über das Internet möglich ist.

Um interaktive Bildraten zu erreichen, ist das Serverprogramm auch auf MPI¹⁰-basierte Rechnercluster ausgelegt. Es besteht aus einem Masterprozess, der die zu berechnenden Bildpixel auf einzelne Slaveknoten verteilt und die Ergebnisse wieder zu einem Gesamtbild zusammensetzt. Näheres zur Implementierung sowie eine Bedienungsanleitung sind in Kapitel 11 *Implementierung des relativistischen Flugsimulators*, S. 147 zu finden.

3.4.5 Szenenbeschreibungssprache

Mit dem Flugsimulator möchten wir die unterschiedlichsten Metriken, Raumtopologien und Dimensionen besuchen und dabei verschiedene Szenen und Objektanordnungen erkunden. Dazu ist es wünschenswert, die verschiedenen Szenarien in einem leicht anpassbaren und zum Programmstart ladbaren Konfigurationskript ablegen zu können. Die Konfigurations-„Sprache“ sollte so flexibel sein, dass damit auch gerechnet werden kann und dass Schleifen sowie Unterprogramme möglich sind; sprich, sie sollte Turing-komplett sein. Dies ermöglicht z. B. die einfache Definition von regelmäßigen Objektanordnungen.

Die aus der LISP-Familie stammende Sprache *Scheme*¹¹ erfüllt diese Anforderungen und ist aufgrund ihrer einfachen Syntax leicht zu implementieren. Abschnitt 11.6, S. 153 beschreibt die in den Flugsimulator integrierte Implementierung.

⁶RTSP: *Real Time Streaming Protocol* (Schulzrinne et al., 1998).

⁷GSL: *Gnu Scientific Library*, <http://www.gnu.org/software/gsl/>.

⁸HDF5: *Hierarchical Data Format 5*, <http://hdf.ncsa.uiuc.edu/>.

⁹UDP: *User Datagram Protocol*, paketorientiertes Netzwerkprotokoll (Postel, 1980).

¹⁰MPI: *Message Passing Interface*. Siehe <http://www.mpi-forum.org/>.

¹¹*Scheme* (Kelsey et al., 1998), *Revised⁵ Report on the Algorithmic Language Scheme*, <http://www.schemers.org/Documents/Standards/R5RS/r5rs.pdf>.

3.5 Ergebnisse

Obwohl das neue Verfahren prinzipiell für vierdimensionale Raumzeiten geeignet ist, würde die für eine interessante Geometrie notwendige Gitterauflösung die zur Verfügung stehende Hauptspeichergröße sprengen. Deswegen wurde als nichttriviales Testbeispiel die Visualisierung eines dreidimensionalen Morris-Thorne-Wurmlochs (Abschnitt 7.3, S. 109) gewählt. Dessen Metrik ist zeitunabhängig und diagonal mit $g_{tt} = -1$, so dass bei der Geodätenberechnung die Zeitkomponente weggelassen und die Triangulierung auf die drei Raumdimensionen beschränkt werden kann.

Die weiter unten gezeigten Bilder sind einem auf dem Mozart-Cluster¹² der Universität Stuttgart interaktiv berechneten Flug entnommen. Die Triangulierung der Beispielwelt besteht aus ca. 1,6 Millionen Vertices und 10 Millionen Simplizes. Die dargestellten Objekte sind aus 5800 (erste Szene) bzw. 58000 (zweite Szene) Dreiecken zusammengesetzt. Auf dem Mozart-Cluster erreicht man mit 40 Doppel-Xeon-Prozessorknoten eine Bildrate von etwa 11 Bildern pro Sekunde mit einer Bildauflösung von 320×240 Pixeln.

In einer gedruckten Arbeit ist es natürlich schwierig, einen Eindruck eines interaktiven Flugsimulators zu vermitteln. Ich versuche hier, zwei Beispielflüge anhand von einigen unterwegs aufgenommenen Schnappschüssen zu illustrieren. Der Flugsimulator bietet hierzu die Möglichkeit, zu einem beliebigen Zeitpunkt das aktuell sichtbare Bild als Einzelbild abzuspeichern. Dieses kann auf Anforderung auch in höherer Auflösung berechnet werden, was einige Sekunden benötigt. Alle dargestellten Bilder wurden mit einem leichten Weitwinkelobjektiv (horizontaler Öffnungswinkel 53°) aufgenommen.

3.5.1 Die erste Szene: senkrechte Stäbe

Die Beispielwelt besteht aus zwei Hohlkugeln A und B (Umfang jeweils $2\pi \cdot 20$), die durch ein im Zentrum befindliches Morris-Thorne-Wurmloch (Abschnitt 7.3, S. 109) mit einem Schlundradius $b_0 = 2$ in Verbindung stehen. Die räumliche Metrik lautet:

$$ds^2 = dl^2 + (b_0^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Dabei sind θ und ϕ die üblichen Winkelkoordinaten auf einer Sphäre. l ist eine Radialkoordinate, die auf der Innenfläche der Hohlkugel A den Wert $+20$ hat, zum Mittelpunkt hin abnimmt, am Schlund den Wert 0 annimmt, dann beim Übergang in die Hohlkugel B negativ wird und schließlich auf der Innenfläche der Hohlkugel B den Wert -20 erreicht. Längs eines radialen Strahls misst die l -Koordinate reale Entfernungen ($g_{ll} = 1$).

Durch dieses Wurmloch werden in der Äquatorebene radial zwei gerade Stäbe gesteckt, die in größerer Entfernung einen Winkel von 90° zueinander haben.

Um sich die geometrischen und topologischen Verhältnisse klarzumachen, kann man eine zweidimensionale Untermenge der Beispielwelt als zweidimensionale Einbettungsfläche in einem dreidimensionalen Raum darstellen (Abschnitt 7.3.3, S. 110).

Bild 3.1 zeigt ein Einbettungsdiagramm der Äquatorebene. Die schwarzen Kreise markieren Punkte mit gleichem l -Wert. Der oberste Kreis stellt die Schnittlinie der Äquatorebene mit der Hohlkugel A dar ($l = 20$), der Kreis mit dem kleinsten Umfang in der Mitte den

¹²Institute of Parallel and Distributed Systems (IPVS) der Universität Stuttgart, Mozart-Cluster,
<http://www.ipvs.uni-stuttgart.de/abteilungen/sgs/abteilung/ausstattung/> ↵
 ↵ mozzart/start.

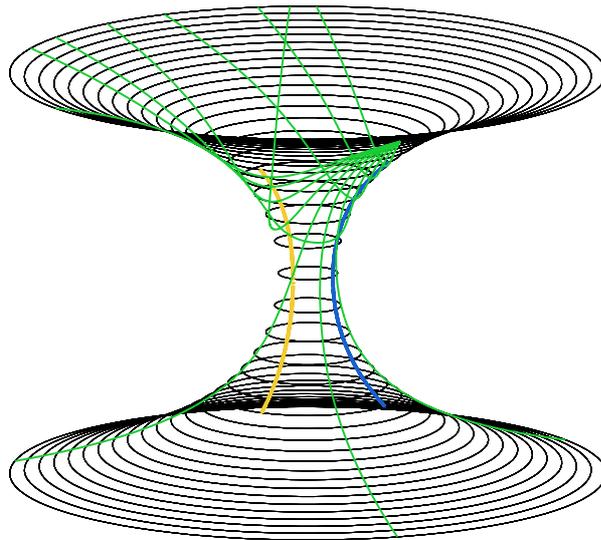


Bild 3.1: Einbettungsdiagramm der Äquatorebene eines Wurmlochs (vertikal überhöht). Die gelben und blauen Objekte stellen zwei durch den Wurmlochschlund gesteckte Stäbe dar. Grün: Lichtstrahlen, die am Ort der Kamera zusammenlaufen.

Schlund ($l = 0$) und der unterste Kreis die Schnittlinie der Äquatorebene mit der Hohlkugel B ($l = -20$). Der Abstand Δl zwischen zwei benachbarten Kreisen beträgt 1. Die innere Geometrie der Einbettungsfläche ist durch die Wurmlochmetrik in der Äquatorebene bestimmt:

$$ds^2 = dl^2 + (b_0^2 + l^2) d\phi^2.$$

Die zwei durch den Wurmlochschlund reichenden Stäbe unserer Beispielszene liegen in der Äquatorebene. Sie sind im Einbettungsdiagramm gelb bzw. blau eingezeichnet. Liegt die Kamera in der Äquatorebene, können wir die das Bild ergebenden, von der Kamera aus rückwärts verfolgten Lichtstrahlen ebenfalls einzeichnen (grüne Linien).

Da es in einer nichtinteraktiven Bilderfolge nicht ganz einfach ist zu erkennen, wo man gerade ist und in welche Richtung man schaut, sind den meisten Bildern Karten zugeordnet (z. B. Bild 3.2). Diese bilden wie die Einbettungsfläche die Äquatorebene ab, sind etwas übersichtlicher als diese und können für Kamerapositionen in oder nahe dieser Ebene eine Orientierung bieten. Sie bestehen aus zwei Teilkarten für die Hohlkugeln A (links) und B (rechts). Wie im Einbettungsdiagramm markieren die konzentrischen schwarzen Kreise Punkte mit gleichem l . Der innerste Kreis steht in beiden Teilkarten für $l = 0$ und verbindet die beiden Teilkarten: Punkte mit gleicher Winkelkoordinate werden identifiziert. In der linken Teilkarte nimmt l nach außen von Kreis zu Kreis um eins zu, in der rechten Teilkarte um eins ab. In den Bildunterschriften ist jeweils die l -Koordinate der Kameraposition angegeben. Die meisten Bilder sind von einer Position knapp oberhalb der Äquatorebene aufgenommen, die dazugehörigen Karten zeigen die Projektion auf diese Ebene, sind also nicht ganz exakt.

3.5.2 Das Wurmloch von außen

Die das Wurmloch umschließenden Hohlkugeln sind innen mit einem Karomuster versehen (Längen- und Breitenkreise im 30° -Raster).

In Bild 3.2 sieht man im Hintergrund die beige Innenwand der Hohlkugel A . Wir befinden uns zu Beginn etwa in der Mitte zwischen Rand und Wurmloch und blicken zum Zentrum. In der Bildmitte sieht man durch das Wurmloch hindurch die hellblaue Innenwand der Hohlkugel B . Außerdem sind die beiden Stäbe sichtbar, die durch das Wurmloch hindurch in die andere Hohlkugel reichen.

Wenn man sich einem Stab nähert und an ihm entlangpeilt (Bild 3.3a) wird ersichtlich, dass er schnurgerade ist. Dies gilt auch für den zweiten Stab (Bild 3.3b). Von oben gesehen (Bild 3.3c) wird der 90° -Winkel zwischen den Stäben deutlich.

Beide Stäbe haben ihren Endpunkt in der Hohlkugel A bei einer l -Koordinate von 6, die Länge der Stäbe beträgt 12. Die Endpunkte liegen auf einem Kreis mit dem Umfang $2\pi r$ mit $r = \sqrt{b_0^2 + l^2} = \sqrt{40} \approx 6,3$. In einem ungekrümmten Raum müssten sich die radial nach innen laufenden Stäbe in der Mitte treffen. In unserer Wurmlochwelt tun sie das nicht.

3.5.3 Durchflug

Folgt man einem Stab in Richtung Wurmloch, so nimmt die durch das Wurmloch sichtbare Innenseite der anderen Hohlkugel einen immer größeren Teil des Gesichtsfeldes ein (Bild 3.3d, Bild 3.4a).

Bei Erreichen des Schlundradius ist das Bild bei einem Blick zur Seite (Bild 3.4b) genau zweigeteilt: die eine Hälfte des Gesichtsfeldes wird von Lichtstrahlen aus der beigen Hohlkugel getroffen, die andere Hälfte von Lichtstrahlen aus der blauen. Die „Schlundfläche“ des Wurmlochs erscheint als unendlich ausgedehnte Ebene, die von *beiden*, hier parallel stehenden Stäben senkrecht durchstoßen wird (Bild 3.4b, Bild 3.4d).

In Bild 3.4b ist im Hintergrund der gelbe Stab zu sehen. Die von ihm ausgehenden Lichtstrahlen durchlaufen einen $3/4$ -Kreis um das Wurmloch herum, bis sie in die Kamera eintreten. Am Schlundradius tangential laufende Lichtstrahlen divergieren sehr stark, was zu einer Stauchung des Stababbildes in radialer Richtung führt.

Bild 3.4c zeigt den Blick zurück.

Wir fliegen etwas weiter durch das Wurmloch längs des blauen Stabes (Bild 3.5a). Die Krümmung der Grenzlinie zwischen den beiden Hohlkugeln klappt um (Bild 3.5b), wir sind auf der anderen Seite. Fliegt man noch weiter in die blaue Hohlkugel und blickt zurück (Bild 3.5c, Bild 3.5d), sieht man die ursprüngliche Hohlkugel immer kleiner werden und die beiden in sich geraden Stäbe wieder auseinanderlaufen (Bild 3.6a, Bild 3.6b).

An Bild 3.5d sind die durch das Verfahren bedingten Artefakte deutlich zu erkennen: Der gelbe Stab scheint „aufgebrochen“ oder „doppelt“. Lichtstrahlen von dem Teil des Stabes aus Hohlkugel A laufen annähernd tangential durch den Schlund und werden relativ zueinander stark abgelenkt. Diskontinuitäten durch die diskrete Zerlegung des Raumes wirken sich hier besonders stark aus.

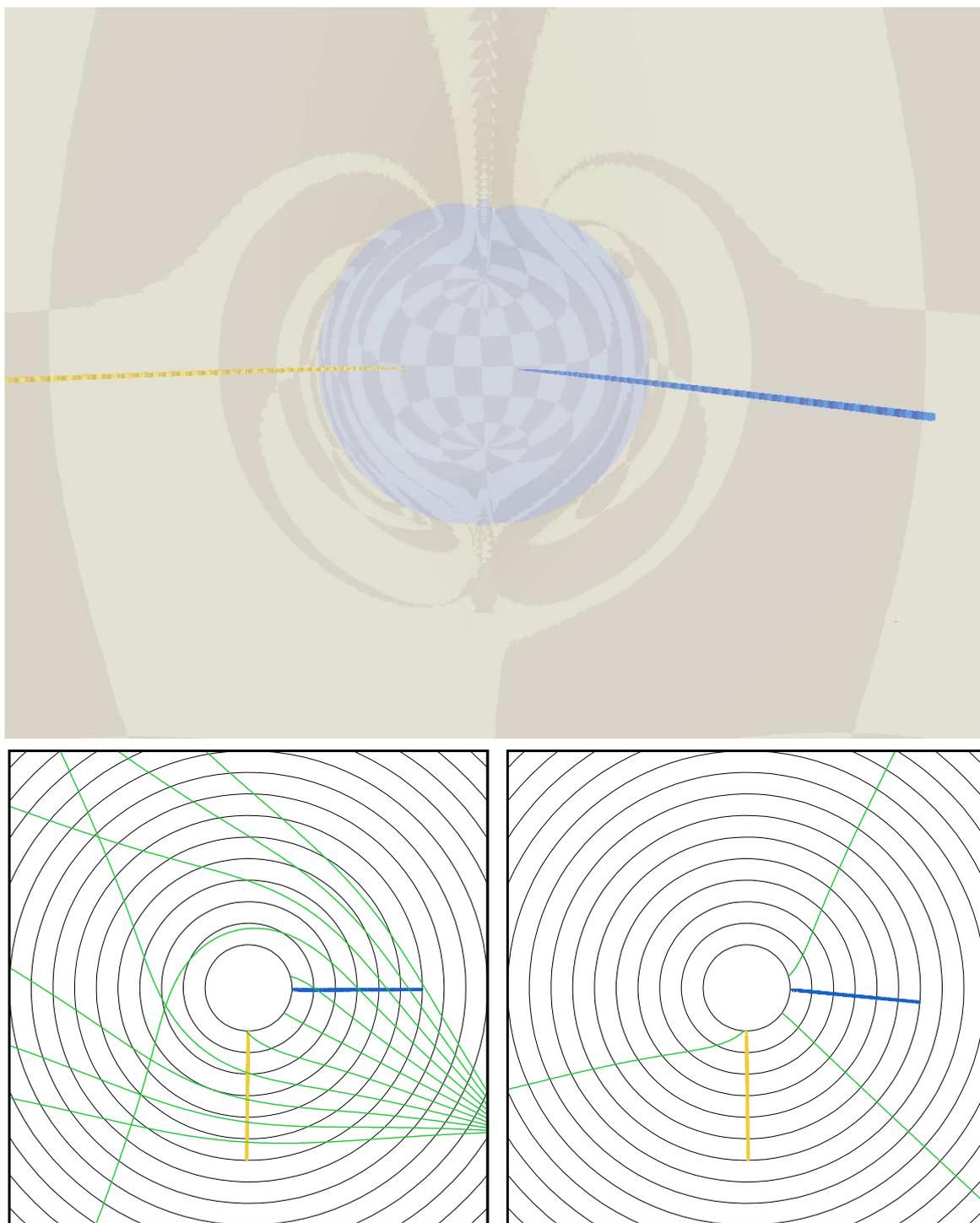
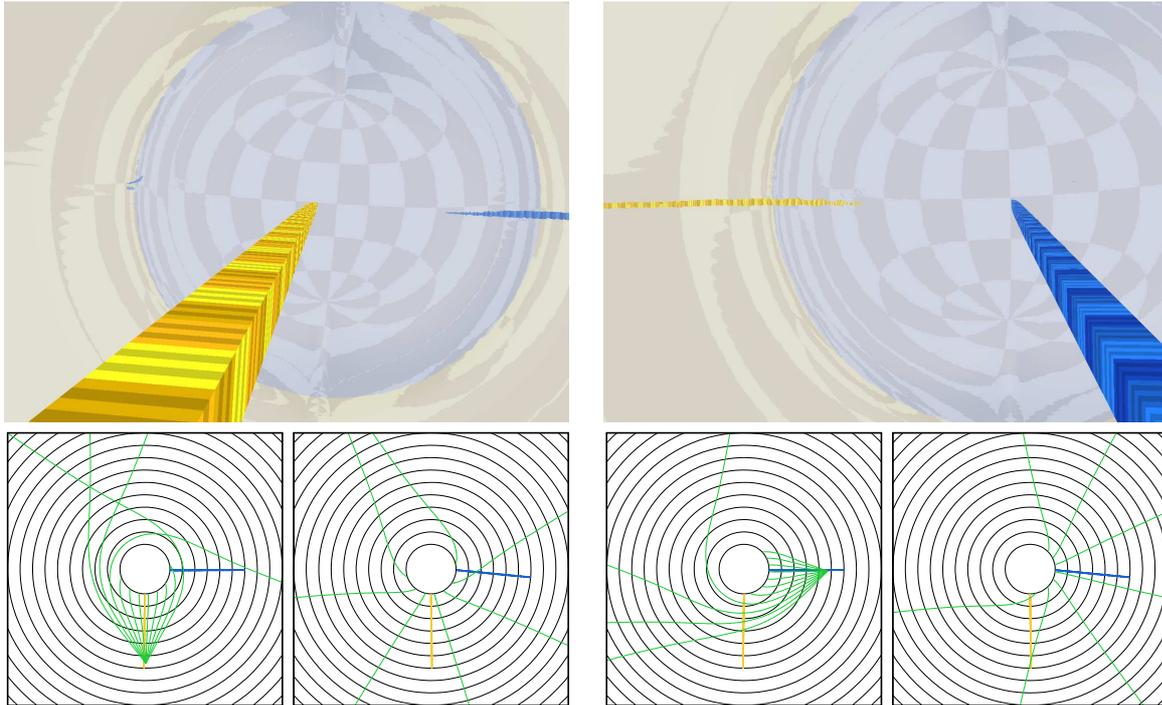
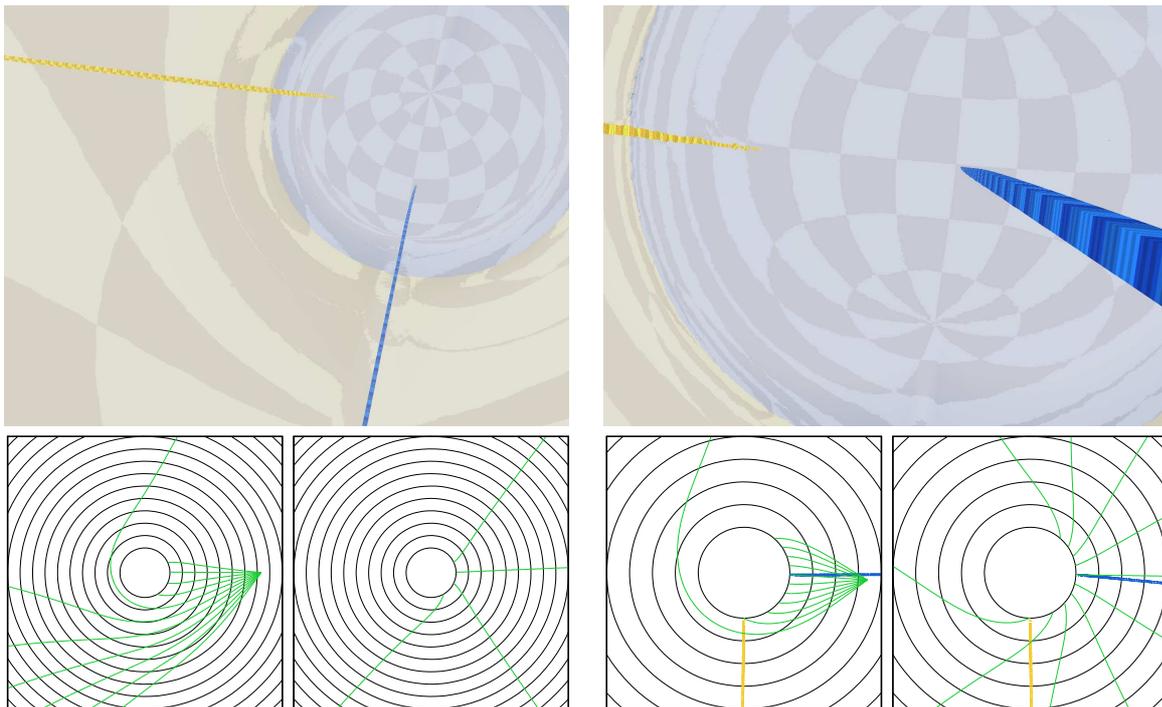


Bild 3.2: Ansicht des Wurmloches von weitem ($l = 11,8$).



(a) Blick entlang des einen Stabes ($l = 5,6$).

(b) Blick entlang des anderen Stabes ($l = 4,7$).

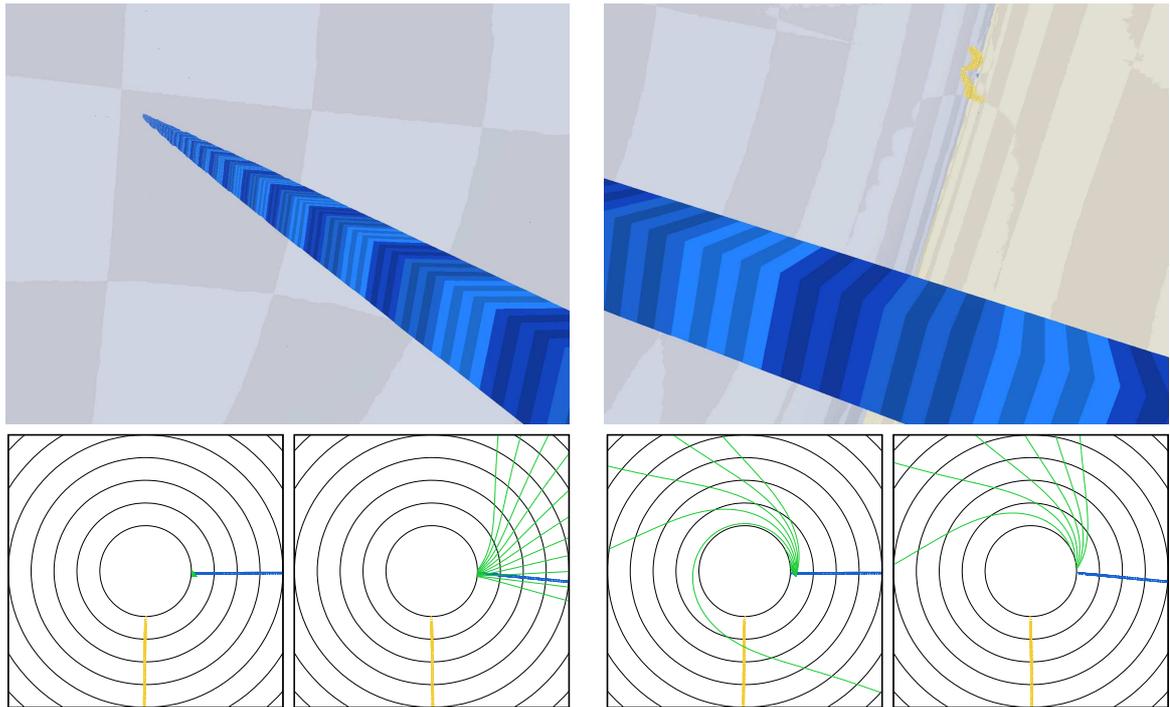


(c) Blick von oben ($l = 7,3$).

(d) Wir nähern uns dem Wurmloch ($l = 3,4$).

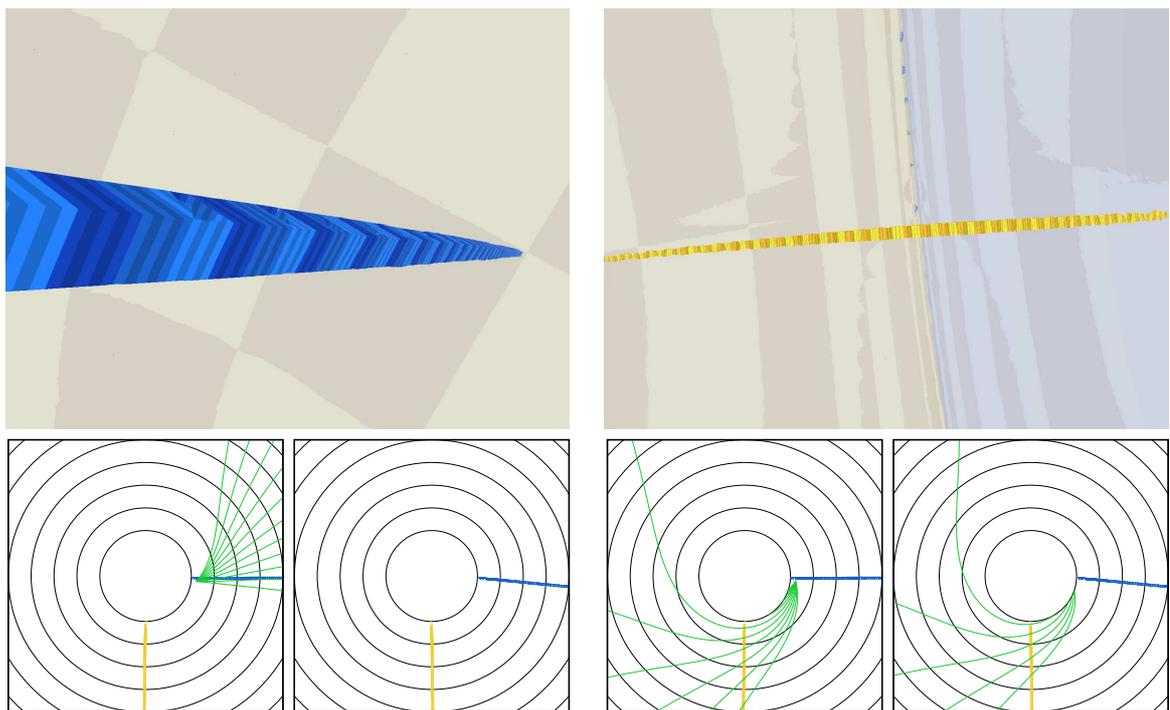
Bild 3.3: Anflug auf das Wurmloch.

3 Relativistischer Flugsimulator



(a) Kurz vor dem Schlund ($l = 0,23$).

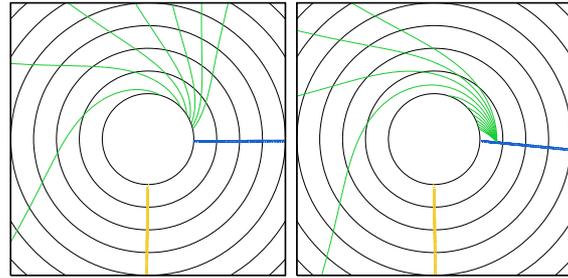
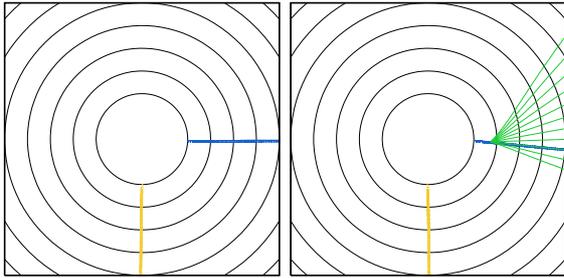
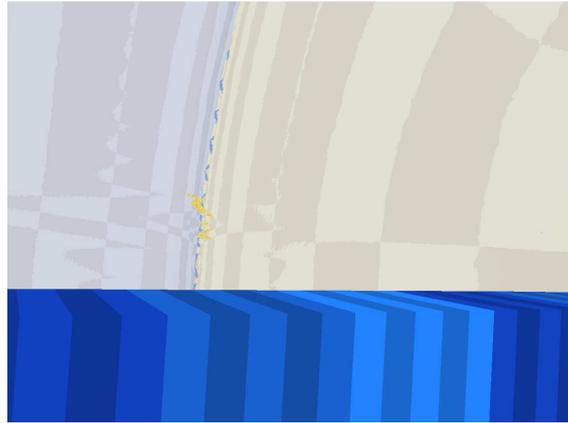
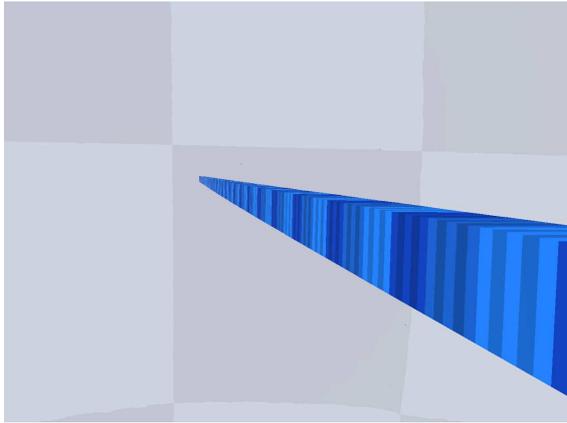
(b) Blick zur Seite ($l = 0,23$).



(c) Blick zurück ($l = 0,23$).

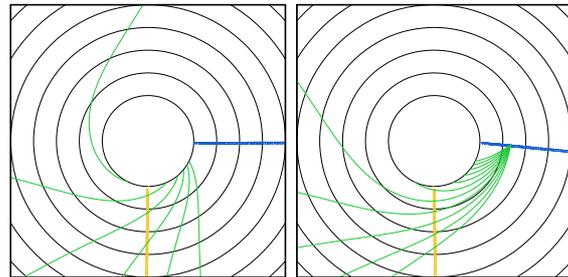
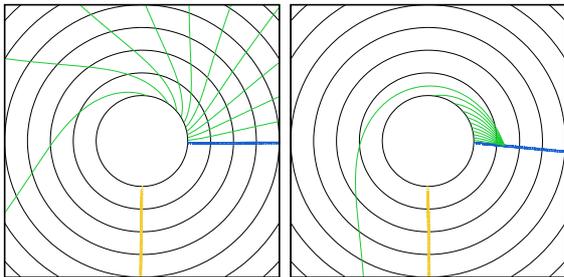
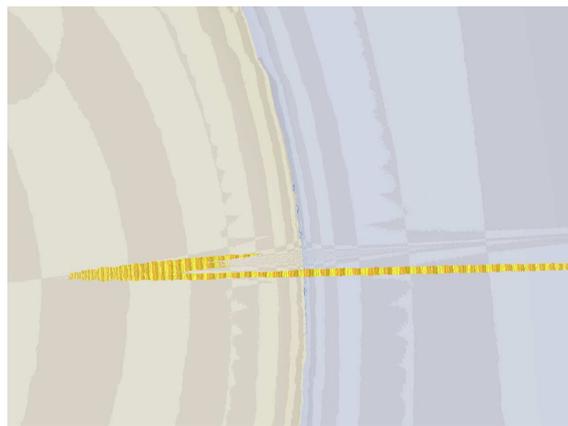
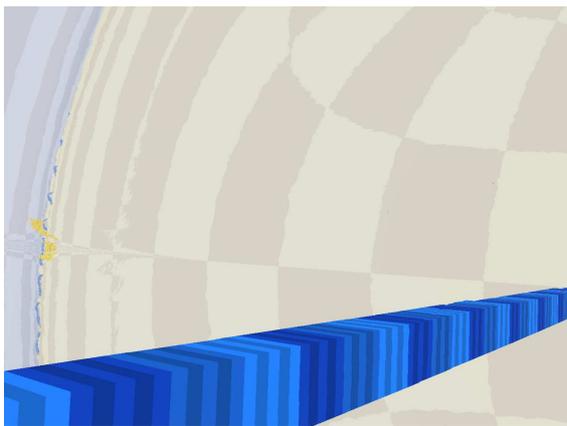
(d) Blick zum anderen Stab ($l = 0,23$).

Bild 3.4: Am Schlund.



(a) Gerade auf der anderen Seite ($l = -0,74$).

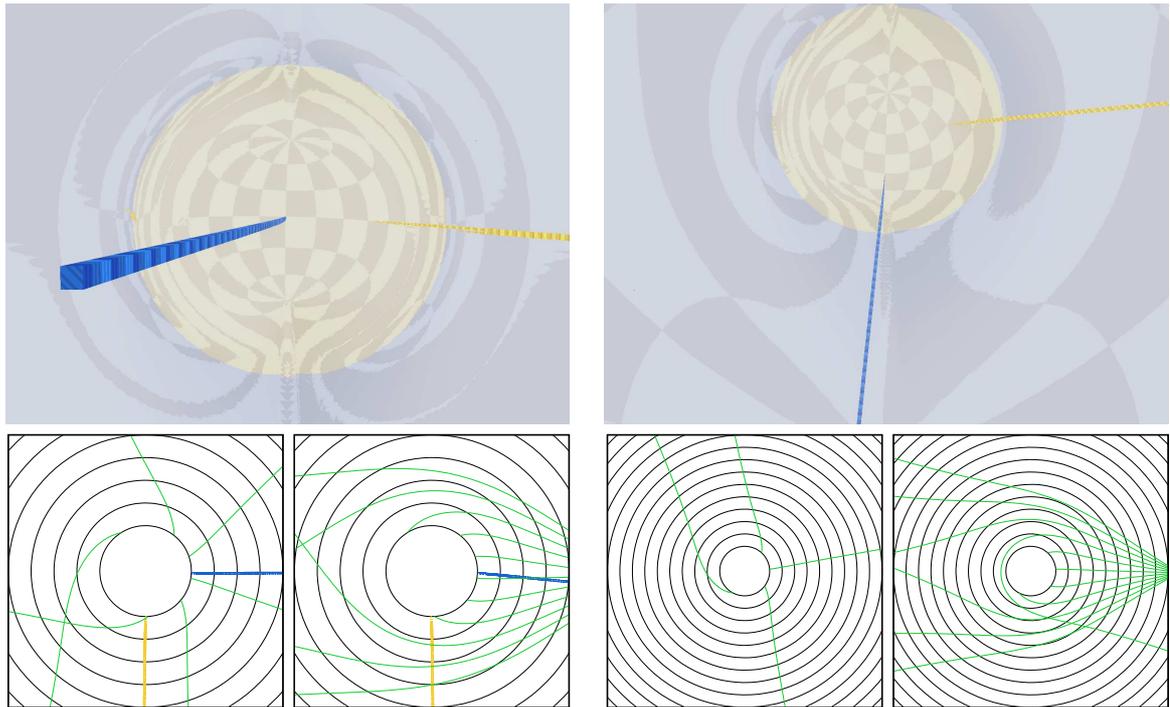
(b) Blick zur Seite ($l = -0,74$).



(c) Etwas weiter in der blauen Kugel ($l = -1,3$).

(d) Blick zum gelben Stab ($l = -1,3$).

Bild 3.5: Durchflug durch das Wurmloch.



(a) In der blauen Kugel ($l = -7,2$).

(b) Blick von oben ($l = -9,9$).

Bild 3.6: Durchflug durch das Wurmloch.

3.5.4 Die zweite Szene: parallele Stäbe

Eine andere Szene soll den Verlauf von Geodäten verdeutlichen. In größerer Entfernung vom Wurmloch werden in der Äquatorebene 20 gerade Stäbe parallel zueinander in Richtung Wurmloch ausgerichtet (Bild 3.7). Jeder der Stäbe ist in sich gerade, d. h. er folgt einer Geodäte (Bild 3.8a–3.8d) und könnte in unserer statischen Metrik mit $g_{tt} = -1$ auch einen Lichtstrahl oder die Bahn eines frei fallenden Körpers markieren. Ein Teil der Stäbe bleibt in der beigeen Hohlkugel, der andere Teil reicht durch das Wurmloch hindurch in die blaue Hohlkugel (Bild 3.8e–3.8f).

Man beachte in Bild 3.7 die ringförmige farbige Struktur um das Wurmloch herum knapp außerhalb des hellblauen Bereichs. Sie kommt auf die gleiche Weise zustande wie ein *Einsteinring* um ein Schwarzes Loch. Lichtstrahlen von einem Punkt genau hinter dem Wurmloch (im Bild z. B. das Ende des innersten blauen Stabes, der nicht durch das Wurmloch hindurchreicht) können die Kamera aus Symmetriegründen auf unendlich vielen, bei der Kamera auf einem Kegelmantel liegenden Wegen erreichen.

Qualitativ ähnelt der Lichtstrahlenverlauf in der Nähe des Wurmlochs dem in der Nähe eines Schwarzen Lochs: Lichtstrahlen werden um so stärker nach innen „abgelenkt“, je näher sie am Zentrum vorbeilaufen. In beiden Situationen gibt es einen Radius, an dem (instabile) Kreisbahnen möglich sind (der *Photonenradius* $r = 1,5 r_s$ beim Schwarzen Loch bzw. $l = 0$ beim Wurmloch). Daraus folgen vergleichbare optische Effekte bei den beiden Metriken.

Bild 3.9a ist von einem Standpunkt zwischen dem äußersten Stab, der gerade noch durch das Wurmloch geht (blau, rechts) und dem innersten Stab, der knapp das Wurmloch verfehlt (gelb, links) aufgenommen.

Fliegen wir jetzt zwischen diesen beiden Stäben Richtung Wurmloch bis zum Schlund (Bild 3.9b, Bild 3.10a–3.10c). Die beiden ursprünglich parallelen Stäbe entfernen sich voneinander und wir müssen uns für den Weiterflug entscheiden, welchem Stab wir folgen. Wählen wir den gelben Stab, dann bleiben wir in der beigeen Hohlkugel (Bild 3.11a–3.11b). Der blaue Stab dagegen führt uns durch das Wurmloch in die blaue Hohlkugel. Der Blick zurück (Bild 3.11c–3.12a) zeigt die kleiner werdende beige Hohlkugel, aus der wir gekommen sind. Wenn man jetzt in der blauen Hohlkugel von oben auf die Stäbe blickt (Bild 3.12b), sieht man, dass die ursprünglich parallelen Stäbe hier in alle möglichen Richtungen zeigen.

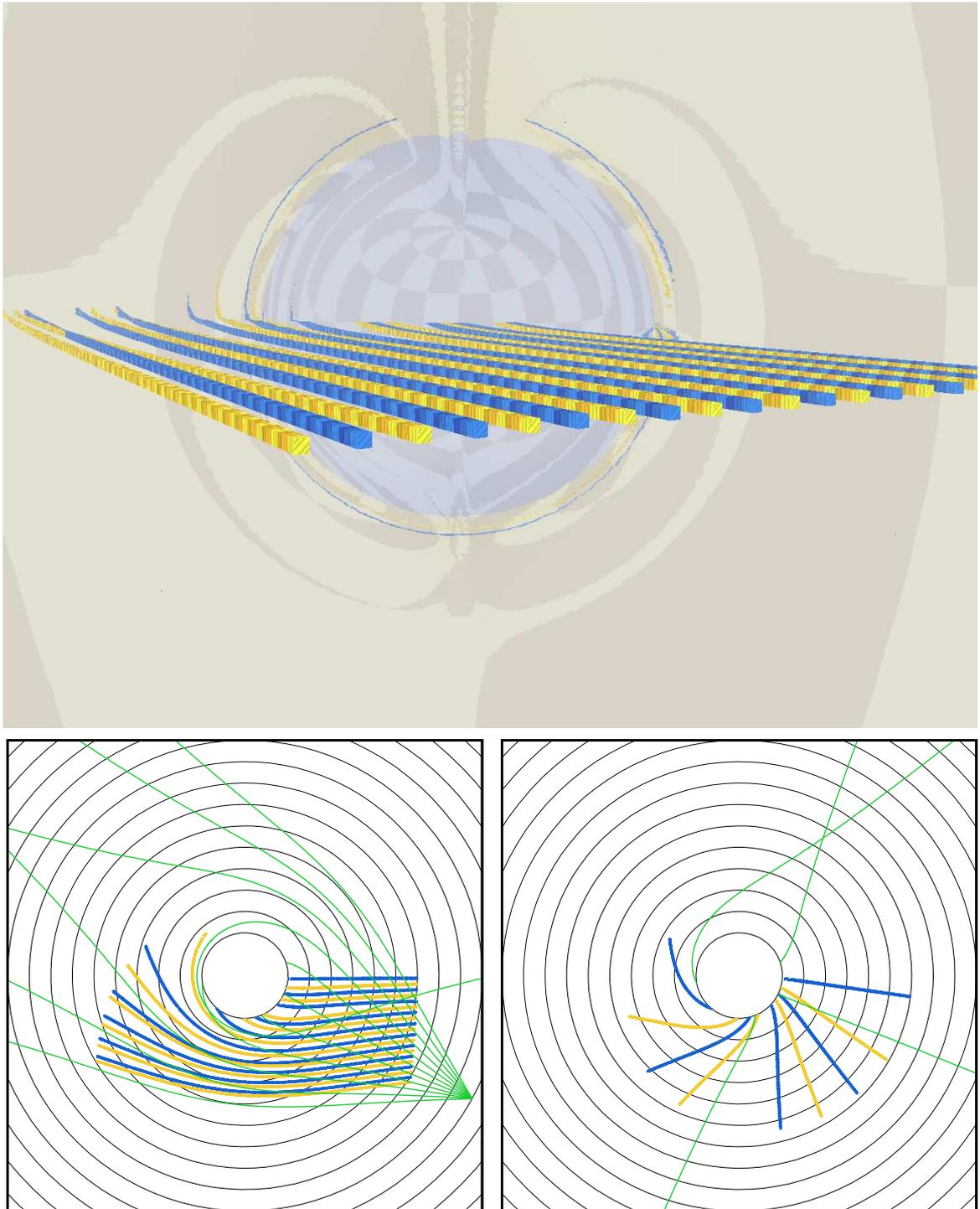
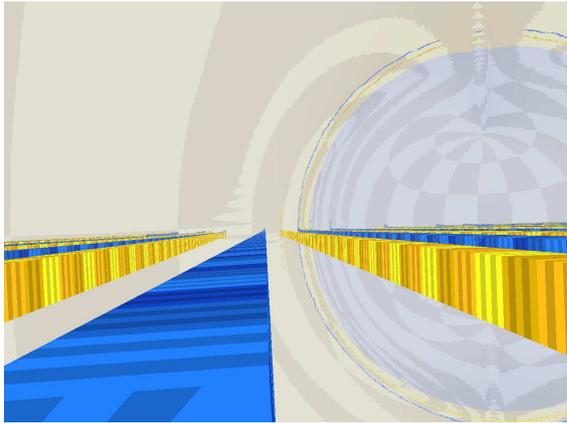
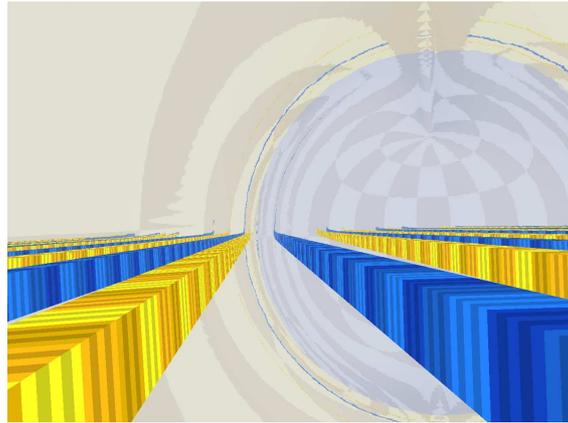


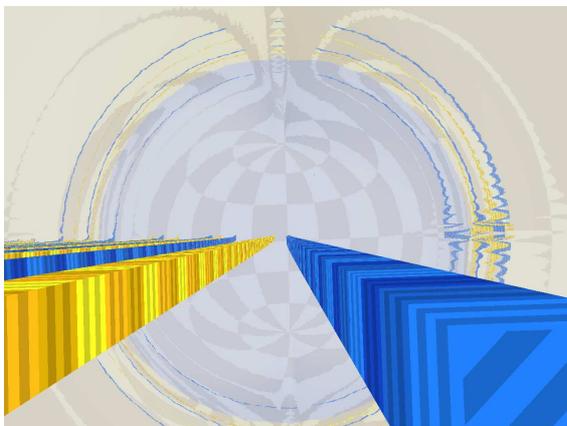
Bild 3.7: Eine Schar paralleler Stäbe ($l = 10$).



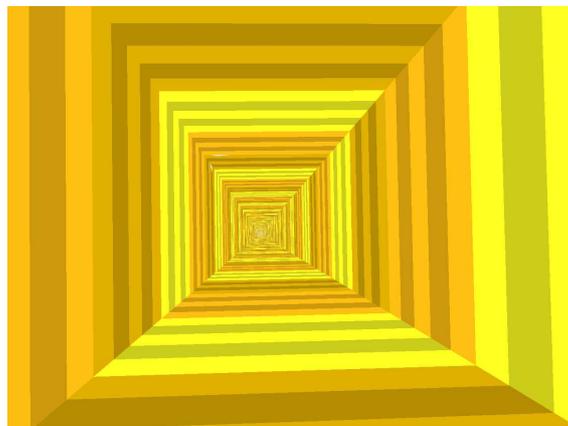
(a) Blick entlang eines Stabes ($l = 6,5$).



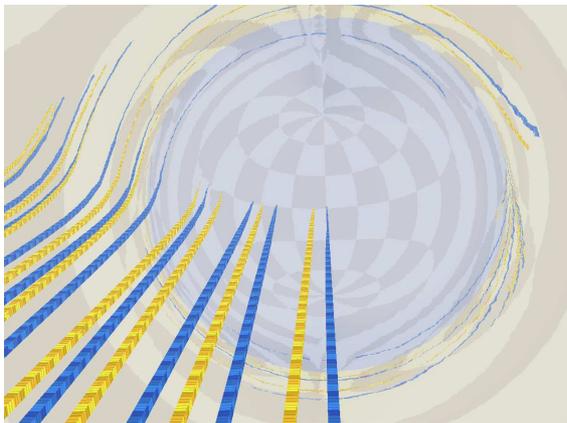
(b) Blick entlang zweier weiterer Stäbe ($l = 6,3$).



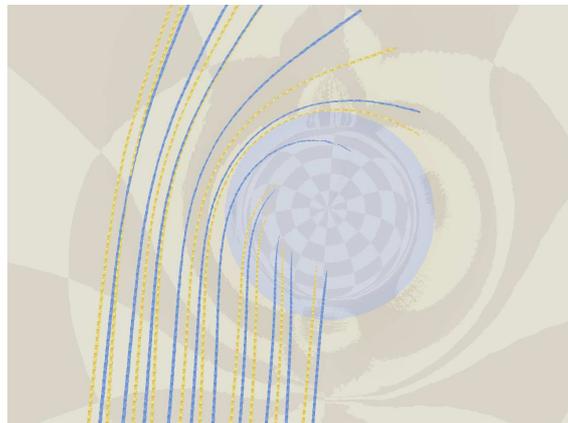
(c) Blick entlang des äußersten Stabes ($l = 6,1$).



(d) Innerhalb eines (hohlen) Stabes.



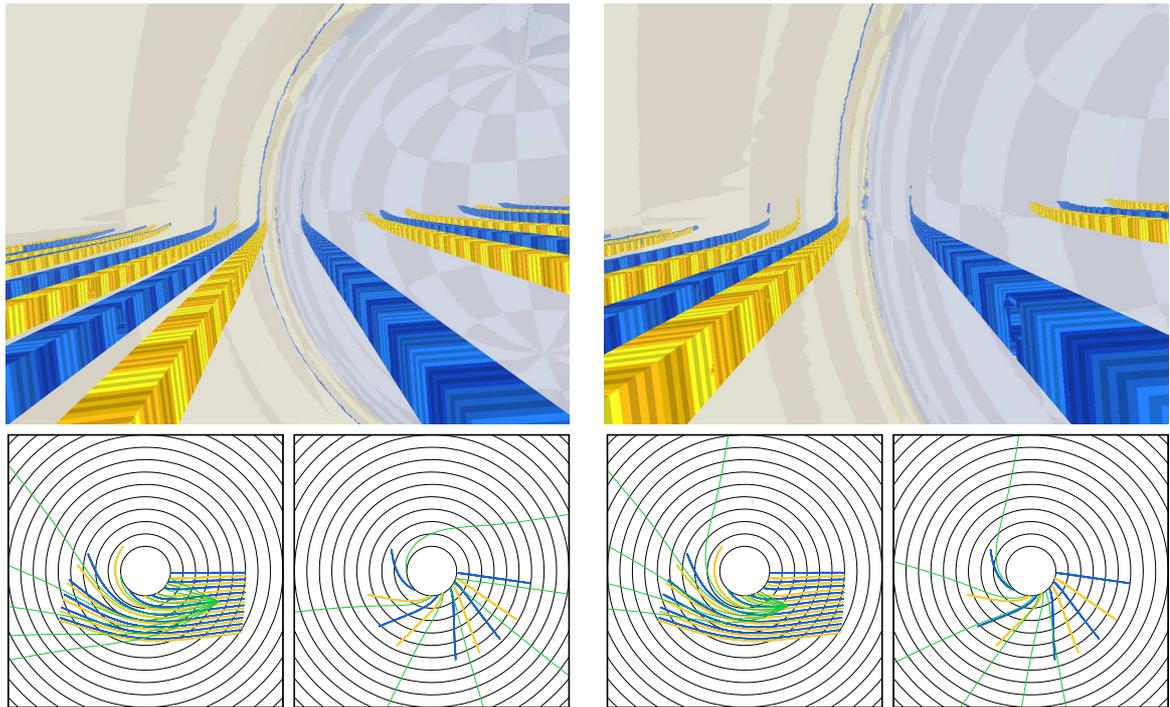
(e) Blick von schräg oben ($l = 6,3$).



(f) Blick von oben ($l = 10,7$).

Bild 3.8: Stäbe.

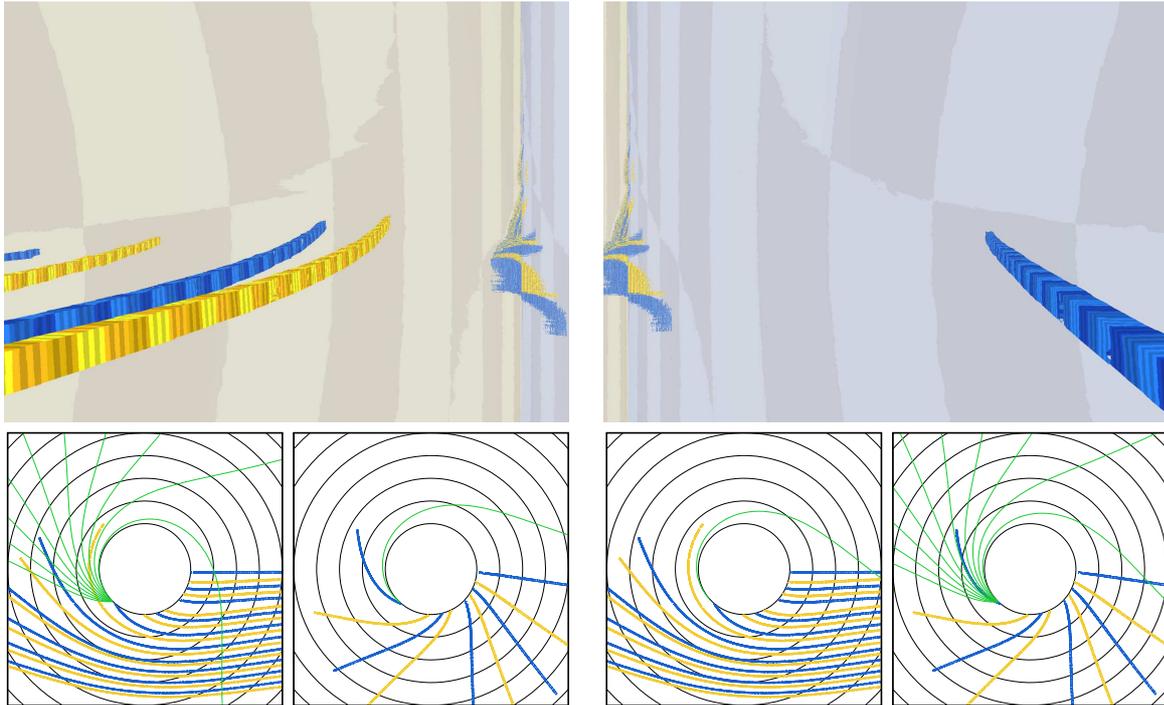
3 Relativistischer Flugsimulator



(a) Wir nähern uns dem Wurmloch ($l = 4,4$).

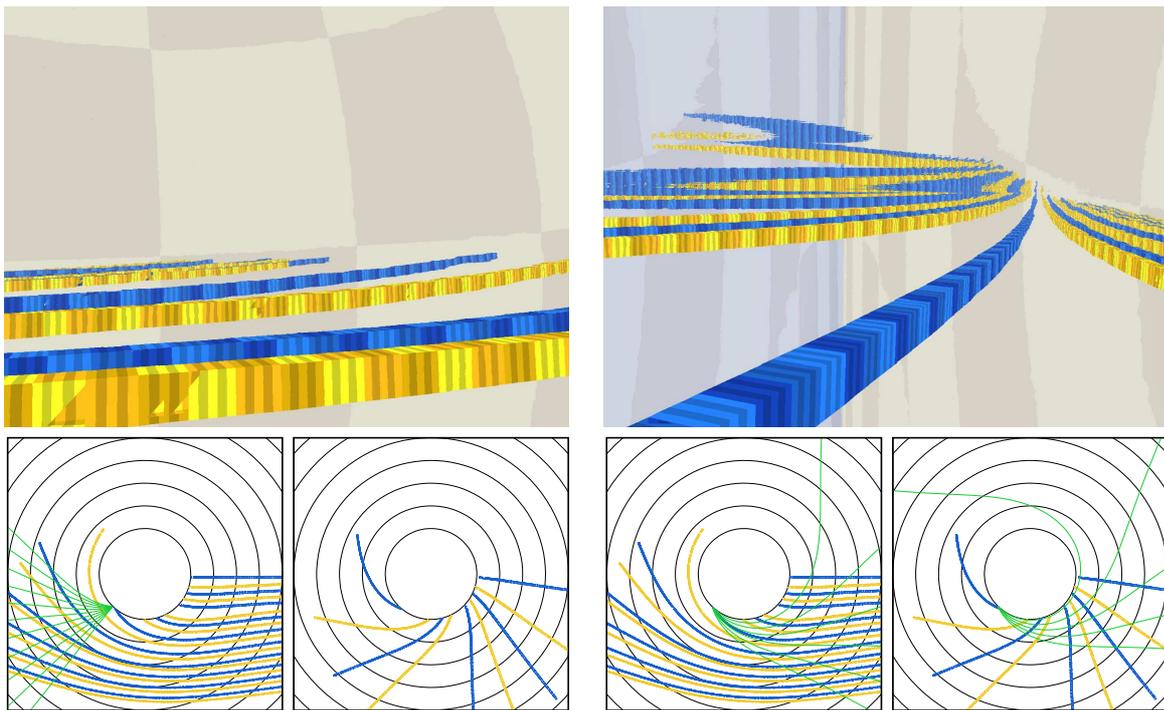
(b) Noch näher... ($l = 2,5$).

Bild 3.9: Stäbe.



(a) Am Schlund: Blick nach links vorne ($l = 0$).

(b) Blick nach rechts vorne ($l = 0$).

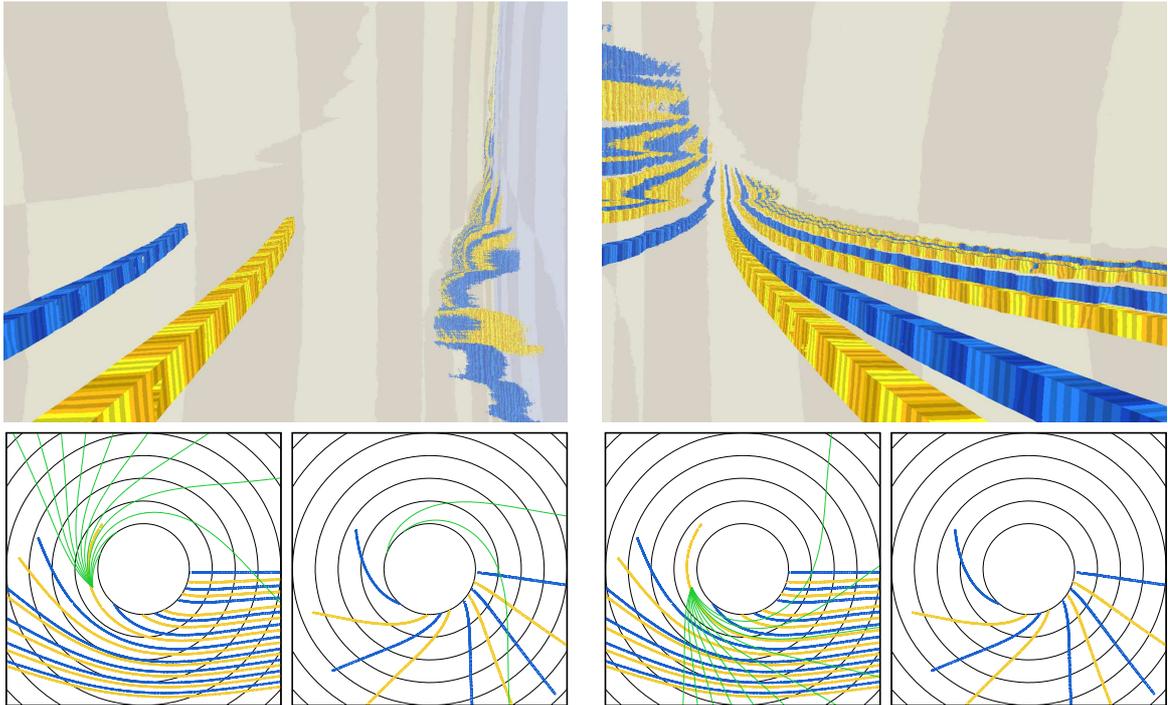


(c) Blick zur linken Seite ($l = 0$).

(d) Blick zurück ($l = 0$).

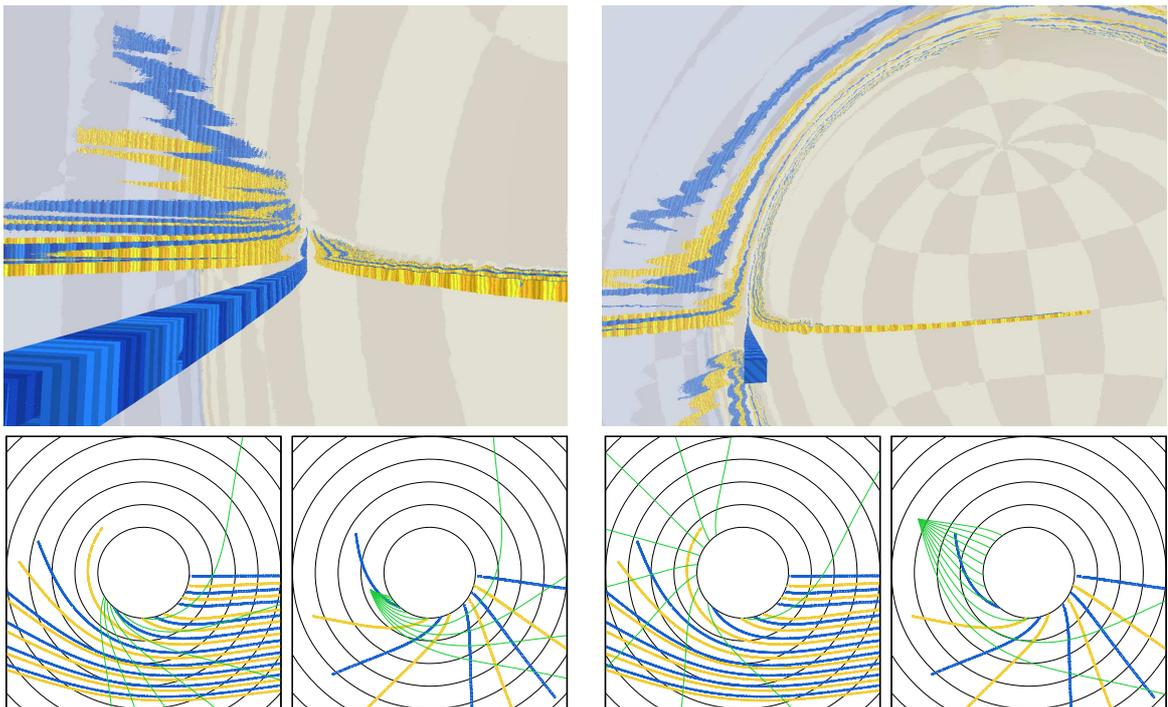
Bild 3.10: Stäbe.

3 Relativistischer Flugsimulator



(a) Wir bleiben in der beige Kugel ($l = 0,36$).

(b) Ab hier: Blick zurück ($l = 0,36$).



(c) Knapp auf der anderen Seite ($l = -0,7$).

(d) Weiter in der blauen Hohlkugel ($l = -3,4$).

Bild 3.11: Stäbe.

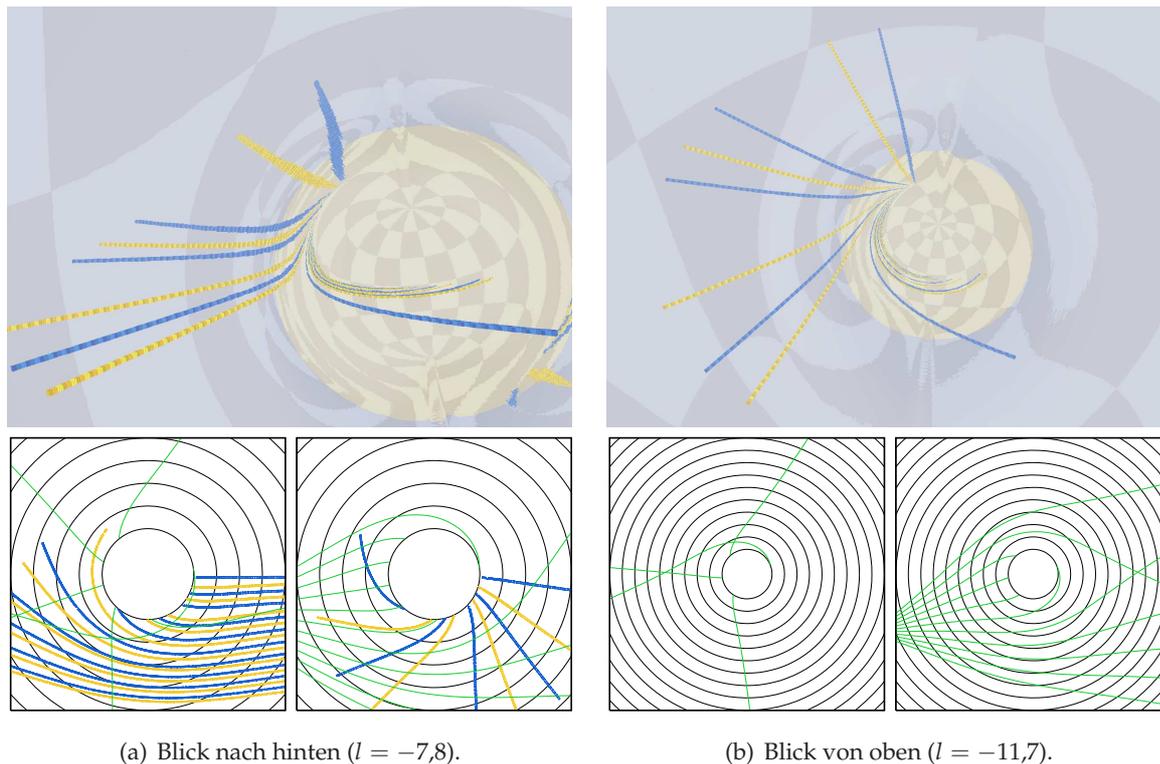


Bild 3.12: Stäbe.

3.6 Fazit

An den Bildern ist einerseits erkennbar, dass prinzipiell die Topologie und Geometrie des Wurmloches mit Hilfe des interaktiven Flugsimulators gut erkund- und verstehbar ist. Andererseits wird auch der Preis der interaktiven Bildraten deutlich: Die Bildqualität ist deutlich schlechter als bei Verfahren, die den Verlauf von Geodäten durch eine rechenzeitintensive Integration der Geodätengleichung bestimmen. Besonders bei weiter entfernten Objekten macht sich bemerkbar, dass die in Realität glatte Raumzeit stückweise durch flache Simplizes angenähert wird. Im Regge-Calculus konzentriert sich die Raumzeitkrümmung einer d -dimensionalen Raumzeit auf $(d - 2)$ -dimensionale singuläre Unterräume (im dreidimensionalen Fall die Kanten der Tetraeder, aus denen die Raumzeit zusammengesetzt wird). Benachbarte parallele Lichtstrahlen, die links und rechts einer solchen Raumzeitsingularität vorbeilaufen, ändern plötzlich ihre Richtung relativ zueinander. In großen Entfernungen summieren sich diese Richtungsänderungen und haben Bildstörungen zur Folge, die der in der irdischen Astronomie bekannten, durch turbulente Luftschichten verursachten Unschärfe (dem Seeing) ähneln.

4 Wir basteln ein Schwarzes Loch

Mit dem im letzten Projekt vorgestellten Flugsimulator haben wir versucht, uns den besonderen Eigenschaften gekrümmter Räume zu nähern, indem wir uns *in* diesen Räumen aufhalten, uns eine *lokale* Sicht der Umgebung schaffen und durch *Herumreisen* einen Gesamteindruck zu gewinnen suchen.

Das hier beschriebene Projekt stellt den Gegenpol dazu dar: Wir basteln aus Pappe ein maßstabsgetreues Modell des gekrümmten Raumes um ein Schwarzes Loch, das als *Ganzes* betrachtet und in die Hand genommen werden kann. Genauso wie beim Flugsimulator ermöglicht eine koordinaten- und mathematikfreie Darstellung die Verwendung in Schule und Öffentlichkeitsarbeit (Zahn und Kraus, 2004; Kraus und Zahn, 2005c).

4.1 Einleitung

Zweidimensionale gekrümmte Räume werden oft als Einbettungsdiagramme dargestellt. Eine zweidimensionale Fläche mit der gleichen inneren Krümmung wie der darzustellende Raum wird in einen dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet. Mit solchen Einbettungsflächen können prinzipiell auch Räume höherer Dimension beschrieben werden, wenn man geeignete zweidimensionale Unterräume herausschneidet. Wenn der zu beschreibende Raum gewisse Symmetrien hat, wie z. B. der Raum um ein kugelsymmetrisches Schwarzes Loch zu einer konstanten Schwarzschildzeit, enthält ein solcher Unterraum sogar die vollständige Information über die Raumkrümmung.

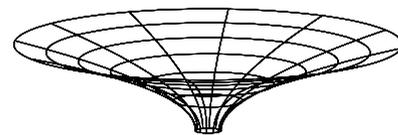


Bild 4.1: Flammsches Paraboloid.

Beim Schwarzen Loch ist ein solcher Unterraum z. B. die Äquatorebene und als Einbettungsfläche ergibt sich das sogenannte *Flammsche Paraboloid*, eine trichterförmige Rotationsfläche. Diese Darstellung ist im Relativitätstheorieunterricht weit verbreitet und in vielen Lehrbüchern zu finden (z. B. in Rindler (2001) oder d'Inverno (1992)).

Diese Illustration des gekrümmten Raumes hat, da sie eine geradezu suggestive Illusion von Verständnis vermittelt (die Einbettungsfläche eines Schwarzen Lochs ist gekrümmt und hat ein Loch), vielfach Eingang in die populärwissenschaftliche Literatur gefunden. Bild 4.1 ist *das* Symbol für ein Schwarzes Loch.

Dabei wird diese (mathematisch korrekte) Darstellung oft zu einer missverständlichen Analogie uminterpretiert, in der etwa ein Gummituch den Raum darstellt und die Krümmung des so modellierten Raumes durch eine hineingelegte „schwere“ Kugel „verursacht“ wird. In Science-Fiction-Filmen fliegt bei Reisen zu einem Schwarzen Loch gelegentlich auch ein Raumschiff *durch* das Loch der trichterförmigen Einbettungsfläche.

Ich beschreibe hier ein Modell, mit dem man auf anschauliche Weise eine Einführung in das Konzept „gekrümmter Raum“ und die dahinter stehende Theorie, die allgemeine Relativitätstheorie, geben kann, ohne auf die oben genannten Fehlvorstellungen zu stoßen. Das Modell stellt den *dreidimensionalen* gekrümmten Raum um ein Schwarzes Loch dar.

4 Wir basteln ein Schwarzes Loch

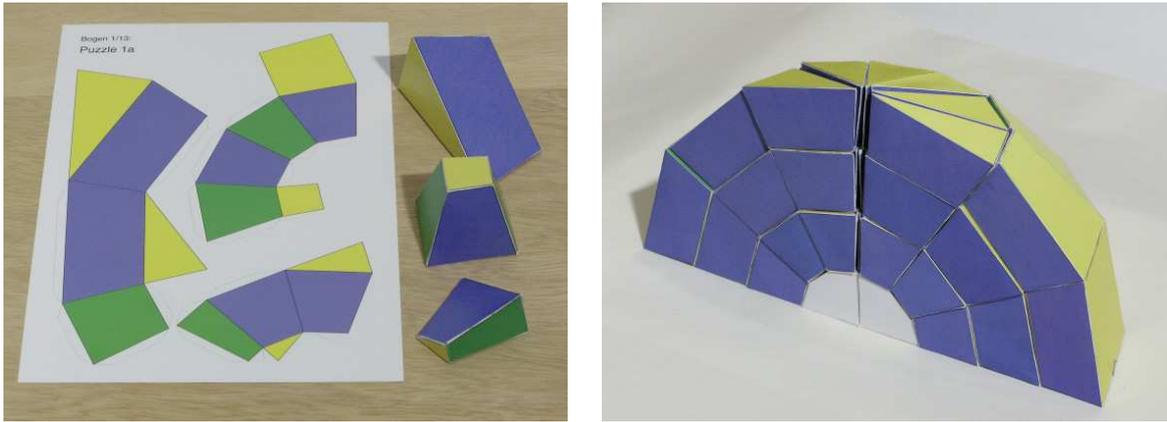


Bild 4.2: Bastelbogen und Bauteile für das Klötzchenmodell (links), das zusammengesetzte Vergleichsmodell für einen euklidischen Raum (rechts).

Es ist maßstabsgetreu, so dass Beobachtungen am Modell quantitativ richtige Ergebnisse liefern.

Das Modell kann aus Bastelbögen nachgebaut werden (Zahn und Kraus 2004; Bild 4.2); die Verwendung für den Unterricht ist in Kraus und Zahn (2005c) beschrieben.

Mit Hilfe des Modells lassen sich mehrere wichtige Grundbegriffe anschaulich verstehen: gekrümmter Raum, Geodäte, Parallelverschiebung, Lichtablenkung, geodätische Präzession. Das Schwarze Loch wurde als Beispiel gewählt, weil in seiner Nähe die Effekte so groß sind, dass man sie an einem maßstabsgetreuen Modell problemlos nachmessen kann.

4.2 Regge-Calculus

Der Regge-Calculus (Abschnitt 7.4 *Regge-Calculus*, S. 110) ist eine Methode zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen. Er stellt eine koordinatenfreie, nur auf messbaren Abständen beruhende Beschreibung der Raumzeit dar. Die Beschreibung basiert auf der approximativen Zerlegung einer beliebigen (gekrümmten) Mannigfaltigkeit in ungekrümmte Teilspektoren.

Ein zweidimensionales Beispiel zeigt Bild 4.3: Hier wird die Oberfläche eines Globus durch eine Anzahl ebener Flächenelemente angenähert. Die Flächenstücke sind durch Längengrade und Breitenkreise mit Abständen von jeweils 30° begrenzt. Zusammengenommen decken die Stücke die gesamte Erdoberfläche ab. Im Gegensatz zu üblichen Weltkarten erhält man so kein geschlossenes Kartenbild. Das ist sicher ein Nachteil dieser Karte, mit dem man sich aber andererseits einen Vorteil erkauft: Die gestückelte Karte ist überall maßstabsgetreu und (je nach Auflösung) im Wesentlichen verzerrungsfrei; keine Projektion mit geschlossenem Kartenbild kann das erreichen. Die Näherung durch ebene Flächenstücke ist offensichtlich um so besser, je kleiner die Flächenelemente sind.

Beim Regge-Calculus wird im allgemeinen Fall die vierdimensionale Raumzeit in kleine Elemente eingeteilt, deren innere Geometrie jeweils flach ist. Typische Anwendungen des Regge-Calculus liegen in den Bereichen numerische Relativitätstheorie und Quantengravitation. Mit diesem Projekt möchte ich zeigen, dass der Ansatz auch für die didaktische Aufbereitung der allgemeinen Relativitätstheorie sehr fruchtbar ist. Sein großer Vorteil besteht

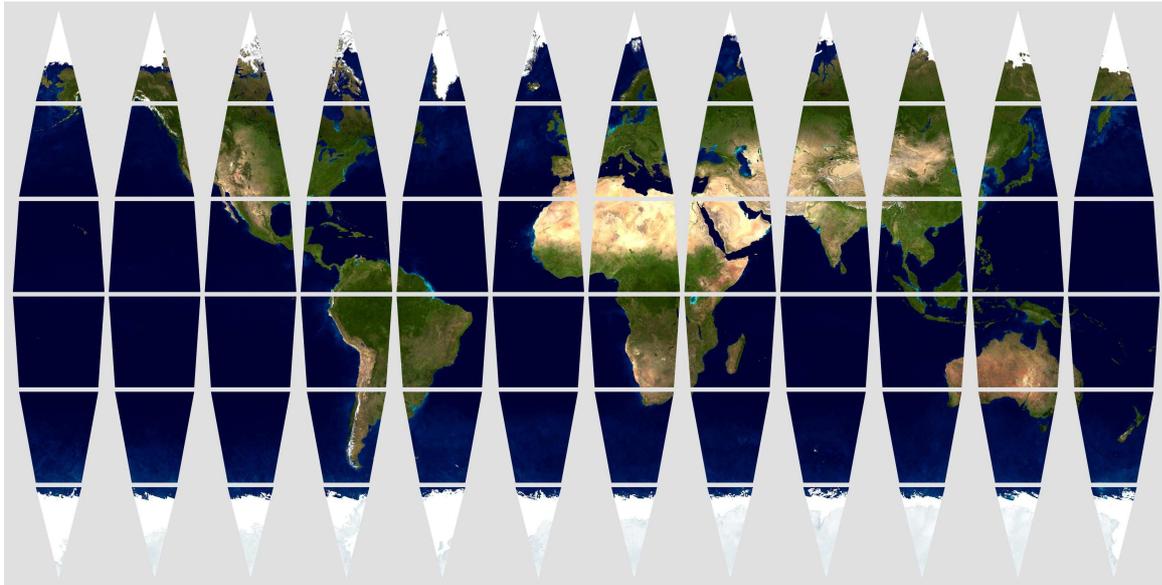


Bild 4.3: Gestückelte Karte der Erdoberfläche. Erdtextur: NASA
(<http://visibleearth.nasa.gov/cgi-bin/viewrecord?11612>).

darin, dass er eine koordinatenfreie Darstellung der Raumzeit liefert, so dass durchweg mit Beobachtungsgrößen argumentiert werden kann.

4.3 Pappmodell des Schwarzen Lochs

Wir verwenden die Methode des Regge-Calculus um den dreidimensionalen gekrümmten Raum in der Nähe eines Schwarzen Lochs als Klötzchenmodell darzustellen. Zum Vergleich dient ein Modell eines euklidischen Raumbereichs. Das Klötzchenmodell basiert auf der Schwarzschildmetrik für ein nichtrotierendes Schwarzes Loch:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.1)$$

wobei $2M$ der Schwarzschildradius r_s der Zentralmasse M ist.

Eine raumartige Hyperfläche zu konstanter Schwarzschildzeit wird in Sektoren aufgeteilt. Die Eckpunkte der Sektoren liegen auf dem Gitter

$$\begin{aligned} r_i &= i \cdot 1,25 r_s & i &= 1 \dots 4, \\ \theta_j &= j \cdot 30^\circ & j &= 0 \dots 6, \\ \phi_k &= k \cdot 30^\circ & k &= 0 \dots 11. \end{aligned}$$

Die Einteilung ist auf den Bereich außerhalb von $r = 1,25 r_s$ beschränkt. Innerhalb von r_s ist keine statische raumartige Hyperfläche definierbar. Die Längen der Sektorkanten sind die Längen der raumartigen Geodäten zwischen den Gitterpunkten und werden durch Integration des Linienelements längs der Geodäten bestimmt (Abschnitt 9.6.3, S. 130). Aus den Kantenlängen und der Bedingung, dass die trapezförmigen Seitenflächen spiegelsymmetrisch sein sollen, folgt eindeutig die Form der Sektoren (Bild 4.4).

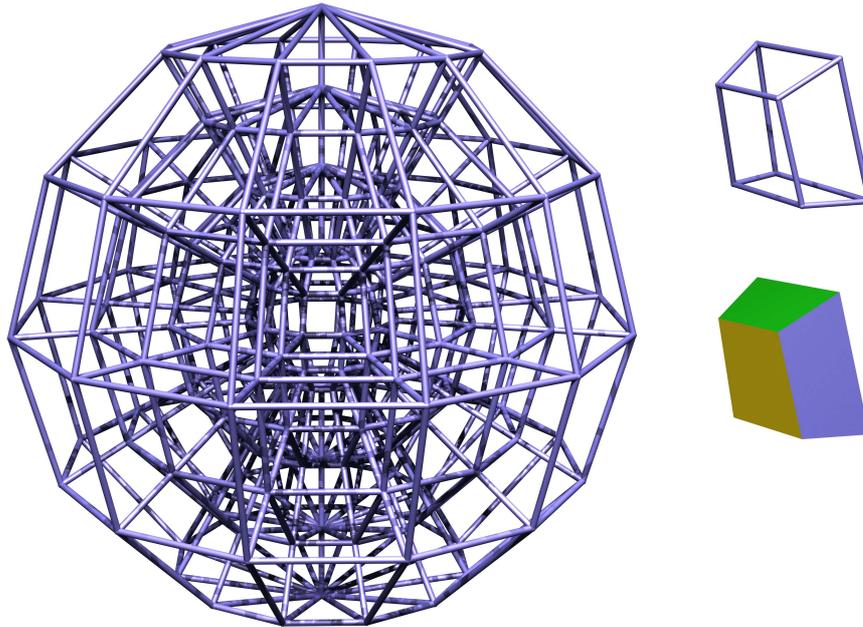


Bild 4.4: Links: Ein Raumbereich um das Schwarze Loch bzw. im leeren Raum wird in Sektoren aufgeteilt. Man kann sich vorstellen, dass ein Gittergerüst errichtet und vermessen wird. Rechts: Die Gitterzellen werden als Klötzchen nachgebaut.

Bild 4.5 und 4.6 zeigen die Klötzchenmodelle für die Raumbereiche ohne und mit einem Schwarzen Loch im Zentrum.

Betrachten wir zuerst das Modell ohne Schwarzes Loch. In Bild 4.5 ist etwas mehr als die Hälfte der Klötzchen abgebildet. Man erkennt die ausgesparte Innenkugel; sie ist von drei Schichten Klötzchen umgeben. Ein solches Klötzchenmodell kann man wie eine Landkarte in drei Dimensionen verwenden: Man kann Orte darauf markieren, Routen einzeichnen und Entfernungen messen.

Wie sich die Anwesenheit eines Schwarzen Lochs auf den Raum in seiner Umgebung auswirkt, zeigt das zweite Modell (Bild 4.6): Auch hier wurde eine Hohlkugel vermessen. Wenn man aber versucht, die Klötzchen zusammenzusetzen, stellt man fest, dass sie nicht zusammenpassen. In der Abbildung sind die Klötzchen symmetrisch angeordnet; man erkennt an den Lücken, dass man sie nicht zu einer Hohlkugel zusammenschieben kann. Diese Eigenschaften des Klötzchenmodells zeigen an, dass der Raum um das Schwarze Loch eine innere Krümmung hat. Auch hier ist das Klötzchenmodell eine dreidimensionale, winkel- und volumentreue Karte.

Um zunächst einmal einzusehen, dass das Auftreten solcher Lücken genau das ist, was man bei einem gekrümmten Raum zu erwarten hat, verlagern wir die ganze Überlegung von drei in zwei Dimensionen: Eine Fläche wird mit einem Gitter überzogen, dieses ausgemessen, die Flächenstücke nachgebaut und auf dem Tisch ausgelegt. Wenn die Fläche eben ist (Bild 4.7a), dann passen die Stücke lückenlos aneinander. Wenn die Fläche aber wie ein Hügel gewölbt ist (Bild 4.7b), bleiben Lücken.

Um die Analogie komplett zu machen, müssen wir zusätzlich noch unseren Standpunkt

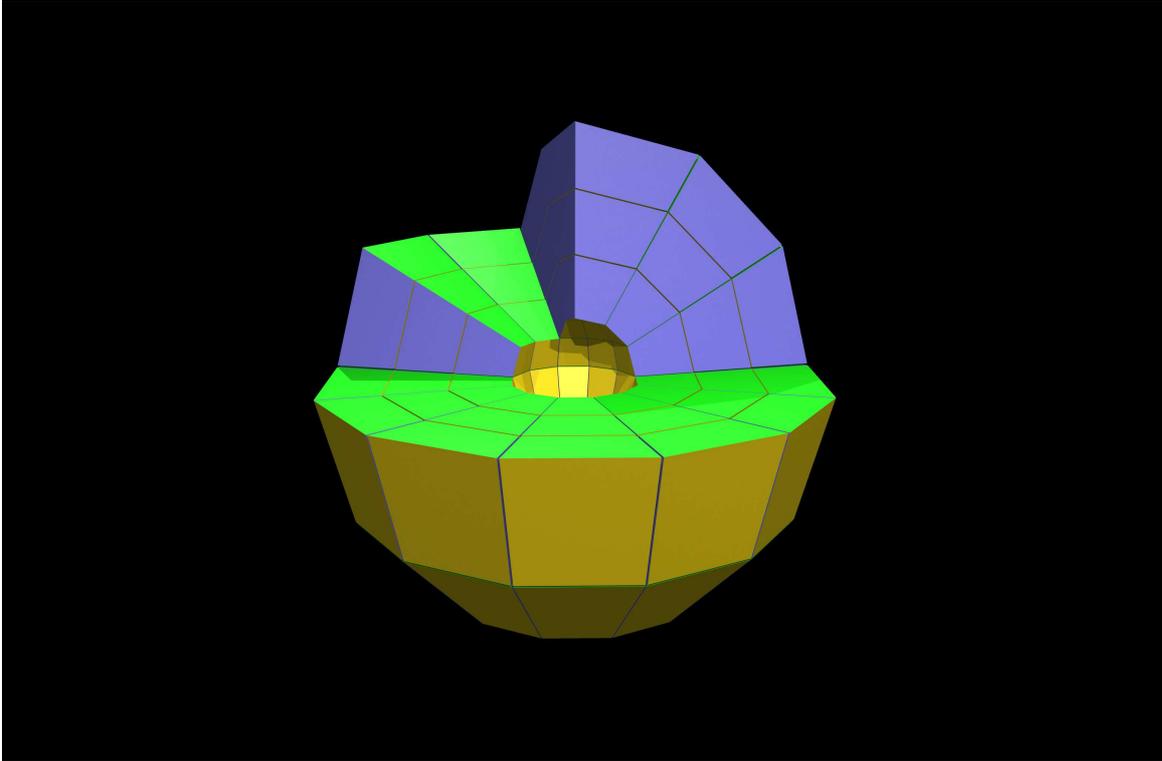


Bild 4.5: Klötzchenmodell einer Hohlkugel, die sich in einem euklidischen Raum befindet.

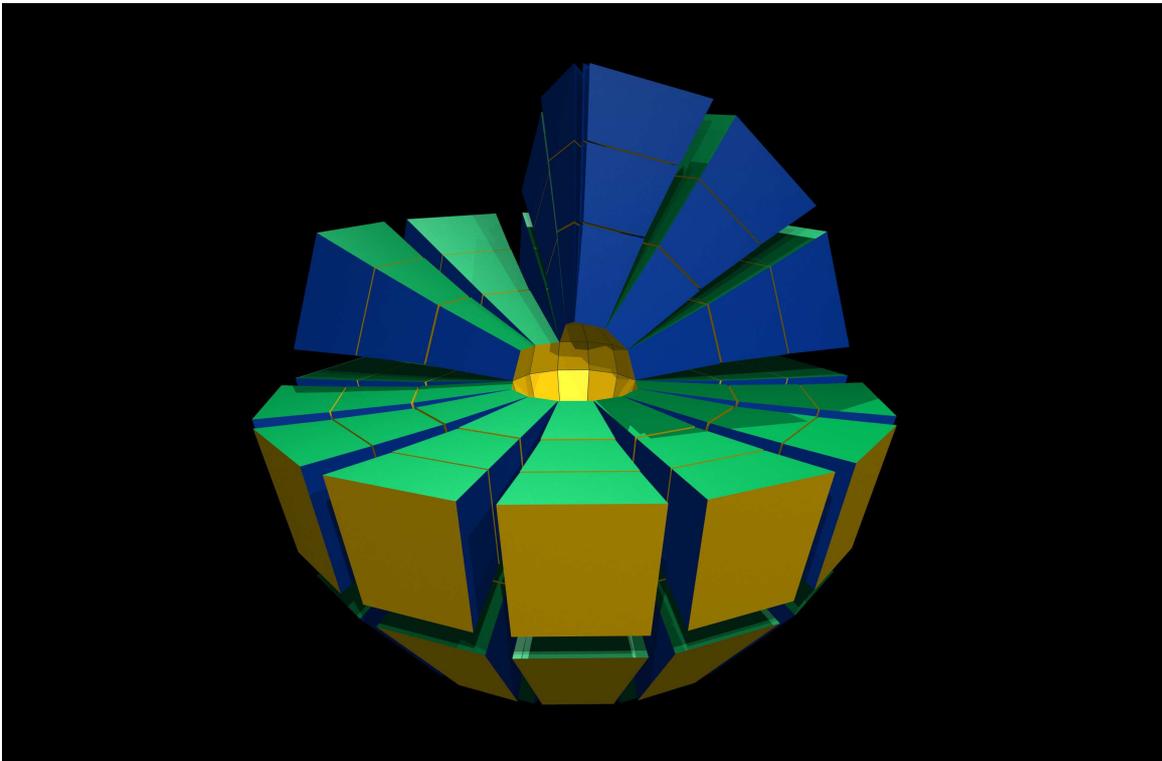


Bild 4.6: Klötzchenmodell einer Hohlkugel, die ein Schwarzes Loch im Zentrum hat.

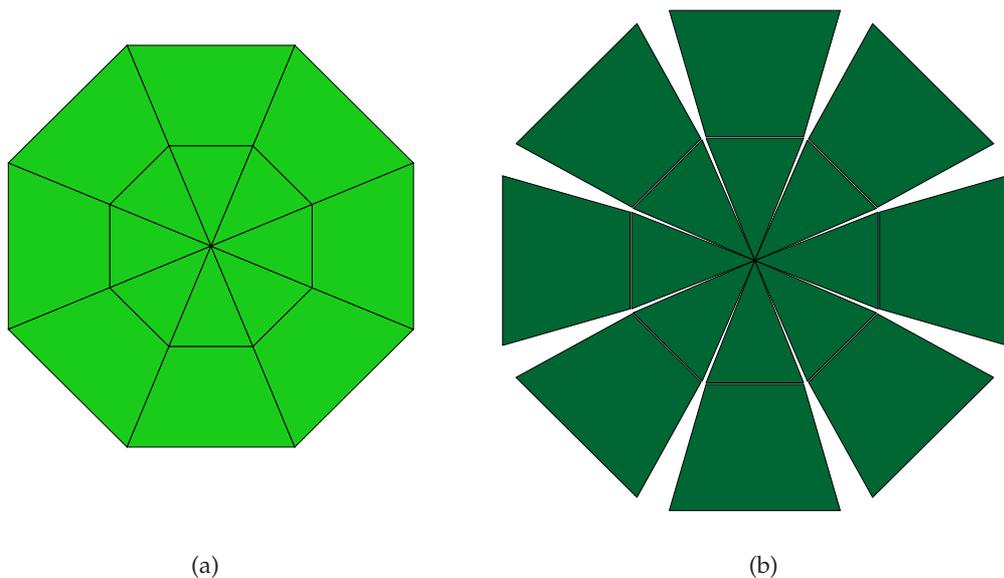


Bild 4.7: Flächenstücke einer ebenen Fläche (a) und einer hügelartig gekrümmten Fläche (b).

wechseln. Wir können uns drei Raumdimensionen vorstellen. Damit ist uns klar, wie sich eine hügelartige Fläche in die dritte Dimension krümmt und dass man diese Fläche aufschneiden muss um sie in der Ebene auszubreiten. Bei einem Raumstück dagegen können wir uns nicht vorstellen, dass es sich in irgendwelche höheren Dimensionen krümmt und dass man es aufschneiden muss, um es in unseren ungekrümmten Raum hineinzusetzen. Edwin A. Abbott beschrieb im vorletzten Jahrhundert in seinem Roman „Flächenland“ die Weltansicht von Flächenwesen, die in einer zweidimensionalen Fläche leben und sich nur zwei Dimensionen vorstellen können (Abbott, 1884). Wenn ein solches Flächenwesen die Oberfläche eines Hügels vermisst, dann kann es sich auch auf dem Hügel nur vor, zurück, nach rechts oder nach links bewegen. Die Richtungen oben und unten gibt es innerhalb der Fläche nicht, egal ob sie nun eben ist oder gekrümmt. Aber an den ausgemessenen Flächenstücken kann ein Flächenwesen klar erkennen, wo seine Welt gekrümmt ist und wo nicht. Genau so ergeht es uns „Raumwesen“, wenn wir unsere dreidimensionale Welt vermessen.

Würde man die Flächenstücke von Bild 4.7b auf einem maßstabsgerecht verkleinerten Hügel anordnen, dann würden sie *so wie sie sind* lückenlos zusammenpassen. Dasselbe gilt für die Klötzchen von Bild 4.6: Könnten wir ein maßstabsgerecht verkleinertes Schwarzes Loch in das Zentrum des Modells setzen, dann würden die Klötzchen in dem jetzt gekrümmten Raum *so wie sie sind* lückenlos zusammenpassen.

Die beiden Klötzchenmodelle können mit den oben bereits erwähnten Bastelbögen aus Pappe nachgebaut werden. Dabei ist es nicht notwendig, die vollständigen Modelle aus je 216 Klötzchen zu bauen. Die Aufteilung (die ja völlig willkürlich ist) ist so symmetrisch gewählt, dass 9 Klötzchen je Modell bereits die ganze Information enthalten (das Pappmodell enthält Bastelbögen für die Sektoren für $i = 1 \dots 4$, $j = 0 \dots 3$ und $k = 0 \dots 1$).

4.4 Visualisierung des Riemannstensors

Die üblichen Einführungen zum Krümmungsbegriff arbeiten mit gekrümmten Flächen und entwickeln als Maß für die Krümmung die *Gaußsche Krümmung*, eine Zahl. Die ab da abstrakt durchgeführte Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen führt schließlich zum Riemannstensor und zeigt, dass die Größe *Krümmung* ein komplexeres Gebilde ist als ein einfacher Skalar.

Das Konzept einer zweidimensionalen Fläche, die sich in den dreidimensionalen Raum krümmt, lässt sich nicht auf anschauliche Weise auf höhere Dimensionen übertragen (ein vier- oder mehrdimensionaler Einbettungsraum ist nicht vorstellbar). Daher kann die erst in drei oder mehr Dimensionen sichtbar werdende Tensoreigenschaft der Krümmung auf diese Weise nicht fassbar gemacht werden. Unser Pappmodell ist dagegen schon ein Modell für den dreidimensionalen gekrümmten Raum. Wie wir im Folgenden sehen werden, kann man die verschiedenen Komponenten des dreidimensionalen Riemannschen Krümmungstensors am Modell sogar direkt ablesen.

Der Riemannstensor der Schwarzschildmetrik hat in einer lokalen Tetrade (Abschnitt 7.1.9, S. 105) mit den Basisvektoren $e_{\hat{t}}$, $e_{\hat{r}}$, $e_{\hat{\theta}}$ und $e_{\hat{\phi}}$ folgende Komponenten (Misner, Thorne und Wheeler, 1973, S. 821):

$$\begin{aligned} R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} &= -\frac{2M}{r^3} \\ R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} &= R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3} \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{2M}{r^3} \\ R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} &= R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

alle anderen $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$, mit Ausnahme der aus Symmetrien erhaltenen, verschwinden.

Gibt man einen Bivektor $u \wedge v$ vor, ist die innere Krümmung $K(u, v)$ der durch ihn gegebenen geodätischen Ebene:

$$K(u, v) = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta} \quad (4.3)$$

(Rindler, 2001, S. 220).

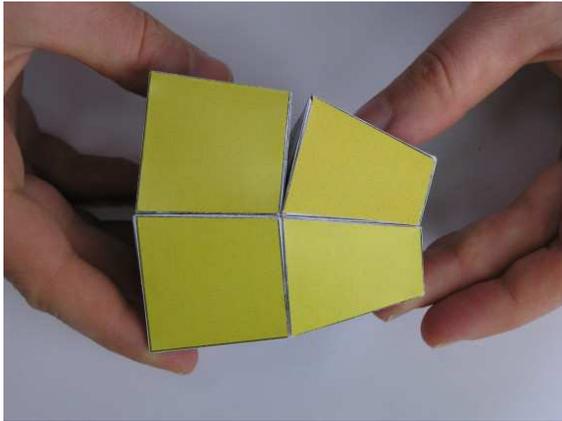
Ist der Riemannstensor in einem Orthonormalsystem ($g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$) gegeben, vereinfacht sich Gleichung (4.3) für die aus den räumlichen Basisvektoren gegebenen geodätischen Ebenen zu

$$K(e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}) = R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}, \quad K(e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}) = R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}, \quad K(e_{\hat{r}}, e_{\hat{\phi}}) = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}. \quad (4.4)$$

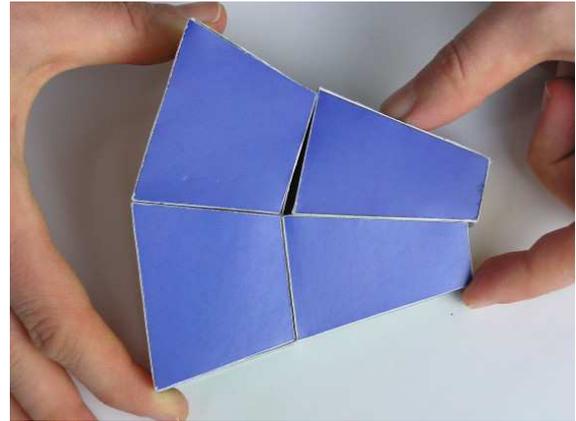
Wird ein Vektor um ein kleines Flächenelement herum paralleltransportiert, dreht er sich im Allgemeinen um einen kleinen Winkel ϵ , der mit der Krümmung K und dem Flächeninhalt der umlaufenen Fläche wie folgt zusammenhängt:

$$\epsilon = KA. \quad (4.5)$$

In einer dreidimensionalen Regge-Zerlegung konzentriert sich die Krümmung in den Kanten der Klötzchen. Versuchen wir die um eine Kante angeordneten Klötzchen lückenlos zusammenzuschieben, sehen wir, dass die Klötzchen nicht zusammenpassen (Bild 4.8).



(a) Blick auf die e_θ - e_ϕ -Ebene. Der Vertex in der Bildmitte hat die Koordinaten $(r = 5M, \theta = 60^\circ, \phi = 0^\circ)$, θ wächst von rechts nach links, r wächst von hinten nach vorne, die linke Kante liegt in der Äquatorfläche.



(b) Blick auf die e_r - e_θ -Ebene. Der Vertex in der Bildmitte hat die Koordinaten $(r = 5M, \theta = 60^\circ, \phi = 0^\circ)$, r wächst von rechts nach links, die linke Kante liegt bei $r = 7,5M$, die rechte bei $r = 2,5M$.

Bild 4.8: Visualisierung des Riemannsensors.

Die Summe der Innenwinkel an der Kante ergibt nicht 360° , es bleibt ein Restwinkel übrig, der auch negativ sein kann. Dieser Restwinkel ist genau der Winkel, um den ein um diese Kante herum paralleltransportierter Vektor gedreht wird. Er wird als *Defizitwinkel* der Kante bezeichnet (Abschnitt 7.4 *Regge-Calculus*, S. 110) und ist nach Gleichung (4.5) direkt proportional zur Krümmung K der senkrecht auf dieser Kante stehenden geodätischen Ebene, wobei hier A die der Kante zugeordnete „anteilige“ Querschnittsfläche der umgebenden Klötzchen ist. D. h. die Komponenten des in einer lokalen Tetrade gegebenen Riemannsensors entsprechen *direkt* den Defizitwinkeln pro Flächeneinheit in den entsprechenden Koordinatenebenen.

Qualitativ sind die Krümmungen dieser Ebenen und damit die Komponenten des Riemannsensors am Klötzchenmodell direkt zu sehen. In Bild 4.8a wurde versucht, vier um eine radiale Kante angeordnete Kästchen möglichst gut zusammenschieben. Der in der e_θ - e_ϕ -Ebene liegende Defizitwinkel ist deutlich zu sehen. Sein Vorzeichen ist *positiv*, d. h. die innere Krümmung dieser Ebene ist ebenfalls positiv. Bild 4.8b zeigt den Versuch vier um eine tangential laufende Kante liegende Klötzchen zusammensetzen. Hier sehen wir, dass die Summe der Innenwinkel aller Klötzchen zu groß ist; der Defizitwinkel sowie die innere Krümmung der e_r - e_θ -Ebene sind *negativ*.

Mit Gleichung (4.4) ist die Krümmung für die genannten Ebenen:

$$K(e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}) = R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{2M}{r^3} > 0$$

$$K(e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}) = R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -\frac{M}{r^3} < 0.$$

Für den in Bild 4.8 gezeigten Punkt ($r = 5M, \theta = 60^\circ, \phi = 0^\circ$) ist:

$$K(\mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}) = \frac{2M}{r^3} = \frac{2}{125}M^{-2}$$

$$K(\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}) = -\frac{M}{r^3} = -\frac{1}{125}M^{-2}.$$

Daraus können wir den Defizitwinkel in der \mathbf{e}_θ - \mathbf{e}_ϕ -Ebene abschätzen:

$$A \approx r \Delta\theta \cdot r \Delta\phi \approx 5M \frac{\pi}{6} \cdot 5M \frac{\pi}{6} = 25M^2 \frac{\pi^2}{36} \approx 6,8M^2$$

$$\epsilon = KA \approx \frac{2}{125}M^{-2} \cdot 6,8M^2 \approx 0,11 \approx 6,3^\circ.$$

Der am Modell gemessene Defizitwinkel beträgt etwa 9° . Er ist etwas größer als der berechnete Winkel, da sich der Winkel aufgrund der groben Aufteilung aus einer Mittelung des Krümmungstensors längs der radialen Kante von $r = 2,5M$ bis $r = 5M$ ergibt und dessen Komponenten für kleinere r größer werden.

Für den Defizitwinkel in der \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_θ -Ebene erhalten wir als Schätzung:

$$A \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \Delta r \cdot r \Delta\theta \approx 1,3 \cdot 2,5M \cdot 5M \frac{\pi}{6} \approx 8,5M^2$$

$$\epsilon = KA \approx -\frac{1}{125}M^{-2} \cdot 8,5M^2 \approx -0,068 \approx -3,9^\circ.$$

Der gemessene Wert beträgt etwa -5° .

Abgesehen von diesen durch die grobe Raumaufteilung verursachten Ungenauigkeiten ist aber deutlich zu sehen, dass „die Krümmung“ an einem bestimmten Raumpunkt sowohl positiv als auch negativ ist, je nachdem in welcher Ebene sie gemessen wird. Diese, die Tensoreigenschaft des Krümmungstensors deutlich aufzeigende Beobachtung ist in den üblichen zweidimensionalen Visualisierungen nicht möglich.

4.5 Experimente

4.5.1 Geodäten

Anhand der Klötzchenmodelle kann man durch zeichnerische Konstruktionen Geometrie und Physik in der Nähe eines Schwarzen Lochs untersuchen. In diesem und im nächsten Abschnitt werden als Beispiele Geodäten konstruiert und Vektoren paralleltransportiert.

„Zwei Punkte legen eine Gerade fest“ lernt man in der Geometrie. Gilt das auch in der Nähe eines Schwarzen Lochs? Um die Frage zu beantworten, konstruieren wir gerade Linien. Dafür ist allerdings das dreidimensionale Modell zu unhandlich. Wir beschränken uns deshalb auf einen zweidimensionalen Unterraum. Er liegt in der Äquatorebene des Schwarzen Lochs und entspricht im Klötzchenmodell von Bild 4.6 den annähernd horizontalen grünen Seitenflächen. Diese Seitenflächen sind eine zweidimensionale Karte für einen Ausschnitt aus der Äquatorebene (Bild 4.9). Mit den Flächenstücken, die leicht in größerer Anzahl zugeschnitten werden können (Kopiervorlagen zum Selbstaussdrucken stehen unter Kraus und Zahn (2002) zur Verfügung), kann dieses „Experiment“ nachvollzogen werden.

4 Wir basteln ein Schwarzes Loch

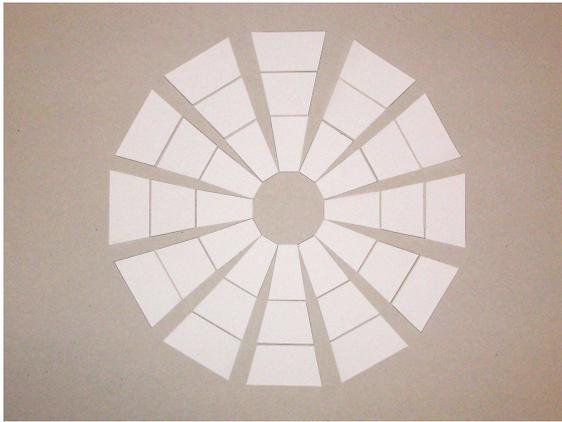


Bild 4.9: Eine gestückelte Karte für einen Teil der Äquatorebene des Schwarzen Lochs.

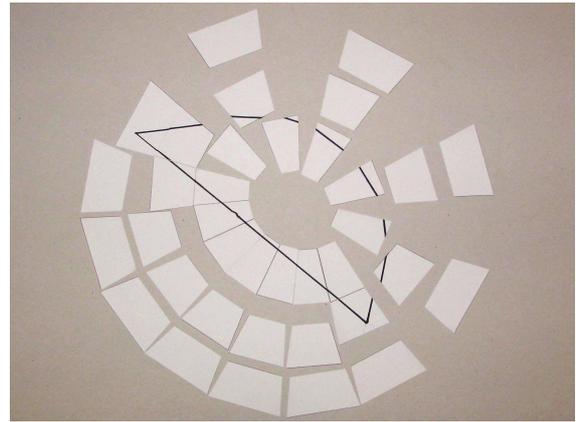


Bild 4.10: Ein Geradenstück auf der zweidimensionalen Karte (untere Linie).

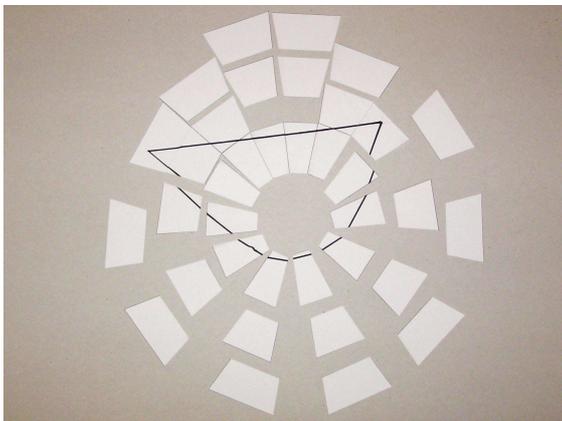


Bild 4.11: Eine gerade Linie (oben), die auf der anderen Seite des Schwarzen Lochs vorbeiläuft und dieselben Endpunkte hat wie das Geradenstück aus Bild 4.10 (untere Linie).

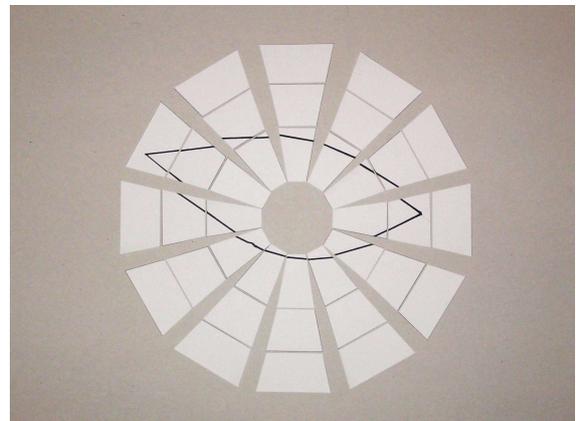


Bild 4.12: Die beiden geraden Linien aus Bild 4.10 und 4.11 in einer Darstellung, in der die Kartenstücke symmetrisch angeordnet sind.

Auf der zweidimensionalen Karte konstruieren wir nun gerade Linien¹. Hierbei ist nur zu beachten, dass die Ränder von zwei benachbarten Kartenstücken identisch sind, da dort beim Einteilen in Flächenstücke ein (willkürlich gewählter) Schnitt gemacht worden ist. Beim Einzeichnen einer Linie zeichnet man innerhalb eines Flächenstücks ein Geradenstück bis zum Rand und hangelt sich dann von Stück zu Stück, indem man immer das benötigte Nachbarstück anlegt und die Linie dann gerade weiterführt, so als hätte man die beiden Teile nie auseinandergeschnitten.

Eine gerade Linie, die quer durch die Karte verläuft, zeigt Bild 4.10 (untere Linie). Oben ist eine weitere Linie eingetragen, welche dieselben Endpunkte verbindet. Umlegen der Stücke zeigt, dass auch die zweite Linie gerade ist (Bild 4.11). Bild 4.12 zeigt beide Linien bei einer symmetrischen Anordnung der Kartenstücke. Die Aussage, dass zwei Punkte

¹Das ist möglich, weil jede gerade Linie, die anfangs in der Äquatorebene liegt, aus Symmetriegründen auch weiter in dieser Ebene verläuft.

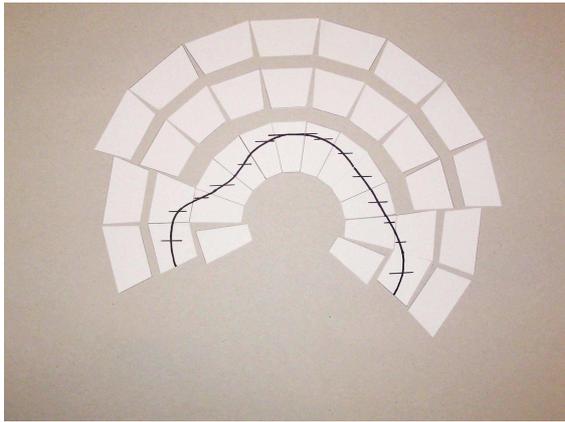


Bild 4.13: Längs einer geschlossenen Kurve um das Schwarze Loch wird ein Vektor paralleltransportiert.

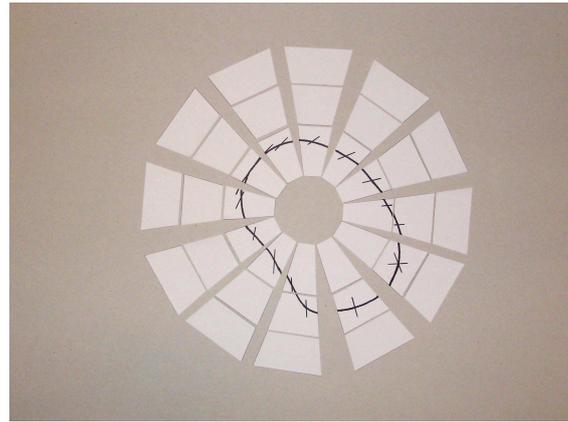


Bild 4.14: Nach einer Umrundung stimmt die Richtung des Vektors nicht mit der Anfangsrichtung überein (bei 4 Uhr).

genau eine Gerade festlegen, gilt offensichtlich nicht in der Umgebung eines Schwarzen Lochs. Die hier konstruierten geraden Linien sind Beispiele für raumartige *Geodäten*.

Dies ist analog zur Lichtausbreitung, die ebenfalls entlang von Geodäten erfolgt. Unser Modell illustriert also auch das Prinzip der gravitativen Lichtablenkung, allerdings nur als Analogie, da ein Lichtstrahl eine Nullgeodäte in einer vierdimensionalen Raumzeit ist. Um diese Geodäte zu konstruieren reicht eine räumliche Karte nicht aus; man bräuchte ein raumzeitliches Modell.

4.5.2 Paralleltransport – geodätische Präzession

Wir wählen eine beliebige geschlossene Kurve um das Schwarze Loch. An einem Punkt geben wir eine feste Richtung vor, ebenfalls beliebig gewählt, und zeichnen sie als Vektorpfeil ein. Wir folgen der Kurve und behalten dabei die Richtung des Vektors bei; der Vektorpfeil wird in kurzen Abständen eingezeichnet und ist dabei immer parallel zu dem vorherigen Pfeil (Bild 4.13). Diese Prozedur ist der Paralleltransport eines Vektors. Wenn wir an den Ausgangspunkt zurückkommen, stellen wir fest, dass die Richtung des Pfeils am Wegende nicht mit der Richtung am Weganfang übereinstimmt (Bild 4.14).

Ein Beispiel für eine feste Richtung ist die Drehimpulsachse eines kräftefreien Kreisels. Wenn ein solcher Kreisel ein Schwarzes Loch (oder eine andere Masse) umrundet, dann zeigt die Drehimpulsachse am Ende der Runde im Allgemeinen in eine andere Richtung als am Anfang. Dies ist die sogenannte geodätische Präzession, ein relativistisches Phänomen, das es in der Newtonschen Gravitationstheorie nicht gibt.

Auch hier gilt einschränkend: Der Kreisel bewegt sich auf dem Weg um das Schwarze Loch nicht nur durch den Raum, sondern auch durch die Zeit. Der Paralleltransport im Raum ist also nicht identisch mit der geodätischen Präzession. Aber das Prinzip ist dasselbe: Die Stellung der Drehimpulsachse nach einem Umlauf ergibt sich aus dem Paralleltransport² der Anfangsrichtung durch die Raumzeit.

²Fermi-Walker-Transport, falls der Kreisel nicht einer Geodäte folgt.

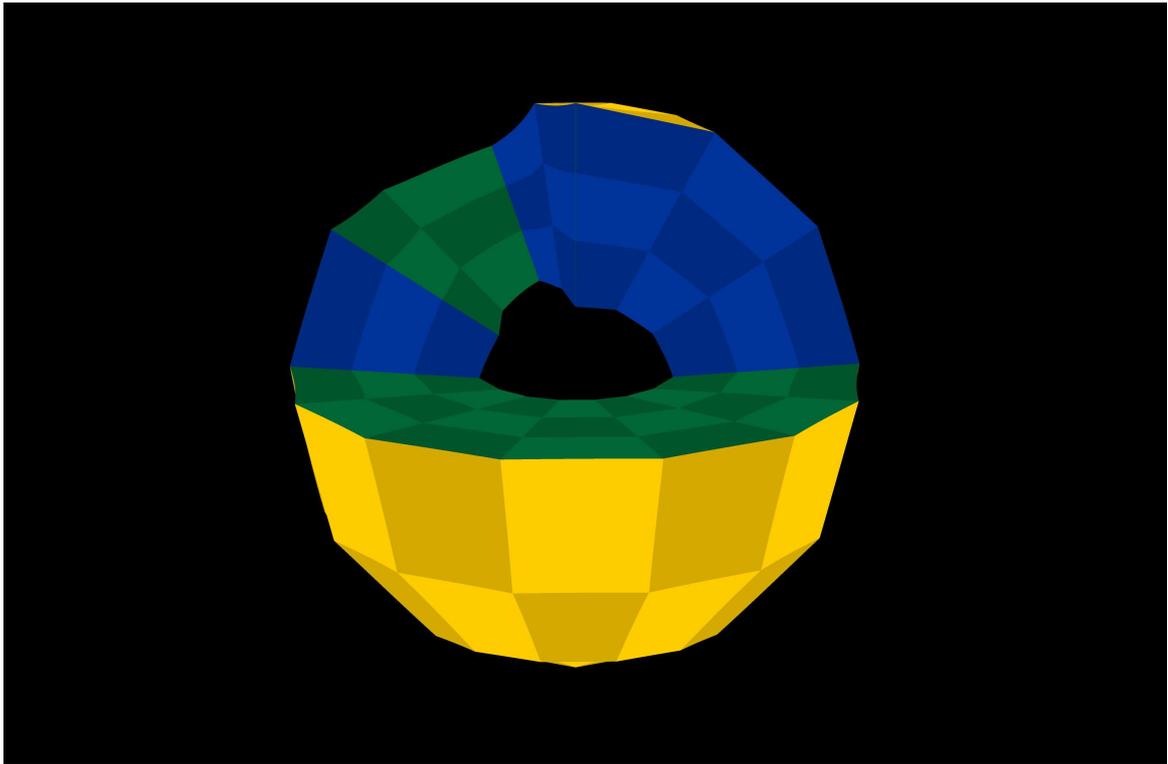


Bild 4.15: Klötzchenmodell im gekrümmten Raum um das Schwarze Loch.

4.6 Warum kann man nicht einfach einen gekrümmten Raum abbilden?

Unsere räumliche Vorstellung basiert auf projektiver Geometrie, einer linearen Abbildung der dreidimensionalen euklidischen Wirklichkeit auf unsere zweidimensionale Netzhaut.

In einer gekrümmten Raumzeit ist diese Abbildung nicht mehr linear (und der Raum nicht mehr euklidisch). Die resultierenden Bilder sind zwar interessant, können aber kein direktes intuitives Verständnis davon vermitteln, was denn ein gekrümmter Raum eigentlich ist. Solche Bilder zu verstehen erfordert einige Übung und die Möglichkeit eine Szene von verschiedenen Standpunkten zu betrachten (Projekt *Flugsimulator*, Kapitel 3, S. 27).

Bild 4.15 zeigt unser Klötzchenmodell so, wie es im gekrümmten Raum um ein Schwarzes Loch aussehen würde. An diesem Bild ist auch zu erkennen, dass die Klötzchen in Wirklichkeit lückenlos zusammenhängen. Das Bild wurde mit einem Raytracingverfahren berechnet, das jeden Lichtstrahl längs der integrierten Geodäte zu seinem Ursprung zurückverfolgt (Kapitel 8 *d-dimensionales Raytracing*, S. 115).

4.7 Ausblick

Das Klötzchenmodell beschreibt einen gekrümmten dreidimensionalen Raum. Wie oben bereits mehrfach erwähnt, ist in der Umgebung eines Schwarzen Lochs auch die Zeit „gekrümmt“: Uhren in der Nähe des Schwarzen Lochs gehen nach, wenn man sie mit Uhren in großer Entfernung vergleicht. Zudem bilden Raum und Zeit eine Einheit, die Raumzeit, die auf viele verschiedene und völlig gleichwertige Arten in Raum plus Zeit aufgeteilt

werden kann. Jede solche Aufteilung ist im Grunde willkürlich. Ein vollständiges Modell für ein Schwarzes Loch müsste also die gekrümmte Raumzeit in raumzeitliche Kästchen zerlegen. Ähnlich wie bei den Minkowskidiagrammen der speziellen Relativitätstheorie ist das möglich, wenn man eine Raumdimension unterdrückt. Ein solches raumzeitliches Kästchenmodell, das ebenfalls mit Lücken behaftet wäre, würde es ermöglichen, tatsächlich den Verlauf von Lichtstrahlen und die Präzession von Kreiselachsen zu konstruieren.

5 Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch

In den Projekten *Flugsimulator* (Kapitel 3, S. 27) und *Wir basteln ein Schwarzes Loch* (Kapitel 4, S. 49) geht es darum, eine gekrümmte Raumzeit „wirklichkeitsgetreu“ bzw. maßstabsgetreu darzustellen. Der Flugsimulator versucht zu zeigen, was man wirklich sehen, die Klötzchenmodelle, was man wirklich messen würde.

Der Vorteil dieser Herangehensweisen ist, dass mit direkten, der unmittelbaren Anschauung entnommenen Größen gearbeitet wird. Allerdings muss man auch einige Nachteile in Kauf nehmen:

Ein mit einer Kamera aufgenommenes Bild vermag die nächste Umgebung wirklichkeitsgetreu abzubilden, bei einem Blick in die Ferne summieren sich die Effekte der Lichtablenkung aber so sehr, dass das auf projektiver Geometrie beruhende räumliche Vorstellungsvermögen nicht mehr funktioniert. Es ergeben sich Verzerrungen und Doppelbilder. Zusammenhänge über große Entfernungen sind nur noch schwer erkennbar.

In den Klötzchenmodellen werden durch nicht zusammenhängende Kartenstücke zwar die lokale Metrik und die globale Topologie deutlich, ein zusammenhängender Überblick über den Verlauf von Geodäten erfordert aber viel Mühe, da diese einzeln von Kartenstück zu Kartenstück verfolgt werden müssen.

Bisher hatten wir nur rein räumlich gekrümmte Mannigfaltigkeiten untersucht. Wenn die Zeit hinzukommt, wir z. B. kausale Zusammenhänge über einen größeren Bereich der Raumzeit hinweg erkennen wollen, ist gerade dieser globale Verlauf von Geodäten wichtig. Für solche Aufgabenstellungen ist eine dritte Art der Darstellung besser geeignet: Eine zusammenhängende Karte. Sie erlaubt zwar keine unmittelbaren metrischen Aussagen, aber topologische.

Dieses Projekt untersucht verschiedene Kartendarstellungen anhand eines nichttrivialen Beispiels: des Falls in ein verdampfendes Schwarzes Loch.

5.1 Kann man in ein verdampfendes Schwarzes Loch hineinfallen, bevor es verdampft ist?

Hawking beschrieb, wie Schwarze Löcher durch Strahlung Masse verlieren und sich in endlicher Zeit auflösen können (Hawking, 1975). Die Lebensdauer eines Schwarzen Lochs der Masse M ist etwa $10^{67} \frac{M^3}{M_{\text{Sonne}}^3}$ Jahre (Hartle, 2003, S. 294).

Die folgende, auf den ersten Blick recht einleuchtende Überlegung kommt zu dem (falschen) Schluss, dass man beim Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch den mit der Masse kleiner werdenden Schwarzschildradius nicht unterschreitet, bevor das Schwarze Loch restlos verdampft ist.

Die Behauptung: In ein verdampfendes Schwarzes Loch kann man nicht hineinfallen. Es ist verdampft, bevor man den Schwarzschildradius durchquert hat. Genauer:

Wenn ein Teilchen im freien Fall radial in ein ewiges Schwarzes Loch stürzt und man die Geodäte mit der Schwarzschildzeitkoordinate t parametrisiert,

dann kommt das Teilchen für $t \rightarrow \infty$ dem Schwarzschildradius r_s beliebig nahe, unterschreitet ihn aber nie. D. h. für das Teilchen gilt $r(t) > r_s$ für alle t .

Ein verdampfendes Schwarzes Loch verliert durch Hawkingstrahlung Masse und verschwindet in endlicher Zeit. Nähert man seine Metrik durch eine Schwarzschildmetrik mit abnehmender Masse an, so ist sein Schwarzschildradius r_s eine Funktion der Zeit: $r_s(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow t_1$ (t_1 sei der Zeitpunkt, an dem das Schwarze Loch endgültig verdampft ist). Man kann hier ebenfalls zeigen, dass $r(t) > r_s(t)$ für $t < t_1$. D. h. das Teilchen nähert sich dem Schwarzschildradius, bleibt dort „kleben“ und schrumpft zusammen mit dem Schwarzen Loch zu einem Punkt. Zum Zeitpunkt t_1 ist das Schwarze Loch verschwunden, das Teilchen bleibt übrig.

Die ganze Überlegung findet außerhalb des Schwarzschildradius statt, so dass die Koordinatensingularität der Schwarzschildkoordinaten keine Bedeutung hat.

Ist diese Aussage korrekt? Nein, man kann in ein Schwarzes Loch hineinfallen, bevor es verdampft ist. Wo ist der Haken?

Die obige Überlegung ist an mehreren Stellen ungenau. Es wird sich zeigen, dass die naive Verwendung der Schwarzschildmetrik und -koordinaten sowie der Vergleich verschiedener Ereignisse zu „gleichen“ Zeiten (aber an verschiedenen Orten) unzulässig ist.

Das Ziel dieses Projektes ist es, anhand einer klassischen Modellmetrik die korrekte Antwort auf diese Frage zu finden und anschaulich darzustellen. Ein wichtiges Hilfsmittel wird eine Karte der Raumzeit eines verdampfenden Schwarzen Lochs sein, die den Verlauf von Geodäten und die korrekten kausalen Zusammenhänge deutlich macht. Eine Art „Lichtkegelmillimeterpapier“ zeigt an jeder Stelle der Karte die lokale Kausalstruktur und erlaubt es, auf einen Blick die möglichen Weltlinien und Lichtstrahlen zu erfassen.

5.2 Die Metrik

Zur genaueren Beschreibung des Problems ist zuerst einmal die Aufstellung einer Metrik erforderlich. Die Hawkingstrahlung ist ein quantenmechanischer Effekt, deswegen würde hier eigentlich eine Quantengravitationstheorie gebraucht. Da eine solche bis heute noch nicht existiert, behelfen wir uns hier mit einem phänomenologischen klassischen Modell.

Die beste Möglichkeit wäre eine semiklassische selbstkonsistente Metrik: Die quantenmechanische Berechnung des Energieimpulstensors der Hawkingstrahlung wird in einer gegebenen Hintergrundmetrik ausgeführt. Wenn die Lösung der Einsteingleichungen mit diesem Energieimpulstensor wieder die Hintergrundmetrik selbst ergibt, ist diese Metrik selbstkonsistent. Eine solche Metrik ist nicht bekannt (Hiscock, 1981a). Als zweitbeste Möglichkeit suchen wir eine klassische Modellmetrik, die die wesentlichen, für unseren Sturz in das Schwarze Loch relevanten Eigenschaften zumindest qualitativ richtig beschreibt.

5.2.1 Schwarzschildartige Modellmetrik

Der naive Ansatz einer Metrik in Form der Schwarzschildmetrik, in der die Masse durch eine auf null abfallende Funktion $M(t)$ ersetzt wird, liefert wie gewünscht einen schrumpfenden Horizont und einen Übergang von der Schwarzschildmetrik in die Metrik einer flachen Raumzeit.

Ein Problem ergibt sich aber z. B. aus einer Verletzung der Kausalität: Gleiches M (und damit gleiche Gravitationskraft) besteht auf Hyperflächen mit konstantem t . Ein Photon, das in der Nähe des Horizonts startet und nach außen läuft, erreicht im Laufe seiner Bahn höhere Werte von t und damit kleinere Werte von M : die Auswirkung der Massenabnahme breitet sich schneller aus als Licht. Dieser Ansatz ist also nicht geeignet.

5.2.2 Kombinierte Vaidya-Metriken

Die im Folgenden verwendete Modellmetrik basiert auf einer anschaulichen Erklärung des Hawkingeffekts: Im Vakuum um das Schwarze Loch bilden sich ständig virtuelle Teilchenpaare, die sich ihre Energie im Rahmen der quantenmechanischen Energiezeitunschärfe „borgen“ und nach kurzer Zeit wieder verschwinden. In der Nähe des Horizonts können diese virtuellen Teilchen durch die Gezeitenkräfte so viel Energie gewinnen, dass sie für einen dort sitzenden Beobachter real werden. Ein Partner des Teilchenpaares verschwindet im Schwarzen Loch, der andere entweicht. Die Energie des entweichenden Teilchens wird dem Schwarzen Loch entnommen, das demzufolge an Masse verliert (eine etwas genauere Beschreibung dieser anschaulichen Erklärung ist z. B. in Thorne (1994) zu finden).

Bei nicht allzu kleinen Schwarzen Löchern ist der mögliche Energiegewinn eines Teilchenpaares durch die Gezeitenkräfte so gering, dass er deutlich unter der Ruhemasse bekannter „materieller“ Elementarteilchen liegt. Es können also im Wesentlichen nur Photonen emittiert werden.

Als klassisches Modell für ein solches, durch die Emission von Photonen Masse verlierendes Schwarzes Loch wurde in mehreren Arbeiten die *Vaidya-Metrik* herangezogen (Hiscock, 1981a,b; Balbinot und Bergamini, 1982a,b). Die Vaidya-Metrik ist die Metrik zu einem Energieimpulstensor, der radial auslaufende oder radial einlaufende Strahlung in der Näherung der geometrischen Optik beschreibt¹.

In unserem Modell entsteht Hawkingstrahlung auf einer Kugelschale außerhalb des scheinbaren Horizonts und bewirkt einen Fluss positiver Energie nach außen und einen Fluss negativer Energie nach innen, wodurch die Masse des Schwarzen Lochs abnimmt. Die Bereiche innerhalb bzw. außerhalb dieser Kugelschale werden durch Vaidya-Metriken für einlaufende Strahlung mit negativer Energie bzw. für auslaufende Strahlung mit positiver Energie modelliert.

Angelehnt an Hiscock (1981b) setzen wir unsere Modellmetrik für ein verdampfendes Schwarzes Loch aus verschiedenen Metriken in vier Raumzeitbereichen zusammen (im Penrosediagramm Bild 5.1 dargestellt):

Bereich I: Die Schwarzschildmetrik für die Raumzeit außerhalb des kollabierenden Sterns, aus dem das Schwarze Loch entsteht

Bereich II: Die Vaidya-Metrik für einlaufende Strahlung für den Bereich innerhalb der Entstehungszone der Hawkingstrahlung

Bereich III: Die Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung außerhalb dieser Zone

¹Zur Übereinstimmung des Energieimpulstensors der Vaidya-Metrik mit dem Energieimpulstensor für Hawkingstrahlung auf der Vaidya-Metrik als Hintergrundmetrik gibt es unterschiedliche Aussagen (Balbinot und Bergamini (1982b): „gute Übereinstimmung“, keine Divergenz; Hiscock (1981a,b) und Biernacki (1990): Hawkingenergie divergiert).

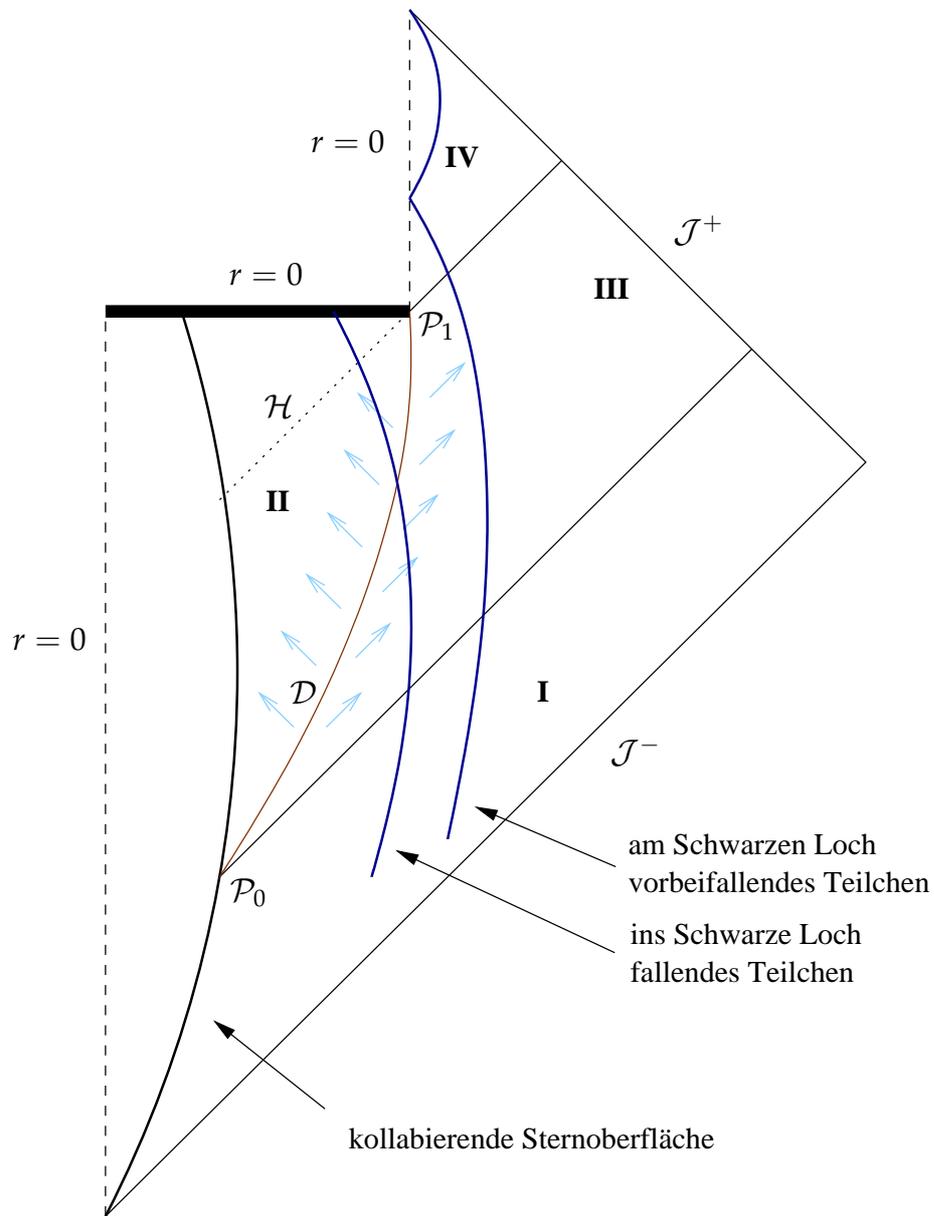


Bild 5.1: Penrose-Diagramm mit Einteilung der Raumzeit in die Bereiche I bis IV, aus deren Metriken die Gesamtmatrix zusammengesetzt wird. Die horizontale dicke Linie ist die Singularität, die mit \mathcal{H} bezeichnete Linie der Horizont des Schwarzen Lochs. Die Entstehungszone der Hawkingstrahlung (hellblaue Pfeile) ist als Kugelschale \mathcal{D} (braune Linie) idealisiert. Dunkelblau eingezeichnet sind die Weltlinien zweier radial fallender Teilchen, von denen eines in das Schwarze Loch fällt und in der Singularität endet, während das andere die Singularität verfehlt, $r = 0$ im flachen Raum erreicht und einfach weiterfliegen kann.

Bereich IV: Die Minkowskimetrik für die flache Raumzeit, die nach dem Verdampfen des Schwarzen Lochs übrigbleibt.

Der Punkt \mathcal{P}_0 markiert das Ereignis, an dem die Sternoberfläche die Hawkingstrahlungsfläche \mathcal{D} unterschreitet. Ab hier beginnt das Schwarze Loch in unserem Modell zu verdampfen; die Raumzeitbereiche innerhalb und außerhalb von \mathcal{D} werden durch unterschiedliche Metriken in den Bereichen **II** und **III** beschrieben.

Das Ende des Verdampfungsprozesses wird durch das Ereignis \mathcal{P}_1 markiert. Jetzt ist das Schwarze Loch vollständig verschwunden; die Zukunft dieses Ereignisses $\mathcal{I}^+(\mathcal{P}_1)$ wird durch die Minkowskimetrik im Bereich **IV** repräsentiert.

Der Entstehungs-„ort“ \mathcal{D} der Hawkingstrahlung wird in unserer klassischen Modellmetrik deutlich außerhalb des Horizonts angesiedelt ($r_{\mathcal{D}} = 1,5 r_s$). Dies kann man mit der folgenden halbklassischen Überlegung rechtfertigen:

Näherungsweise strahlt ein Schwarzes Loch wie ein Schwarzer Körper mit der Temperatur

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 kGM} = \frac{hc}{8\pi^2 kr_s} \quad (5.1)$$

(Hawking, 1975). Die Wellenlänge des Strahlungsmaximums lässt sich nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{xkT} \quad \text{mit } x \approx 4,9651$$

wie folgt berechnen:

$$\lambda_{\max} = \frac{8\pi^2}{x} r_s \approx 15,9 r_s.$$

Die Wellenlänge der Hawkingphotonen ist also im Mittel deutlich größer als der Schwarzschildradius. Das heißt, dass man das gesamte Schwarze Loch als quantenmechanisches Gebilde ansehen muss, eine genauere Lokalisierung der Strahlungsquelle somit nicht möglich ist.

Hat das Schwarze Loch noch eine gewisse Mindestgröße, dann ist die Energie der Hawkingstrahlung so gering, dass die Schwarzschild-ähnliche Hintergrundmetrik kaum gestört ist. Der qualitative Verlauf von Geodäten ist also unabhängig davon, wo genau die Strahlungszone angesiedelt wird.

In der Nähe des Verdampfungsendpunktes sind diese Überlegungen natürlich nicht mehr zulässig. Wie wir sehen werden, kann man den Ereignishorizont aber weit entfernt von diesem, nur noch quantenmechanisch behandelbaren Ereignis überqueren, so dass die klassische Näherung hier gerechtfertigt ist.

5.3 Die einzelnen Metriken

Die Metriken in den Raumzeitbereichen **I** bis **IV** (Bild 5.1), aus denen die Gesamtmetrik zusammengesetzt wird (Abschnitt 5.5, S. 72) lauten in den hier verwendeten Koordinaten:

Bereich I: Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) dU^2 - 2dUdr + r^2 d\Omega^2 \quad (5.2)$$

5 Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch

Bereich II: Vaidya-Metrik für einlaufende Strahlung (Hiscock, 1981a,b)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(V)}{r} \right) dV^2 + 2dVdr + r^2 d\Omega^2 \quad (5.3)$$

Bereich III: Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung (Hiscock, 1981b)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\tilde{M}(U)}{r} \right) dU^2 - 2dUdr + r^2 d\Omega^2 \quad (5.4)$$

Bereich IV: Minkowskimetrik

$$ds^2 = -dU^2 - 2dUdr + r^2 d\Omega^2. \quad (5.5)$$

Dabei ist r eine Radialkoordinate im üblichen Sinne (die Oberfläche einer Kugel um das Schwarze Loch ist $4\pi r^2$). U ist eine auslaufende, V eine einlaufende lichtartige Koordinate. Im Folgenden werden nur radiale Bewegungen bei konstanten Winkelkoordinaten ($d\Omega = 0$) betrachtet.

M_0 ist die Masse des Schwarzen Lochs vor dem Verdampfen, $M(V)$ und $\tilde{M}(U)$ die abnehmende Masse als Funktion von V bzw. U .

5.3.1 Zusammenhang mit „Standardkoordinaten“

Die Schwarzschild- und die Minkowskimetrik werden üblicherweise in den „Standardkoordinaten“ (r, t) beschrieben, welche mit den o. g. Definitionen wie folgt zusammenhängen:

Schwarzschildmetrik: Die obige Form in auslaufenden Eddington-Finkelstein-Koordinaten folgt aus

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - 2M_0/r} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$U(t, r) = t - r - 2M_0 \ln \left| \frac{r}{2M_0} - 1 \right|.$$

Minkowskimetrik: Die obige Form folgt aus

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$U(t, r) = t - r.$$

5.3.2 Ereignishorizont

Im Bereich **II** gibt es einen Ereignishorizont (\mathcal{H} in Bild 5.1), welcher den Raumzeitbereich begrenzt, aus dem Photonen nicht zu einem asymptotischen Beobachter gelangen können. Er verläuft längs eines auslaufenden Lichtstrahls, der am Verdampfungsendpunkt \mathcal{P}_1 mit den Koordinaten $(V = V_1, r = 0)$ endet. Weiter innen startende auslaufende Lichtstrahlen enden in der Singularität.

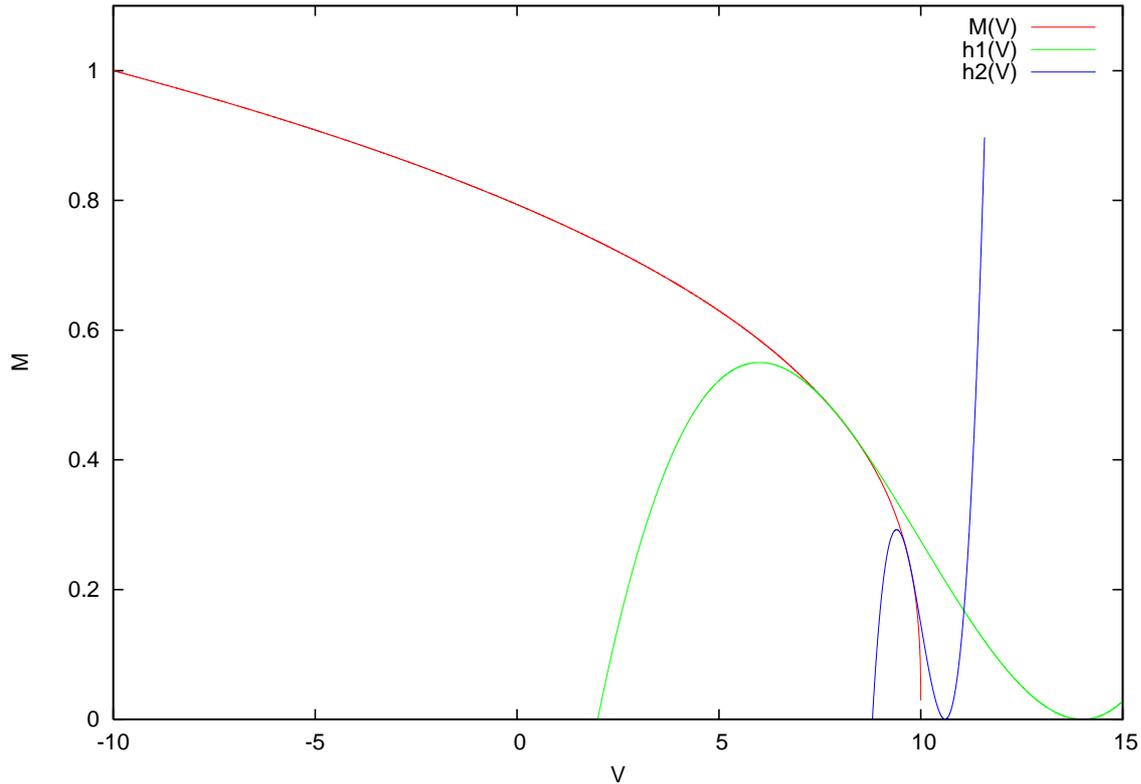


Bild 5.2: Massenfunktion nach Hawking (rote Kurve, $M_0 = 1$, $V_0 = -10$, $V_1 = 10$) und Polynome, die bei $V = 8$ bzw. $V = 9,7$ bis zur zweiten Ableitung mit $M(V)$ übereinstimmen und mit verschwindender Ableitung null werden (grüne und blaue Kurven).

Der auslaufende Lichtstrahl $r_{\mathcal{H}}(V)$ ist durch folgende Differentialgleichung bestimmt (s. a. Gleichung (5.23)):

$$\frac{dr_{\mathcal{H}}}{dV} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M(V)}{r_{\mathcal{H}}} \right)$$

$$r_{\mathcal{H}}(V_1) = 0.$$

Der Ereignishorizont ist in Bild 5.4, S. 79 und Bild 5.5, S. 80 als dünne schwarze Linie dargestellt. Er liegt innerhalb des scheinbaren Horizonts $r_s(V) = 2M(V)$ (Hajicek und Israel, 1980).

5.3.3 Massenfunktion

Um konkrete Geodäten zu berechnen, muss eine Massenfunktion für die abnehmende Masse des Schwarzen Lochs festgelegt werden.

Aus einer zur Masse des Schwarzen Lochs umgekehrt proportionalen Temperatur (Gleichung (5.1)) und einer entsprechenden Energieabstrahlung folgt nach Hawking eine zu $(V_1 - V)^{1/3}$ proportionale, im Lauf der Zeit abnehmende Masse:

$$M(V) = M_0 \left(\frac{V_1 - V}{V_1 - V_0} \right)^{1/3}. \quad (5.6)$$

5 Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch

Dabei ist V_0 die V -Koordinate, bei welcher der Verdampfungsprozess beginnt (davor wird eine Schwarzschildmetrik angenommen), V_1 ist die V -Koordinate des Verdampfungsereignisses und $M_0 = M(V_0)$ die Masse zu Beginn des Verdampfungsprozesses.

Hier ergibt sich ein Problem: Die Ableitung dM/dV , die in den aus der Metrik folgenden Beziehungen, wie z. B. der Geodätengleichung (5.13) verwendet wird, divergiert bei $V = V_1$. In Anlehnung an Hiscock (1981a) wird die Funktion ab einem (frei gewählten) Punkt \bar{V} durch ein Polynom dritten Grades $h(V)$ ersetzt, das bei $V = V_2$ mit verschwindender Ableitung null wird (Bild 5.2):

$$h(V) = (a + Vb)(V_2 - V)^2. \quad (5.7)$$

Die Parameter V_2 , a und b werden so bestimmt, dass $h(V)$ bei \bar{V} bis zur zweiten Ableitung mit $M(V)$ übereinstimmt:

$$\begin{aligned} V_2 &= \bar{V} + X \\ b &= \frac{\bar{M}'}{X^2} + \frac{2\bar{M}}{X^3} \\ a &= \frac{\bar{M}}{X^2} - \bar{V}b \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} X &= -2\frac{\bar{M}'}{\bar{M}''} + \sqrt{4\left(\frac{\bar{M}'}{\bar{M}''}\right)^2 - 6\frac{\bar{M}}{\bar{M}''}} \\ \bar{M} &= M(\bar{V}) \\ \bar{M}' &= M'(\bar{V}) = -\frac{M_0}{3} \frac{(V_1 - \bar{V})^{-2/3}}{(V_1 - V_0)^{1/3}} \\ \bar{M}'' &= M''(\bar{V}) = -\frac{2M_0}{9} \frac{(V_1 - \bar{V})^{-5/3}}{(V_1 - V_0)^{1/3}}, \end{aligned}$$

wobei der Strich für die Ableitung nach V steht.

5.4 Geodäten

Für die Berechnung von Lichtstrahlen oder von Bahnen frei fallender Teilchen müssen die Geodätengleichungen

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0$$

in den entsprechenden Raumzeitbereichen gelöst werden. Im Bereich **IV** (Minkowskimetrik) sind die Geodäten einfach Geraden. Der Bereich **I** wird im Folgenden nicht gesondert behandelt, hier kann die Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung mit konstant bleibender Masse ($M(U) = M_0$) verwendet werden (Gleichung (5.2), Gleichung (5.4)). Die folgenden zwei Abschnitte führen die Geodätengleichungen für die verbleibenden Bereiche **II** und **III** auf.

5.4.1 Vaidya-Metrik für einlaufende Strahlung

Mit den Abkürzungen

$$M = M(V), \quad M' = \frac{d}{dV}M(V)$$

$$r = r(\lambda), \quad \dot{r} = \frac{d}{d\lambda}r(\lambda), \quad \ddot{r} = \frac{d^2}{d\lambda^2}r(\lambda), \quad \lambda: \text{Bahnparameter}$$

entsprechend für V, θ, ϕ

ergeben sich die Geodätengleichungen (Christoffelsymbole siehe Abschnitt 12.7.1, S. 163):

$$\ddot{V} = -\frac{M\dot{V}^2}{r^2} + r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (5.8)$$

$$\ddot{r} = -\frac{(M'r^2 + Mr - 2M^2)\dot{V}^2}{r^3} + \frac{2M\dot{V}\dot{r}}{r^2} + (r - 2M)(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (5.9)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (5.10)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} - \frac{2 \cos \theta \dot{\theta}\dot{\phi}}{\sin \theta}. \quad (5.11)$$

Die Geodätengleichungen für radiale Geodäten lauten:

$$\ddot{V} = -\frac{M\dot{V}^2}{r^2} \quad (5.12)$$

$$\ddot{r} = -\frac{(M'r^2 + Mr - 2M^2)\dot{V}^2}{r^3} + \frac{2M\dot{V}\dot{r}}{r^2}. \quad (5.13)$$

5.4.2 Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung

Mit den Abkürzungen

$$\tilde{M} = \tilde{M}(U), \quad \tilde{M}' = \frac{d}{dU}\tilde{M}(U)$$

$$r = r(\lambda), \quad \dot{r} = \frac{d}{d\lambda}r(\lambda), \quad \ddot{r} = \frac{d^2}{d\lambda^2}r(\lambda), \quad \lambda: \text{Bahnparameter}$$

entsprechend für U, θ, ϕ

lauten die Geodätengleichungen hier (Christoffelsymbole siehe Abschnitt 12.7.2, S. 164):

$$\ddot{U} = \frac{\tilde{M}\dot{U}^2}{r^2} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (5.14)$$

$$\ddot{r} = \frac{(\tilde{M}'r^2 - \tilde{M}r + 2\tilde{M}^2)\dot{U}^2}{r^3} - \frac{2\tilde{M}\dot{U}\dot{r}}{r^2} + (r - 2\tilde{M})(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (5.15)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (5.16)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} - \frac{2 \cos \theta \dot{\theta}\dot{\phi}}{\sin \theta} \quad (5.17)$$

5 Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch

und die Geodätengleichungen für radiale Geodäten sind:

$$\ddot{U} = \frac{\tilde{M}\dot{U}^2}{r^2} \quad (5.18)$$

$$\ddot{r} = \frac{(\tilde{M}'r^2 - \tilde{M}r + 2\tilde{M}^2)\dot{U}^2}{r^3} - \frac{2\tilde{M}\dot{U}\dot{r}}{r^2}. \quad (5.19)$$

5.4.3 Lichtkegel

Um in den konstruierten Karten eine gute Übersicht über den Verlauf von Lichtstrahlen zu bekommen, sind in einem feinen Raster in der Art eines Flussfeldes kleine Zukunftslichtkegel eingezeichnet. Radial einlaufende und auslaufende Lichtstrahlen haben in den vier Bereichen die folgenden Richtungen:

Bereich I: Schwarzschildmetrik

$$\text{einlaufender Lichtstrahl:} \quad \frac{dU}{dr} = -\frac{2}{1 - 2M_0/r} \quad (5.20)$$

$$\text{auslaufender Lichtstrahl:} \quad U = \text{konst} \quad (5.21)$$

Bereich II: Vaidya-Metrik für einlaufende Strahlung

$$\text{einlaufender Lichtstrahl:} \quad V = \text{konst} \quad (5.22)$$

$$\text{auslaufender Lichtstrahl:} \quad \frac{dV}{dr} = \frac{2}{1 - 2M(V)/r} \quad (5.23)$$

Bereich III: Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung

$$\text{einlaufender Lichtstrahl:} \quad \frac{dU}{dr} = -\frac{2}{1 - 2\tilde{M}(U)/r} \quad (5.24)$$

$$\text{auslaufender Lichtstrahl:} \quad U = \text{konst} \quad (5.25)$$

Bereich IV: Minkowskimetrik

$$\text{einlaufender Lichtstrahl:} \quad \frac{dU}{dr} = -2 \quad (5.26)$$

$$\text{auslaufender Lichtstrahl:} \quad U = \text{konst} \quad (5.27)$$

5.5 Zusammensetzen der Metriken

Auf den Grenzen zwischen Bereichen mit verschiedenen Metriken muss angegeben werden, wie die Koordinaten zwischen den angrenzenden Koordinatensystemen umzurechnen sind.

Die drei Koordinatensysteme für die Bereiche außerhalb der Entstehungszone der Hawkingstrahlung gehen zwanglos ineinander über:

I-III: Die Grenze verläuft längs $U = U_0 = \text{konst}$ mit $\tilde{M}(U_0) = M_0$. Auf dieser Grenze stimmen die Linienelemente überein, so dass die Koordinaten U und r der beiden Seiten identifiziert werden können.

III-IV: Die Grenze verläuft längs $U = U_1 = \text{konst}$ mit $\tilde{M}(U_1) = 0$. Auf dieser Grenze stimmen die Linienelemente überein, so dass die Koordinaten U und r der beiden Seiten ebenfalls identifiziert werden können.

Der Anschluss an der Grenze **II-III** wird in Anlehnung an Hiscock (1981b) folgendermaßen durchgeführt:

Die Entstehungszone der Hawkingstrahlung wird als Kugelschale $r = r_{\mathcal{D}}$ idealisiert, die mit abnehmender Masse des Schwarzen Lochs schrumpft. Die Grenzlinie \mathcal{D} zwischen den Bereichen **II** und **III** ist dann durch die Funktion $r_{\mathcal{D}} = r_{\mathcal{D}}(V)$ gegeben. Die r -Koordinaten der beiden Seiten werden auf \mathcal{D} identifiziert, denn die Winkelanteile der Metriken sind identisch (und zeigen, dass r auf beiden Seiten für eine Kugelschale der Oberfläche $4\pi r^2$ steht). Zu bestimmen ist die Funktion $U(V)$ auf \mathcal{D} (sowie ihre Umkehrung).

Auf \mathcal{D} gilt

$$M(V) = \tilde{M}(U). \quad (5.28)$$

Das Linienelement für die intrinsische Metrik auf \mathcal{D} kann sowohl aus der inneren als auch aus der äußeren Metrik abgeleitet werden. Für die innere Metrik aus Gleichung (5.3):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(V)}{r_{\mathcal{D}}(V)} \right) dV^2 + 2r'_{\mathcal{D}}(V) dV^2 \quad (5.29)$$

und für die äußere Metrik aus Gleichung (5.4) und Gleichung (5.28):

$$d\tilde{s}^2 = - \left(1 - \frac{2M(V)}{r_{\mathcal{D}}(V)} \right) [U'(V)]^2 dV^2 - 2U'(V)r'_{\mathcal{D}}(V) dV^2, \quad (5.30)$$

wobei der Strich für die Ableitung nach V steht.

Damit diese Linienelemente gleich sind, muss gelten:

$$r'_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r_{\mathcal{D}}} \right) (1 - U') \quad (5.31)$$

bzw.

$$U' = 1 - \frac{2r'_{\mathcal{D}}}{1 - 2M/r_{\mathcal{D}}}. \quad (5.32)$$

Gleichung (5.31) bedeutet wegen $r'_{\mathcal{D}} < 0$ und $r_{\mathcal{D}} > 2M$, dass auf \mathcal{D}

$$\frac{dU}{dV} > 1$$

ist.

Bei vorgegebenen Funktionen $M(V)$ und $r_{\mathcal{D}}(V)$ folgt aus Gleichung (5.32) der Zusammenhang $U(V)$ auf \mathcal{D} und daraus $\tilde{M}(U(V))$ in Bereich **III**.

5.5.1 Strahlungszonenmodell

Für eine konkrete Rechnung muss festgelegt werden, wo die modellierte Hawkingstrahlung entsteht, d. h. es muss die Funktion $r_{\mathcal{D}}(V)$ angegeben werden. Hier wurde ein Modell für $r_{\mathcal{D}}(V)$ gewählt, bei dem $r_{\mathcal{D}}$ proportional zur Masse ist:

$$r_{\mathcal{D}}(V) = kM(V), \quad k > 2 \quad (\text{Konstante}). \quad (5.33)$$

Mit dieser Wahl lässt sich die Beziehung $U(V)$ auf \mathcal{D} explizit angeben: Gleichung (5.32) wird zu

$$U' = 1 - \frac{2k}{1 - 2/k} M'$$

mit der Lösung

$$U(V) = U_0 + V - V_0 + \frac{2k}{1 - 2/k} (M(V_0) - M(V)). \quad (5.34)$$

U_0 und V_0 sind die U - bzw. V -Koordinaten des Verdampfungsanfangspunkts.

In den folgenden Rechnungen wird $k = 3$ gewählt. Die Hawkingstrahlungszone liegt also bei

$$r_{\mathcal{D}}(V) = 3M(V). \quad (5.35)$$

5.5.2 Transformation von Vektoren auf \mathcal{D} zwischen II und III

Bei der Berechnung von Geodäten, die die Grenze \mathcal{D} zwischen den Bereichen II und III überqueren, müssen auf \mathcal{D} sowohl die Koordinaten als auch die Richtungsvektoren zwischen den Koordinatensystemen umgerechnet werden.

Ein Vektor t auf \mathcal{D} wird in einer beiden Bereichen gemeinsamen Orthonormalbasis (d, n) dargestellt:

d : Einheitsvektor, der tangential zu \mathcal{D} ist

n : Einheitsvektor, der senkrecht zu \mathcal{D} ist.

Die Vektoren t , d und n werden in den Koordinatensystemen beider Bereiche benötigt. Sie werden im Folgenden im Bereich II als t , d , n und im Bereich III als \tilde{t} , \tilde{d} , \tilde{n} bezeichnet.

Als Vektoren \tilde{d} bzw. \tilde{d} können

$$d^\mu = \left(1, \frac{dr_{\mathcal{D}}}{dV}\right) / \left| \left(1, \frac{dr_{\mathcal{D}}}{dV}\right) \right|, \quad \tilde{d}^\mu = \left(1, \frac{dr_{\mathcal{D}}}{dU}\right) / \left| \left(1, \frac{dr_{\mathcal{D}}}{dU}\right) \right|$$

gewählt werden, wobei $dr_{\mathcal{D}}/dU = (dr_{\mathcal{D}}/dV)(dV/dU)$ ist. Senkrecht dazu stehen jeweils die Vektoren n bzw. \tilde{n} :

$$\langle n, d \rangle = 0, \quad \langle \tilde{n}, \tilde{d} \rangle = 0.$$

Sie können wie folgt definiert werden: Mit

$$g_{\mu\nu} d^\nu n^\mu = 0 \quad \text{und} \quad d_\mu = g_{\mu\nu} d^\nu$$

gilt

$$n^0 = -\frac{d_1}{d_0} n^1.$$

Daraus berechnen wir \mathbf{n} und $\tilde{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{n}^\mu = \left(-\frac{d_1}{d_0}, 1 \right) / \left| \left(-\frac{d_1}{d_0}, 1 \right) \right|, \quad \tilde{\mathbf{n}}^\mu = \left(-\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_0}, 1 \right) / \left| \left(-\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_0}, 1 \right) \right|.$$

Bezüglich dieser Basis zerlegen wir den zu transformierenden Vektor \mathbf{t} :

$$\mathbf{t} = t^0 \mathbf{d} + t^1 \mathbf{n},$$

wobei mit $\langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = -1$ und $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ die Komponenten $t^\mu = (t^0, t^1)$

$$t^0 = -\langle \mathbf{t}, \mathbf{d} \rangle, \quad t^1 = \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$$

sind.

Im neuen Koordinatensystem kann jetzt $\tilde{\mathbf{t}}$ berechnet werden:

$$\tilde{\mathbf{t}} = t^0 \tilde{\mathbf{d}} + t^1 \tilde{\mathbf{n}}.$$

5.6 Globale Koordinaten

Um ein Gesamtbild von Teilchen- und Photonenbahnen in allen vier Bereichen zu zeichnen, transformieren wir alle Bahnen in ein gemeinsames globales Koordinatensystem. Bei der Wahl dieser Koordinaten haben wir Freiheiten, erstrebenswert wären folgende Eigenschaften:

- Sie sollen nirgends singular sein und
- Sie sollen in großer Entfernung vom Schwarzen Loch in die Minkowskikoordinaten (t, r) übergehen.

Im Folgenden werden drei Koordinatensysteme vorgestellt, die auf ein globales, die genannten Bedingungen erfüllendes Koordinatensystem hinführen.

Die Metriken für die Bereiche **I**, **III** und **IV** können dabei zusammengefasst werden, indem in allen Bereichen die Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung (Gleichung (5.4)) verwendet wird. Im Bereich **I** setzen wir die Masse M konstant auf M_0 und erhalten die Schwarzschildmetrik (Gleichung (5.2)) und im Bereich **IV** erhalten wir mit $M = 0$ die Minkowskimetrik (Gleichung (5.5)). Die in Abschnitt 5.5.1, S. 74 festgelegte Strahlungszone \mathcal{D} wird in die Bereiche **I** und **IV** fortgesetzt. Sie liegt in **I** bei $r_{\mathcal{D}} = 3M_0$ und in **IV** bei $r_{\mathcal{D}} = 0$. Wir unterscheiden also nur noch zwischen dem Bereich innerhalb und dem Bereich außerhalb der Strahlungszone.

5.6.1 Globale V - r -Koordinaten

Die allen Bereichen gemeinsame r -Koordinate wird beibehalten, im Bereich **II** wird die V -Koordinate der Vaidya-Metrik beibehalten und in den Bereichen **I**, **III** und **IV** wird eine V -Koordinate eingeführt, so dass

- einfallende Photonen längs $V = \text{konst}$ verlaufen
- die V -Koordinate an der Strahlungszone mit dem dortigen V übereinstimmt.

Bereich II: Ein Punkt \mathcal{P} innerhalb von \mathcal{D} liegt schon in (V, r) -Koordinaten der inneren Vaidya-Metrik vor, muss also nicht transformiert werden: $V_{\text{II}} = V$.

Bereiche I, III, IV: $V_{\text{I,III,IV}}(U, r)$ wird aus der numerischen Integration der Bahnen von einlaufenden Photonen bestimmt: Ausgehend von (U, r) wird die Photonenbahn bis zu der (in die Bereiche I und IV fortgesetzten) Grenze \mathcal{D} verfolgt. Die Grenzbedingung $V_{\text{I,III,IV}}(U(r_{\mathcal{D}}))$ auf \mathcal{D} liefert den $V_{\text{I,III,IV}}$ -Wert der Bahn. $V_{\text{I,III,IV}}(U(r_{\mathcal{D}}))$ ist die numerisch bestimmte Inverse der in Gleichung (5.34) definierten Funktion $U(V)$. Sie wird auch in den Bereichen I und IV verwendet, um den Anschluss an die (hier nicht strahlende) Grenzfläche festzulegen.

5.6.2 Globale \tilde{V} - r -Koordinaten

Die im letzten Abschnitt definierte globale V -Koordinate hat den Nachteil, dass sie im Bereich III für große r nicht in eine lineare Beziehung zu der Minkowski- t -Koordinate übergeht, das Gesamtbild sich also nicht dem gewohnten Minkowskidiagramm annähert. Als Alternative wird eine neue Koordinate $\tilde{V} = \tilde{V}(V)$ eingeführt, die im Bereich III wie die im letzten Abschnitt beschriebene V -Koordinate längs einlaufender Lichtstrahlen konstant ist, bei einem großen Abstand r_0 aber zu $\tilde{V} = t + \text{konst} = U + \text{konst}'$ wird (in unserem Beispiel ist $r_0 = 100$).

Die allen Bereichen gemeinsame r -Koordinate wird beibehalten und es wird eine \tilde{V} -Koordinate eingeführt, so dass

- einfallende Photonen längs $\tilde{V} = \text{konst}$ verlaufen
- an Raumzeitpunkten mit $r = r_0$ die \tilde{V} -Koordinate mit der dortigen U -Koordinate bis auf eine additive Konstante übereinstimmt.

Bereich II: Ein Punkt \mathcal{P} innerhalb von \mathcal{D} liegt in (V, r) -Koordinaten der inneren Vaidya-Metrik vor. Ihm wird ein Punkt $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} = (V, r_{\mathcal{D}}(V))$ auf \mathcal{D} zugeordnet, der auf dem einlaufenden, \mathcal{P} treffenden Lichtstrahl liegt. Die Koordinaten von $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ werden auf die äußere Seite von \mathcal{D} transformiert. Von hier ausgehend kann wie in Bereich III weiterverfahren werden.

Bereiche I, III, IV: $\tilde{V}_{\text{I,III,IV}}(U, r)$ wird aus der numerischen Integration der Bahnen von einlaufenden Photonen bestimmt: Ausgehend von (U, r) wird die Photonenbahn bis zu r_0 zurückverfolgt. Der dortige U -Wert $U(r_0)$ bestimmt den \tilde{V} -Wert der Bahn

$$\tilde{V}_{\text{I,III,IV}}(U, r) = U(r_0) + \text{konst.}$$

Die additive Konstante wurde in unserem Beispiel numerisch so bestimmt, dass am Verdampfungsendpunkt \tilde{V} null wird.

5.6.3 T - r -Koordinaten

Die für die endgültige Karte verwendeten T - r -Koordinaten entsprechen den gerade definierten \tilde{V} - r -Koordinaten mit

$$T = \tilde{V} - r. \quad (5.36)$$

Die T -Koordinate geht für große r in die Schwarzschild- t -Koordinate über und Lichtkegel nehmen „weit draußen“ Minkowskiform an.

Bild 5.3 zeigt die Einteilung der Raumzeit in die Bereiche II bis IV als (T, r) -Diagramm.

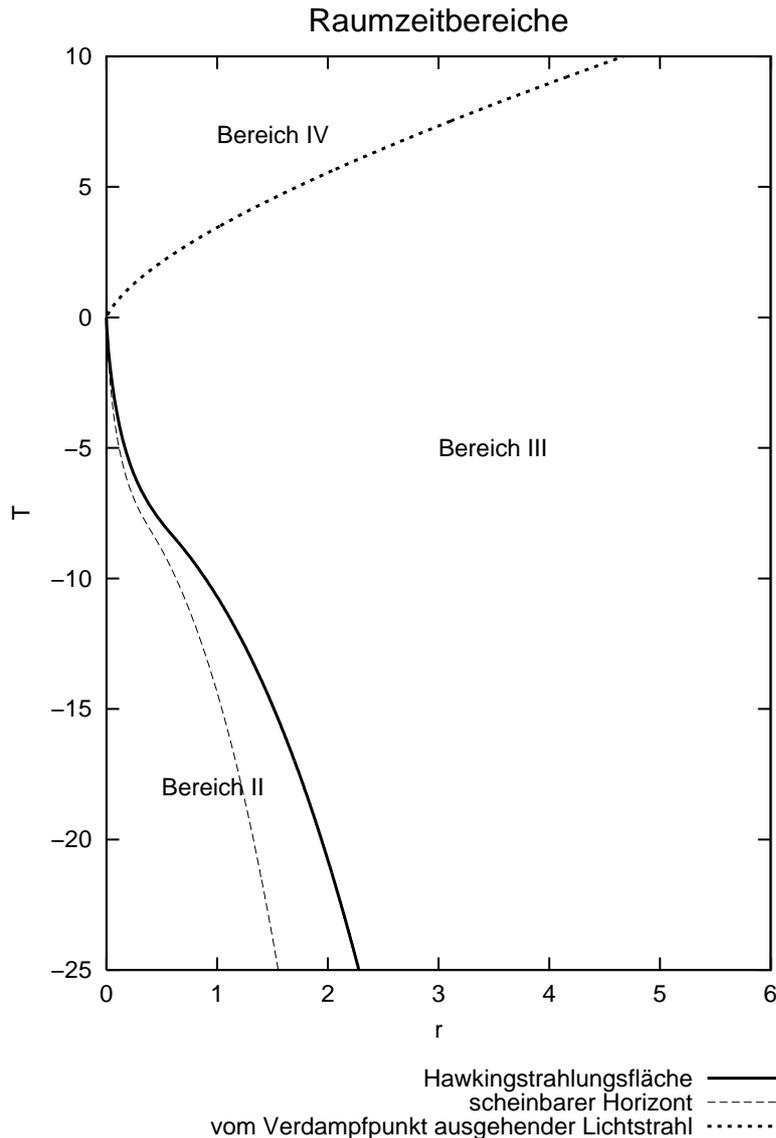


Bild 5.3: Einteilung der Raumzeit in die Bereiche II bis IV als (T, r) -Diagramm.

5.7 Der Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch

5.7.1 Verlauf der Geodäten

Mit den jetzt vorliegenden Hilfsmitteln kann die am Anfang stehende Frage, ob man in ein verdampfendes Schwarzes Loch fallen kann, bevor es verdampft ist, beantwortet werden. In den folgenden Raumzeitdiagrammen ist ein solcher beispielhafter Fall gezeigt.

Ein radial frei einfallendes Teilchen, das bei $r \gg 2M_0$ (genauer: bei $r = 20$, $U = -150$ und mit $M_0 = 1$) aus der Ruhe gestartet ist, sendet in regelmäßigen Abständen Lichtsignale nach innen und nach außen. Weit außen ist der Eigenzeitabstand des Absendens 1, kurz vor Erreichen der Hawkingstrahlungsfläche wird auf ein Zeitintervall von 0,1 umgeschaltet.

Dargestellt sind die Teilchenbahn, die Nullgeodäten, der Ereignishorizont, der schein-

bare Horizont bei $r = 2M$ und die Entstehungszone der Hawkingstrahlung. Die in einem feinen Raster eingezeichneten Zukunftslichtkegel können als eine Art „Millimeterpapier“ dienen, um den möglichen Verlauf von Weltlinien und Lichtstrahlen zu erkennen.

Bild 5.4 zeigt das Gesamtbild eines solchen Sturzes in globalen T - r -Koordinaten. Bild 5.5 und Bild 5.6 zeigen den Verlauf der Geodäten innerhalb und außerhalb der Hawkingstrahlungsfläche in V - r - und U - r -Koordinaten.

Bild 5.7 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt des Bereichs der Raumzeit, in dem das Teilchen den Horizont durchquert. Hier wird die Bedeutung der verschiedenen Horizonte deutlich. Der Ereignishorizont trennt radial nach außen laufende Lichtstrahlen in zwei Klassen: solche, die in der Singularität enden und solche, die nach außen entkommen. Der scheinbare Horizont bei $2M(V)$ liegt außerhalb des Ereignishorizontes. Lichtstrahlen durchqueren ihn senkrecht (d. h. $dr/d\lambda = 0$). Auffallend ist, dass zwischen scheinbarem Horizont und Ereignishorizont nach außen emittierte Lichtstrahlen zuerst nach innen (kleinere r -Werte) laufen, vom scheinbaren Horizont quasi „eingeholt“ werden, dort umkehren und wieder nach außen laufen.

Auslaufende Lichtstrahlen können als Koordinatenlinien einer auslaufenden Nullkoordinate U interpretiert werden. Zusammen mit der r -Koordinate ergibt dies ein den auslaufenden Eddington-Finkelstein-Koordinaten der Schwarzschildmetrik (Gleichung (5.2)) ähnliches Koordinatensystem.

In der Schwarzschildmetrik haben diese Koordinaten zwar eine Koordinatensingularität beim Schwarzschildradius r_s , sind aber ansonsten über die gesamte Raumzeit eindeutig definierbar. In unserer Metrik des verdampfenden Schwarzen Lochs wären die (U, r) -Koordinaten dagegen in der Nähe des Horizonts *mehrdeutig*. An den zwischen scheinbarem Horizont und Ereignishorizont zuerst nach innen und dann wieder nach außen laufenden Lichtstrahlen bzw. U -Koordinatenlinien ist zu sehen, dass es dort für jedes Koordinatenpaar (U, r) zwei unterschiedliche Ereignisse gibt.

5.7.2 Fazit

Eine genauere Analyse zeigt, dass die auf den ersten Blick einleuchtende Behauptung, man könne in ein verdampfendes Schwarzes Loch nicht hineinfallen, fehlerhaft ist. Die am Anfang gemachte suggestive Aussage $r(t) > r_s(t)$ für alle $t < t_1$ (t_1 der Zeitpunkt des endgültigen Verdampfens) vergleicht verschiedenartige Größen: $r(t)$ ist eine Koordinate der mit t parametrisierten Weltlinie des ins Schwarze Loch fallenden Teilchens, also einer Folge von Ereignissen $(t, r(t))$. Dagegen ist $r_s(t) = 2M(t)$ ein t -abhängiger Parameter des Schwarzen Lochs. Die Weltlinie des Horizonts wird *nicht* durch die Ereignisse $(t, r_s(t))$ beschrieben (die Weltlinie des Horizonts ist in Schwarzschildkoordinaten gar nicht beschreibbar). Die Differenz $r(t) - r_s(t)$ ist also kein Maß für den räumlichen Abstand des in das Schwarze Loch fallenden Teilchens zum Horizont, und so ist aus der Aussage $r(t) > r_s(t)$ für alle $t < t_1$ nicht ableitbar, dass das Teilchen immer außerhalb des Horizonts bleibt.

Wie eine genauere Rechnung zeigt, ist es möglich in ein verdampfendes Schwarzes Loch hineinzufallen, bevor es verdampft ist, in dem Sinn, dass die Weltlinie des hineinfallenden Teilchens in der Singularität endet und das Teilchen nach dem Verdampfen nicht mehr vorhanden ist.

Genauer: Wenn man die Geodäte eines radial frei in ein ewiges Schwarzes Loch fallenden Teilchens in einlaufenden Eddington-Finkelstein-Koordinaten beschreibt, dann durchquert

Radialer Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch

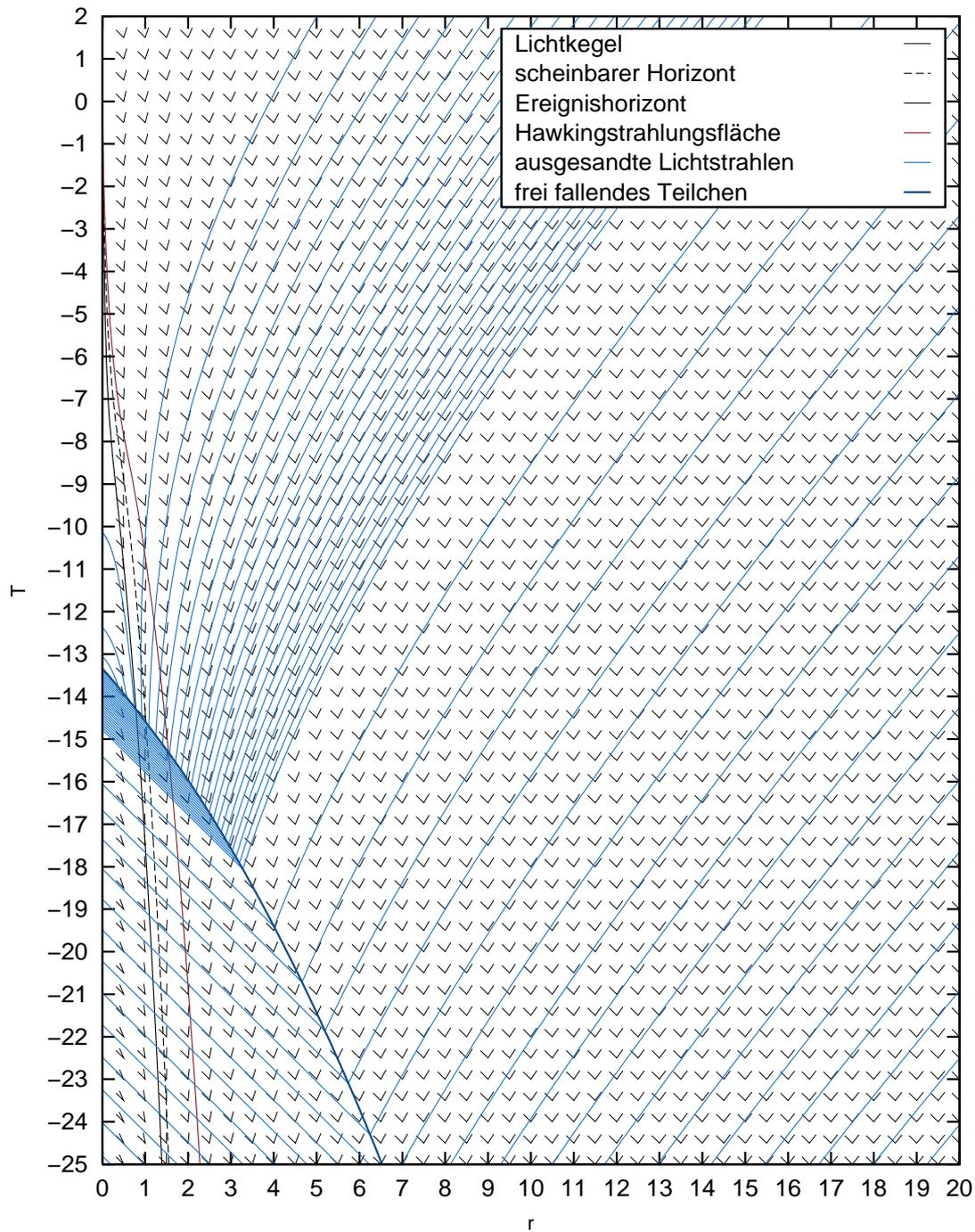


Bild 5.4: Geodäten in den Bereichen II bis IV in globalen T - r -Koordinaten. Ein Teilchen (dunkelblau) fällt frei in ein verdampfendes Schwarzes Loch und sendet dabei Lichtstrahlen (hellblau) nach innen und nach außen. Die Singularität des Schwarzen Lochs besteht aus der Punktmenge $(r = 0, T < 0)$. Das Ereignis $(r = 0, T = 0)$ markiert den Endpunkt des Verdampfens. Das Teilchen durchquert den Ereignishorizont bei etwa $(T = -14,6, r = 0,79)$ und erreicht die Singularität bei $(T = -13,3, r = 0)$.

Innerhalb der Hawkingstrahlungsfläche

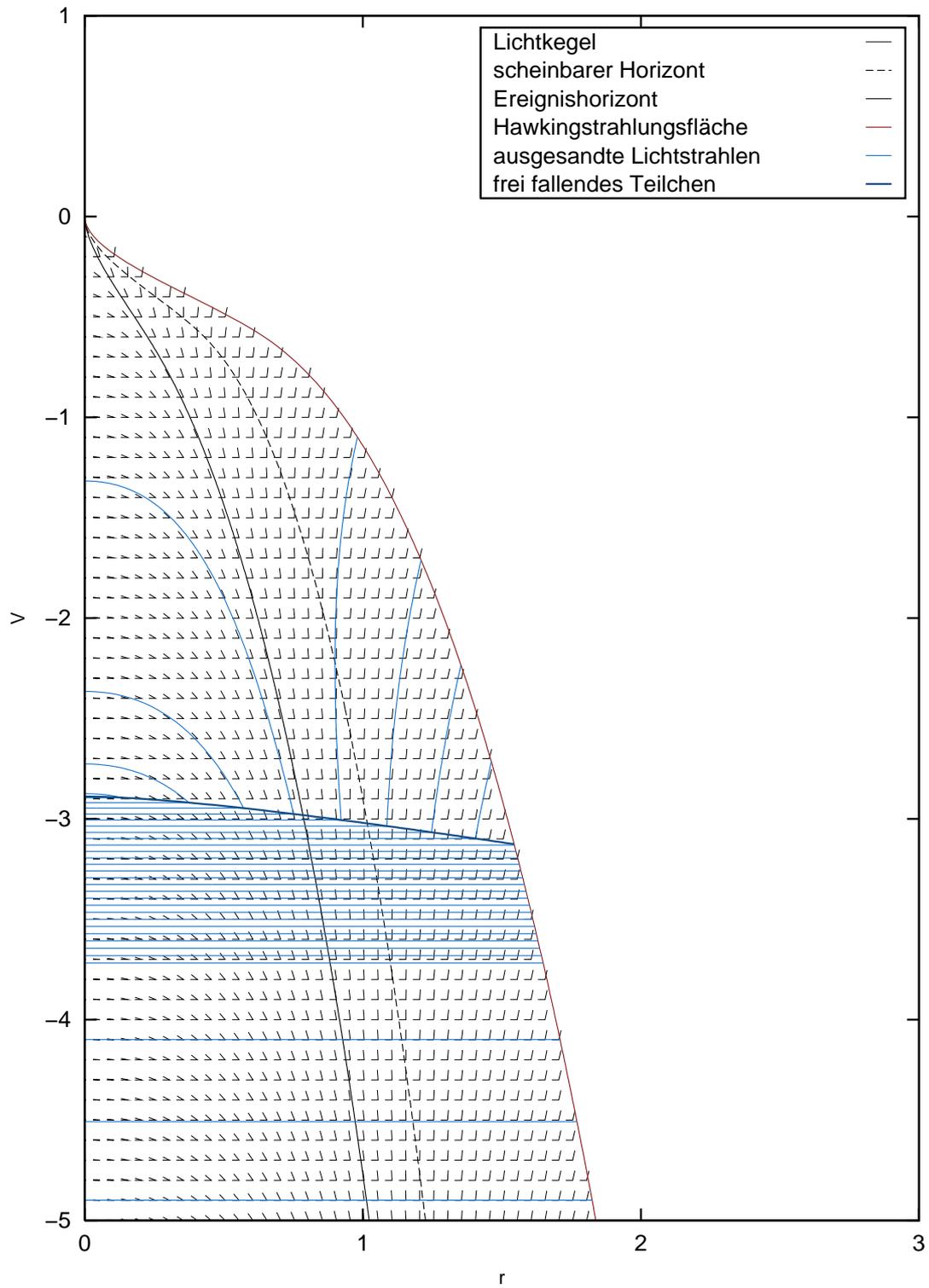


Bild 5.5: Geodäten aus Bild 5.4 in Bereich II in V - r -Koordinaten.

Außerhalb der Hawkingstrahlungsfläche

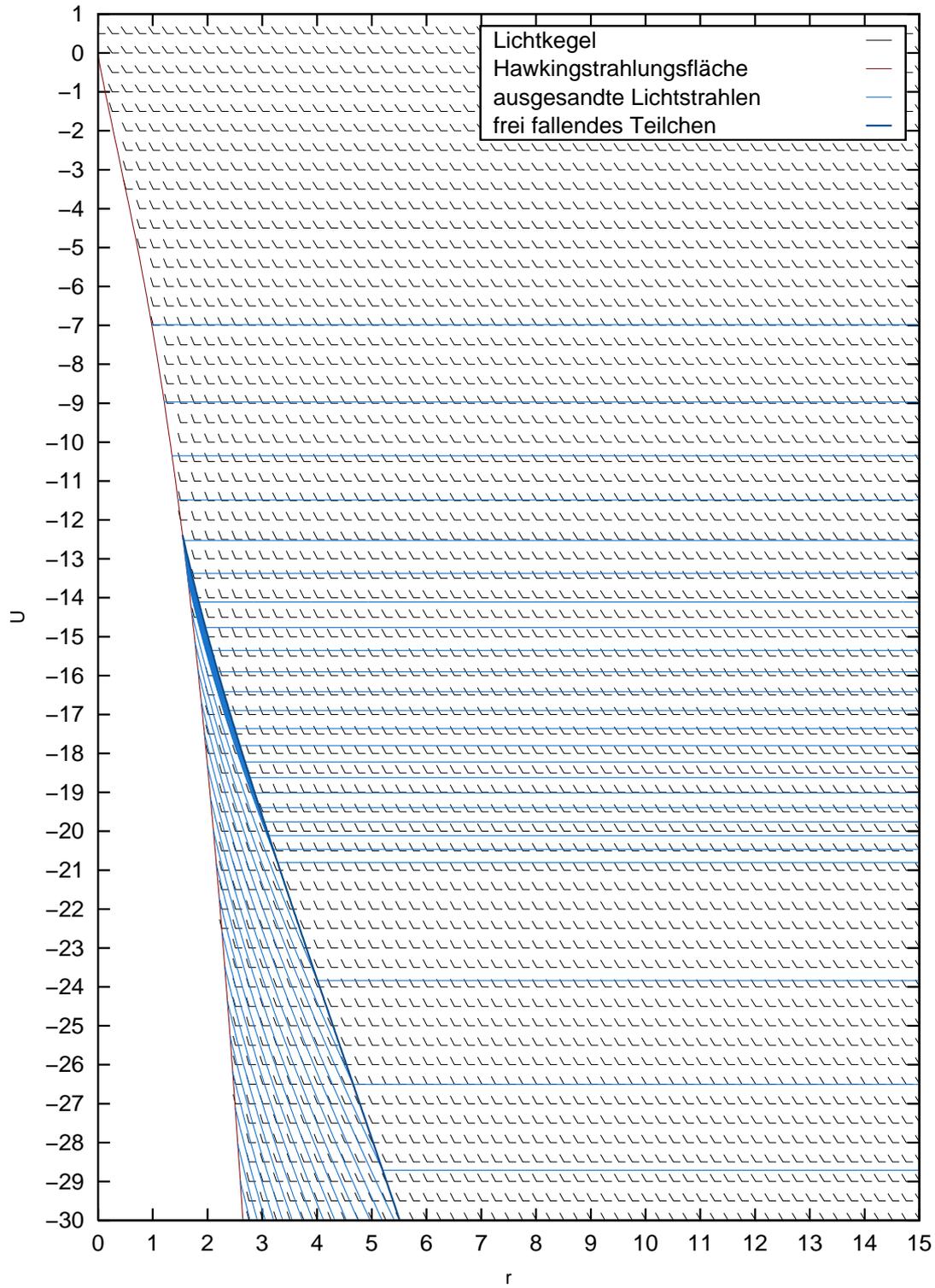


Bild 5.6: Geodäten aus Bild 5.4 in Bereich III in U - r -Koordinaten.

5 Fall in ein verdampfendes Schwarzes Loch

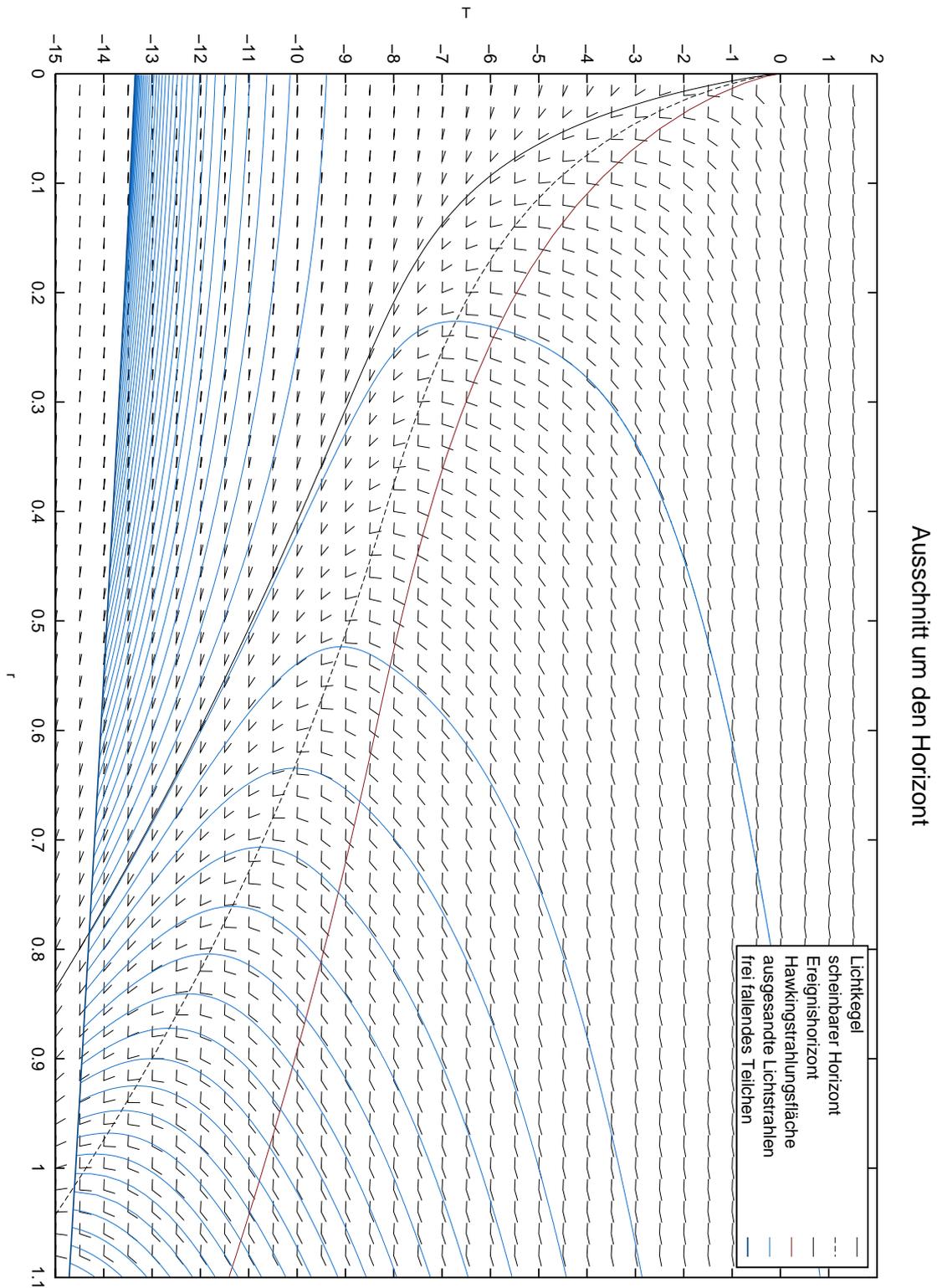


Bild 5.7: Geodäten aus Bild 5.4 nahe des Horizonts in globalen $T-r$ -Koordinaten. Die auslaufenden Nullgeodäten sind $U = \text{konst}$ -Linien. Man sieht, dass $U-r$ -Koordinaten in diesem Bereich nicht eindeutig wären.

das Teilchen bei endlichen Koordinatenwerten den Horizont und erreicht $r = 0$. Entsprechendes gilt für Teilchen, die in ein verdampfendes Schwarzes Loch fallen.

Den „Zeitpunkt des Hineinfallens“ mit der Zeit eines asymptotischen Beobachters in Verbindung zu bringen, ist prinzipiell schwierig, weil über die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse nur dann eine Aussage gemacht werden kann, wenn die Ereignisse am selben Ort stattfinden.

Dieses Problem kann man nicht einfach durch Verwendung der Schwarzschildzeit als Koordinate lösen. Die Schwarzschildzeitkoordinate *am Ort eines asymptotischen Beobachters* ist gleich der Eigenzeit dieses Beobachters. Die Schwarzschildzeitkoordinate *an einem anderen Ort* ist eine Fortsetzung dieser Beobachterzeit in die Raumzeit hinein, die prinzipiell beliebig gebildet werden kann.

Will man die zeitliche Reihenfolge aus Ereignissen rekonstruieren, die alle am Ort des Beobachters stattfinden, dann stehen dazu das Eintreffen von Lichtsignalen des hineinfallenden Teilchens und das Eintreffen von Hawkingstrahlung zur Verfügung.

Im Falle eines ewigen Schwarzen Lochs können zu beliebig späten Zeiten noch Signale des Teilchens ankommen. Anhand der Signale kann man also nicht folgern, dass das Teilchen den Horizont durchquert hat, „weg ist“ und Signale aussendet, die den Beobachter gar nicht erreichen. Andererseits lässt sich die späte Ankunft auch mit der im Gravitationsfeld verlängerten Laufzeit der Signale erklären, sie erfordert nicht, dass das Teilchen außerhalb des Horizonts bleibt und alle ausgesandten Signale irgendwann beim Beobachter ankommen.

Im Falle eines verdampfenden Schwarzen Lochs kommt innerhalb eines endlichen Zeitintervalls Hawkingstrahlung beim Beobachter an. Falls das hineinfallende Teilchen den Horizont durchquert, kommt ein vom Teilchen genau am Horizont ausgesandtes Signal gleichzeitig mit dem letzten Signal der Hawkingstrahlung beim Beobachter an. Danach herrscht Funkstille, weil die restliche Weltlinie des Teilchens innerhalb des Horizonts verläuft, von wo Signale nicht zum Beobachter kommen. Insbesondere erreicht die Weltlinie nicht den flachen Raum nach Ende des Verdampfens, das Teilchen ist „weg“.

Das Ereignis „Teilchen durchquert den Horizont“ mit dem Ereignis „Schwarzes Loch ist verdampft“ in eine zeitliche Reihenfolge zu bringen ist lokal in gewissem Sinne möglich. Eine Teilchenbahn, die den Horizont durchquert, befindet sich vor Erreichen des Horizonts im Rückwärtslichtkegel des Verdampfungsereignisses, also in dessen Vergangenheit. Beim Überschreiten des Horizonts verlässt sie den Rückwärtslichtkegel. Auf der restlichen Weltlinie besteht ein raumartiger Abstand zwischen Teilchen und Verdampfungsereignis, also passiert die Verdampfung in der Gegenwart des Teilchens, aber an einem anderen Ort.

6 Lichtkurven von Röntgenpulsaren

6.1 Röntgenpulsare

Ein Röntgenpulsar ist ein stark magnetisierter, rasch rotierender Neutronenstern, der zusammen mit einem normalen Stern ein enges Doppelsternsystem bildet. Durch seinen kleinen Radius von etwa 10 km und seiner im Vergleich dazu großen Masse von ungefähr einer Sonnenmasse ist ein Neutronenstern ein äußerst kompaktes Objekt mit einer Dichte von ungefähr 10^{15} g/cm^3 .

Von dem Begleitstern strömt Materie zum Neutronenstern hinüber und bildet um ihn herum eine dünne Scheibe, die sogenannte *Akkretionsscheibe* (Bild 6.1 links). In der Nähe des Neutronensterns ist das Magnetfeld so stark ($10^8 - 10^9$ Tesla an der Sternoberfläche), dass die Spiralbewegung der ionisierten Materie in der Akkretionsscheibe aufgebrochen wird. Die Akkretionsscheibe hat deshalb einen inneren Rand, der ungefähr bei dem Radius liegt, bei dem die kinetische Energiedichte der umlaufenden Materie gleich der Energiedichte des magnetischen Feldes ist. Von diesem inneren Rand stürzt die Materie dann längs der Magnetfeldlinien auf die Neutronensternoberfläche und wird dabei zu den Magnetpolen hin gebündelt (Bild 6.1 rechts). Das fallende Plasma bildet über den Magnetpolen eine sogenannte *Akkretionssäule*.

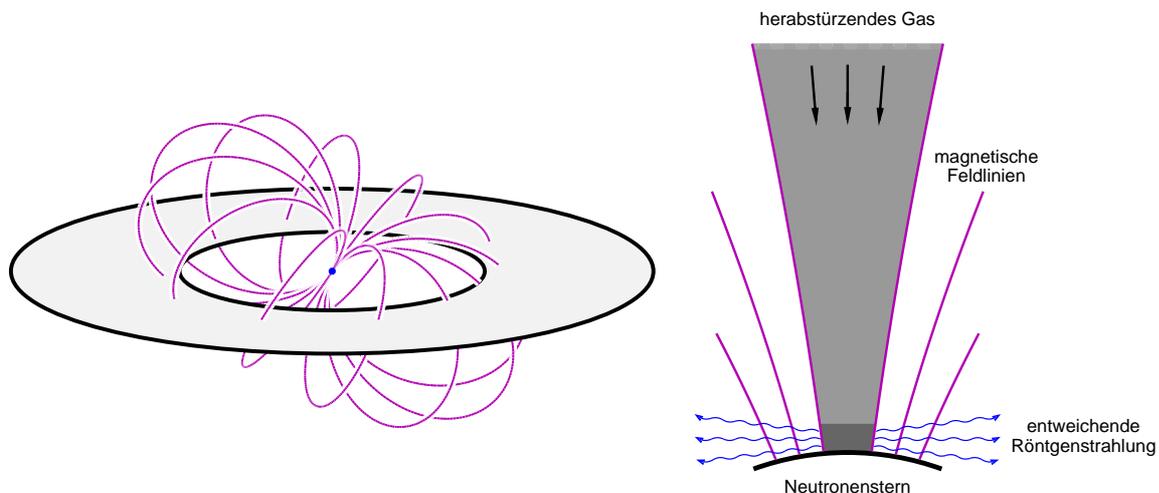


Bild 6.1: Links: Um den Neutronenstern bildet sich eine Akkretionsscheibe, in der das Gas nach innen spiralt. Die Magnetfeldlinien, die den Innenrand der Scheibe treffen, sind violett eingezeichnet. Am Innenrand der Akkretionsscheibe tritt das Gas in die Magnetosphäre ein und folgt den magnetischen Feldlinien bis zur Sternoberfläche. (Der Außenrand der Scheibe ist nicht maßstabsgerecht gezeichnet; er müsste weit außerhalb des Bildes liegen.) Rechts: Vom Innenrand der Akkretionsscheibe strömt das Material längs der Magnetfeldlinien zu den Magnetpolen des Neutronensterns. In der Nähe eines magnetischen Pols trifft das Gas auf den Neutronenstern auf. Hundert Milliarden Tonnen pro Sekunde stürzen mit bis zu 70 % der Lichtgeschwindigkeit auf eine Fläche von wenigen Quadratkilometern Größe.

6 Lichtkurven von Röntgenpulsaren

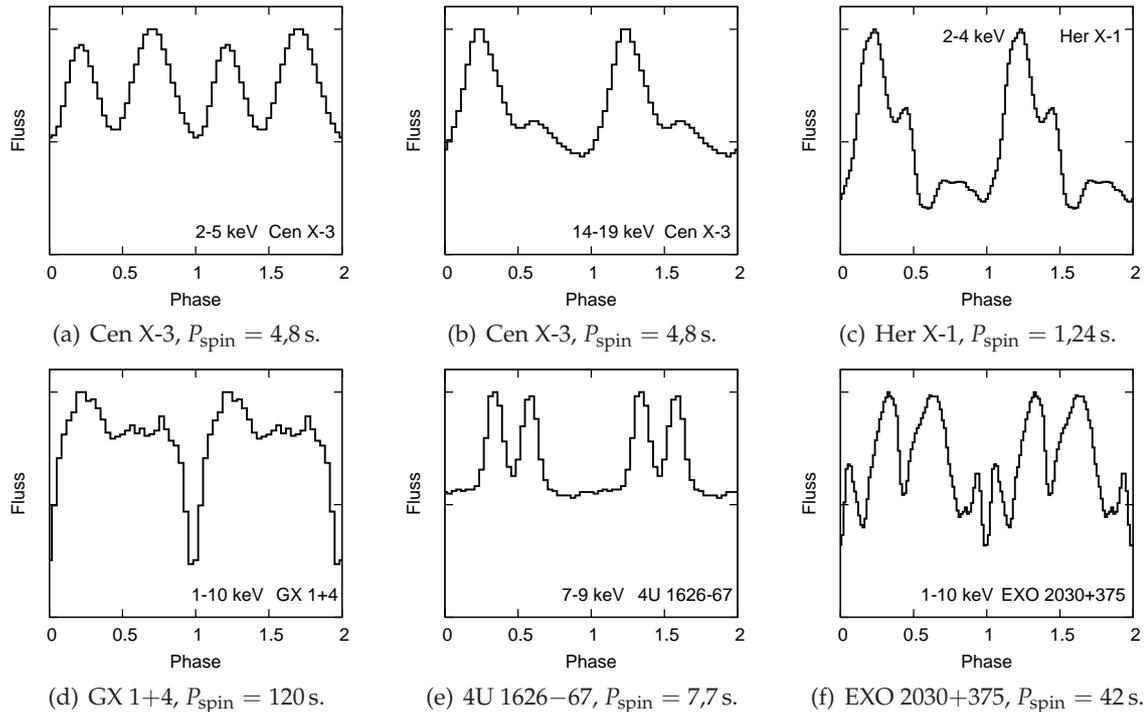


Bild 6.2: Pulsprofile verschiedener Röntgenpulsare. Es sind zwei volle Pulsperioden dargestellt. P_{spin} ist die Dauer einer Periode. Die Pulsformen sind von Quelle zu Quelle sehr unterschiedlich. Sie variieren im Allgemeinen auch mit dem Energiebereich der Strahlung ((a) und (b)). (Die Daten sind entnommen aus: Nagase et al. (1992) für Cen X-3, Kahabka (1987) für Her X-1, Greenhill et al. (1998) für GX 1+4, Levine et al. (1988) für 4U 1626-67 und Parmar et al. (1989) für EXO 2030+375.)

Bei den beiden Magnetpolen treffen auf eine Fläche von nur wenigen Quadratkilometern Größe 100 Milliarden Tonnen Materie pro Sekunde mit bis zu 70 % der Lichtgeschwindigkeit auf. Dabei wird die Oberfläche durch die bei der Abbremsung freigesetzte kinetische Energie auf Temperaturen von ca. 100 Millionen Grad aufgeheizt, was zur Emission von Röntgenstrahlung führt. Wenn die Achse durch die magnetischen Pole nicht mit der Rotationsachse des Sterns zusammenfällt, sehen wir die Röntgenstrahlung mit der Rotationsperiode gepulst.

Kosmische Röntgenstrahlung wird von der Erdatmosphäre absorbiert und kann nur mit raketten- oder satellitenbasierten Teleskopen detektiert werden. Der erste Röntgenpulsar wurde deshalb erst 1971 mit dem Röntgensatelliten UHURU entdeckt (Giacconi et al., 1971). In den darauffolgenden Jahren entwickelte sich schnell die am Kapitelanfang beschriebene Modellvorstellung. Weitere Quellen wurden gefunden und heute sind etwa 80 Röntgenpulsare in unserer Milchstraße und den Magellanschen Wolken bekannt (Coburn, 2001). Aufgrund der geringen räumlichen Ausdehnung und der großen Entfernung ist es nicht möglich, ein ortsaufgelöstes Bild des Doppelsternsystems oder gar des Neutronensterns aufzunehmen. Die mit Röntgensatelliten wie INTEGRAL oder XMM empfangene, spektral und zeitlich aufgelöste Strahlung des Gesamtsystems ist die einzige Information, die wir von solch einem System bekommen können. Trägt man den Strahlungsfluss über der Zeit auf, so erhält man sogenannte *Lichtkurven*, auch als *Pulsprofile* bezeichnet. In Bild 6.2 sind gemessene Lichtkurven einiger Röntgenpulsare dargestellt.

Aus solchen Lichtkurven detaillierte Erkenntnisse über die physikalischen Vorgänge „vor Ort“ zu gewinnen, ist schwierig. Eine Vielzahl von Einflüssen, wie die Orientierung im Raum, die Geometrie der Strahlungsquellen, die spektrale Verteilung und Abstrahlcharakteristik der Röntgenstrahlung sowie die Streuung und Reprozessierung der Strahlung und der Einfluss der gravitativen Lichtablenkung bestimmen die Form der Lichtkurve.

Bei Pulsaren geringerer Leuchtkraft erreicht die akkretierte Materie die Neutronensternoberfläche im freien Fall. Dort bildet sich ein Röntgenstrahlung emittierender sogenannter *Hotspot*. Bei höherer Leuchtkraft wird die fallende Materie durch den Strahlungsdruck oberhalb der Sternoberfläche abgebremst. Ein Strahlungsschock trennt das frei fallende Plasma von einer beinahe ruhenden Säule. Röntgenstrahlung entweicht hauptsächlich seitlich aus dieser Säule. Um den Fuß der Säule kann sich auf der Neutronensternoberfläche durch die starke Bestrahlung ein leuchtender Halo bilden, der ebenfalls zur Strahlungscharakteristik beiträgt.

Der Schwerpunkt dieses Projektes lag in der Erweiterung des während meiner Diplomarbeit (Zahn, 1991) entwickelten relativistischen, die Lichtablenkung im Gravitationsfeld berücksichtigenden Raytracingprogramms auf solche komplizierteren Geometrien. In Zusammenarbeit mit Ute Kraus wurde dieses Programm auf komplexe Mehrkomponentenmodelle für die Röntgenemission angewandt (Kraus, Zahn, Weth und Ruder, 2003).

6.2 Lichtablenkung

Dass die relativistische Lichtablenkung auf die Lichtkurven von Röntgenpulsaren einen großen Einfluss hat, wird aus Bild 6.3 ersichtlich. In diesem rein geometrischen Modell strahlt der untere Teil der Akkretionssäulen zur Seite isotrop ab; nach oben entweicht wegen des hinabströmenden Plasmas keine Strahlung. Jede Spalte zeigt etwa eine Vierteldrehung eines Neutronensterns mit zwei sich gegenüberliegenden Akkretionssäulen. Die Kurve zeigt den zeitlichen Verlauf der gesamten beobachteten Strahlung. Die linke Spalte ist ohne, die rechte mit Lichtablenkung gerechnet. Im letzten Bild (unten) tritt der (etwas konstruierte) Fall ein, dass eine Akkretionssäule genau auf der Mitte der Neutronensternrückseite liegt. Die Kurve mit Lichtablenkung verläuft völlig anders als die Kurve ohne Lichtablenkung. Insbesondere ist zu erkennen, dass erstere ein Maximum zu dem Zeitpunkt hat, an dem eine Säule genau hinter dem Stern steht.

6.3 Raytracing als Methode zur Berechnung von Pulsprofilen

6.3.1 Berechnung der Lichtkurven

Zur Berechnung der Lichtkurve eines Modellröntgenpulsars muss der gesamte Strahlungsfluss in Richtung einer virtuellen Röntgenkamera zu verschiedenen Phasen der Rotation ermittelt werden. Für die Bestimmung des Strahlungsflusses unter Berücksichtigung der Lichtablenkung werden in der Literatur verschiedene Verfahren beschrieben.

Anfangs wurde der Strahlungsfluss für einfache Quellengeometrien (für kreisförmige Hotspots z. B. Pechenick et al. (1983) oder für kegelstumpfförmige Säulen z. B. Riffert und Mészáros (1988)) mittels halbanalytischer Methoden berechnet. Dabei wird untersucht, welchen Raumwinkel ein kleines Flächenstück der Emissionsregion vom Detektor aus gesehen einnimmt und welcher Strahlungsfluss von diesem Flächenstück in Richtung Detektor ausgesandt wird. Eine Integration über die gesamte Emissionsregion ergibt dann den

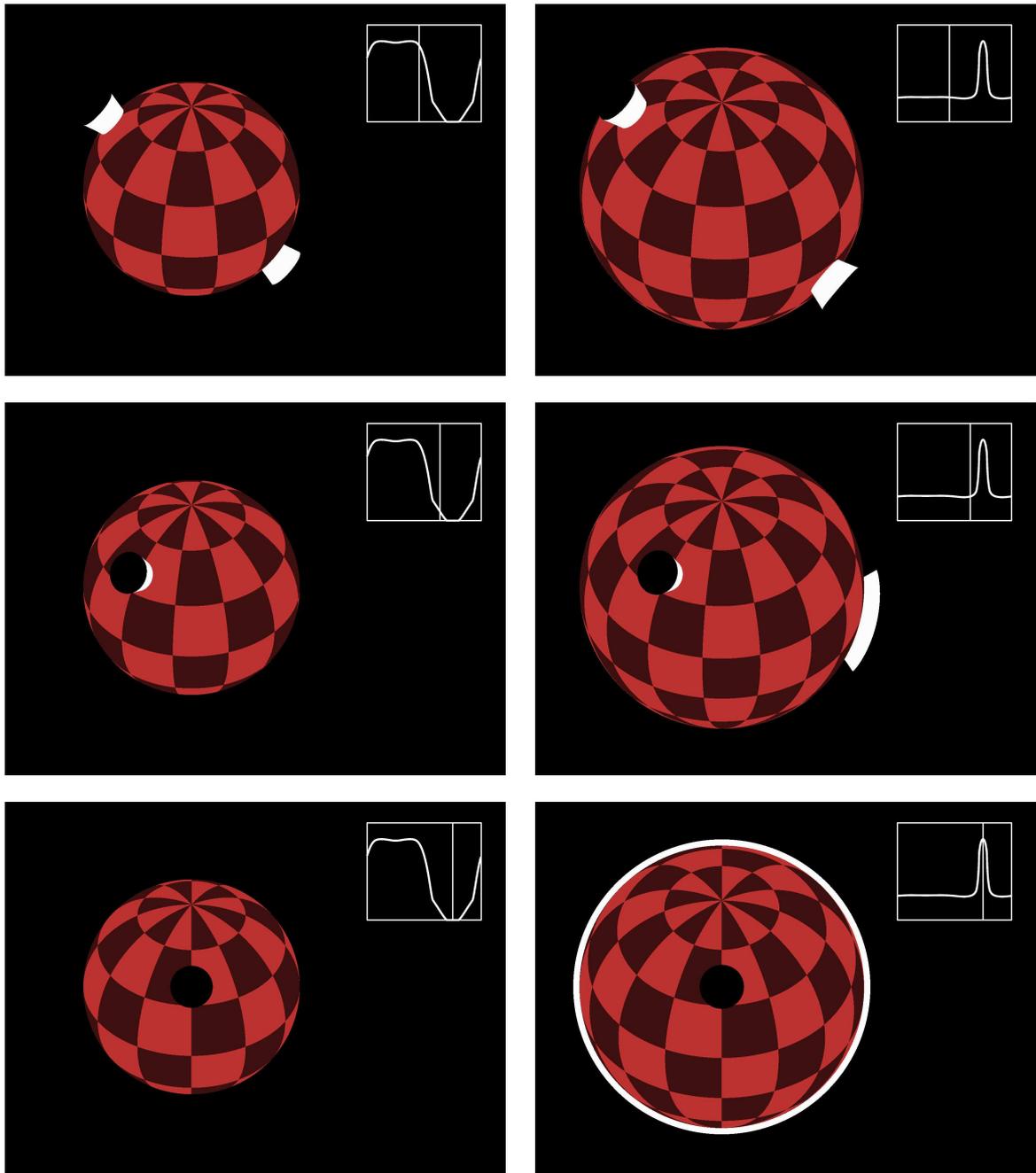


Bild 6.3: Einfluss der Lichtablenkung auf die Lichtkurven von Röntgenpulsaren. Zwei kleine Emissionsgebiete an den beiden magnetischen Polen emittieren Röntgenstrahlung. Wenn der Stern rotiert, wandern sie durch das Sichtfeld und die Gesamthelligkeit variiert. Gezeigt ist ein Modell mit zwei Akkretionssäulen während etwas mehr als einer Vierteldrehung, links ohne, rechts mit Lichtablenkung berechnet. Das zugehörige Pulsprofil ist in jedem Bild rechts oben eingeblendet; der senkrechte Strich markiert die zum Bild gehörige Pulsphase.

gesamten Strahlungsfluss. In einer neueren Arbeit (Leahy, 2003) werden mit diesem Verfahren Lichtkurven von hohlen Akkretionssäulen berechnet. Diese Methode gerät an ihre Grenzen, wenn die Geometrie der Quellen komplexer wird.

Wir untersuchen hier Modelle mit möglichst realistischer Geometrie. Ein Neutronenstern kann mehrere Akkretionssäulen besitzen (vermutet werden zwei ungefähr diametral gegenüberliegende), deren Form den Feldlinien eines eventuell asymmetrischen Magnetfeldes folgt. Der Querschnitt der Säule ist davon abhängig, welche Magnetfeldlinien den Innenrand der Akkretionsscheibe erreichen und wie der Übergang der Materie von der Scheibe in den Akkretionsstrom stattfindet (was noch weitgehend ungeklärt ist). Je nach Orientierung der Magnetfeldachse können sich so Säulen mit beispielsweise kreis-, kreisring- oder sichelförmigem Querschnitt ausbilden. Ein großer Teil der Strahlung aus der Säule trifft die Sternoberfläche, wird dort reprozessiert und erzeugt so als weitere zu berücksichtigende Komponente einen leuchtenden Halo.

Bei der Berechnung der Strahlungsausbreitung vom Emissionsort zur Kamera muss die räumliche Anordnung der beteiligten Objekte berücksichtigt werden. Einerseits kann ein Emissionsgebiet durch ein undurchsichtiges Hindernis, wie den Neutronenstern selbst oder einen optisch dichten Teil der Akkretionssäule, verdeckt werden. Andererseits kann die Sichtlinie auf ein Emissionsgebiet durch halbdurchlässige Objekte, wie einen Akkretionsstrom führen, so dass Streuung längs des Lichtwegs zur Kamera die Strahlungsintensität schwächt.

Bei der Berechnung dieses Lichtwegs muss als wichtiger Faktor noch die relativistische Lichtablenkung berücksichtigt werden. Je nach geometrischer Konstellation kann es sogar mehrere Wege zwischen Emissionsort und Kamera geben.

Für solche komplexen Geometrien (Bild 6.4 zeigt ein Beispiel) ist das auch in diesem Projekt eingesetzte Raytracingverfahren prädestiniert (Kapitel 8 *d-dimensionales Raytracing*, S. 115). Hier wird von der virtuellen Kamera ausgehend für jeden Bildpunkt ein Lichtstrahl zur Quelle zurückverfolgt und dem Bildpunkt die in Richtung des Lichtstrahls emittierte Strahlungsintensität zugeordnet.

Wenn der Photonenpfad den Akkretionsstrom kreuzt, wird die Intensität entsprechend der optischen Tiefe zwischen Ein- und Austrittspunkt reduziert. Der entwickelte Raytracingalgorithmus bietet dazu die Möglichkeit, Schnittpunkte mit „durchsichtigen“ Körpern und den genauen Verlauf der Photonenbahn zwischen Ein- und Austritt für die Berechnung der Ausstreuung zu ermitteln.

Die Frequenz der Strahlung wird von der Emission bei der Radialkoordinate r bis zur Detektion bei einer Entfernung $d \gg r_s$ (r_s ist der Schwarzschildradius des Neutronensterns) rotverschoben gemäß $\omega_\infty = \omega\sqrt{1 - r_s/r}$ mit einer entsprechenden Änderung der spezifischen Intensität.

Zu einer vorgegebenen Frequenz bestimmen wir so, von der Kamera aus rückwärts gerechnet, die Intensität jedes einzelnen Bildpunkts. Das Resultat sind aufgelöste Bilder des Neutronensterns zu einer bestimmten Photonenenergie am Ort der Kamera, wie z. B. die in diesem Kapitel dargestellten Bilder. Zur Untersuchung der Energieabhängigkeit berechnen wir mehrere Bilder zu verschiedenen Energien. Da für die Lichtkurven nicht ein aufgelöstes Bild sondern nur der Gesamtfluss gesucht ist, muss man nach der Bildberechnung noch über die Filmfläche integrieren (Summierung über alle Bildpunkte). Als Ergebnis erhalten wir den spektral aufgelösten Röntgenfluss für einen bestimmten Beobachtungswinkel.

Die Einzelbildberechnung ist recht aufwendig, da feine Strukturen nur bei sehr hohen Bildaufösungen sichtbar werden. Teilweise wurden bis zu 8192×8192 Pixel pro Bild be-

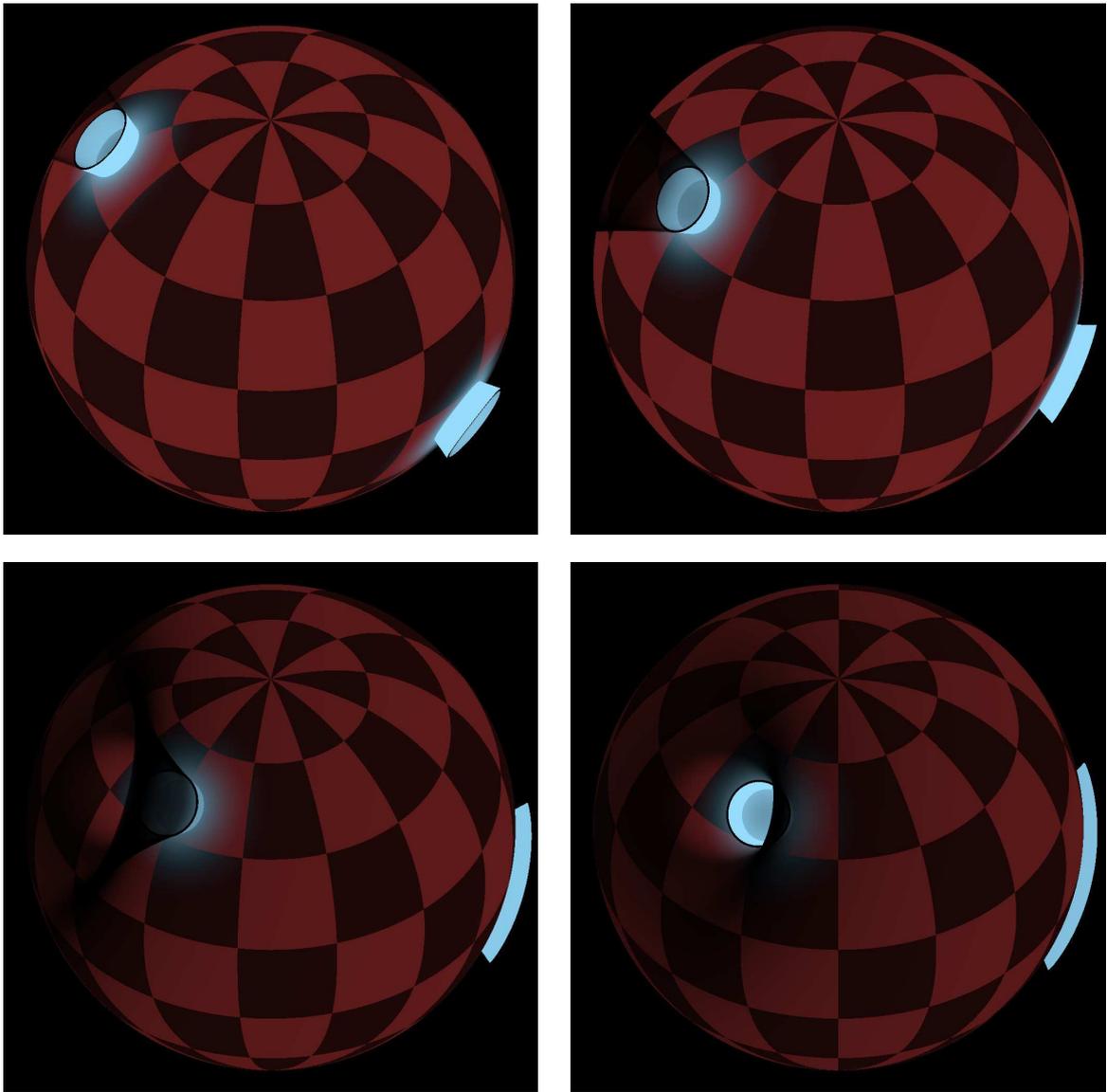


Bild 6.4: Beispiel für eine komplexe Geometrie: Die Abschattung durch den oberen Teil des Akkretionsstroms einer Hohlsäule. Wenn der Akkretionsstrom durch die Sichtlinie schwenkt, verdeckt er nacheinander die entfernte Seite des Halos, die Innenseite der Säule und die nahe Seite des Halos. Bei höherer Photonenenergie ist der Akkretionsstrom weniger durchsichtig; die Innenseite der Säule wird nur sichtbar, wenn die Sichtlinie annähernd mit der Magnetfeldachse übereinstimmt.

rechnet. Pro Pixel ist eine Geodäte durch die gekrümmte Raumzeit zu bestimmen. Falls die Geodäte durch den Akkretionsstrom läuft, muss noch die Streuung berechnet werden. Um die Rechenzeit in erträglichem Rahmen zu halten wurde als Optimierung ein adaptives Subsampling-Verfahren (Abschnitt 8.3, S. 121) eingesetzt.

Für eine zeitlich aufgelöste Lichtkurve wird das Bild des Emissionsgebiets bzw. der sich daraus ergebende Gesamtfluss für jeden möglichen Rotationswinkel des Neutronensterns benötigt. Wenn der Neutronenstern rotiert, ändert sich der Winkel θ zwischen der Sichtlinie zur Kamera und der Achse durch den magnetischen Pol i mit dem Rotationswinkel Φ wie folgt:

$$\cos \theta = \cos \Theta_0 \cos \Theta_{m,i} + \sin \Theta_0 \sin \Theta_{m,i} \cos(\Phi - \Phi_i), \quad (6.1)$$

wobei Θ_0 der Winkel zwischen der Rotationsachse und der Sichtlinie, $\Theta_{m,i}$ der Winkelabstand des Pols i von der Rotationsachse und $\Phi = \Phi_i$ der Moment ist, in dem die Achse durch Pol i der Sichtlinie zur Kamera am nächsten kommt. Die zugehörige Änderung im Strahlungsfluss erzeugt das beobachtete Pulsprofil.

Für eine axialsymmetrische Emissionsregion (wie in dem unten beschriebenen Modell) ist die Strahlungscharakteristik (d. h. der beobachtete Fluss einer Akkretionssäule als Funktion der Beobachtungsrichtung) nur eine Funktion von θ . Dies kann zur Rechenzeitoptimierung genutzt werden. Wenn die θ -abhängigen Strahlungscharakteristiken beider Emissionsgebiete bekannt sind, können daraus Pulsprofile für beliebige geometrische Konstellationen berechnet werden. Genauer gesagt gilt das nur, wenn die Abschattung der einen Emissionsregion durch die andere vernachlässigt werden kann (was in dem unten beschriebenen Modellbeispiel der Fall ist). Wenn Streuung in der jeweils anderen Akkretionssäule berücksichtigt werden soll, muss die Strahlungscharakteristik des Gesamtsystems aus beiden Säulen berechnet werden. Das entwickelte Raytracingprogramm bietet dazu die Möglichkeit, komplexe Szenen aus einzelnen Bausteinen zusammensetzen.

Zur Berechnung des den Halo erzeugenden Strahlungsflusses wird das gleiche Raytracingverfahren verwendet. Der Fluss pro Einheitsfläche wird aus einem per Raytracing gewonnenen aufgelösten Bild erhalten, das von einer in der Neutronensternoberfläche eingelassenen Kamera aufgenommen wurde. Die Kamera hat eine halbkugelförmige Filmfläche und damit einen Öffnungswinkel von 180° , um den gesamten „Himmel“ zu erfassen. Der Strahlungsfluss wird für jeden Punkt der bestrahlten Neutronensternoberfläche benötigt. Um die erforderliche hohe Auflösung (hoher Flussgradient in Säulennähe) bei dem sehr hohen Rechenaufwand pro Punkt zu erreichen, kommt wie bei der Einzelbildberechnung ein adaptives Subsampling-Verfahren zur Anwendung.

Das Raytracingverfahren eignet sich gut für Probleme mit komplexer Geometrie. Die an der Strahlungsentstehung und -ausbreitung beteiligten Objekte müssen dabei entweder optisch so dicht sein, dass ihre Abstrahlung durch eine auf der Oberfläche definierte Emissionscharakteristik modelliert werden kann, oder so durchsichtig, dass nur wenige Streueignisse die geodätische Lichtausbreitung stören bzw. Streuungen nur als Schwächung der direkten Strahlung berücksichtigt werden müssen.

Das Verfahren stößt an seine Grenzen, wenn mehrfache Streuung berücksichtigt werden soll. Von jedem Raumpunkt aus, an dem eine Streuung auftreten könnte, müssten Lichtstrahlen in alle Richtungen in die Vergangenheit ausgesandt werden, um die Einstreuung an diesem Punkt in Richtung des Lichtstrahls zur Kamera zu erfassen. Bei mehrfachen Streuungen muss dieser Algorithmus rekursiv angewandt werden, was schnell auch moderne Rechner überfordert.

Für solche Probleme ist z. B. ein Monte-Carlo-Verfahren (Weth, 2002) besser geeignet. Dabei werden einzelne Photonen von der Entstehung über mehrere Streuungen zum Röntgendetektor verfolgt. Der Startpunkt und Startimpuls der simulierten Photonen wird gemäß einer gegebenen Verteilungsfunktion ausgewürfelt. Ein Photon folgt einer Nullgeodäte, bis ein Streuereignis eintritt, das dem Photon einen neuen Impuls gibt. Die Photonen, die aus dem System entweichen, werden von einer um den Neutronenstern in großer Entfernung angeordneten, als Röntgendetektor arbeitenden Kugelschale aufgefangen. Im Lauf der Zeit, nach der Simulation sehr vieler Photonen, zeichnet sich auf dieser Kugelschale die richtungsabhängige Strahlungscharakteristik ab. Nachteile dieses Verfahrens sind, dass man extrem viele Photonen benötigt, um feine Strukturen in der Strahlungscharakteristik zu erfassen und dass es kein aufgelöstes Bild der Emissionsregion ergibt.

6.3.2 Visualisierung

Da allein die Geometrie des zu modellierenden Systems schon sehr komplex ist, wird die Kontrolle seiner räumlichen Struktur zu einem wesentlichen Faktor bei der Umsetzung einer physikalischen Theorie in ein Computermodell. Einfache Eingabefehler, wie eine durch falsche Parameterwahl statt an der Sternoberfläche 10 km darüber endende Akkretionssäule, lassen sich auf einem Bild wesentlich leichter erkennen als etwa durch den Vergleich zweier Lichtkurven.

Darüberhinaus stellen die als „Abfallprodukt“ entstehenden Bilder eine wertvolle Hilfe bei der Diskussion über das Modell bzw. bei der Vermittlung in der Öffentlichkeit dar.

6.3.3 Validierung

Das numerische Verfahren zur Berechnung der Strahlungscharakteristiken mittels Raytracing wurde durch Vergleich mit anderen Methoden validiert. Für einen einfachen Spezialfall (isotrope Emission einer radialen Säule, ohne Lichtablenkung) kann die Strahlungscharakteristik analytisch berechnet werden (Kraus, 2001). Für einen allgemeineren Fall (Emission eines Hotspots mit Streuung in der Säule, mit Lichtablenkung) wurde als zweite unabhängige Methode das oben erwähnte Monte-Carlo-Verfahren zum Vergleich herangezogen (Weth, 2002). In beiden Fällen ergibt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

6.4 Anwendung: Modell für einen Röntgenpulsar mittlerer Leuchtkraft

Ich beschreibe hier eine Anwendung des Raytracingverfahrens zur Berechnung der Lichtkurven eines Röntgenpulsars mittlerer Leuchtkraft. Es wurde untersucht, wie sich der Einfluss eines Halos um die Akkretionssäule auf die Energieabhängigkeit der Pulsformen auswirkt (Kraus, Zahn, Weth und Ruder, 2003).

Die Ergebnisse zeigen, dass die qualitativen Eigenschaften der Energieabhängigkeit der Pulsformen von der energieabhängigen relativen Gewichtung der Anteile von Halo und Säule bestimmt werden. Dies ist in guter Übereinstimmung mit Beobachtungen, die oft ebenfalls eine energieabhängige relative Höhe der einzelnen Peaks zeigen.

6.4.1 Modell der Akkretionssäule

Bei Quellen mit höherer Leuchtkraft wird die akkretierte Materie durch den Strahlungsdruck der an der Neutronensternoberfläche freigesetzten Strahlung abgebremst. Man erwartet, dass sich ein Strahlungsschock ausbildet, wenn die Leuchtkraft L pro Magnetpol L_* übersteigt:

$$L > L_* = \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} L_{\text{Ed}} \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{s}}} = 3 \cdot 10^{29} \text{ W} \left(\frac{\alpha}{0,1 \text{ rad}} \right) \left(\frac{M}{1,4 M_{\odot}} \right) \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{s}}}. \quad (6.2)$$

Hier ist α der halbe Öffnungswinkel am Fuß der Akkretionssäule, $L_{\text{Ed}} = 4\pi c m_{\text{p}} GM / \sigma_{\text{T}}$ die Eddingtonleuchtkraft, m_{p} die Protonenmasse, M die Masse des Neutronensterns, M_{\odot} die Sonnenmasse, σ_{T} der Thomson-Streuquerschnitt und σ_{s} der über Richtung und Frequenz gemittelte magnetische Streuquerschnitt (Basko und Sunyaev, 1976). Der Strahlungsschock trennt das frei fallende Plasma oberhalb des Schocks von einer beinahe ruhenden Säule unterhalb des Schocks. Röntgenstrahlung entweicht hauptsächlich seitlich aus dieser Säule. Der Schock tritt für $L \approx L_*$ knapp oberhalb der Sternoberfläche und für eine größere Leuchtkraft weiter oben in der Akkretionssäule auf.

In dem hier untersuchten Modell eines Pulsars mit mittlerer Leuchtkraft ($L \approx L_*$) gehen wir von einer Säulenhöhe aus, die klein gegenüber dem Neutronensternradius ist. Der Neutronenstern mit Schwarzschildradius r_{s} und Sternradius r_{n} rotiert so langsam, dass die Schwarzschildmetrik zur Beschreibung der Photonenbahnen angemessen ist. Die Form der Akkretionssäule wird durch die Feldlinien eines Magnetfeldes in der Schwarzschildmetrik (Wasserman und Shapiro, 1983) festgelegt:

$$\sin^2 \theta \left(\frac{r}{r_{\text{s}}} \right)^2 \left(\ln(1 - r_{\text{s}}/r) + \frac{r_{\text{s}}}{r} \left(1 + \frac{r_{\text{s}}}{2r} \right) \right) = \text{konst}, \quad (6.3)$$

wobei r, θ die üblichen Schwarzschildkoordinaten sind.

Die Emissionsregion unterhalb des Strahlungsschocks wird als homogene undurchsichtige Säule mit einem vorgegebenen Emissionsmuster modelliert. Die Strahlung entweicht durch ihre Seitenwand, deren effektive Temperatur T_{eff} durch

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 A_{\text{co}} = L \quad (6.4)$$

gegeben ist, wobei A_{co} die emittierende Fläche und L die lokal gemessene Leuchtkraft bezeichnet.

Es wurden zwei Modelle für die lokale Emission an der Säulenoberfläche untersucht. Ausgehend von der Annahme, dass das Plasma in der Säule unterhalb des Schocks vergleichsweise langsam nach unten sinkt, nehmen wir in Modell 1 eine isotrope Abstrahlung mit einem Schwarzkörperspektrum der Temperatur T_{eff} an. Im zweiten Modell wird angenommen, dass die Materie, wie von Lyubarskii und Syunyuaev (1988) vorgeschlagen, am Rand der Säule sehr schnell nach unten fällt und die emittierte Strahlung dadurch nach unten gebündelt wird. Um die Auswirkungen einer solchen gebündelten Emission zu untersuchen, setzen wir nach Lyubarskii und Syunyuaev (1988) die Emission im Ruhesystem des schnell fallenden Plasmas am Säulenrand zu $I_0 \propto (1 + 2 \cos \delta_0)$ (δ_0 ist der Winkel zur Normalen auf der Säulenwand). Mit einem Schwarzkörperspektrum im Ruhesystem des Plasmas und mit der Annahme eines frei fallenden Plasmas am Säulenrand wird dies zu unserem Modell 2.

Ein großer Teil der Strahlung aus der Säule trifft die Sternoberfläche, wird dort reprozessiert und erzeugt einen leuchtenden Halo. Wir nehmen eine thermische Reemission an (Brainerd und Mészáros, 1991), so dass ein Oberflächenelement, das einen totalen Strahlungsfluss F empfängt, als Schwarzer Körper mit der Temperatur $T = (F/\sigma)^{1/4}$ strahlt.

Ein Teil der Strahlung der Säule und des Halos wird in den oberen Bereichen des Akkretionsstroms gestreut (eventuell auch im Akkretionsstrom des gegenüberliegenden Magnetpols). Durch die Abwärtsbewegung des Plasmas werden die gestreuten Photonen nach unten gelenkt. Sie enden zum größten Teil im Strahlungsschock oder neben der Säule auf der Neutronensternoberfläche, wo sie einen zusätzlichen Beitrag zum Halo liefern. Dieser ist im Vergleich zur direkten Bestrahlung durch die Säule gering, so dass er vernachlässigt werden kann.

Die Emission der Säule und des Halos kann durch die Photonverteilungsfunktion f beschrieben werden. Diese hängt mit der spezifischen Intensität über $I_\nu = fh^4\nu^3/c^2$ zusammen und ist ohne Streuung und Absorption längs einer Nullgeodäten konstant.

Wenn eine Nullgeodäte $x(\lambda)$ den oberen Bereich des Akkretionsstroms zwischen λ_a und λ_b kreuzt, wird die Photonverteilungsfunktion f_0 der Quelle auf

$$f = \frac{f_0}{2}e^{-\tau_1} + \frac{f_0}{2}e^{-\tau_2}, \quad (6.5)$$

reduziert, wobei τ_1 und τ_2 die optischen Tiefen der beiden Polarisationsnormalmoden sind.

Diese sind gegeben durch

$$\tau_i(\lambda_a, \lambda_b) = \frac{1}{c} \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sigma_{\text{tot},i,0}(\mathbf{x}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda)) E_0(\mathbf{x}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda)) d\lambda. \quad (6.6)$$

Hier ist $\mathbf{p}(\lambda) = d\mathbf{x}(\lambda)/d\lambda$. Der Gesamtstreuoeffizient $\sigma_{\text{tot},i,0}$ und die Photonenergie E_0 werden im Plasmaruhesystem angegeben.

Wir verwenden die kohärenten magnetischen Streuquerschnitte für kaltes Plasma unter Berücksichtigung der Vakuumpolarisation (Mészáros und Ventura, 1978, 1979).

6.4.2 Modellparameter

Strahlungscharakteristiken wurden für eine Akkretionssäule mit einem halben Öffnungswinkel von $\alpha = 0,1$ rad und einem Strahlungsschock bei $r_t = 1,05 r_n$ berechnet. Zwei Sätze von Neutronensternparametern wurden verwendet: Neutronenstern A mit $r_s = 4,2$ km (entspricht $M = 1,4 M_\odot$) und $r_n = 8,4$ km ist genügend kompakt um die Strahlung der Säule in die diametral gegenüberliegende Richtung zu fokussieren. Der weniger kompakte Neutronenstern B mit $r_s = 4,2$ km und $r_n = 10$ km verdeckt die Säule für Beobachtungswinkel $\theta > 168^\circ$. Die lokale Leuchtkraft pro Pol ist $L = 3 \cdot 10^{29}$ W $\approx L_*$, entsprechend einer asymptotischen Leuchtkraft pro Pol von $L_\infty = 1,5 \cdot 10^{29}$ W (A) und $L_\infty = 1,7 \cdot 10^{29}$ W (B). Mit einer emittierenden Säulenoberfläche A_{co} von $3,2 \text{ km}^2$ bzw. $4,3 \text{ km}^2$ ergeben sich die effektiven Temperaturen nach Gleichung (6.4) zu $kT = 3,1$ keV und $kT = 2,9$ keV. In beiden Fällen wurde das Magnetfeld des Neutronensterns so gewählt, dass die lokal gemessene Zyklotronenergie am Magnetpol $\hbar\omega_c = 35$ keV ist. Strahlungscharakteristiken und Pulsprofile werden für Photonenergien von $\hbar\omega = 1, 5, 10$ und 20 keV gezeigt (gemessen im Ruhesystem des Neutronensterns bei $r \approx r_n$). In den Diagrammen werden Photonenergien, wenn nicht anders erwähnt, konsistent durch die Linienart markiert: Durchgezogene,

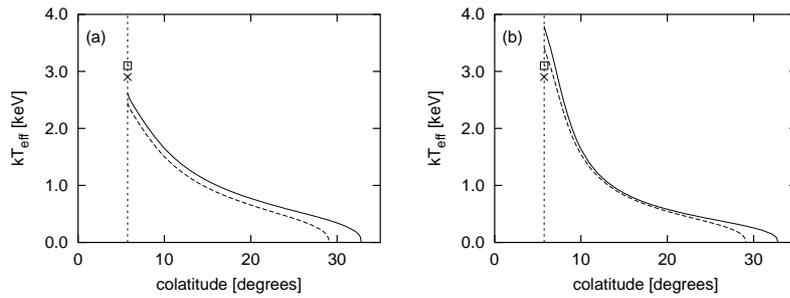


Bild 6.5: Verlauf der Halotemperatur für isotrope (a, Modell 1) und gerichtete (b, Modell 2) Säulenemission. Symbole: effektive Temperaturen der Säulenwände. Durchgezogene Linie/Quadrat: Neutronenstern A, gestrichelte Linie/Kreuz: Neutronenstern B; die senkrechte Linie markiert den Rand der Akkretionssäule.

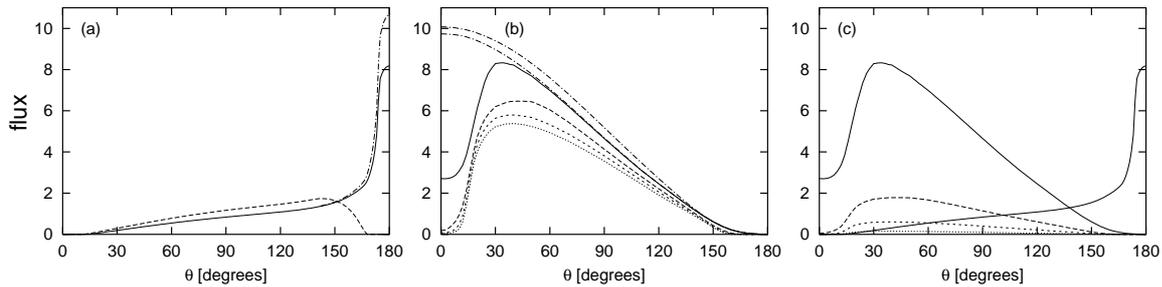


Bild 6.6: Strahlungscharakteristiken der Einzelkomponenten für Modell 1. (a): Strahlungscharakteristik der Säule für Neutronenstern A (durchgezogene Linie) und B (gestrichelte Linie) bei $\hbar\omega = 1$ keV. Zum Vergleich: Strahlungscharakteristik der Säule für Neutronenstern A ohne die Streuung im Freifallbereich des Akkretionsstroms (strichpunktierte Linie). Für Neutronenstern B sind die Kurven mit und ohne Streuung so gut wie identisch. Normierung: gleicher lokaler Fluss in allen Fällen. (b): Strahlungscharakteristik des Halos für Neutronenstern A bei allen vier Photonenenergien. Zum Vergleich: Strahlungscharakteristik des Halos bei $\hbar\omega = 1$ keV für eine komplett durchsichtige Akkretionssäule (obere strichpunktierte Linie) und für einen durchsichtigen Freifallstrom über einer undurchsichtigen Säule (untere strichpunktierte Linie). Normierung: gleiche normierte Haloleuchtkraft bei jeder Energie. (c): Strahlungscharakteristik der Säule und des Halos für Neutronenstern A bei allen vier Energien. Die relative Bedeutung des Halos nimmt zu hohen Energien hin ab. Normierung: gleicher lokaler Fluss bei jeder Energie.

lang gestrichelte, kurz gestrichelte und gepunktete Linien werden in dieser Reihenfolge für ansteigende Photonenenergien verwendet. Alle Pulsprofile sind auf einen maximalen Fluss von eins normiert. Die Strahlungscharakteristiken sind ebenfalls normiert dargestellt um Unterschiede in der Form klar herauszustellen.

6.4.3 Strahlungscharakteristiken der einzelnen Komponenten

Die Bestrahlung der Neutronensternoberfläche ist in Bild 6.5 dargestellt. Ungefähr 40 % der isotrop emittierten Strahlung und mehr als 90 % der gerichtet emittierten Strahlung treffen auf den Neutronenstern auf.

Die Strahlungscharakteristik kann in die Anteile des Halos und der Säule aufgeteilt werden. Bild 6.6 zeigt die Eigenschaften der Komponenten für Modell 1 mit isotroper Emission. Für den Unterschied zwischen Neutronenstern A und Neutronenstern B ist hauptsäch-

lich die Strahlungscharakteristik der Säule verantwortlich (Bild 6.6a): Im Fall des weniger kompakten Neutronensterns B wird die Säule für Beobachtungswinkel $\theta > 168^\circ$ vom Neutronenstern vollständig verdeckt, so dass die Strahlungscharakteristik auf null absinkt. Die gravitative Lichtablenkung sorgt bei dem kompakteren Neutronenstern A dafür, dass die Säule aus allen Richtungen sichtbar bleibt und von der gegenüberliegenden Seite aus gesehen sogar besonders hell ist, was zu einem Flussmaximum bei $\theta = 180^\circ$ führt. Die Strahlungscharakteristiken der Säule sind für alle hier betrachteten Photonenenergien praktisch gleich.

Der Anteil des Halos (Bild 6.6b) ist deutlich stärker energieabhängig. Ohne Säule wäre die Strahlungscharakteristik ein breiter Pencil-Beam¹ (obere strichpunktierte Linie). Die abgegebene Strahlung wird durch den undurchsichtigen unteren Teil der Säule abgeschattet (untere strichpunktierte Linie) und weiter durch die Streuung im oberen Bereich der Säule abgeschwächt. Die 1 keV-Strahlung wird nicht so sehr abgeschwächt wie die Strahlung bei höheren Energien, da die Streuquerschnitte in einem starken magnetischen Feld für Photonenenergien unterhalb der Zyklotronenergie mit der Photonenenergie zunehmen.

6.4.4 Modell 1: Isotrope Emission

Bild 6.7 zeigt Strahlungscharakteristiken und eine Anzahl typischer Pulsprofile für Modell 1 mit einer isotropen Emission. Die aus Halo und Säule zusammengesetzte Strahlungscharakteristik ist stark energieabhängig (a, b). Das rührt hauptsächlich daher, dass das Emissionsgebiet des Halos, welches deutlich größer und kühler ist als das der Säule, bei niedrigeren Energien überwiegt und bei höheren unbedeutend wird. Die Gesamtstrahlungscharakteristik zweier gegenüberliegender Emissionsgebiete (c, d) ist symmetrisch bezogen auf einen Beobachtungswinkel $\theta = 90^\circ$. Eine signifikante Modulation des Pulsprofils setzt voraus, dass im Verlauf der Rotation der Winkel zwischen magnetischer Achse und Sichtlinie kleiner als etwa 10° wird. Hier gibt es zwei Typen von stark modulierten Pulsprofilen: Wenn ein Ende der magnetischen Achse in die Nähe der Sichtlinie gerät, erhalten wir ein Minimum, eventuell mit einem Nebenpeak; wenn beide Enden der magnetischen Achse in die Nähe der Sichtlinie gelangen, erhalten wir zwei Minima, eventuell ebenfalls mit Nebenpeaks (Bild 6.7e, f). Im Fall des weniger kompakten Neutronensterns B sind die Gesamtstrahlungscharakteristiken (Bild 6.7d) und damit die Pulsprofile (Bild 6.7f) fast energieunabhängig. Die Strahlungscharakteristiken der Einzelregionen sind dagegen stark energieabhängig (Bild 6.7b). Dieser scheinbare Widerspruch kommt wie folgt zustande: Die Beiträge der zwei einander gegenüberliegenden Halos summieren sich zu einem breiten Plateau fast konstanten Flusses. Dasselbe gilt für die Beiträge der beiden Säulen. Die relative Bedeutung der Halo- und Säulenkomponenten hat deswegen keinen Einfluss auf die Form der kombinierten Strahlungscharakteristik. Das gilt aber nur, wenn sich die Säulen genau gegenüberliegen. Als Erklärungsversuch für die Tatsache, dass beobachtete Pulse meist unsymmetrisch sind, wurde in der Literatur mehrfach eine asymmetrische Anordnung der Magnetpole und damit der Säulen vorgeschlagen (Leahy, 1991; Bulik et al., 1992, 1995; Kraus et al., 1995, 1996; Blum und Kraus, 2000). Im Fall einander nicht gegenüberliegender Emissionsregionen wird die Energieabhängigkeit der Strahlungscharakteristik nicht unterdrückt (Bild 6.7g).

¹Pencil-Beam: vom Magnetpol nach oben gebündelte Abstrahlcharakteristik.

6.4 Anwendung: Modell für einen Röntgenpulsar mittlerer Leuchtkraft

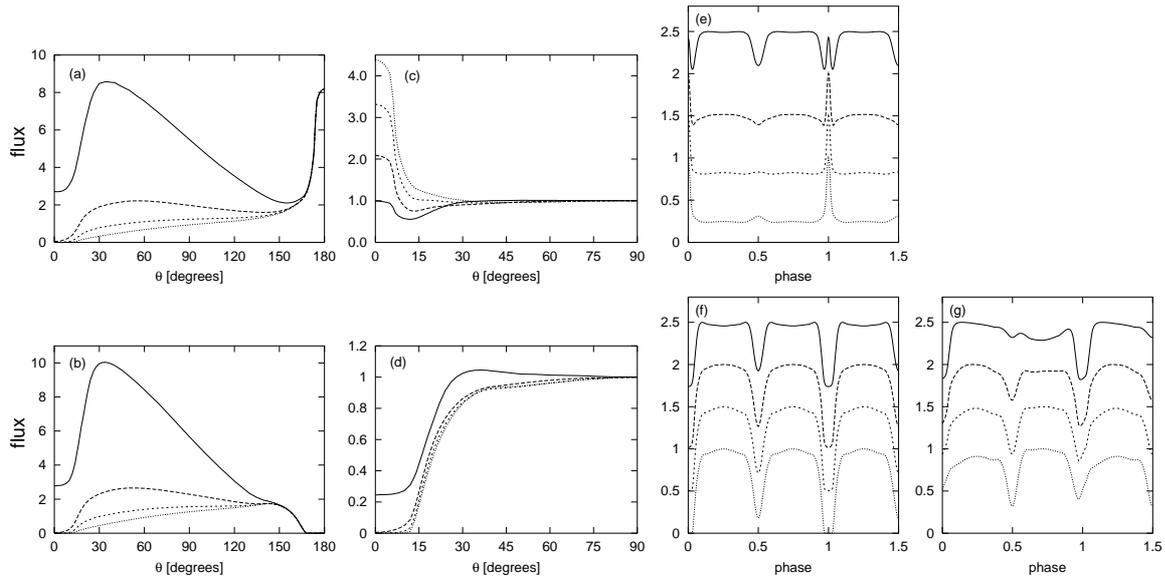


Bild 6.7: Strahlungscharakteristiken und Beispulpulsprofile für Modell 1 (isotrop emittierende Säule) mit Neutronenstern A (oben) oder B (unten). Links: Gesamtstrahlungscharakteristik (Säule plus Halo). Mitte: Überlagerung der Strahlungscharakteristiken der beiden Pole. Die überlagerten Strahlungscharakteristiken sind symmetrisch um $\theta = 90^\circ$. Rechts: Pulsprofile. In allen Fällen: $\Theta_o = 85^\circ$, (e) und (f): einander gegenüberliegende Pole mit $\Theta_m = 80^\circ$, (g): Ein Pol um 20° aus der symmetrischen Lage versetzt mit $\Theta_{m,1} = 80^\circ$, $\Theta_{m,2} = 115^\circ$, $\Delta = 14^\circ$, wobei Δ die Verschiebung in azimuthaler Richtung ist. Die Pulsprofile für die verschiedenen Energien sind in der Höhe jeweils um 0,5 versetzt gezeichnet.

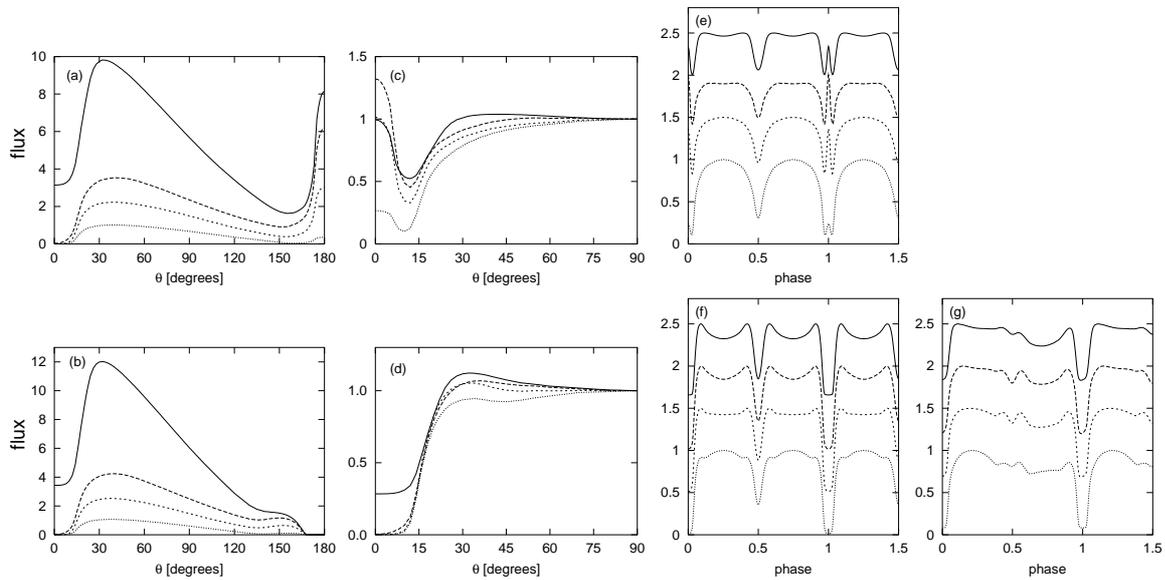


Bild 6.8: Strahlungscharakteristiken und Beispulpulsprofile für Modell 2 (gerichtete Emission der Säule). Es sind die gleichen Größen wie in Bild 6.7 geplottet.

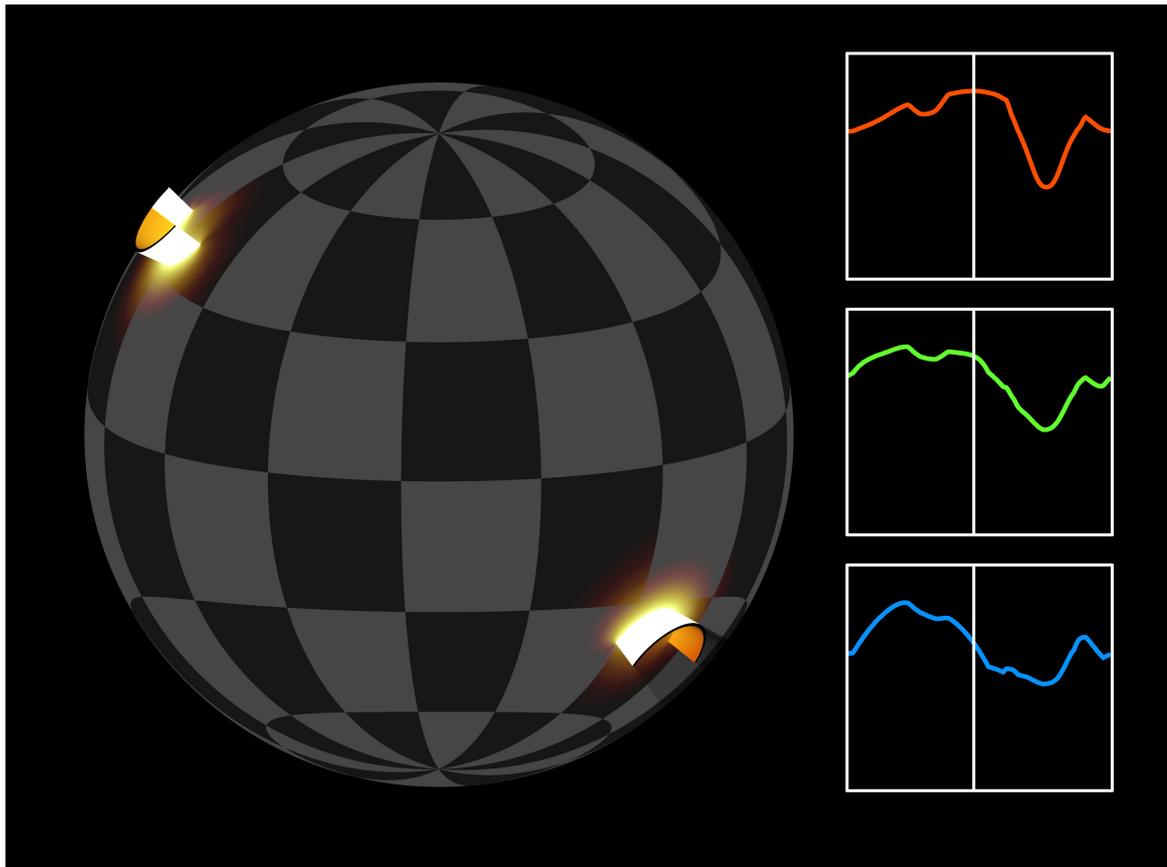


Bild 6.9: Wenn die beiden magnetischen Pole einander nicht genau gegenüberliegen, sind die Pulsprofile asymmetrisch. Die Röntgenstrahlung ist hier im Energiebereich 1,5 – 7,5 keV farbkodiert: niedrige Energie rot, mittlere grün, hohe blau.

6.4.5 Modell 2: Gerichtete Emission

Bild 6.8 zeigt Strahlungscharakteristiken und Pulsprofile für Modell 2, bei dem die Säulenwand bevorzugt nach unten abstrahlt. Die relative Bedeutung des Halos steigt zuerst, um bei höheren Photonenenergien wieder abzusinken. Wieder ist bei dem weniger kompakten Neutronenstern B eine merkliche Energieabhängigkeit nur zu sehen, wenn die Emissionsregionen einander nicht genau gegenüberliegen (Bild 6.8g).

6.5 Zusammenfassung und Ausblick

Relativistische Visualisierungstechniken lassen sich auch für ernsthafte physikalische Anwendungen erfolgreich einsetzen. Der richtungsabhängige Strahlungsfluss einer komplexen Geometrie unter Berücksichtigung von Verdeckungen, Absorptionen, Reemissionen, Streuungen sowie relativistischen Effekten wie Lichtablenkung und Rotverschiebung ist am besten mit vierdimensionalem Raytracing zu erfassen. Viele der beobachteten Pulsprofile sind energieabhängig. Kraus, Zahn, Weth und Ruder (2003) zeigten, wie die Bestrahlung des Neutronensterns durch die Akkretionssäule zu einem Halo um den Fuß der Säule führt und wie aus diesen beiden unterschiedlich heißen Komponenten eine Energieabhän-

gigkeit der Modellpulse resultieren kann.

Interessant ist, dass viele der beobachteten Lichtkurven erstens sehr viel Struktur und eine große Modulation haben und zweitens asymmetrisch sind. Zur Zeit wird untersucht, inwieweit diese Eigenschaften in Modellen mit asymmetrischen Säulenquerschnitten oder mit nicht dipolförmigen Magnetfeldern nachgebildet werden können. Modelle mit asymmetrischen Säulenquerschnitten (z. B. halbkreis- oder sichelförmig) folgen aus Überlegungen über die Art und Weise, wie Materie vom inneren Akkretionsscheibenrand auf die zum Stern führenden Magnetfeldlinien gelangt. Abweichungen des Magnetfeldes von der Dipolform sind auch bei anderen Himmelskörpern bekannt, wie z. B. der Erde. Über die Mechanismen der Entstehung bzw. der Erhaltung der Neutronensternmagnetfelder ist allerdings wenig bekannt, so dass hier nur der Einfluss kleiner „Versetzungen“ der Magnetpole, die jeweils „ihre Hälfte“ eines Dipolfeldes tragen, untersucht wird. Ein Beispiel für einander nicht gegenüberliegende Säulen mit sichelförmigem Querschnitt zeigt Bild 6.9.

Es ist weiter geplant, Modelle zu untersuchen, bei denen die Streuung im oberen Akkretionsstrom, auch der anderen Säule, einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Strahlungscharakteristik haben könnte. Bei solchen komplexen dreidimensionalen, aus vielen Komponenten bestehenden Emissionsregionen ist es noch wichtiger, beliebige geometrische Konstruktionen aufbauen zu können, so dass der relativistische Raytracer auch hier das Werkzeug der Wahl bleiben wird.

Teil II
Grundlagen

7 Grundlagen

7.1 Mathematische Grundbegriffe der allgemeinen Relativitätstheorie

Dieses Kapitel erhebt nicht den Anspruch auf mathematische Strenge oder Vollständigkeit. Es soll nur die wichtigsten Begriffe einführen und kurz erläutern.

7.1.1 Notation

Ich verwende eine an Misner, Thorne und Wheeler (1973) angelehnte Schreibweise:

Allgemeine Mengen:	\mathbf{M}, \mathbf{V}
Menge der reellen Zahlen:	\mathbf{R}
Punkte einer Mannigfaltigkeit:	\mathcal{P}, \mathcal{Q}
Vektor, 1-Form, Tensor:	x, ω, T
Komponenten Vektor, 1-Form, Tensor, Dimension d :	$x^i, \omega_i, T^i_k \quad (i, k = 0 \dots d - 1)$
Komponenten Vektor, 1-Form, Tensor, Dimension 4:	$x^\alpha, \omega_\alpha, T^\alpha_\beta \quad (\alpha, \beta = 0 \dots 3)$
Skalar- oder inneres Produkt:	$\langle u, v \rangle$
Kovariante Ableitung von v :	∇v
Kovariante Ableitung von v in Richtung u :	$\nabla_u v$
Äußere Ableitung eines Skalarfeldes f :	df
Äußere Ableitung eines Vektorfeldes u :	du

Für Vektorkomponenten bzw. ihre Indizes in einer Koordinatenbasis verwende ich häufig auch die Bezeichnungen der entsprechenden Koordinaten, z. B. $x^t, x^r, x^\theta, x^\phi$ oder direkt t, r, θ, ϕ statt x^0, x^1, x^2, x^3 .

Soweit nicht anders erwähnt, werden geometrische Einheiten verwendet. D. h. die Lichtgeschwindigkeit c und die Gravitationskonstante G werden auf eins gesetzt. Ich verwende die Signatur $(-, +, +, +)$.

Bei der Beschreibung dimensionsunabhängiger Algorithmen und Datenstrukturen bezeichnet d die Dimension der gesamten Raumzeit, d_s bzw. d_t ist die Anzahl der räumlichen bzw. zeitlichen Dimensionen. Dabei ist $1 \leq d_s \leq 3$ und $0 \leq d_t \leq 1$.

7.1.2 Raumzeit

Die Raumzeit wird als vierdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathbf{M} beschrieben. Sie kann durch eine Menge verträglicher *Karten*, einen *Atlas*, überdeckt werden. Eine Karte (\mathbf{V}, Φ) ist ein Homöomorphismus Φ einer offenen Menge \mathbf{V} aus \mathbf{M} auf eine offene Menge des \mathbf{R}^m , wobei m die Dimension der Mannigfaltigkeit ist.

7.1.3 Koordinatensysteme

In der Physik wird für *Karte* auch der Ausdruck *Koordinatensystem* verwendet. Ein Koordinatensystem ist also eine Abbildung, die jedem Punkt \mathcal{P} der Raumzeit ein Quadrupel

7 Grundlagen

$x^\alpha(\mathcal{P})$ zuordnet. Es wird nicht gefordert, dass ein Koordinatensystem die ganze Mannigfaltigkeit abdeckt. Zum Beispiel ist es nicht möglich, eine Kugeloberfläche mit nur einer Karte singularitätsfrei abzudecken. Man muss nur verlangen, dass der Übergang von einer Karte zu einer anderen eine stetig differenzierbare Bijektion ist.

7.1.4 Tangentialraum

An jeden Punkt \mathcal{P}_0 der Raumzeit \mathbf{M} kann ein sogenannter *Tangentialraum*, ein vierdimensionaler Vektorraum \mathbf{V} „angeheftet“ werden.

In ihm ist der Tangentenvektor zu einer Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$ durch \mathcal{P}_0 definiert:

$$\mathbf{u} := \partial_{\mathbf{u}} = (d/d\lambda)_{\text{längs der Kurve } \mathcal{P}(\lambda)}.$$

Nach Einführung einer Basis \mathbf{e}_α kann jeder Vektor in Komponenten bezüglich dieser Basis zerlegt werden:

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

7.1.5 Dualraum

Der *Dualraum* \mathbf{V}^* zu einem Vektorraum \mathbf{V} ist die Menge der linearen Abbildungen

$$\varphi : \mathbf{V} \mapsto \mathbf{R}.$$

φ heißt auch *1-Form*. Sie kann ebenfalls in einer Basis, ω^α , dargestellt werden:

$$\varphi = \varphi_\alpha \omega^\alpha.$$

7.1.6 Koordinatenbasis

Eine oft verwendete Basis für \mathbf{V} besteht aus den Tangentenvektoren \mathbf{e}_α an die Koordinatenlinien:

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Die dazu duale Basis ω^α von \mathbf{V}^* ist

$$\omega^\alpha = dx^\alpha.$$

Sie ist mit \mathbf{e}_α durch

$$\omega^\alpha(\mathbf{e}_\beta) = \delta_\beta^\alpha$$

verknüpft.

7.1.7 Tensoren

Tensoren sind multilineare Abbildungen:

$$\mathbf{T} : \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \times \cdots \times \mathbf{V}^* \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \cdots \times \mathbf{V} \mapsto \mathbf{R}.$$

Ein Tensor kann ebenfalls in einer Basis dargestellt werden, z. B. ein Tensor zweiter Stufe:

$$\mathbf{T} = T^\alpha_\beta \mathbf{e}_\alpha \otimes \omega^\beta.$$

7.1.8 Metrik

Um in der Raumzeit Abstände und Winkel messen zu können, benötigen wir ein *inneres Produkt* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ von zwei Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} . Dies ist über den *metrischen Tensor* $\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta$ definiert:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta. \quad (7.1)$$

Das *Linielement* ist definiert als

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (7.2)$$

7.1.9 Tetraden

Für lokale Berechnungen ist es günstig, ein lokales Orthonormalsystem, eine sogenannte *Tetrade*, zu verwenden. Die von einem Koordinatensystem mit einer diagonalen Metrik $g_{\alpha\beta}$ induzierte Tetrade ist:

$$\mathbf{e}_\alpha = |g_{\alpha\alpha}|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (7.3)$$

$$\boldsymbol{\omega}^\alpha = |g_{\alpha\alpha}|^{1/2} dx^\alpha. \quad (7.4)$$

7.1.10 Paralleltransport und kovariante Ableitung

Will man die Ableitung eines Vektor- oder Tensorfeldes $\mathbf{v}(\mathcal{P})$ bestimmen, so muss man die Differenz zweier Vektoren bilden, die an *verschiedenen* Punkten der Raumzeit sitzen. Zwei solche Vektoren können aber nicht unmittelbar miteinander verglichen werden, da sie Elemente verschiedener Tangentialräume sind.

Der eine Vektor muss zuerst längs einer Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$ zum Ort des anderen Vektors *paralleltransportiert* werden. Die *kovariante Ableitung* des Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathcal{P})$ in Richtung des Tangentenvektors $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ an die Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$ ist dann:

$$(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_{\mathcal{P}(0)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbf{v}[\mathcal{P}(\varepsilon)]_{\text{nach } \mathcal{P}(0) \text{ paralleltransportiert}} - \mathbf{v}[\mathcal{P}(0)]}{\varepsilon} \right\}.$$

Paralleltransport bedeutet, dass in einem lokalen Lorentzsystem die Komponenten des Vektors bei einer Verschiebung unverändert bleiben.

Wie sich ein System von Basisvektoren bei einer infinitesimalen Verschiebung verändert, wird durch die sogenannten *Christoffelsymbole* $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ beschrieben:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \nabla_\gamma \mathbf{e}_\beta \rangle. \quad (7.5)$$

Die Christoffelsymbole lassen sich aus der Metrik berechnen:

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \quad (7.6)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\beta\gamma}.$$

Die kovariante Ableitung in Komponentenschreibweise ist dann z. B. für einen Tensor zweiter Stufe:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{T} = (T^\alpha_{\beta;\gamma} u^\gamma) \mathbf{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta$$

7 Grundlagen

mit

$$T^{\alpha}_{\beta;\gamma} = T^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} T^{\mu}_{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} T^{\alpha}_{\mu}.$$

Eine andere Schreibweise für die kovariante Ableitung in Komponenten ist

$$T^{\alpha}_{\beta;\gamma} u^{\gamma} = \frac{D T^{\alpha}_{\beta}}{d\lambda}.$$

7.1.11 Geodäten

Eine Geodäte ist eine Kurve $\mathcal{P}(\lambda)$, die ihren Tangentenvektor $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ längs sich selbst paralleltransportiert:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0. \quad (7.7)$$

In Komponenten, bezogen auf ein Koordinatensystem $x^{\alpha}(\mathcal{P})$, in dem $u^{\alpha} = dx^{\alpha}/d\lambda$ ist, gilt:

$$\frac{D(dx^{\alpha}/d\lambda)}{d\lambda} = \frac{d(dx^{\alpha}/d\lambda)}{d\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \frac{dx^{\gamma}}{d\lambda} = 0,$$

oder kurz mit $\dot{x}^{\alpha} = dx^{\alpha}/d\lambda$:

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = 0. \quad (7.8)$$

Dies sind die für das Raytracing grundlegenden Gleichungen, da sich das für die Fotografie erforderliche Licht längs solcher Geodäten ausbreitet (Abschnitt 7.1.12). Es sind vier gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich außer für den trivialen Fall $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ im Allgemeinen nicht analytisch lösen lassen.

7.1.12 Lichtausbreitung

Licht breitet sich im Vakuum auf sogenannten *Nullgeodäten* aus, d. h. der Tangentenvektor \mathbf{u} an die Geodäte ist ein Nullvektor ($\mathbf{u}^2 = 0$). Der Verlauf der Photonenbahn wird durch die Geodätengleichung (Gleichung (7.8)) bestimmt.

Die Energie eines Photons mit dem Vierer-Energieimpulsvektor \mathbf{p} ist gemessen im Bezugssystem eines sich mit der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} fortbewegenden Beobachters

$$E_{\text{Photon}} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle. \quad (7.9)$$

Im Ruhesystem des Beobachters ist $E_{\text{Photon}} = p^0$. Die Frequenz des Lichts ist $\nu = E_{\text{Photon}}/h$.

Zwei Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 , die ein vorbeifliegendes Photon betrachten, messen ein Frequenzverhältnis

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{u}_2 \rangle}.$$

7.1.13 Riemanntensor

Der Riemanntensor \mathbf{R} beschreibt die relative Beschleunigung benachbarter Geodäten und damit auch die durch Gravitation verursachten *lokalen* Kräfte und Spannungen innerhalb eines ausgedehnten Körpers, die sogenannten *Gezeitenkräfte*.

Man betrachte eine Schar von Geodäten $\mathcal{P}(\lambda, n)$ (n ist der Scharparameter). Mit

$$\mathbf{u} = \partial\mathcal{P}/\partial\lambda \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \partial\mathcal{P}/\partial n$$

gilt für die relative Beschleunigung eines benachbarten Testteilchens $\nabla_u \nabla_u \mathbf{n}$:

$$\nabla_u \nabla_u \mathbf{n} + \mathbf{R}(\dots, \mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0,$$

in Komponenten:

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta n^\gamma u^\delta = 0.$$

Die Komponenten von \mathbf{R} lassen sich aus den Christoffelsymbolen berechnen:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma} \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta} \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}. \quad (7.10)$$

7.1.14 Einsteinsche Feldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen dem Energieimpulstensor und der Metrik der Raumzeit:

$$\mathbf{G} = 8\pi \mathbf{T}. \quad (7.11)$$

\mathbf{G} ist der *Einsteintensor*, dessen Komponenten $G_{\mu\nu}$ aus dem Riemannstensor \mathbf{R} berechnet werden:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R, \quad (7.12)$$

wobei

$$R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} \quad \text{und} \quad R = R^\mu{}_\mu.$$

Der Energieimpulstensor \mathbf{T} hängt so über $\mathbf{T} \leftrightarrow \mathbf{G} \leftrightarrow \mathbf{R} \leftrightarrow \Gamma \leftrightarrow \mathbf{g}$ mit der Metrik \mathbf{g} zusammen.

7.2 Die Schwarzschildmetrik

Die Schwarzschildmetrik beschreibt die Raumzeitgeometrie um eine kugelsymmetrische Massenverteilung und wurde als erste exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen von Schwarzschild (1916) kurz nach der Veröffentlichung von Einsteins Arbeit zur allgemeinen Relativitätstheorie angegeben.

7.2.1 Metrik

Die Metrik im Außenraum des Zentralkörpers ist ausschließlich durch dessen Gesamtmasse M bestimmt. Das Linienelement dieser Metrik lautet in den üblichen Koordinaten:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (7.13)$$

Die t -Koordinate gibt die Eigenzeit eines im Unendlichen sitzenden Beobachters an. Die r -Koordinate ist durch den Umfang $2\pi r$ eines Kreises bzw. die Oberfläche $4\pi r^2$ einer Kugelschale um den Koordinatenursprung bestimmt. Die θ - und ϕ -Koordinaten sind Winkelkoordinaten auf dieser Sphäre. Die Metrik ist unabhängig von t .

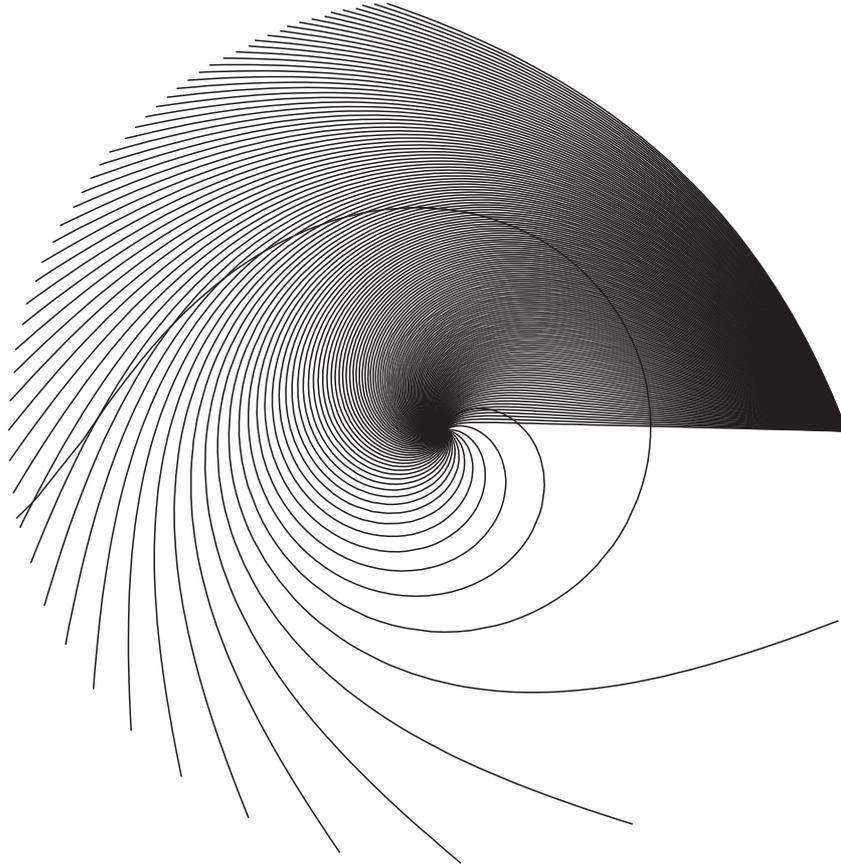


Bild 7.1: Photonenbahnen in der Schwarzschildmetrik.

7.2.2 Lichtausbreitung

Licht breitet sich längs Geodäten aus (Gleichung (7.8)). Nach Einsetzen der in Abschnitt 12.6, S. 162 angegebenen Christoffelsymbole erhalten wir für die Photonenbahnen folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \ddot{t} &= -\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{t}^2 \\
 \ddot{r} &= -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \\
 &\quad + (r - 2M) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \\
 \ddot{\theta} &= -\frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\
 \ddot{\phi} &= -\frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} - 2 \cot \theta \dot{\phi} \dot{\theta}.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

In Bild 7.1 sind einige Photonenbahnen dargestellt. Die Lichtquelle befindet sich bei $r = 6M$. Wir erkennen, dass es zwei Klassen von Bahnen gibt, solche, die sich dem Stern bis

zu einem Umkehrpunkt nähern, um dann ins Unendliche zu entweichen, und solche, die im Koordinatenursprung enden. Die Grenzlinie liegt bei $r = 3M$. Dort sind für Photonen (instabile) Kreisbahnen möglich.

7.3 Das Morris-Thorne-Wurmloch

Wurmlöcher sind durchquerbare Verbindungen zwischen zwei Universen oder zwischen zwei entfernten Regionen eines Universums. In Science-Fiction-Romanen werden sie daher gerne für Reisen zu außerirdischen Kulturen verwendet. Die im Folgenden beschriebenen Wurmlöcher sind exakte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen; sie wurden von K. Thorne entwickelt, um dem Roman *Contact* von C. Sagan (Sagan, 1985) eine wissenschaftliche Basis zu geben (die Geschichte dieser Entwicklung wird in Thorne (1994) erzählt).

7.3.1 Metrik und Topologie

Morris und Thorne (1988) beschreiben ein Wurmloch als Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen mit der Metrik

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (7.15)$$

Der Wertebereich von l ist $-\infty \dots +\infty$. Die beiden Vorzeichen von l repräsentieren die beiden Universen, die für große $|l|$ eine flache Minkowskigeometrie annehmen. Die Fläche $l = 0$ (sphärische Topologie) verbindet die beiden Universen. Ihre Oberfläche wird durch den sogenannten *Schlundradius* b_0 bestimmt.

7.3.2 Energieimpulstensor

In einer Orthonormalbasis $(\hat{t}, \hat{l}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ sind die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Riemantensors

$$R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = -R_{\hat{\phi}\hat{l}\hat{\phi}} = b_0^2 / (b_0^2 + l^2)^2$$

sowie die aus Symmetrien folgenden Komponenten. Durch Einsetzen der Metrik in die Feldgleichungen erhalten wir den Energieimpulstensor:

$$-T^{\hat{t}\hat{t}} = -T^{\hat{l}\hat{l}} = T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = 8\pi b_0^2 / (b_0^2 + l^2)^2.$$

Er hat die unangenehme Eigenschaft, dass die Energiedichte $T^{\hat{t}\hat{t}}$ negativ ist, was eine technische Realisierbarkeit bzw. ein natürliches Vorkommen nach heutigem Stand der Wissenschaft ausschließt.

Nichtsdestotrotz ist diese Metrik als nichttriviales Beispiel einer Lösung der Einsteinschen Gleichungen interessant. In dieser Arbeit wurde sie als Untersuchungsobjekt für den relativistischen Flugsimulator (Kapitel 3, S. 27) gewählt. Für weitere Visualisierungen sowie Erklärungen der Lichtwege siehe auch Müller (2004).

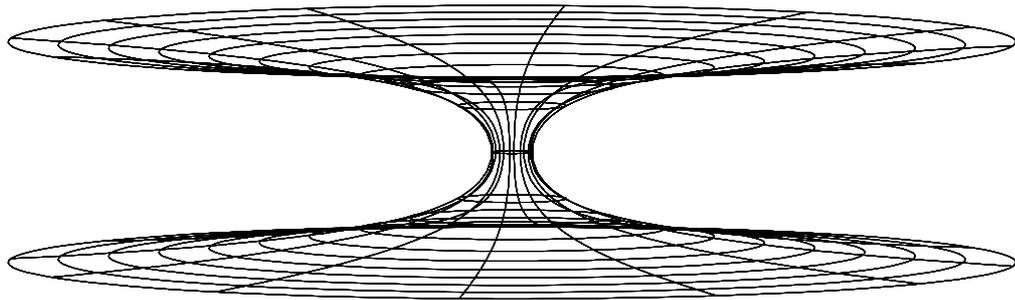


Bild 7.2: Einbettungsdiagramm der Äquatorfläche eines Wurmlochs. Schlundradius $b_0 = 2$, die Koordinate l ist von $-50 \dots +50$ dargestellt.

7.3.3 Einbettungsdiagramm

Aufgrund der sphärischen Symmetrie kann man die wesentlichen Eigenschaften der Metrik sowie den Verlauf von Lichtstrahlen beschreiben, wenn man eine zweidimensionale Ebene durch den Ursprung betrachtet und diese in einen dreidimensionalen euklidischen Raum einbettet. Die räumliche Metrik in der Äquatorebene lautet

$$ds^2 = dl^2 + (b_0^2 + l^2)d\phi^2.$$

Mit

$$r = \sqrt{b_0^2 + l^2}$$

besteht die Einbettungsfläche (Bild 7.2) aus den Punkten mit den kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= b_0 \log \left[\frac{r}{b_0} + \sqrt{\left(\frac{r}{b_0}\right)^2 - 1} \right] \cdot \begin{cases} -1: & l < 0 \\ 0: & l = 0 \\ +1: & l > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

7.4 Regge-Calculus

7.4.1 Die Regge-Zerlegung

Der von Regge entwickelte Regge-Calculus (Regge, 1961; Misner, Thorne und Wheeler, 1973, S. 1166) ist eine Methode zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen und resultiert in einer koordinatenfreien, nur auf messbaren Abständen beruhenden Beschreibung der Raumzeit.

Er basiert auf der approximativen Zerlegung einer d -dimensionalen gekrümmten Mannigfaltigkeit in ungekrümmte Teilsektoren. Ein Beispiel in zwei Dimensionen wäre die Zerlegung einer gekrümmten Fläche in ein Netz aus Dreiecken. Eine Zerlegung in simpliziale Elemente (Dreiecke, Tetraeder, ...) bietet den Vorteil, dass die einzelnen Elemente durch

ihre Kantenlängen bestimmt sind, ist aber nicht notwendig, wenn die Form durch weitere Bedingungen wie die Angabe der Eckwinkel oder Symmetrieeigenschaften festgelegt werden kann. Im Projekt *Wir basteln ein Schwarzes Loch* wird der gekrümmte Raum um ein Schwarzes Loch beispielsweise in Pyramidenstümpfe zerlegt.

O. B. d. A. wird im Folgenden von einer *Triangulierung*, einer Zerlegung in *Simplizes* ausgegangen. Ein Simplex ist eine Verallgemeinerung des zweidimensionalen Dreiecks und des dreidimensionalen Tetraeders auf n Dimensionen: Ein n -Simplex ist die konvexe Hülle von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten. Für die Dimensionen 0 bis 3 sind die n -Simplizes:

n	n -Simplex
0	Punkt
1	Liniensegment
2	Dreieck
3	Tetraeder

Dies kann für höhere Dimensionen fortgesetzt werden. Man sagt: Die $n + 1$ Punkte spannen einen n -Simplex auf.

Die innere Geometrie der Zerlegung einer Mannigfaltigkeit in Simplizes (im Folgenden *Regge-Zerlegung* genannt) ist vollständig bestimmt, wenn man die Nachbarschaftsbeziehungen der einzelnen Elemente sowie die Längen aller Kanten kennt.

Im Gegensatz zu einer glatten differenzierbaren Mannigfaltigkeit konzentriert sich in einer Regge-Zerlegung die Krümmung in $(d - 2)$ -dimensionalen Unterräumen (genannt „Bones“ oder „Hinges“). Dazwischen ist der Raum ungekrümmt. Hervorzuheben ist, dass der Raum an den $(n - 1)$ -dimensionalen Grenz-„flächen“ zwischen zwei n -Simplizes ebenfalls ungekrümmt ist, was bei der Bestimmung von Geodäten wichtig ist (s. u.). Dies äußert sich darin, dass ein Paralleltransport längs einer geschlossenen Kurve einen Vektor unverändert lässt, wenn diese Kurve keinen der die Krümmung „tragenden“ Hinges umschließt. Im allgemeinen Fall wird ein Vektor um die Summe der Defizitwinkel aller von der Kurve umschlossenen Hinges gedreht.

Approximiert man beispielsweise eine zweidimensionale Fläche durch ein Dreiecksnetz, dann können die um einen Vertex (die Vertices spielen hier die Rolle der $(d - 2)$ -dimensionalen Hinges) herum angeordneten Dreiecke im Allgemeinen nicht in einer Ebene ausgebreitet werden, ohne das Netz an einer Kante aufzuschneiden (Bild 7.3). Der am Vertex \mathcal{P} entstehende *Defizitwinkel* ϵ ist die Differenz der Summe der Innenwinkel aller an diesen Vertex anschließenden Dreiecke zu 2π . Ein Paralleltransport eines Vektors längs einer geschlossenen Kurve um diesen Vertex herum dreht den Vektor genau um ϵ . Defizitwinkel sind in dem Sinne additiv, dass ein Paralleltransport um mehrere Vertices einen Vektor um die Summe der Defizitwinkel dreht.

Ist im Kontinuumslimit die Flächendichte der Vertices ρ und der mittlere Defizitwinkel pro Vertex $\bar{\epsilon}$ kann man einer Fläche A einen Gesamtdefizitwinkel $A\rho\bar{\epsilon}$ zuordnen. Um diesen Winkel wird ein längs des Randes um die Fläche paralleltransportierter Vektor gedreht.

Zwei links und rechts von einem Vertex vorbeilaufende Geodäten (hier einfach Geraden) ändern ihre Richtung zueinander ebenfalls genau um ϵ .

Der Zusammenhang zwischen der so über den mittleren Defizitwinkel pro Flächeneinheit definierten geodätischen Abweichung mit der Formulierung im Kontinuum mittels des Riemantensors wird von Chakrabarti et al. (1999) beschrieben.

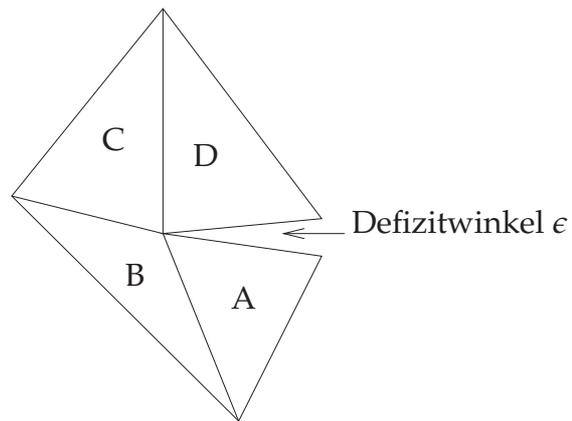


Bild 7.3: Defizitwinkel an einem Vertex.

7.4.2 Geodäten

Eine Geodäte in einer Regge-Zerlegung ist einfach eine Gerade, vorausgesetzt sie trifft keinen Hinge. Sie durchläuft nur ungekrümmten euklidischen Raum (bzw. Lorentzsche Raumzeit). Zwei benachbarte d -dimensionale Simplizes haben eine $(d - 1)$ -dimensionale Randfläche gemeinsam. Beim Übergang einer Geodäte von einem Simplex zu dem Nachbarsimplex können beide Simplizes in einen gemeinsamen euklidischen Raum eingebettet werden; die Geodäte kann geradlinig über die Randfläche fortgesetzt werden (Abschnitt 9.8 *Geodäten in Regge-Raumzeiten*, S. 137).

Williams und Ellis (1981; 1984) zeigten, dass diese Methode im Prinzip genau genug ist, um beispielsweise die relativistische Periheldrehung des Merkur zu berechnen. Weitere Arbeiten, die sich mit dieser Methode beschäftigen sind Brewin (1993) und Chakrabarti et al. (1999).

Teil III
Methoden

8 d -dimensionales Raytracing

Um von einer vorgegebenen dreidimensionalen Szene ein zweidimensionales fotorealistisches, d. h. einer fotografischen Aufnahme gleichendes Bild zu erhalten, wird in der Computergrafik gern das sogenannte *Raytracingverfahren* angewandt. Für relativistische Visualisierungen gilt es, dieses auf vierdimensionale, ggf. *gekrümmte* Raumzeiten zu erweitern.

8.1 Das Prinzip

Raytracing ist eine Abbildung der Filmfläche auf die darzustellenden Objekte. D. h. zu jedem Punkt der Filmfläche wird die Herkunft eines dort auftreffenden Lichtstrahls gesucht.

Dazu wird die Filmfläche in einzelne Pixel aufgeteilt. Zu jedem Pixel bestimmt man dann den Richtungsvektor des Lichtstrahls, der durch das Objektiv auf diesen Punkt trifft. Dieser Richtungsvektor wird nun von der Kameraposition aus rückwärts verfolgt, bis entweder ein Objekt getroffen wird oder man wieder so weit von der darzustellenden Szene entfernt ist, dass kein Treffer mehr möglich ist. Bei einem Treffer erhält das Pixel, von dem man gestartet ist, die Farbe des Objekts am Auftreffpunkt, eventuell noch modifiziert durch Dopplereffekt und Absorption im durchlaufenen Medium. Zur Berechnung von Schattenwurf und Beleuchtung werden von dem Auftreffpunkt noch weitere Strahlen zu den die Szene beleuchtenden Lichtquellen gesandt.

In „normalen“ Computergrafikanwendungen kann die Lichtlaufzeit im Vergleich zu den Bewegungen der Objekte bzw. der Kamera vernachlässigt werden. Es genügt daher im dreidimensionalen Raum die Schnittpunkte der Lichtstrahlen mit statischen Objekten zu suchen.

In relativistischen Szenarien, in denen Objekt- und Kamerageschwindigkeiten in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit rücken, spielen die Relativitätstheorie sowie Lichtlaufzeiteffekte eine große Rolle (die „Dauer“ – Eigenzeit an der Sternoberfläche – eines Gravitationskollapses beispielsweise liegt in der gleichen Größenordnung wie die Lichtlaufzeit durch das System).

Die Lösung ist einfach: Wir nehmen die Zeitdimension hinzu und betreiben das Raytracing in einer jetzt statischen vierdimensionalen raumzeitlichen Szene. Mit „statisch“ ist gemeint, dass die vierdimensionale Beschreibung der Szene als Ansammlung von Weltröhren im Gegensatz zur dreidimensionalen Darstellung nicht mehr die Funktion eines *äußeren* Parameters (der Zeit) ist. Gesucht sind also die Schnittpunkte der in die Vergangenheit zurückverfolgten Weltlinien der Photonen mit den Weltröhren der darzustellenden Objekte. Für eine zweidimensionale Raumzeit ist dies in Bild 8.1 dargestellt. Das Ereignis A auf der Weltlinie der Kamera ist der Empfang eines Photons, dessen Emission beim beobachteten Objekt das Ereignis A' darstellt.

In einem flachen Raum bzw. einer flachen Raumzeit ist es möglich, diese Schnittpunkte mit Methoden der linearen Algebra bzw. der projektiven Geometrie direkt zu berechnen. In einer gekrümmten Raumzeit dagegen müssen wir die Photonenbahnen durch Integration der Geodätengleichung bestimmen.

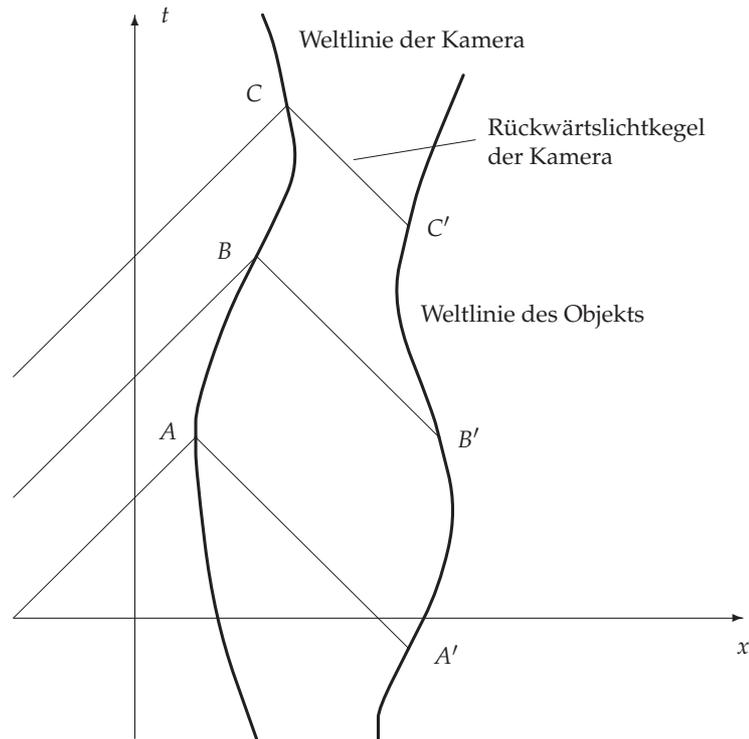


Bild 8.1: Raytracing in einer zweidimensionalen Raumzeit.

Zur Berechnung dieser Photonenbahnen werden in den einzelnen Projekten verschiedene Verfahren eingesetzt:

In den Projekten *Rollende Räder* (Kapitel 2, S. 17), *Wir basteln ein Schwarzes Loch* (Kapitel 4, S. 49, Bild 4.15) sowie *Röntgenpulsare* (Kapitel 6, S. 85) wird ein Geodäten integrierendes vierdimensionales Raytracingprogramm verwendet (Weiterentwicklung von Zahn, 1991). In diesen nichtinteraktiven Anwendungen liegt der Schwerpunkt eher auf genauen, hochaufgelösten Bildern als auf einer kurzen Rechenzeit.

Beim Projekt *Relativistischer Flugsimulator* (Kapitel 3, S. 27) ist es genau umgekehrt; eine extrem schnelle Bildberechnung ist für die Interaktivität zwingend notwendig, bei der Bildqualität dagegen können Abstriche gemacht werden.

Ein neu entwickeltes Verfahren ermöglicht es dabei, die aufwendige Integration der Geodätengleichung zu vermeiden. Dazu wird die Raumzeit durch eine Menge flacher Simplexes approximiert (Abschnitt 7.4 *Regge-Calculus*, S. 110). Dies erlaubt es wieder, zumindest innerhalb eines Simplexes, mit klassischen linearen Computergrafikmethoden zu arbeiten. Beim Übergang von einem Simplex zu seinem Nachbarsimplex müssen dann die Koordinaten mit einer linearen Koordinatentransformation in das Nachbarkoordinatensystem transformiert werden.

Da für eine halbwegs brauchbare Genauigkeit die Unterteilung in Simplexes recht fein sein muss, ein Lichtstrahl also je nach „Sichtweite“ bis zu einige hundert Simplexes durchqueren muss, ist bei der Implementierung dieser Koordinatentransformation von Simplex zu Simplex auf die Laufzeit besonders zu achten (Kapitel 11 *Implementierung des relativistischen Flugsimulators*, S. 147).

In den nächsten Abschnitten möchte ich die Einzelheiten der von mir entwickelten Ver-

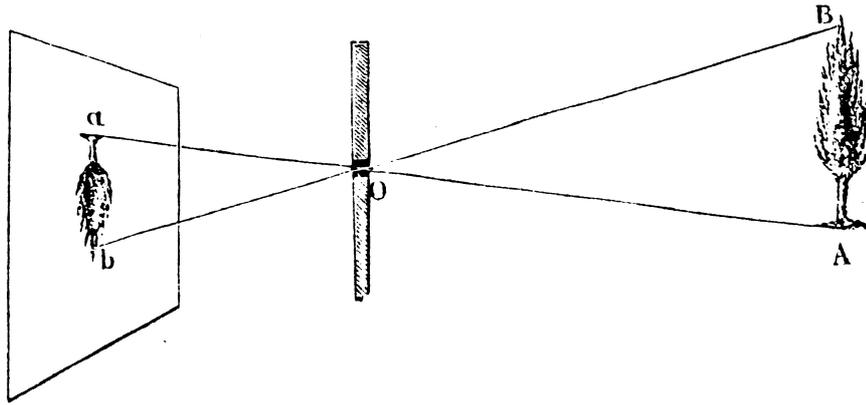


Bild 8.2: Das Prinzip einer Lochkamera (Bildquelle: Husmann, 1898, S. 170).

fahren etwas genauer darstellen. Das Grundprinzip ist für den integrierenden Raytracer und für den Regge-Raytracer identisch, auf Unterschiede wird an gegebener Stelle hingewiesen.

Der integrierende Raytracer wurde für vierdimensionale Raumzeiten mit Minkowski- oder Schwarzschildmetrik entwickelt. Er beherrscht relativistisch bewegte (auch rotierende) Objekte und Schattenberechnung. Der Regge-Raytracer ist so konzipiert, dass er mit Raumzeiten unterschiedlicher Dimension und Signatur umgehen kann. Als Testwelten wurden bisher Räume (ohne Zeitdimension) mit zwei und drei Raumdimensionen untersucht.

Im Folgenden bezeichnet d die Dimension der gesamten Raumzeit, d_s bzw. d_t ist die Anzahl der räumlichen bzw. zeitlichen Dimensionen. Dabei ist $1 \leq d_s \leq 3$ und $0 \leq d_t \leq 1$.

8.2 Das Verfahren im Einzelnen

8.2.1 Die Kamera

Als Kamera verwenden wir eine Lochkamera. Vor dem Film ist im Abstand der Brennweite b eine Lochblende angebracht (Bild 8.2). Die Dimension des Films ist $d_s - 1$, d. h. der Film ist eindimensional in einem zweidimensionalen Raum und zweidimensional in einem dreidimensionalen Raum.

Um die Lichtstrahlen in der Kamera zu beschreiben, führen wir ein lokales kartesisches (Minkowski-)Koordinatensystem ein. Für $d_s = 3$ gilt: Der Film (Größe in dimensionslosen Einheiten: 1×1) liegt in der x - y -Ebene ($-0,5 \leq x \leq +0,5$, $-0,5 \leq y \leq +0,5$) und das Objektiv (Loch) auf der z -Achse im Punkt $(0, 0, b)$, wobei b die Kamerabrennweite ist. Oft wird auch ein Seitenverhältnis von 4:3 verwendet. Das Pixel auf der Filmebene mit den Koordinaten (x, y) wird von einem Lichtstrahl mit dem Richtungsvektor $\vec{k}' = (x, y, -b)$ getroffen. Für $d_s = 2$ lassen wir eine Raumdimension weg.

Wir normieren den so berechneten Richtungsvektor \vec{k}' auf 1 und ergänzen ihn für $d_t > 0$ um die $k^{0'}$ -Komponente 1 zu einem 4-Vektor k' . Dieser Vektor k' ist dann der Wellenvektor eines Photons ($k'^2 = 0$) mit der Frequenz $\omega = k^{0'} = 1$ und dem räumlichen Richtungsvek-

tor, der durch das Objektiv in Richtung auf das gewünschte Pixel zeigt. Er kann somit als Tangentenvektor

$$\mathbf{k}' = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \lambda}$$

an die zu dem zu berechnenden Bildpixel führende Photonenbahn $\mathcal{P}(\lambda)$ dienen. Seine Komponenten im Kamerakoordinatensystem sind $k^{\alpha'}$.

8.2.2 Der Beobachter

Als nächstes müssen wir festlegen, wann und von wo aus die Aufnahme gemacht werden soll. Wir geben in einem geeigneten globalen Koordinatensystem die Kameraposition x_K^α , die Kamerageschwindigkeit v_K sowie die Kameraausrichtung vor.

Im Regge-Raytracer werden diese Startwerte in Simplexkoordinaten umgerechnet (Abschnitt 9.7.4, S. 132).

8.2.3 Die Photonenbahn

Um die Herkunft des Photons zu ermitteln, müssen wir die Geodätengleichung für $x^\alpha(\lambda)$

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0$$

mit den Anfangswerten

$$\lambda_0 = 0, \quad x_0^\alpha = x_K^\alpha \quad \text{und} \quad \dot{x}_0^\alpha = k^\alpha$$

zu negativen Bahnparametern hin integrieren, bis die Weltlinie $x^\alpha(\lambda)$ des Photons die Weltlinie eines Objekts schneidet.

Integrierender Raytracer: Da die Integration der Geodätengleichung für jedes Pixel sehr aufwendig ist, werden die möglichen Photonenbahnen im Vorfeld berechnet und tabelliert. Der integrierende Raytracer ist für die Schwarzschildmetrik optimiert, so dass diese Tabelle aufgrund der Kugelsymmetrie der betrachteten Metrik nur zweidimensional ist. Aus der Tabelle werden die benötigten Photonenbahnen durch Interpolation berechnet.

Regge-Raytracer: Da in unserer Approximation die einzelnen Raumzeitzellen eine euklidische (bzw. Minkowski-) Geometrie haben, wird die Photonenbahn innerhalb eines Simplexes einfach durch eine Geradengleichung beschrieben:

$$x^\alpha(\lambda) = x_0^\alpha + k^\alpha \lambda.$$

Die Gerade muss bis zum Rand des Simplex verfolgt werden. Dazu wird der Schnittpunkt der Geraden mit einer der $d + 1$ Randflächen des Simplex gesucht. Dort bestimmen wir das Nachbarsimplex und transformieren die Koordinaten des Schnittpunkts und den Richtungsvektor der Photonenbahn in dessen Koordinatensystem. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis die Photonenbahn die Welt verlässt oder auf ein Objekt trifft. Siehe auch Abschnitt 9.8 *Geodäten in Regge-Raumzeiten*, S. 137.

8.2.4 Objekte

Integrierender Raytracer: Die Weltröhren der abzubildenden Objekte sind durch *Abstandsfunktionen* $D(\mathcal{P})$ definiert. $D(\mathcal{P})$ muss eine monotone Funktion des raumartigen Intervalls zwischen dem Ereignis \mathcal{P} und einem (ungefähr „gleichzeitigen“) Ereignis \mathcal{Q} auf der Weltröhre des Objekts sein, wobei $D(\mathcal{P}) < 0$ gilt, wenn \mathcal{P} innerhalb des Objekts liegt, $D(\mathcal{P}) = 0$ auf der Oberfläche und $D(\mathcal{P}) > 0$ außerhalb.

Die Bahnparameter der gesuchten Schnittpunkte der Photonenweltlinie mit der Objektweltröhre sind dann einfach die Nullstellen von $D(\mathcal{P}(\lambda))$.

Da ein Objekt O auch durchscheinend sein kann, müssen sowohl der Eintrittspunkt $\mathcal{P}_i(\lambda_i)$ des Photons in das Objekt als auch der Austrittspunkt $\mathcal{P}_o(\lambda_o)$ aus dem Objekt berechnet werden. Ich möchte hier das Tupel $(O, \lambda, \{i, o\})$ als *Schnitt* bezeichnen ($\{i, o\}$ kennzeichnet den Schnitt als Ein- bzw. Austrittspunkt).

Für eine gegebene Photonenbahn $\mathcal{P}(\lambda)$ berechnen wir sämtliche Schnitte mit allen abzubildenden Objekten und sortieren sie nach absteigenden λ -Werten. Jetzt suchen wir in dieser Liste ausgehend von dem der Kamera am nächsten liegenden Schnitt das erste undurchsichtige Objekt. Alle nachfolgenden Schnitte (d. h. Schnitte mit kleineren λ -Werten) können, da sie nicht sichtbar sind, aus der Liste entfernt werden.

Diese Liste stellt die Schnittstelle zur Physik des Emissions- und Absorptionsverhaltens der beobachteten Körper dar. Sie wird jetzt einer Routine übergeben, die für jedes geschnittene Objekt den Beitrag zu der bei der Kamera ankommenden Strahlung berechnet.

Regge-Raytracer: Objekte in einer d -dimensionalen Raumzeit werden durch ihre $(d - 1)$ -dimensionalen Randflächen repräsentiert. Diese werden als Netz aus $(d - 1)$ -dimensionalen Simplexes, im Folgenden *Oberflächenelemente* genannt, gespeichert.

Für Raumzeiten, d. h. für $d_t = 1$ stellt ein solches Netz die $(d_s + d_t - 1)$ -dimensionale Weltröhre eines Objektes dar, für reine Räume ($d_t = 0$) ist es einfach die $(d_s - 1)$ -dimensionale Oberfläche des Objektes. Jeder Zelle der Raumzeit ist eine Liste der Oberflächenelemente zugeordnet, die diese Zelle schneiden.

Beim Verfolgen der Photonenbahn durch die Zellen der Raumzeit suchen wir in jeder Zelle die Schnittpunkte der geradlinigen Bahn mit allen dieser Zelle zugeordneten Oberflächenelementen. Der Schnittpunkt mit dem größten Bahnparameter bestimmt das sichtbare Objekt. Für eine genauere Beschreibung siehe Abschnitt 9.9 *Objekte in der Regge-Raumzeit*, S. 139.

8.2.5 Spektrum

In astrophysikalischen Anwendungen geht es nicht nur um die Geometrie, sondern auch um das beobachtete Spektrum, das quantitativ bestimmt werden soll. Dabei spielt auch die Wechselwirkung der Strahlung mit Materie eine wichtige Rolle.

Die Objekte haben zudem in der Regel ein komplexes Emissionsmuster; die Abstrahlung ist sowohl energie- als auch richtungsabhängig. Um dies zu berücksichtigen muss der Wellenvektor k am Emissionsort in das Ruhesystem des Objekts transformiert werden. Sein räumlicher Anteil, der dreidimensionale Wellenvektor \vec{k} , gibt dann die maßgebliche Emissionsrichtung an.

Die Ausbreitung von Strahlung bei Wechselwirkung mit Materie wird durch die Strahlungstransportgleichung beschrieben, die in kovarianter Form eine Gleichung für die Pho-

tonenverteilungsfunktion f ist (Misner, Thorne und Wheeler, 1973, S. 583). In einem lokalen Lorentzsystem hängt f mit der spezifischen Intensität I_ν wie folgt zusammen:

$$f = \frac{I_\nu}{h^4 \nu^3}.$$

Im Vakuum bleibt f längs einer Photonenbahn konstant. Im Medium gilt folgende Differentialgleichung:

$$\frac{df}{d\lambda} = -h\nu\kappa f + \frac{\epsilon}{h^3 \nu^2}. \quad (8.1)$$

Dabei sind der Absorptionskoeffizient κ , die Emissivität ϵ (erzeugte Energie pro Zeit, Volumen, Frequenzbereich und Raumwinkel) sowie die Photonenenergie $h\nu$ in einem lokalen Lorentzsystem zu berechnen. Der Absorptionskoeffizient soll hier auch die Ausstreuung beinhalten, die Emissivität auch die Einstreuung aus anderen Richtungen in die Strahlrichtung.

Für die Anwendungen in dieser Arbeit, bei denen Einstreuung nicht berücksichtigt wird, erhalten wir die Intensität am Austrittspunkt eines durchscheinenden Objekts, indem wir Gleichung (8.1) mit dem Anfangswert $f(\mathcal{P}(\lambda_i))$ längs des Lichtstrahls vom Eintrittspunkt $\mathcal{P}(\lambda_i)$ bis zum Austrittspunkt $\mathcal{P}(\lambda_o)$ integrieren.

Bei der Berechnung des beobachteten Spektrums ist ferner die durch den Dopplereffekt bzw. die gravitative Rotverschiebung verursachte Frequenzänderung zu berücksichtigen. Sie ist durch den Faktor

$$q = \frac{E_{\text{Detektion}}}{E_{\text{Emission}}}$$

bestimmt. Dabei ist

$E_{\text{Detektion}}$ die Photonenenergie im Ruhesystem der Kamera am Ort der Kamera,
 E_{Emission} die Photonenenergie im Ruhesystem des Objekts am Ort des Objekts.

$E_{\text{Detektion}}$ wird durch den Energieimpulsvektor des Photons am Ort der Kamera bestimmt. E_{Emission} lässt sich aus dem Photonenenergieimpulsvektor $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ am Ort der Lichtquelle und der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} der Lichtquelle ermitteln (Abschnitt 7.1.12, S. 106):

$$E_{\text{Emission}} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle.$$

Wir setzen am Ort der Kamera $k^0 = 1$, damit ist $E_{\text{Detektion}} = \hbar$ und $q = 1/\langle \mathbf{k}, \mathbf{u} \rangle$.

8.2.6 Schatten

Für das Projekt *Rollende Räder* wurde der Raytracer um die Fähigkeit erweitert, relativistisch korrekte Schatten zu berechnen. Dazu wird, wie in dreidimensionalen Standardraytracern, von einem getroffenen Objektpunkt ein zusätzlicher „Schattenstrahl“ in Richtung der Lichtquelle gesandt. Trifft dieser unterwegs ein anderes Objekt, liegt der zu untersuchende Objektpunkt im Schatten. Seine Helligkeit wird auf eine ambiente Beleuchtungsstärke vermindert. Im Unterschied zum Standardraytracing wird der Schattenstrahl in der vierdimensionalen Raumzeit verfolgt, so dass auch Schatten durch relativistisch bewegte Objekte richtig berechnet werden.

8.2.7 Die Photonenbahn (zum zweiten)

Zur Berechnung eines Pixelwertes verfolgen wir den Lichtstrahl ausgehend von dem am weitesten entfernten Objekt (dem letzten Eintrag der in Abschnitt 8.2.4, S. 119 bestimmten Liste der Schnittpunkte) zur Kamera. Dabei integrieren wir in allen durchlaufenen Objekten die Emission und Absorption gemäß Gleichung (8.1) auf, um am Ende, wenn wir bei der Kamera angekommen sind, das Spektrum zu erhalten, das aus der Richtung dieses Lichtstrahls kommt.

8.2.8 Das Pixel

Dem Pixel, von dem wir gestartet sind, geben wir nun die im letzten Abschnitt ermittelte Farbe. Wenn wir nur die Geometrie darstellen wollen, also Emission, Absorption und Frequenzänderung unberücksichtigt lassen wollen, ist dies einfach die Farbe der von der Photonenbahn getroffenen Stelle des Objekts.

8.2.9 Das Bild

Den in den letzten Abschnitten beschriebenen Algorithmus wenden wir nun auf alle Pixel des Bildes an.

8.2.10 Der Film

Wir unterteilen die Eigenzeit τ der Kamera in äquidistante Zeitschritte $\Delta\tau$ (für einen Videofilm wäre $\Delta\tau = 1/25$ s). Für jeden Zeitschritt berechnen wir ein Bild mit Kameraposition $x_K^a(\tau)$, -geschwindigkeit $v_K(\tau)$ und -ausrichtung $a_K(\tau)$. Nach Zusammenkleben aller Bilder erhalten wir den gewünschten Film.

8.2.11 Anzeige des Live-Bildes

Regge-Raytracer: Da die Bildberechnung wegen der hohen benötigten Rechenleistung meist auf einem entfernten Großrechner stattfindet, müssen die Bilder in Echtzeit über eine eventuell nicht allzu schnelle Netzwerkverbindung zu dem Clientrechner übertragen werden. Dazu wurde ein „remote frame buffer“ entwickelt, der in einen Shared-Memory-Bereich geschriebene Bilddaten mit MPEG4 komprimiert und als RTSP-Video-Stream¹ zu einem gängigen RTSP-Client wie z. B. mplayer² überträgt.

8.3 Optimierung

Die Berechnung jedes einzelnen Pixelwertes ist sehr aufwendig, so dass zur Rechenzeitoptimierung ein adaptives Subsampling-Verfahren eingesetzt wurde.

Benachbarte Pixelwerte haben oft gleiche oder ähnliche Farbwerte, so dass es sich lohnt, zur Berechnung diejenigen Punkte herauszufinden, deren Werte sich wesentlich von den Werten ihrer Nachbarpunkte unterscheiden.

¹RTSP: *Real Time Streaming Protocol* (Schulzrinne et al., 1998), Netzwerkprotokoll zur Echtzeitübertragung von Multimediadaten.

²The MPlayer Project, <http://www.mplayerhq.hu/>.

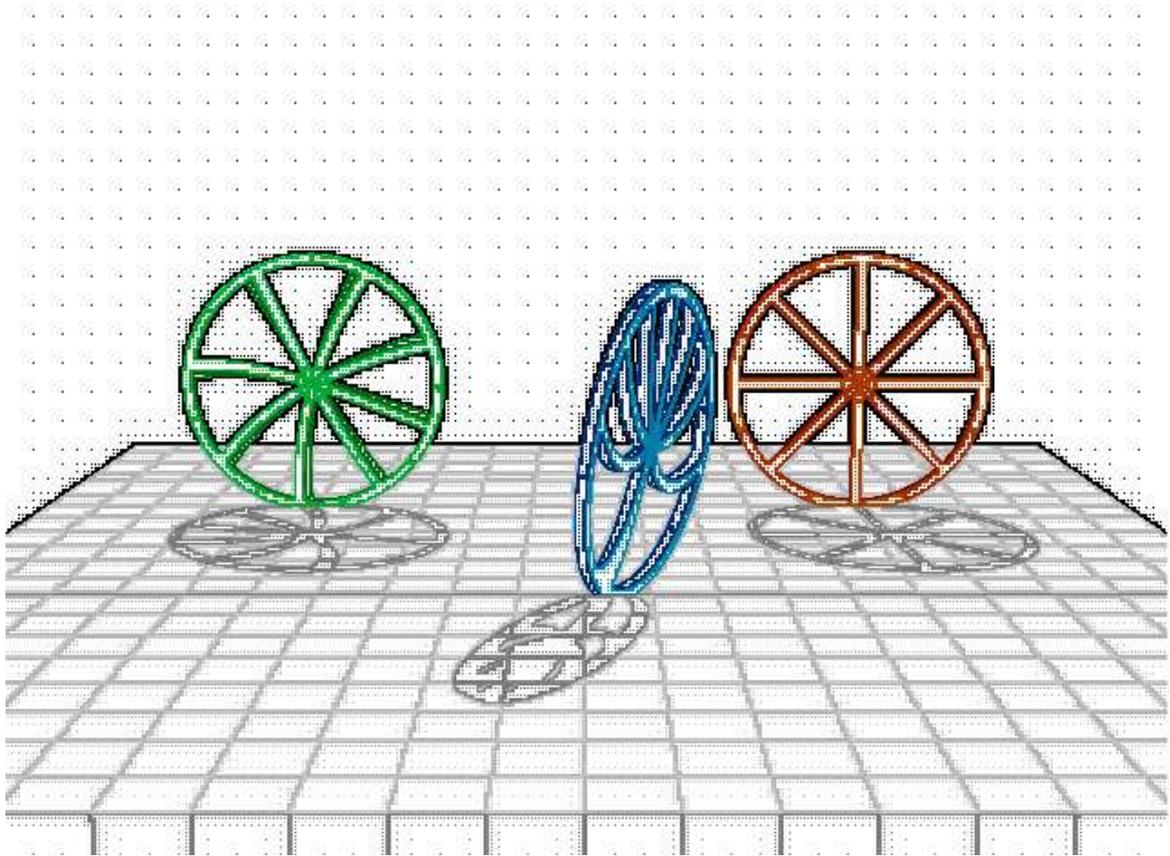


Bild 8.3: Optimierung durch adaptives Subsampling: Dieses Bild zeigt die tatsächlich durch Raytracing berechneten Pixel von Bild 2.5a. Die Farben der fehlenden, hier weiß dargestellten Pixel werden für das endgültige Bild in einem weiteren Schritt durch Interpolation bestimmt.

Dazu wird das Bild zuerst mit einem groben Gitter überzogen, das jede freistehende Struktur mit mindestens einem Punkt erfasst. Dort, wo sich die Farben benachbarter Gitterpunkte stark unterscheiden, wird rekursiv verfeinert, bis die gewünschte Auflösung erreicht ist (Bild 8.3).

In dem so berechneten, je nach Bildinhalt örtlich verschieden fein aufgelösten Gitter unterscheiden sich die Farben benachbarter Gitterpunkte jetzt so wenig, dass die Farben der noch fehlenden Punkte ohne großen Fehler durch Interpolation ermittelt werden können.

Je nach Komplexität der Szene kann mit diesem Verfahren die Anzahl der zu berechnenden Pixel um mehr als den Faktor 10 reduziert werden. Da dieser Algorithmus quasi „an den Objektkanten entlang rechnet“, ergibt sich außerdem ein nur wenig stärker als *linear* mit der Bildgröße ansteigender Rechenaufwand.

9 Triangulierung d -dimensionaler Räume

Die Projekte *Relativistischer Flugsimulator* (Kapitel 3, S. 27) und *Wir basteln ein Schwarzes Loch* (Kapitel 4, S. 49) bauen auf der Zerlegung einer gekrümmten Raumzeit in einzelne ungekrümmte Teilsektoren auf (Abschnitt 7.4 *Regge-Calculus*, S. 110).

Die folgenden Abschnitte beschreiben einige der entwickelten Datenstrukturen und Algorithmen zur Behandlung solcher triangulierter Raumzeiten.

Eine adaptive Triangulierung, die sich der Raumkrümmung automatisch anpasst, wäre besonders zur Untersuchung numerisch gewonnener Raumzeiten wünschenswert. Algorithmen für eine solche Triangulierung, die in beliebigen Dimensionen anwendbar sind, existieren meines Wissens jedoch noch nicht und sind, sollen sie für beliebige Raumzeitgeometrien funktionieren, ein größeres Projekt für sich. Da der Schwerpunkt des Projekts *Relativistischer Flugsimulator* in der Entwicklung eines schnellen Raytracingverfahrens liegt und die zum Test verwendeten Raumzeiten relativ einfach sind (flach, sphärisch, Wurmloch), beschränke ich mich hier auf eine vorgegebene Platzierung der Gitterpunkte.

Die Triangulierung einer gegebenen Raumzeit geschieht hier in zwei Schritten. Zuerst geht es um die Generierung eines abstrakten Netzes aus Vertizes und von ihnen aufgespannten Simplizes (Abschnitt 9.1, S. 123 bis Abschnitt 9.5, S. 129). Dieses besitzt noch keine metrischen Eigenschaften; es ist nur durch die Nachbarschaftsbeziehungen der Simplizes untereinander definiert. In einem zweiten Schritt wird das so erzeugte Gitternetz über die zu untersuchende Mannigfaltigkeit gelegt (Abschnitt 9.6, S. 129 bis Abschnitt 9.9, S. 139). Jetzt ordnen wir jedem Vertex der Triangulierung einen konkreten Raum(-zeit)-Punkt und jedem Simplex ein lokales Koordinatensystem zu. Um von einem Simplex zu einem benachbarten zu gelangen, benötigen wir noch eine Koordinatentransformation zwischen den beiden Koordinatensystemen. In diesen lokalen Koordinatensystemen können wir jetzt Physik betreiben, z. B. den Verlauf von Geodäten berechnen oder die Bewegung von Objekten beschreiben.

9.1 Triangulierungen

Triangulierungen sind insbesondere in höheren Dimensionen kombinatorisch schwer zu überschauen. In vier Dimensionen etwa hat ein Simplex 5 Vertizes, 10 Kanten, 10 zwei-dimensionale „Hyperkanten“ und 5 dreidimensionale Randsimplizes. Je nach gewählter Triangulierung ist jeder Vertex an ca. 20 Simplizes beteiligt. Selbst eine einfache Struktur aus wenigen Simplizes ist grafisch nicht mehr darstellbar und nur schwer durchschaubar.

Aus diesem Grund wurden in dieser Arbeit die Programm- und Datenstrukturen sowie die entwickelten Algorithmen zur Generierung und Modifikation der zu untersuchenden Regge-Raumzeiten *dimensionsunabhängig* formuliert. Sie können in niedrigen Dimensionen (zwei) getestet und dann auf höhere Dimensionen übertragen werden.

Eine logische und komplette interne Darstellung der Triangulierung eines d -dimensionalen Raumes wären Mengen aller d -dimensionalen Zellen, aller $(d - 1)$ -dimensionalen Rand-„flächen“, aller $(d - 2)$ -dimensionalen „Hinges“¹ usw. bis hin zu allen eindimensio-

¹als *Hinge* („Angelpunkt“) wird hier ein $(d - 2)$ -Simplex bezeichnet, um das eine Reihe von d -Simplizes

nalen Kanten und nulldimensionalen Vertizes, sowie aller Beziehungen zwischen diesen Objekten. Eine Zelle könnte dargestellt werden durch die Menge aller $d + 1$ Randsimplizes der Dimension $d - 1$, welche wiederum rekursiv durch ihre $(d - 2)$ -dimensionalen, diese durch ihre $(d - 3)$ -dimensionalen usw. Randsimplizes repräsentiert werden (eventuell mit Orientierung). Diese interne Repräsentation hätte aber insbesondere bei höheren Dimensionen den Nachteil, dass Objekte in „mittleren“ Dimensionen ($0 < n < d$) in hoher Anzahl vorkommen. Außerdem kommen nicht alle Objekttypen in allen Raumzeitdimensionen vor. Auch haben sie je nach Raumzeitdimension unterschiedliche Funktionen. Beispielsweise hat ein zweidimensionales Simplex in einer zweidimensionalen Raumzeit die Funktion einer Zelle, in einer dreidimensionalen Raumzeit die Funktion einer Randfläche und in einer vierdimensionalen Raumzeit die Funktion eines Hinges. Dimensionsunabhängige Algorithmen sind auf solchen Datenstrukturen nur schwer entwickelbar, geschweige denn testbar. Hier wurde deshalb eine Darstellung gewählt, die nur aus einer Menge von Vertizes und einer Menge von Zellen besteht. Jede Zelle ist durch eine Liste der $d + 1$ Vertizes (Ecken des Simplex) vollständig beschrieben.

Des Weiteren sind einige nützliche kombinatorische Beziehungen dimensionsunabhängig formulierbar. So ist jeder Vertex mit jedem anderen durch eine Kante verbunden. Bei einem d -Simplex mit $d + 1$ Vertizes bildet jede beliebige Kombination von d Vertizes (also alle bis auf einen) eine der $d + 1$ Rand-„flächen“, welche dem übriggebliebenen Vertex gegenüberliegt. Die Nachbarschaftsbeziehungen sind dadurch definiert, dass jede Zelle zu jeder Ecke diejenige Nachbarzelle speichert, die an die der Ecke gegenüberliegende Randfläche angrenzt. Als weitere (abgeleitete) Hilfsdatenstruktur wird noch eine inverse Zuordnung angelegt, die zu jedem Vertex alle Zellen angibt, welche diesen Vertex enthalten.

9.2 Datenstrukturen

Hier werden die in den nachfolgend beschriebenen Algorithmen verwendeten Datenstrukturen definiert.

9.2.1 Bezeichnungen

Der zu triangulierende Raum habe die Dimension d . Er wird in simpliziale Objekte (d -dimensionale Polyeder mit $d + 1$ Vertizes) zerlegt. Jedes dieser Simplizes besteht wiederum aus simplizialen Unterobjekten (Vertizes, Kanten, Dreiecksflächen usw.).

Die folgende Tabelle benennt die Simplizes abhängig von ihrer Dimension und der Rolle, die sie in der Triangulierung spielen:

Dimension	Objekt	Beschreibung
0	Vertex	Punkt, Ecke
1	Edge	Kante zwischen zwei Punkten
2	Face	Fläche zwischen drei Punkten
$d - 2$	Hinge	Angel-„punkt“, um den herum sich eine Folge von Zellen anordnet
$d - 1$	Facet	Rand-„fläche“ einer Zelle
d	Cell	Zelle

angeordnet ist. Siehe auch Abschnitt 7.4 *Regge-Calculus*, S. 110.

9.2.2 Vertexdatenstruktur

Ein Vertex hat außer einer laufenden Nummer keine innere Struktur. Er wird daher nur als ganzzahliger *Identifier* (im Folgenden auch *Vertex-Id* genannt) und als gesetztes Bit in einem alle Vertices der Raumzeit umfassenden Bitvektor geführt. Wenn ein Vertex als Folge von Topologieänderungen (Abschnitt 9.4, S. 127) wieder verschwindet, wird das zugeordnete Bit in dem Bitvektor zurückgesetzt, so dass man stets feststellen kann, ob einer gegebenen Zahl ein gültiger Vertex entspricht.

9.2.3 Simplexdatenstruktur

Ein n -Simplex ist eine abstrakte Datenstruktur für simpliziale Objekte (n -dimensionale Polyeder mit $n + 1$ Vertices, $n \leq d$). Es besteht aus einer Liste von $n + 1$ Vertex-Ids der Vertices, die seine Ecken bilden.

9.2.4 Celldatenstruktur

Eine Cell ist ein d -Simplex. Sie ist der Grundbaustein der Zerlegung einer d -dimensionalen Raumzeit. Zusätzlich werden in jeder Cell die Nachbarschaftsbeziehungen zu den Nachbarzellen sowie Koordinatentransformationen zu den Nachbarzellen gespeichert.

9.2.5 Container

Will man eine Raumzeit oder darin befindliche Objekte aus den oben genannten Bausteinen zusammensetzen, benötigt man mehrere (viele) Exemplare. Die Zellen der Raumzeit bzw. die in Simplizes zerlegten Oberflächen der Objekte werden in sogenannten Containern gespeichert, die die einzelnen Elemente in einer Art Datenbank unter ihren Ids ablegen. Aus Performancegründen wird für manche Container eine auf Cache-Lines ausgeglichene Version verwendet.

9.2.6 Raumzeit

Die Raumzeit wird als Container von Cells abgebildet.

9.3 Dimensionsunabhängiger Triangulierungsalgorithmus

Im ersten Schritt wird ein kubisches Gitter mit für jede Dimension gegebener Auflösung generiert. Zur Erinnerung: Wir haben noch keine Koordinaten und keine Metrik. Der Begriff „kubisch“ wird hier nur zur Beschreibung der Gitterstruktur als Graph verwendet. Dieses bis dahin rein kombinatorisch gegebene Gitter dient dann als Basis für eine Triangulierung des Raums (Abschnitt 9.6 *Geometrische Struktur*, S. 129). Je nach Topologie können auch mehrere derartige, geeignet verbundene Gitter notwendig sein, um den Raum vollständig abzudecken. Dieses Gitter wird mit Simplizes aufgefüllt, deren Eckpunkte auf den Gitterpunkten liegen.

Der folgende Triangulierungsalgorithmus ist dimensionsunabhängig formuliert. Die Generierung eines n -dimensionalen Gitters geschieht rekursiv: Ein n -dimensionales Gitter wird aus einem $(n - 1)$ -dimensionalen „extrudiert“.

9 Triangulierung d -dimensionaler Räume

Ein $(n - 1)$ -dimensionales Gitter dient als Ausgangspunkt (Front). An jeden Vertex wird senkrecht² zum Gitter eine Kante angesetzt und damit eine Kopie des Gitters angelegt. Der n -dimensionale Raum zwischen diesen beiden Gittern wird mit Simplizes gefüllt.

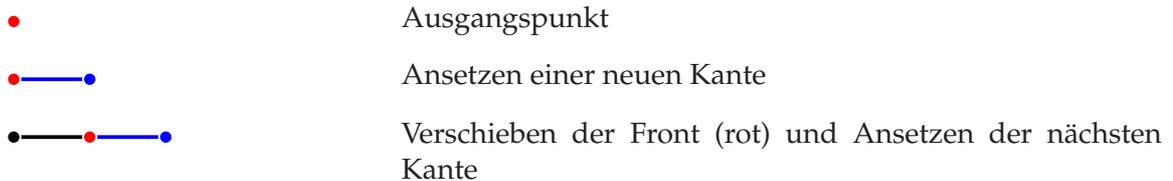
Das Anlegen neuer Vertizes und das Auffüllen mit Simplizes geschieht sukzessive. Die aktuelle Front wird dabei aus den bereits neu angelegten Vertizes und den noch nicht bearbeiteten alten Vertizes aufgespannt. Bei der Anlage eines neuen Vertex werden Kanten zu den in der aktuellen Front liegenden Nachbarn des Ausgangsvertex gezogen; die Zwischenräume werden in Simplizes eingeteilt. Die aktuelle Front wird dann zu dem neu hinzugekommenen Vertex angehoben.

Wenn alle Vertizes der alten Front um eine Gittereinheit angehoben wurden, kann die neu entstandene Front als Ausgangsbasis für die nächste Schicht dienen. Dieses Ansetzen wird fortgesetzt bis die in dieser Dimension gewünschte Ausdehnung erreicht ist. Wenn der Raum in der aktuellen Dimension fertig ist, kann das entstandene, jetzt n -dimensionale Gitter als Front für die nächste Dimension dienen.

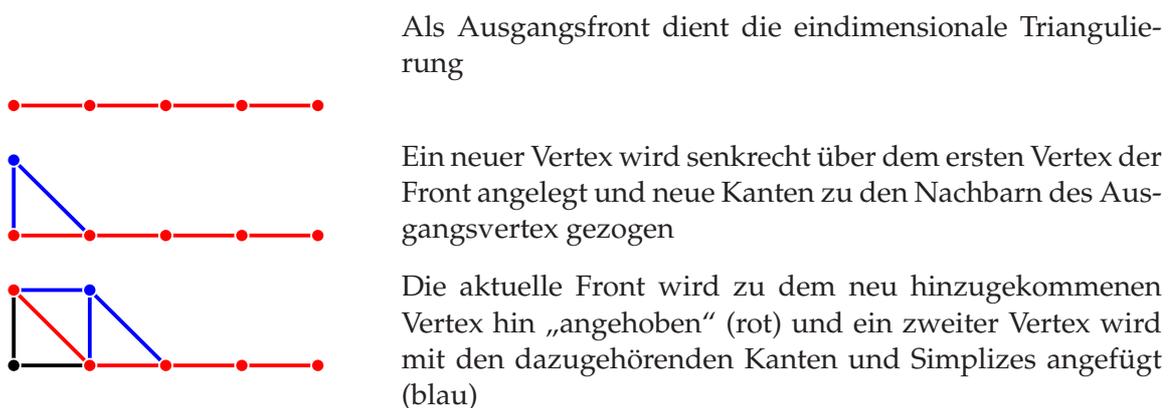
Ausgehend von einem nulldimensionalen Gitter (einem Punkt) kann so ein Raum beliebiger Dimension trianguliert werden.

Für die ersten zwei Dimensionen ist das Verfahren in der folgenden Skizze illustriert. Rote Punkte bzw. Linien bezeichnen die aktuelle Front, blaue den gerade hinzugekommenen Vertex mit den Verbindungskanten zur aktuellen Front und schwarze Punkte bzw. Kanten das bereits erstellte Gitter.

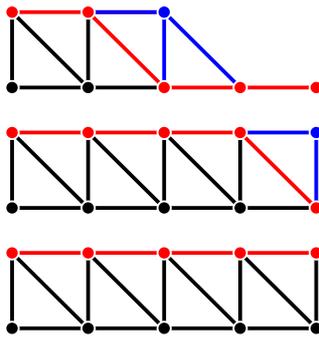
Von Dimension null zu Dimension eins



Von Dimension eins zu Dimension zwei



²Wir haben immer noch keine Metrik. „Senkrecht“ heißt nur: aus dem gegebenen Gitter heraus in Richtung der neuen Dimension.



Der dritte Vertex

Der letzte Vertex kommt hinzu und vervollständigt die neue Schicht

Jetzt ist die komplette bisherige Front um ein Gitterintervall angehoben und kann als neue Front (rot) für die nächste Schicht dienen

9.4 Algorithmen zur Topologieänderung

Da die zu untersuchenden „interessanten“ Raumzeiten eine nichttriviale Topologie besitzen, die nicht mit einem kubischen Gitter abgedeckt werden kann, wurden verschiedene Algorithmen zur Topologieänderung entwickelt.

9.4.1 Zusammennähen zweier Ränder

Die zweidimensionale Oberfläche einer dreidimensionalen Kugel (eine 2-Sphäre) kann beispielsweise von einem rechteckigen zweidimensionalen Gitter überdeckt werden, wenn folgende Identifizierungen vorgenommen werden:

- Linker und rechter Rand des Gitters werden identifiziert
- Alle Vertices der oberen Kante werden zum Nordpol zusammengefasst
- Alle Vertices der unteren Kante werden zum Südpol zusammengefasst

Alle derartigen Identifizierungen können auf die Identifizierung zweier Vertices und die lokale Neuberechnung der Nachbarschaftsbeziehungen zurückgeführt werden (siehe nächsten Abschnitt).

9.4.2 Vereinigen zweier Vertices

Der Algorithmus zur Vereinigung zweier Vertices ist dimensionsunabhängig formuliert und stellt im Prinzip die Umkehrung der in Abschnitt 9.3, S. 125 beschriebenen Extrusion eines neuen Vertex aus einer bestehenden Front dar. Die folgende Beschreibung des Algorithmus nimmt Bezug auf Bild 9.1, in dem die geometrischen Objekte in einem zweidimensionalen Beispiel dargestellt sind.

v_1 und v_2 sind die zu vereinigenden Vertices. c und c' sind die der Verbindungskante v_1-v_2 benachbarten Zellen. Diese müssen bei der Vereinigung entfernt werden. cn_1 und cn_2 sind Nachbarzellen von c , deren Nachbarschaftsbeziehungen neu berechnet werden müssen.

Kurzbeschreibung des Algorithmus:

Algorithmus 9.1: Vereinigen zweier Vertices

- (1) Eine Liste aller Simplexes erstellen, die die Kante zwischen v_1 und v_2 enthalten. Diese Zellen müssen entfernt werden (im Beispiel in Bild 9.1 sind das die Zellen c und c'). Diese Liste durchgehen:

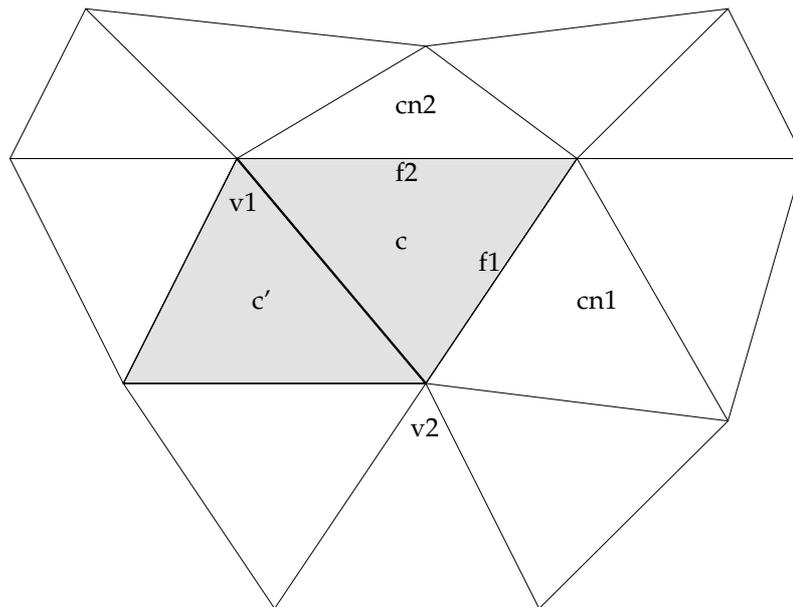


Bild 9.1: Vereinigen zweier Vertizes v_1 und v_2 . Die grau hinterlegten Zellen c und c' müssen entfernt werden.

- (1.1) Nachbarschaftsbeziehungen neu klären. Am Beispiel der Zelle c in Bild 9.1:
Die beiden Facets f_1 und f_2 der zu entfernenden Zelle c , die nicht an der Kante v_1 - v_2 liegen, verbinden die zu entfernende Zelle mit jeweils einer bleibenden. Es bezeichne cn_1 den Nachbarn von c über Facet f_1 , cn_2 den Nachbarn von c über Facet f_2 . Dann muss in cn_1 als Nachbar über Facet f_1 statt der Zelle c die Zelle cn_2 und in cn_2 als Nachbar über Facet f_2 statt der Zelle c die Zelle cn_1 eingetragen werden.
- (1.2) Zu entfernende Zelle aus den Vertextnachbarlisten ihrer Vertizes entfernen.
- (1.3) Die Zelle entfernen.
- (2) In allen Nachbarzellen von v_2 : v_2 durch v_1 ersetzen.
- (3) Die neue Vertextnachbarliste von v_1 als Vereinigung der Vertextnachbarlisten von v_1 und v_2 generieren.
- (4) Vertex v_2 entfernen.

Wenn zwei Ränder triangulierter Regionen „zusammengenäht“ werden sollen, müssen sukzessive jeweils zwei Vertizes vereinigt werden, die nicht auf einer gemeinsamen Kante liegen. In diesem Fall muss der obige Algorithmus leicht modifiziert werden: Die in (1) generierte Liste ist leer; es werden keine Zellen entfernt. Dagegen muss in einem zusätzlichen Schritt in allen Zellen aus der in (3) generierten neuen Liste der Nachbarn von v_1 geprüft werden, ob neue gemeinsame Facets entstanden sind. Für diese müssen die Nachbarschaftsbeziehungen neu eingetragen werden (zwei Zellen sind benachbart, wenn sie genau d gemeinsame Vertizes besitzen).

9.5 Konsistenz

Um zu gewährleisten, dass mit einer in sich konsistenten Triangulierung gearbeitet wird, kann diese einem Test unterworfen werden, der es erlaubt, folgende Fehler aufzufinden:

- Zelle hat undefinierten Vertex
- Zelle hat zu viele Vertizes
- Zelle hat zwei gleiche Vertizes
- Vertex gehört zu keiner der Zellen
- Zelle behauptet Nachbarzelle zu haben, ist aber nicht zu dieser benachbart
- Nachbarzelle ist falschem Facet zugeordnet
- Zelle ist in der Nachbarzelle falsch eingetragen
- Eingetragene Nachbarzelle existiert nicht
- Koordinatentransformation zur Nachbarzelle existiert nicht

9.6 Geometrische Struktur

9.6.1 Wahl der Gitterpunkte

Bisher wurde nur die kombinatorische Struktur einer Triangulierung behandelt. Will man einen konkreten gekrümmten Raum abbilden, müssen einzelnen Raumpunkten Gitterpunkte der Triangulierung zugewiesen werden. Diese Zuordnung ist in Grenzen willkürlich, muss jedoch gewissen Anforderungen genügen:

- Die Aufteilung des Raumes muss fein genug sein. D. h. die in den Hinges konzentrierte Krümmung muss klein sein.
- In diesem Projekt werden die Kanten eines Simplexes als Koordinatenachsen für ein Koordinatensystem innerhalb des Simplexes verwendet. Deshalb darf ein Simplex nicht allzu sehr von einem gleichseitigen Simplex abweichen (nicht zu flach, keine extrem kleinen Winkel, keine zu großen Unterschiede der Kantenlängen), da sonst dieses Koordinatensystem numerisch zu schlecht wird.

In diesem Projekt wurde auf eine adaptive Aufteilung verzichtet, da nur recht symmetrische und glatte Räume untersucht wurden.

Für das Wurmloch wurde beispielsweise ein Koordinatensystem aus den üblichen Winkelkoordinaten θ und ϕ und einer radialen Koordinate l verwendet (Abschnitt 7.3, S. 109). Die Vertizes liegen auf einem Gitter, das in θ und ϕ äquidistant ist. Die Auflösung in l -Richtung ist variabel und wird in der Nähe des Schlundes feiner.

9.6.2 Vertexkoordinaten

Jeder Vertex hat in einem globalen Koordinatensystem definierte Koordinaten x^i . Diese werden bei der Bildberechnung mittels Raytracing nicht mehr benötigt, die komplette Information über die Geometrie steckt in den kombinatorischen Zusammenhängen der Raumzeitsimplizes sowie in den Metrikoeffizienten innerhalb der Simplizes.

Zur Konstruktion der Triangulierung einer analytisch vorgegebenen Raumzeit ist diese in den hier untersuchten Beispielen jedoch auf einem Koordinatensystem (oder einem Atlas von Koordinatensystemen) definiert. Die Berechnung der Simplexmetrikoeffizienten basiert auf dieser Koordinatendarstellung und für die Ein- und Ausgabe von Daten ist es ebenfalls günstig, Orte und Richtungen in einem globalen Koordinatensystem angeben zu

können. Deshalb werden in einem zusätzlichen Container zu jedem Vertex dessen Koordinaten in einem globalen Koordinatensystem gespeichert, und es existieren Transformationsroutinen zur Konvertierung zwischen globalen Koordinaten und Simplexkoordinaten (Abschnitt 9.7.4, S. 132).

9.6.3 Kantenlängen

Die komplette Information über die geometrische Struktur des triangulierten Raumes ist in den Kantenlängen der Simplizes enthalten. Diese werden beim Aufbau der „Welt“ bestimmt und fließen in die Berechnung der Metrikkomponenten im jeweiligen Simplexkoordinatensystem ein.

Für die Berechnung der Kantenlängen l werden einige Routinen bereitgestellt, die je nach gewünschter Genauigkeit ausgewählt werden können. Die schnellste, aber ungenaueste Methode geht davon aus, dass der Raum so fein aufgeteilt ist, dass die Metrik sich über die Länge der Kante hinweg nicht sehr ändert. Es wird einfach eine (analytisch gegebene) Metrik an der Kantenmitte (Mittelwert der Koordinaten der Eckpunkte x_1^i und x_2^i) genommen:

$$l^2 = g_{ik}(x_2^i - x_1^i)(x_2^k - x_1^k).$$

Die langsamste, aber genaueste Methode berechnet mit einem Schießverfahren über einem Runge-Kutta-Integrator die Länge der Geodäte zwischen den beiden Vertices einer Kante. Für die Schwarzschildmetrik fand diese Methode Anwendung im Projekt *Wir basteln ein Schwarzes Loch* (Kapitel 4, S. 49) bei der Berechnung der Abmessungen der Pappklötzchen. Für manche Metriken (flach, Minkowski, sphärisch) stehen exakte Abstandsberechnungsfunktionen zur Verfügung. Für die im Flugsimulatorprojekt vor allem untersuchte Wurmlochmetrik konnte ich auf eine halbanalytische Methode³ von T. Müller zurückgreifen, die genaue Ergebnisse bei erträglichen Rechenzeiten bietet.

9.6.4 Metrik

Zur Berechnung z. B. von Geodäten muss in jeder Zelle die Metrik im dortigen Koordinatensystem bekannt sein. Diese ist, da die Raumzeit nach dem Regge-Calculus in jeder Zelle als ungekrümmt angenommen wird, eine konstante ($d \times d$)-Matrix und wird als solche zu jeder Zelle abgespeichert. Die Berechnung dieser Metrik und der Koordinatentransformationen zwischen den Zellen wird im nächsten Kapitel beschrieben.

9.7 Koordinatensysteme

Um Orte und Richtungen in einer triangulierten Raumzeit angeben zu können, muss ein Koordinatensystem definiert werden.

Bei der Festlegung der Raumzeit, der darin befindlichen Objekte sowie der Kameraposition und -geschwindigkeit werden Metrik, Ortskoordinaten und Richtungsvektoren in einem globalen Koordinatensystem (eventuell bestehend aus mehreren Karten eines Atlanten) vorgegeben. Genauso werden zu exportierende Daten (beispielsweise eine wieder verwendbare Flugroute) in diesem globalen Koordinatensystem ausgegeben.

³T. Müller, Berechnung von Geodäten in einer Wurmlochmetrik, private Mitteilung.

Während der interaktiven Nutzung der triangulierten Raumzeit wird das globale Koordinatensystem nicht benötigt. Orte und Vektoren werden eindeutig einer Zelle zugeordnet und bekommen Koordinatenwerte bezogen auf ein zellenlokales Koordinatensystem.

9.7.1 Globale Koordinaten

Ein Punkt \mathcal{P} in einer d -dimensionalen Mannigfaltigkeit wird festgelegt durch einen die Karte definierenden Index a und durch die d Koordinaten $\tilde{x}^i(\mathcal{P})$, $i = 0 \dots d - 1$.

Ein Vektor \tilde{v} ist in einem Tangentialraum an einem bestimmten Punkt der Mannigfaltigkeit definiert. Zur eindeutigen Festlegung benötigt man also den Kartenindex a und die Ortskoordinaten \tilde{x}^i des Punktes, an dem der Vektor angeheftet ist sowie die Vektorkomponenten \tilde{v}^i in einer lokalen Basis \tilde{e}_i : $\tilde{v} = \tilde{v}^i \tilde{e}_i$.

9.7.2 Simplexkoordinatensystem

Ein d -dimensionales Simplex S ist durch die Angabe seiner $d + 1$ Vertices \mathcal{V}_m ($m = 0 \dots d$) und der Längen aller Kanten eindeutig bestimmt. Innerhalb eines d -Simplexes (einer Zelle) wird nun wie folgt ein Koordinatensystem definiert:

- Vertex \mathcal{V}_d ist der Ursprung.
- Die Vektoren zwischen Vertex \mathcal{V}_d und den restlichen d Vertices $\mathcal{V}_0 \dots \mathcal{V}_{d-1}$ bilden die Basisvektoren des lokalen Koordinatensystems $e_0 \dots e_{d-1}$. Die Definition der Basisvektoren als Differenzvektoren zwischen zwei Punkten ist zulässig, da die Metrik innerhalb des Simplexes flach ist.

Die Position eines Punktes innerhalb der triangulierten Raumzeit kann nun durch die Angabe der Id s des Simplexes, in dem sich dieser Punkt befindet und der d auf die Basis e_m bezogenen Komponenten seines Ortsvektors x festgelegt werden: $x = x^i e_i$.

Für innerhalb oder auf dem Rand des Simplexes befindliche Punkte gilt:

$$0 \leq x^i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{d-1} x^i \leq 1. \quad (9.1)$$

9.7.3 Metrik innerhalb eines Simplexes

Die innere Struktur eines d -Simplexes ist vollständig bestimmt, wenn die $d(d + 1)/2$ Längenquadrate l_{mn}^2 aller seiner Kantenvektoren k_{mn} bekannt sind. Die Kante k_{mn} läuft vom Vertex \mathcal{V}_m zum Vertex \mathcal{V}_n . Die Metrik innerhalb des Simplexes ist bestimmt durch die $d(d + 1)/2$ Gleichungen (g_{ij} ist symmetrisch):

$$g_{ij} k_{mn}^i k_{mn}^j = l_{mn}^2 \quad \text{für } m, n = 0 \dots d; \quad m \neq n. \quad (9.2)$$

Im Simplexkoordinatensystem gilt

$$\begin{aligned} k_{dn} &= e_n && \text{für } n = 0 \dots d - 1 \text{ und} \\ k_{mn} &= e_n - e_m && \text{für } m, n = 0 \dots d - 1; \quad m \neq n \end{aligned}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} k_{dn}^i &= \delta_n^i && \text{für } n = 0 \dots d - 1 \text{ und} \\ k_{mn}^i &= \delta_n^i - \delta_m^i && \text{für } m, n = 0 \dots d - 1; \quad m \neq n. \end{aligned}$$

9 Triangulierung d -dimensionaler Räume

Für die Diagonalelemente der Metrik folgt aus

$$g_{ij}k_{dn}^i k_{dn}^j = g_{nn} \quad \text{für } i, j, n = 0 \dots d-1$$

direkt

$$g_{nn} = l_{dn}^2 \quad \text{für } n = 0 \dots d-1. \quad (9.3)$$

Aus Gleichung (9.2) folgt

$$g_{ij}(\delta_n^i - \delta_m^i)(\delta_n^j - \delta_m^j) = l_{mn}^2 \quad \text{für } m, n = 0 \dots d-1; \quad m \neq n$$

$$g_{mm} + g_{nn} - 2g_{mn} = l_{mn}^2.$$

Zusammen mit Gleichung (9.3) erhalten wir die Metrikkoeffizienten:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}(l_{di}^2 + l_{dj}^2 - l_{ij}^2) \quad \text{für } i, j = 0 \dots d-1. \quad (9.4)$$

Die Metrikkoeffizienten dienen als Basis zur Berechnung der Koordinatentransformationen zwischen zwei aneinandergrenzenden Simplizes. Sie werden bei der Generierung der Raumzeitdatenstruktur nach der Triangulierung für jede Zelle berechnet und gespeichert.

9.7.4 Koordinatentransformation zwischen originaler und Regge-Raumzeit

Wir können eine analytisch oder numerisch gegebene Raumzeit durch eine Triangulierung nur annähern. Die Metriken auf diesen beiden Raumzeiten werden unterschiedlich sein. Das heißt, dass es keine „richtige“ Abbildung eines Punktes oder Vektors in der originalen Raumzeit auf die Regge-Raumzeit gibt. Hier wird folgende Abbildung gewählt:

Einem Punkt \mathcal{P} , der in dem Simplex mit Vertizes \mathcal{V}_i liegt und die Simplexkoordinaten x^i hat, wird der Punkt $\tilde{\mathcal{P}}$ mit den globalen Koordinaten

$$\tilde{x}^j(\tilde{\mathcal{P}}) = \tilde{x}^j(\mathcal{V}_d) + \sum_{i=0}^{d-1} x^i (\tilde{x}^j(\mathcal{V}_i) - \tilde{x}^j(\mathcal{V}_d)) \quad (9.5)$$

zugeordnet.

Einem Vektor v mit den Simplexkoordinaten v^i wird der Vektor \tilde{v} mit den globalen Koordinaten \tilde{v}^j

$$\tilde{v}^j = \sum_{i=0}^{d-1} v^i (\tilde{x}^j(\mathcal{V}_i) - \tilde{x}^j(\mathcal{V}_d)) \quad (9.6)$$

zugeordnet.

Diese Abbildung gewährleistet, dass Punkte und Vektoren auf gemeinsamen $(d-1)$ -dimensionalen Flächen (Facets) zwischen zwei Simplizes dieselben globalen Koordinaten bekommen, unabhängig davon, in welchem Simplex diese Koordinaten berechnet werden. Außerdem geht sie für den Grenzfall des ungekrümmten Raumes in die Identität über.

Die umgekehrte Abbildung vom globalen Koordinatensystem in ein Simplexkoordinatensystem ist rechnerisch ziemlich aufwendig, da zuerst bestimmt werden muss, in welchem Simplex der zu transformierende Punkt liegt. Das geht nur durch Durchprobieren aller Zellen der Triangulierung, indem der Punkt mit der Umkehrung von Gleichung (9.5)

in jedes Simplexkoordinatensystem transformiert wird und dann mit Gleichung (9.1) getestet wird, ob er in diesem Simplex enthalten ist. Das ist allerdings keine wesentliche Einschränkung, da diese Umrechnung nur einmalig beim Programmstart für wenige, in globalen Koordinaten gegebene Orte und Vektoren (Position und Ausrichtung der Kamera und der abzubildenden Objekte) zu machen ist.

9.7.5 Koordinatentransformation zwischen zwei Simplizes

Um eine Kurve im Raum (z. B. eine Nullgeodäte) zu berechnen, ist es notwendig, im Koordinatensystem eines Simplexes gegebene Punkte bzw. Vektoren in das Koordinatensystem eines direkt benachbarten Simplexes zu transformieren.

Für die Auswahl der Basisvektoren eines d -dimensionalen Simplexkoordinatensystems gibt es $d!$ Möglichkeiten. Bei zwei benachbarten Simplizes können deren Koordinatensysteme beliebig zueinander orientiert sein, so dass es hier $d!^2$ verschiedene Möglichkeiten (in drei Dimensionen 36) gibt. Um die Koordinatentransformation zwischen diesen zwei Simplizes, im Folgenden Simplex 1 (S1) und Simplex 2 (S2) genannt, auch für höhere Raumzeitdimensionen handhabbar zu halten, wird sie in drei Schritte zerlegt:

Transformation 1: Transformation vom Koordinatensystem des Simplexes 1 (SK1) in ein neues Koordinatensystem im Simplex 1, das auf das gemeinsame Facet bezogen ist (FK1). FK1 ist wie folgt definiert:

- Das Facet habe die Vertices $\mathcal{F}_0 \dots \mathcal{F}_{d-1}$. Diese sind identisch mit den d gemeinsamen Vertices der Simplizes S1 und S2 und durch eine Permutation $n(m)$ definiert: $\mathcal{F}_m = \mathcal{V}_{n(m)}$.
- Der Koordinatenursprung von FK1 liegt auf Vertex \mathcal{F}_{d-1} .
- Der Basisvektor f_m ($m = 0 \dots d-2$) ist der Vektor von \mathcal{F}_{d-1} nach \mathcal{F}_m .
- Der Basisvektor f_{d-1} ist der Vektor von \mathcal{F}_{d-1} zu dem nicht im Facet liegenden Vertex des Simplexes 1.

Transformation 2: Transformation innerhalb des Facets auf das Facetkoordinatensystem des zweiten Simplexes FK2. Dieses ist analog zu FK1 definiert. Der Ursprung $\underline{\mathcal{F}}_{d-1}$ und die Basisvektoren \underline{f}_0 bis \underline{f}_{d-2} sind identisch mit ihren Entsprechungen in FK1, aber der Basisvektor \underline{f}_{d-1} liegt zwischen dem Ursprung $\underline{\mathcal{F}}_{d-1}$ und dem nicht im Facet liegenden Vertex des Simplexes 2.

Transformation 3: Transformation vom Facetkoordinatensystem FK2 in das Koordinatensystem des Simplexes 2 (SK2). Diese Transformation wird genauso durchgeführt wie die Transformation 1 (nur in umgekehrter Richtung).

Nomenklatur

Um die vielen Koordinatensysteme auseinanderhalten zu können, führe ich für diesen Abschnitt eine spezielle Notation ein. Größen, die zu Simplex 2 gehören, bekommen einen Unterstrich, $\underline{}$ z. B. ist ein Vertex des Simplexes 2. Die vier Sätze von Basisvektoren in SK1, FK1, FK2 und SK2 werden mit e_m , f_m , \underline{f}_m und \underline{e}_m bezeichnet. Bei Vektorkomponenten in

Indeschreibweise markiert ein Akzent über bzw. ein Unterstrich unter dem Index das Koordinatensystem: In SK1, FK1, FK2 und SK2 werden die Komponenten von x als x^i , $x^{\hat{i}}$, $x^{\hat{i}}$ und x^i geschrieben. Die gesamte Transformation von SK1 nach SK2 wird mit $x' = Lx + a$ bezeichnet, die Einzeltransformationen 1, 2 und 3 mit $x' = Mx + b$, $x' = Nx + c$ und $x' = Ox + d$.

Zu den Transformationen 1 und 3

Die Transformationen 1 und 3 sind im Wesentlichen Vertauschungen ($x^{i'} = x^j$), Invertierungen ($x^{i'} = 1 - x^j$) und Subtraktionen ($x^{i'} = x^j - x^k$) der Koordinatenwerte. Genauer: die Koeffizienten der linearen, inhomogenen Transformationen $x' = Mx + b$ bzw. $x' = Ox + d$ sind 0, 1 oder -1 .

Für die Berechnung der Transformation von SK1 nach FK1 bestimmen wir zuerst im Koordinatensystem SK1 die Komponenten des Ortsvektors u des Koordinatenursprungs von FK1. Der Koordinatenursprung \mathcal{F}_{d-1} des Facetkoordinatensystems sei der Vertex \mathcal{V}_u des Simplexes 1. Die Komponenten seines Ortsvektors u im Koordinatensystem SK1 sind

$$u^i = 0,$$

wenn der Ursprung von FK1 gleich dem Ursprung von SK1 ($u = d$) ist und sonst

$$u^i = \delta_u^i.$$

Desweiteren benötigen wir die im Koordinatensystem SK1 gegebenen Komponenten der d Basisvektoren f_m von FK1. Die $d - 1$ im Facet liegenden Basisvektoren f_m ($m = 0 \dots d - 2$) sind Verbindungsvektoren vom Ursprung von FK1, dem Vertex $\mathcal{F}_{d-1} = \mathcal{V}_u$, zu den Vertizes \mathcal{F}_m , die den Vertizes $\mathcal{V}_{n(m)}$ des Simplexes 1 entsprechen. $n(m)$ ist dabei eine Permutation der Vertizes, die den Facetvertizes die entsprechenden Simplexvertizes zuordnet. Der nicht im Facet liegende Basisvektor von FK1, f_{d-1} , ist der Verbindungsvektor von \mathcal{V}_u zu dem nicht im Facet liegenden Vertex $\mathcal{V}_{n(d-1)}$ des Simplexes 1. Der Ortsvektor t_m von Vertex $\mathcal{V}_{n(m)}$ ($m = 0 \dots d - 1$) hat in SK1 die Komponenten

$$t_m^i = 0,$$

wenn t_m gleich dem Ursprung von SK1 ($n(m) = d$) ist und sonst

$$t_m^i = \delta_{n(m)}^i.$$

Im Koordinatensystem SK1 sind die Komponenten der FK1-Basisvektoren f_m dann:

$$f_m^i = t_m^i - u^i \quad \text{für } i, m = 0 \dots d - 1.$$

Sie können zusammengefasst als Matrix $f^i_{\hat{k}}$ verwendet werden, um die Komponenten x^i eines im Koordinatensystem FK1 gegebenen Punktes x im Koordinatensystem SK1 darzustellen:

$$x^i = f^i_{\hat{k}} x^{\hat{k}} + u^i. \quad (9.7)$$

Die gesuchte Transformation von SK1 nach FK1 erhalten wir durch Auflösen dieser Gleichung nach $x^{\hat{k}}$:

$$x^{\hat{k}} = M^{\hat{k}}_i x^i + b^{\hat{k}} \quad (9.8)$$

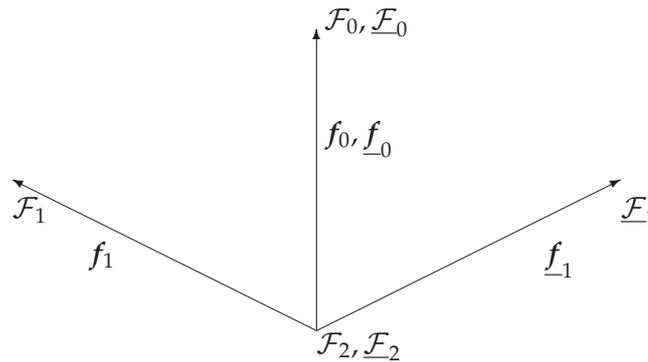


Bild 9.2: Ausrichtung der beiden Facetkoordinatensysteme zweier über die Kante f_0, \underline{f}_0 benachbarter Simplexes. \mathcal{F}_i sind die Vertices des Simplexes 1, $\underline{\mathcal{F}}_i$ diejenigen des Simplexes 2. f_i, \underline{f}_i sind die Basisvektoren der beiden Simplexes.

mit der Inversen der Spaltenmatrix aus den Basisvektoren von FK1

$$M^{\hat{k}}_i = \left(f^i_{\hat{k}} \right)^{-1} \quad (9.9)$$

und

$$b^{\hat{k}} = -M^{\hat{k}}_i u^i. \quad (9.10)$$

Die Transformation von SK2 nach FK2 kann genauso berechnet werden. Die gesuchte Transformation 3 von FK2 nach SK2 ist die Inverse von Gleichung (9.8) bzw. direkt Gleichung (9.7):

$$x^{\hat{k}} = O^{\hat{k}}_{\hat{l}} x^{\hat{l}} + d^{\hat{k}}. \quad (9.11)$$

Zur Transformation 2

Die Transformation 2 transformiert zwischen den Facetkoordinatensystemen der beiden benachbarten Simplexes. Da die Koordinatenursprünge zusammenfallen, handelt es sich hier um eine homogene Transformation. Die gesuchte Transformationsmatrix N transformiert die in FK1 gegebenen Komponenten $x^{\hat{l}}$ eines Vektors x in das Koordinatensystem FK2:

$$x^{\hat{l}} = N^{\hat{l}}_{\hat{k}} x^{\hat{k}}. \quad (9.12)$$

Die beiden Facetkoordinatensysteme (Bild 9.2) sind so ausgerichtet, dass eine Reihe einfacher Beziehungen gilt. Für die Basisvektoren der beiden Facetkoordinatensysteme gilt:

$$f_m = \underline{f}_m \quad \text{für } m = 0 \dots d - 2.$$

Mit

$$f^{\hat{l}}_m = \delta^{\hat{l}}_m, \quad \underline{f}^{\hat{l}}_{-m} = \delta^{\hat{l}}_m$$

9 Triangulierung d -dimensionaler Räume

und

$$\underline{f}_{-m}^{\hat{i}} = N_{\hat{k}}^{\hat{i}} \underline{f}_m^{\hat{k}} \quad \text{für } m = 0 \dots d-2$$

folgt:

$$N_{\hat{k}}^{\hat{i}} = \delta_{\hat{k}}^{\hat{i}} \quad \text{für } i = 0 \dots d-1, k = 0 \dots d-2. \quad (9.13)$$

Für die Transformation eines Vektors \underline{v} (\underline{v} in FK2) gilt:

$$\begin{aligned} \langle \underline{v}, \underline{f}_i \rangle &= \langle \underline{v}, \underline{f}_i \rangle \quad \text{mit } \underline{f}_i = \underline{f}_i \quad \text{für } i = 0 \dots d-2 \\ \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle &= \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Die Metrik im Facetkoordinatensystem FK1 sei \underline{g} mit den Komponenten g_{ik} , in FK2 \underline{g} mit den Komponenten \underline{g}_{ik} ($i, k = 0 \dots d-1$). Die $(d-1)$ -dimensionale Metrik innerhalb des Facets sei $\bar{\underline{g}}$ mit den Komponenten \bar{g}_{ik} ($i, k = 0 \dots d-2$). Es gilt $g_{ik} = \underline{g}_{ik} = \bar{g}_{ik}$ für $i, k = 0 \dots d-2$.

In Komponenten lassen sich die Gleichungen 9.14 dann schreiben:

$$\begin{aligned} g_{ik} \underline{v}^{\hat{i}} \underline{v}^{\hat{k}} &= \underline{g}_{ik} \underline{v}^{\hat{i}} \underline{v}^{\hat{k}} \quad \text{mit } \underline{v}_i = \underline{v}_i \quad \text{für } i = 0 \dots d-2 \\ g_{ik} \underline{v}^{\hat{i}} \underline{v}^{\hat{k}} &= \underline{g}_{ik} \underline{v}^{\hat{i}} \underline{v}^{\hat{k}}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Aus diesen Bedingungen lässt sich nach etwas längerer Rechnung die Transformationsmatrix N bestimmen (der besseren Lesbarkeit halber sind in den Matrizen die Akzente $\hat{}$ weggelassen, die über allen Indizes stehen müssten).

Für $d = 2$:

$$N_{\hat{k}}^{\hat{i}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{|\underline{g}|} \left[g_{10} + \underline{g}_{10} \sqrt{\frac{|\underline{g}|}{\bar{g}}} \right] \\ 0 & -\sqrt{\frac{|\underline{g}|}{\bar{g}}} \end{pmatrix}. \quad (9.16)$$

Für $d = 3$:

$$N_{\hat{k}}^{\hat{i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{|\underline{g}|} \left[g_{11} (g_{20} + \underline{g}_{20} \sqrt{\frac{|\underline{g}|}{\bar{g}}}) - g_{10} (g_{21} + \underline{g}_{21} \sqrt{\frac{|\underline{g}|}{\bar{g}}}) \right] \\ 0 & 1 & \frac{1}{|\underline{g}|} \left[g_{00} (g_{21} + \underline{g}_{21} \sqrt{\frac{|\underline{g}|}{\bar{g}}}) - g_{10} (g_{20} + \underline{g}_{20} \sqrt{\frac{|\underline{g}|}{\bar{g}}}) \right] \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{|\underline{g}|}{\bar{g}}} \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Die komplette Transformation

Die Transformation zwischen zwei Simplexes besteht aus der Verkettung der Transformation vom Koordinatensystem des Simplexes 1 (SK1) in sein Facetkoordinatensystem FK1, der Transformation von FK1 in das Facetkoordinatensystem von Simplex 2 (FK2) und der Transformation von FK2 in das Koordinatensystem von Simplex 2 (SK2):

$$\underline{x}' = \underline{ONM}\underline{x} + \underline{ONb} + \underline{d}. \quad (9.18)$$

Die gesamte Transformation

$$\underline{x}' = \underline{Lx} + \underline{a} \quad (9.19)$$

mit der Transformationsmatrix

$$L = ONM \quad (9.20)$$

und dem Verschiebevektor

$$a = ONb + d \quad (9.21)$$

wird für jedes Facet jedes Simplexes benötigt, das beim Raytracing von einem Lichtstrahl durchquert wird; das sind im Verlauf eines Fluges so gut wie alle.

Für kleinere oder symmetrische Raumbereiche (bei Rotationssymmetrie in ϕ kann z. B. für alle ϕ -Werte die gleiche Matrix verwendet werden) werden die Transformationsmatrizen bei der Generierung der Triangulierung für alle Simplizes berechnet und gespeichert. Bei größeren oder weniger symmetrischen Räumen ist es möglich, sie nur bei Bedarf zu berechnen. Sie werden dann zur Beschleunigung des Programms in einem Cache zwischengespeichert.

9.8 Geodäten in Regge-Raumzeiten

Mit der im vorigen Abschnitt beschriebenen Koordinatentransformation zwischen zwei Simplizes können in einer Regge-Raumzeit Geodäten berechnet bzw. Vektoren parallelverschoben werden. Der folgende Algorithmus setzt undurchsichtige Objekte voraus.

Algorithmus 9.2: Berechnung von Geodäten

- (1) Solange ausführen, bis Bahnparameter der Geodäte den gewünschten Wert erreicht hat:
 - (1.1) Schnittpunkt mit Rand des Simplexes bestimmen.
 - (1.2) Anschließendes Simplex bestimmen.
 - (1.3) Transformation in das Nachbarsimplex bestimmen.
 - (1.4) Falls dem aktuellen Simplex Oberflächenelemente von Objekten zugeordnet sind, Schnittpunkte suchen. Falls gefunden, Schleife (1) mit dem kleinsten Bahnparameter abbrechen.
 - (1.5) Sonst Ort und Richtung des Schnittpunkts der Geodäte mit dem Rand des Simplexes in das Koordinatensystem des benachbarten Simplexes transformieren.
 - (2) Aktuelle Ortskoordinate und Richtung sowie ein eventuell getroffenes Oberflächenelement eines Objekts zurückgeben.
-

Die Schleife (1) ist der Kern des Raytracingalgorithmus und wird sehr oft ausgeführt, so dass sich hier eine Optimierung lohnt:

- Die aus Transformationsmatrix L und Verschiebungsvektor a bestehenden Transformationen sind auf Cache-Lines ausgerichtet abgespeichert, um die Zugriffe auf den Hauptspeicher zu minimieren.
- Die Punkte (1.1) bis (1.3) werden vor (1.4) ausgeführt, da die Transformation in das Nachbarsimplex mit großer Wahrscheinlichkeit nicht im Prozessor-Cache liegt. Ein nach (1.3) ausgeführter Prefetch-Befehl kann die Transformation parallel zu der nachfolgenden Ermittlung von eventuellen Schnittpunkten mit Objekten (1.4) aus dem Hauptspeicher in den Cache laden.

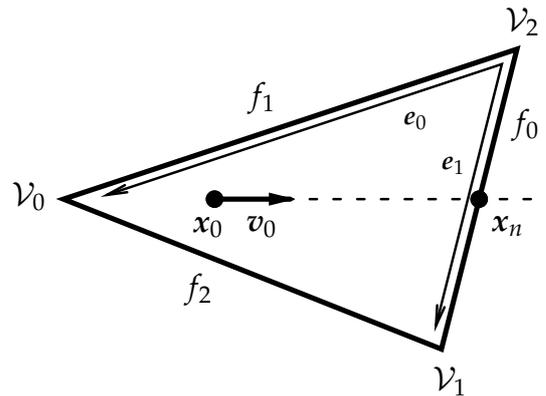


Bild 9.3: Schnittpunkt x_n einer Geraden $x_0 + tv_0$ mit dem Simplexrand. \mathcal{V}_i sind die Vertices, f_i die Rand-, „flächen“ des Simplexes, e_i sind die Basisvektoren des lokalen Simplexkoordinatensystems.

- Die Transformation ist als Templatespezialisierung für die verschiedenen Dimensionen in Inline-Assembler unter Nutzung der SSE-Vektorbefehle der x86-Prozessoren geschrieben.

Mit dem beschriebenen Geodätenalgorithmus werden die Lichtstrahlen von der Kamera zu den darzustellenden Objekten zurückverfolgt. Für die Berechnung von Kamerabewegungen oder die Berechnung von größeren, „geradlinigen“ Objekten, wie beispielsweise den Stäben in Bild 3.2 (S. 36) müssen zusätzlich zur Verfolgung von Geodäten noch Vektoren paralleltransportiert werden. Eine zweite Routine, ähnlich aufgebaut wie die oben beschriebene, erlaubt beim Verfolgen der Geodäte zusätzlich die Mitführung eines Satzes von Vektoren, beispielsweise der Basisvektoren einer lokalen Tetrade. Der Paralleltransport eines Vektors innerhalb einer Zelle ist einfach: Seine Komponenten bleiben konstant. Beim Übergang in die Nachbarzelle werden die Vektoren wie der Geodätentangentenvektor in das Nachbarkoordinatensystem transformiert.

Die Berechnung des Schnittpunkts einer Geodäte mit dem Rand des Simplexes ist ebenfalls dimensionsunabhängig formuliert (Bild 9.3). Die Geodäte ist durch einen Startpunkt x_0 und einen Richtungsvektor v_0 gegeben: $x(t) = x_0 + tv_0$. Ein Simplex der Dimension d hat d durch den Koordinatenursprung \mathcal{V}_d gehende Randsimplizes f_i ($i = 0 \dots d - 1$), die jeweils dem Vertex \mathcal{V}_i gegenüberliegen. Mit „gegenüberliegen“ ist gemeint, dass das Randsimplex durch alle Vertices außer \mathcal{V}_i aufgespannt wird. Ein Punkt liegt dann innerhalb der Hyperebene des Randsimplexes f_i ($i = 0 \dots d - 1$), wenn seine x^i -Koordinate gleich null ist. Die Geodäte schneidet die Hyperebene des Randsimplexes f_i mit dem Bahnparameter t_n im Punkt x_n , wenn gilt:

$$x_n^i = x_0^i + t_n v_0^i = 0.$$

Der Bahnparameter ist

$$t_n = -x_0^i / v_0^i.$$

Wenn für ein Randsimplex ein solcher Bahnparameter mit $t_n > 0$ gefunden wird und der Schnittpunkt innerhalb des Randsimplexes liegt ($0 \leq x_n^i \leq 1$ und $\sum_{i=0}^{d-1} x_n^i \leq 1$, siehe Gleichung (9.1)), kann die Schnittpunktberechnungsroutine mit diesem Schnittpunkt zurückkehren.

Wenn kein Schnittpunkt mit einem der d durch den Koordinatenursprung gehenden Randsimplizes gefunden wurde, muss die Geodäte das Simplex durch das dem Ursprung gegenüberliegende Randsimplex f_d verlassen. Dieses liegt in der durch die Ebenengleichung

$$\sum_{i=0}^{d-1} x^i = 1$$

bestimmten Ebene. Setzt man die Geradengleichung für die Geodäte ein, ergibt sich:

$$\sum_{i=0}^{d-1} (x_0^i + t_n v_0^i) = 1.$$

Mit $x_s = \sum_{i=0}^{d-1} x_0^i$ und $v_s = \sum_{i=0}^{d-1} v_0^i$ ist der Bahnparameter des Schnittpunkts

$$t_n = (1 - x_s) / v_s.$$

Zurückgegeben werden der Index i des durchstoßenen Randsimplexes f_i sowie der Bahnparameter t_n und die Koordinaten $x_n = x_0 + t_n v_0$ des Schnittpunktes.

Algorithmus 9.3: Schnittpunkt einer Geraden $x_0 + t v_0$ mit Simplexrand suchen (Bild 9.3)

- (1) Für alle Randsimplizes i ($0 \dots d - 1$) Test, ob die Gerade das dem Vertex \mathcal{V}_i gegenüberliegende Randsimplex schneidet:
 - (1.1) Wenn $v_0^i \geq 0$: mit dem nächsten Randsimplex weitermachen, da Vektor vom Randsimplex wegzeigt.
 - (1.2) Sonst Schnittpunkt x_n mit der dem Vertex \mathcal{V}_i gegenüberliegenden, durch alle anderen Vertizes des Simplexes aufgespannten Hyperebene berechnen: $t_n = -x_0^i / v_0^i$, $x_n = x_0 + t_n v_0$.
 - (1.3) Wenn Schnittpunkt im Simplex liegt, d. h. wenn $t_n \geq 0$, $0 \leq x_n^i \leq 1$ und $\sum_{i=0}^{d-1} x_n^i \leq 1$ (Gleichung (9.1)), x_n , t_n und den Index i des Randsimplexes zurückgeben.
- (2) Wenn bisher kein Schnittpunkt gefunden wurde, liegt dieser in dem dem Koordinatenursprung gegenüberliegenden Randsimplex: Mit $x_s = \sum_{i=0}^{d-1} x_0^i$ und $v_s = \sum_{i=0}^{d-1} v_0^i$ den Bahnparameter $t_n = (1 - x_s) / v_s$, den Schnittpunkt $x_n = x_0 + t_n v_0$ und den Index d des Randsimplexes zurückgeben.

9.9 Objekte in der Regge-Raumzeit

Dieser Abschnitt beschreibt Datenstrukturen und Algorithmen zur Verwaltung von Objekten, die im relativistischen Flugsimulator (Kapitel 3, S. 27) betrachtet werden können.

9.9.1 Datenstrukturen

Objekte in einer d -dimensionalen Raumzeit werden durch ihre $(d - 1)$ -dimensionale Randfläche repräsentiert. Diese wird als Netz aus $(d - 1)$ -dimensionalen Simplizes (Facets) gespeichert. Für Raumzeiten, d. h. für $d_t = 1$ stellt ein solches Netz die $(d_s + d_t - 1)$ -dimensionale Weltröhre eines Objekts dar, für reine Räume ($d_t = 0$) ist es einfach die $(d_s - 1)$ -dimensionale Oberfläche des Objekts.

Ein Facet eines Objekts kann im Prinzip in mehrere Raumzeitzellen hineinragen. Für ein solches Facet wird daher in *jeder* dieser Zellen im lokalen Simplexkoordinatensystem ein $(d - 1)$ -Simplex (im Folgenden *Oberflächenelement* genannt) angelegt. Jeder Zelle der Raumzeit ist eine Liste der Oberflächenelemente zugeordnet, die diese Zelle schneiden (für die meisten Zellen ist diese Liste leer).

Beim Verfolgen der Photonenbahn durch die Zellen der Raumzeit werden in jeder Zelle die Schnittpunkte der geradlinigen Bahn mit allen dieser Zelle zugeordneten Oberflächenelementen gesucht. Der Schnittpunkt mit dem kleinsten Bahnparameter bestimmt das sichtbare Objekt. Mit dieser Struktur werden folgende Ziele erreicht:

- Optimierung durch implizite *räumliche Partitionierung*: Eine Zuordnung der Oberflächenelemente zu den sie enthaltenden Raum(-zeit)gebieten beschränkt die Schnittpunktsuche während der Strahlverfolgung auf wenige Schnittberechnungen. Durch die feine Aufteilung der Raumzeit werden den allermeisten Zellen gar keine Oberflächenelemente zugeordnet, so dass dort die Schnittberechnung entfällt. Die für die Berechnung eines Bildpunktes benötigte Rechenzeit ist also im Wesentlichen unabhängig von Anzahl und Komplexität der insgesamt darzustellenden Objekte.
- Die Zerlegung der Objekte in viele unabhängige Unterelemente, die jeweils in denjenigen Raumzeitzellen gespeichert werden, in denen sie lokalisiert sind, erlaubt auch die Darstellung großer, über einen signifikanten Bereich der gekrümmten Raumzeit ausgedehnter Objekte. Damit können wie im Beispiel der Stäbe in Kapitel 3 *Relativistischer Flugsimulator*, S. 27 großräumige Auswirkungen der Raumkrümmung sichtbar gemacht werden.
- Die Beschränkung auf $(d - 1)$ -dimensionale Simplizes als Oberflächenelemente vereinfacht in der innersten Raytracingschleife (Algorithmus 9.2 (1.4)) die Schnittpunktsuche (Abschnitt 9.9.3, S. 141).

9.9.2 Darstellbare Objekte

Die verschiedenen Objekttypen sind als mit der Raumzeitdimension parametrisierte Klassenhierarchie implementiert. Als Objekttypen stehen simplexartige Objekte (Dreiecke, Tetraeder), würfelförmige Objekte (Quadrate, Würfel) und geodätische Stäbe (in 3D mit quadratischem Querschnitt) zur Auswahl. Alle diese Objekte sind aus Dreiecken (in 3D) bzw. Liniensegmenten (in 2D) zusammengesetzt.

Bei der Konstruktion der Objekte werden die im letzten Unterkapitel beschriebenen Methoden zur Geodätenberechnung und Parallelverschiebung angewandt.

Die in Kapitel 3 *Relativistischer Flugsimulator*, S. 27 abgebildeten geodätischen Stäbe werden beispielsweise wie folgt aus Dreiecken zusammengesetzt: Die Geometrie eines Stabes ist durch den Startpunkt, die Startrichtung, den Drehwinkel um die Längsachse, die Stablänge und die Kantenlänge des quadratischen Querschnitts festgelegt. Die Mittellinie des Stabes ist eine vom Startpunkt in die Startrichtung ausgehende Geodäte mit der gege-

benen Länge. Der Stab selbst besteht aus vielen aneinandergereihten Quadratern, deren Eckpunkte wie folgt bestimmt werden. Der Querschnitt am Startpunkt ist durch ein senkrecht auf der Mittellinie stehendes Quadrat gegeben. Die Richtungsvektoren von der Mittellinie zu den Eckpunkten dieses Quadrats werden für die Bestimmung der Eckpunkte der anderen Stabsegmente längs der Mittellinie parallelverschoben. In regelmäßigen Abständen wird dann auf der Mittellinie mit Hilfe dieser Richtungsvektoren ein neuer quadratischer Querschnitt produziert. Die Eckpunkte zweier aufeinanderfolgender Querschnitte definieren nun ein aus vier Rechtecken bestehendes Segment der Staboberfläche. Jedes dieser Rechtecke wird noch in zwei Dreiecke zerlegt. Diese Vorgehensweise garantiert, dass der Stab lokal immer gerade verläuft und sein Querschnitt konstant bleibt (vorausgesetzt ist, dass der Raum lokal flach genug ist).

9.9.3 Schnittpunktsuche

Ein Oberflächenelement wird durch die d Vertizes $\mathbf{p}_i, i = 0 \dots d - 1$ definiert.

Um eine Gerade $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ mit dem durch die \mathbf{p}_i aufgespannten Oberflächenelement zu schneiden, muss folgende Gleichung nach t und u^i aufgelöst werden:

$$\mathbf{x} + t\mathbf{v} = \mathbf{p}_{d-1} + \sum_{i=0}^{d-2} u^i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{d-1}) \quad (9.22)$$

bzw. als Matrixgleichung:

$$\begin{pmatrix} t \\ u^0 \\ u^1 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^0 & p_{d-1}^0 - p_0^0 & p_{d-1}^0 - p_1^0 & \dots \\ v^1 & p_{d-1}^1 - p_0^1 & p_{d-1}^1 - p_1^1 & \dots \\ v^2 & p_{d-1}^2 - p_0^2 & p_{d-1}^2 - p_1^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_{d-1}^0 - x^0 \\ p_{d-1}^1 - x^1 \\ p_{d-1}^2 - x^2 \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

Die resultierenden u^i ergeben, falls $0 \leq u^i \leq 1$ und $\sum_{i=0}^{d-2} u^i \leq 1$ gilt, die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit dem Oberflächenelement in einem Koordinatensystem auf dem Oberflächenelement mit den Basisvektoren $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{d-1}), i = 0 \dots d - 2$. Sie können als Texturkoordinaten zur Festlegung der Farbe des Objektpunkts verwendet werden. Für den Flugsimulator wurden als Texturen einfache Karo- oder Streifenmuster ausgewählt, die eine Tiefenwahrnehmung erleichtern.

Der Bahnparameter t des Schnittpunktes entscheidet bei Schnittpunkten mit mehreren Oberflächenelementen, welches das nächste und damit das sichtbare ist.

10 Tests des Regge-Raytracers

Die Regge-Zerlegung einer Raumzeit ist nur eine Näherung an die zu untersuchende glatte Raumzeit. Objekt- und Kamerapositionen, Richtungen und Geodäten unterscheiden sich zwangsläufig von ihren Entsprechungen in der anzunähernden glatten Raumzeit.

Es gibt diverse Fehlerquellen: Die Umrechnung von Startpositionen und -richtungen von Geodäten zwischen glatter Raumzeit und Regge-Raumzeit ist aufgrund der verschiedenen inneren Krümmungen prinzipiell nicht eindeutig oder „richtig“ machbar. Eine Geodäte läuft an vielen Hinges vorbei und wird jedesmal im Vergleich zu einer Geodäte im glatten Raum leicht abgelenkt. Am Anfang der Geodäte auftretende Richtungsfehler wirken sich dabei besonders stark aus. In der Summe bewirken diese Abweichungen eine Art Bildrauschen.

Da der Verlauf von Geodäten an sehr vielen Stellen verfälscht wird, wäre eine analytische Fehlerbetrachtung sehr kompliziert. Ein mit statistischen Methoden gewonnenes Maß für die „Güte“ einer Geodäte ist ebenfalls schlecht fassbar, da diese von sehr vielen Faktoren abhängt, wie z. B. Start- und Endpunkt, Länge, Richtung und Nähe zum Schlund.

Wir wählen daher einen pragmatischen Ansatz: Das Ziel des Flugsimulators ist es, anhand von Bildern eine qualitative Orientierung in einem gekrümmten Raum zu ermöglichen. Für die Qualität dieser Bilder kann man als Kriterium heranziehen, wie weit das Abbild eines dargestellten Objekts von der im glatten Raum exakt berechneten, „richtigen“ Position abweicht.

Der wesentliche qualitätsbestimmende Faktor ist die Gitterauflösung der Regge-Raumzeit. Je gröber die Auflösung, desto größer sind die Defizitwinkel an den Hinges. Knapp links bzw. knapp rechts an einem Hinge vorbeilaufende Geodäten werden relativ zueinander genau um diesen Defizitwinkel abgelenkt; große Defizitwinkel bewirken im weiteren Verlauf der Geodäten große Abweichungen.

Die im Flugsimulator verwendete Triangulierung der Wurmlochmetrik (Abschnitt 7.3 *Das Morris-Thorne-Wurmloch*, S. 109) setzt die Gitterpunkte \mathcal{P}_{ijk} an die auf einem kubischen Gitter liegenden Koordinaten (l_i, θ_j, ϕ_k) des l - θ - ϕ -Koordinatenraums. Die Indizes i, j und k laufen bei einer gegebenen Auflösung N von 0 bis $N - 1$, $N/2 - 1$ bzw. $N - 1$. Je nach der zur Verfügung stehenden Rechenleistung wurde mit verschiedenen Auflösungen N im Bereich von 49 bis 149 gearbeitet. Die endgültigen Bilder und Filme wurden auf dem Mozart-Cluster¹ mit $N = 149$ gerechnet (siehe auch Kapitel 11 *Implementierung des relativistischen Flugsimulators*, S. 147).

Bild 10.1 zeigt Bild 3.3a, S. 37 mit der im interaktiven Flugsimulator verwendeten Bildschirmauflösung (320×240 Pixel) in drei verschiedenen Gitterauflösungen. Im rechten Bild ist jeweils farbkodiert, wie weit ein sichtbarer Objektpunkt im Vergleich zu einem mittels Integration der Geodätengleichung berechneten Bild „daneben“ liegt: Für jeden in der Regge-Zerlegung von der Kamera zum Objekt verfolgten Lichtstrahl wird zusätzlich mit einem halbanalytischen Verfahren (Müller, 2006) die Geodäte in der exakten Wurm-

¹Institute of Parallel and Distributed Systems (IPVS) der Universität Stuttgart, Mozart-Cluster,
<http://www.ipvs.uni-stuttgart.de/abteilungen/sgs/abteilung/ausstattung/> ↵ [mozart/start](#).

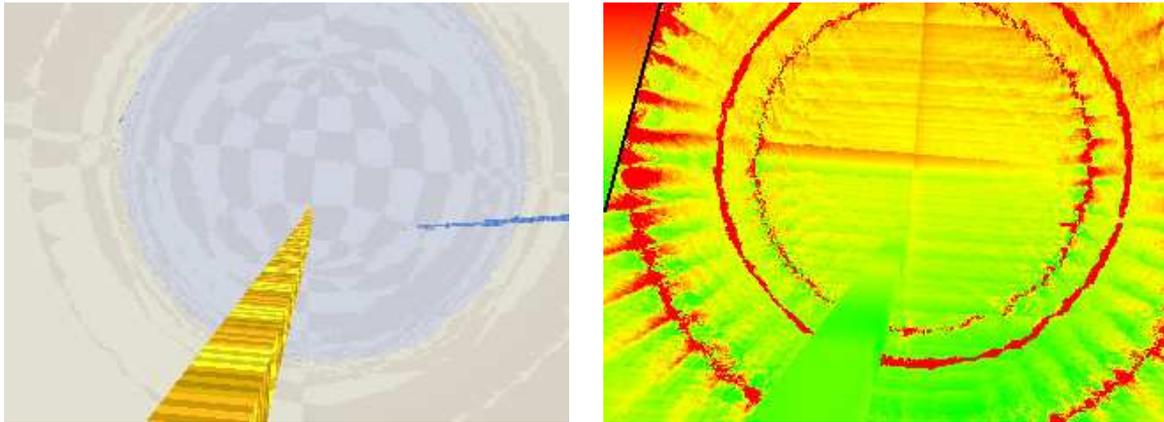
lochmetrik zwischen Kamera und getroffenem Objektpunkt berechnet. Die Startrichtung dieser Geodäte zeigt an, wo der entsprechende Objektpunkt „in Wirklichkeit“ zu sehen wäre. Der Winkelunterschied der Startrichtungen der beiden Geodäten ist also ein Maß für die sichtbaren Abweichungen im Bild. Die Breite des Keils in der linken oberen Bildecke gibt für die jeweilige Farbe den Betrag der Abweichung an.

Wie zu erwarten nimmt der Fehler bei höherer Auflösung ab. Bei der höchsten Auflösung (149) ist er außerhalb dreier konzentrischer Ringe vernachlässigbar (Die Bilder in dieser Arbeit wurden mit dieser Auflösung berechnet).

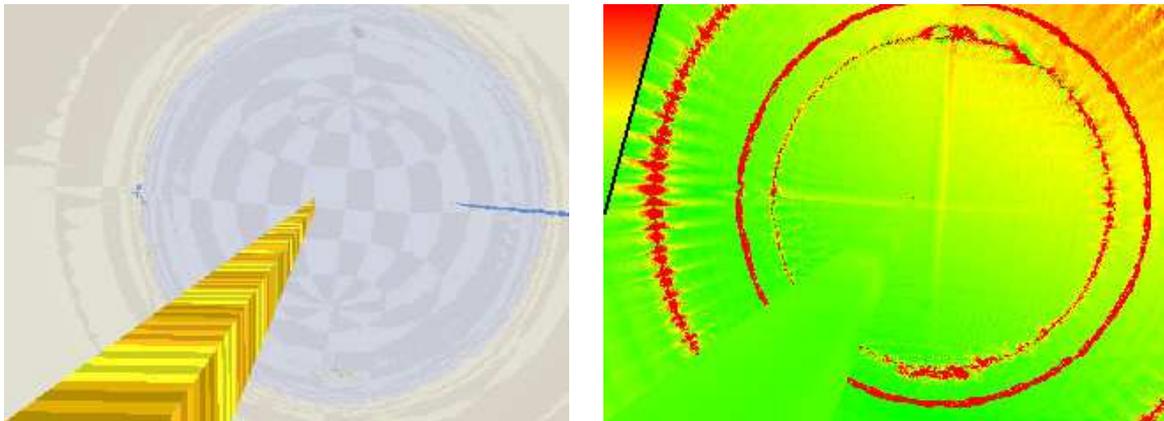
Der mittlere Ring stellt die Grenze zwischen den beiden Universen, den Wurmlochschlund dar. Lichtstrahlen, die von dort kommen, erfahren eine große Ablenkung, sie könnten im Extremfall den Schlund sogar mehrfach umkreisen. Der äußere Ring ist ein „Einsteinring“. Alle von ihm kommenden Lichtstrahlen haben ihren Ursprung in oder nahe einem der Kamera diametral gegenüberliegenden Punkt hinter dem Wurmloch in derselben Hohlkugel. Der innere Ring ist ebenfalls ein „Einsteinring“. Hier haben alle Lichtstrahlen ihren Ursprung in einem Punkt in der anderen Hohlkugel.

In allen drei Fällen ist die Abbildung von Objekt- zu Bildpunkt in gewissem Sinne pathologisch. Da diese mit größeren Fehlern behafteten Bildteile bei höherer Gitterauflösung im Wesentlichen nur eindimensionale Untermengen sind, stören sie den Gesamtbildeindruck nicht besonders.

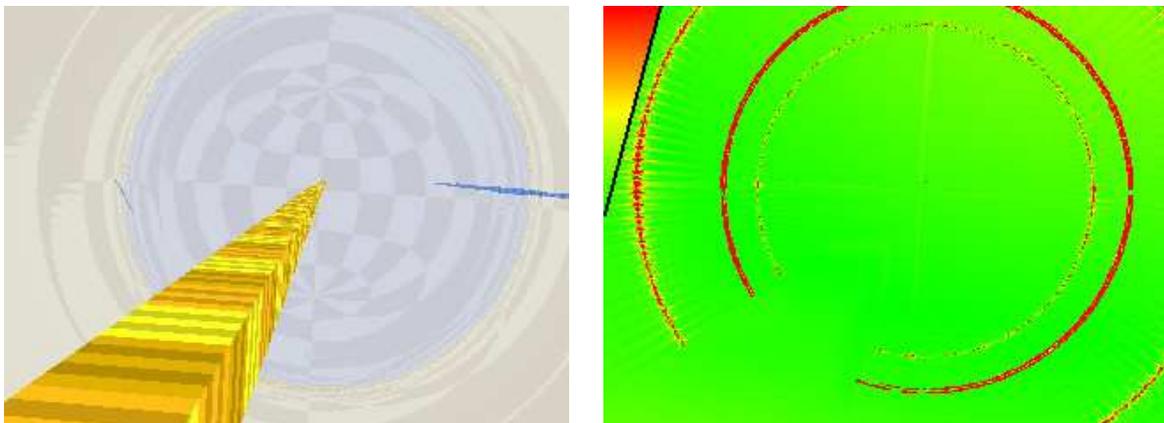
An den Bildern wird ein weiterer prinzipbedingter Fehler deutlich: Der Stab befindet sich nicht in allen drei Bildern an der gleichen Stelle. Besonders deutlich ist dies in der Darstellung mit der niedrigsten Auflösung. Die Stäbe werden in der Szenenbeschreibung durch ihre Startpunkte und Startrichtungen definiert. Bei der Transformation der Richtung vom glatten Raum in die diskrete Regge-Zerlegung ergeben sich zwangsläufig Winkelfehler, besonders bei kleiner räumlicher Auflösung. Richtungsfehler am Start wachsen längs des Stabes an. Als Erweiterung ist geplant, Stäbe durch ihre zwei Endpunkte festzulegen. Dies würde derartige Fehler deutlich reduzieren.



(a) Gitterauflösung $49 \times 24 \times 49$ (in l, θ, ϕ).



(b) Gitterauflösung $79 \times 39 \times 79$ (in l, θ, ϕ).



(c) Gitterauflösung $149 \times 74 \times 149$ (in l, θ, ϕ).

Bild 10.1: In der Regge-Zerlegung gerechnetes Bild (links) und die Abweichung vom „korrekten“ Bild (rechts) für drei verschiedene Gitterauflösungen. Die Abweichung ist farbkodiert: Die Farbe eines Bildpunktes gibt den Abstand des mit dem Regge-Verfahren gerechneten Bildpunktes von seiner korrekten Position an. In der linken oberen Bildecke ist ein Keil eingezeichnet, dessen Breite bei der betreffenden Farbe gleich diesem Abstand ist.

11 Implementierung des relativistischen Flugsimulators

Dieses Kapitel enthält einige Details der Implementierung des Flugsimulators sowie eine Bedienungsanleitung.

11.1 Übersicht über die Komponenten

Da der Flugsimulator auch auf größeren, eventuell räumlich entfernten Rechnerclustern laufen soll, wurde er als Client-Server-System implementiert.

Bild 11.1 zeigt den Aufbau des Flugsimulators und die Verteilung der verschiedenen Komponenten auf die beteiligten Rechnerknoten. Links im Bild ist der Clientrechner (ein beliebiger Standard-PC unter Linux oder Mac OS X) zu sehen. Auf ihm läuft zum Ersten das für die Flugsteuerung zuständige Programm `flachland_client`¹. Mit verschiedenen Eingabemedien wie Tastatur, Maus, Joystick oder Spaceball (eine 3D-Maus) kann die Bewegung und Orientierung der Kamera bzw. ausgewählter Objekte interaktiv gesteuert werden. Diese Benutzereingaben werden über ein UDP-Netzwerkprotokoll zum Serverrechner gesandt.

Als zweites Programm läuft auf dem Client-PC ein RTSP²-Client zur Darstellung eines MPEG4-kodierten Video-Streams. Hierzu kann ein Standard-Video-Player wie z. B. `mplayer`³ verwendet werden. Die benötigte Bandbreite ist aufgrund der Komprimierung und der niedrigen Bildauflösung sehr gering (einige 10 kByte/s), so dass eine Nutzung auch über das Internet möglich ist (angedeutet als gestrichelte Linie).

Das Serverprogramm ist ebenfalls in mehrere Komponenten aufgeteilt. Die wichtigste ist der `flachland_server`. Dieser nimmt die Benutzereingaben vom `flachland_client` entgegen und berechnet in Echtzeit die Einzelbilder des aktuellen Anblicks. Es ist zwar auch eine Single-Process-Variante vorgesehen, aber um interaktive Bildraten (ca. 10 fps) zu erreichen, ist der `flachland_server` auch auf MPI⁴-basierten Rechnerclustern lauffähig. Auf dem Masterknoten läuft ein Prozess, der die zu berechnenden Bildpixel auf die einzelnen Slaveknoten verteilt, die Ergebnisse zu einem Gesamtbild zusammensetzt und dieses in einem Shared-Memory-Bereich ablegt.

Als zweite Komponente läuft auf dem Masterknoten des Serverclusters der Videosever `rtspserver`. Dieses Programm generiert aus den vom `flachland_server` in einem Shared-Memory-Bereich bereitgestellten Einzelbildern einen komprimierten (MPEG4) Videodatenstrom, der über das Netzwerk auf dem Clientrechner dargestellt werden kann (remote frame buffer). `rtspserver` ist eine Erweiterung der Video-Capture- und Stream-Applikation `spook`⁵.

¹E. A. Abbotts Roman *Flatland* (Abbott, 1884) war der Namensgeber der Flugsimulatorkomponenten „Flachland“-Client und -Server, welche die zweidimensionale flache Romanwelt Abbotts auf höhere Dimensionen und gekrümmte Mannigfaltigkeiten erweitern.

²RTSP: *Real Time Streaming Protocol*, Protokoll zur Übertragung von Multimediainhalten in Echtzeit.

³The MPlayer Project, <http://www.mplayerhq.hu/>.

⁴MPI: *Message Passing Interface*. Siehe <http://www.mpi-forum.org/>.

⁵Spook Live Video Streamer, <http://www.litech.org/spook/>.

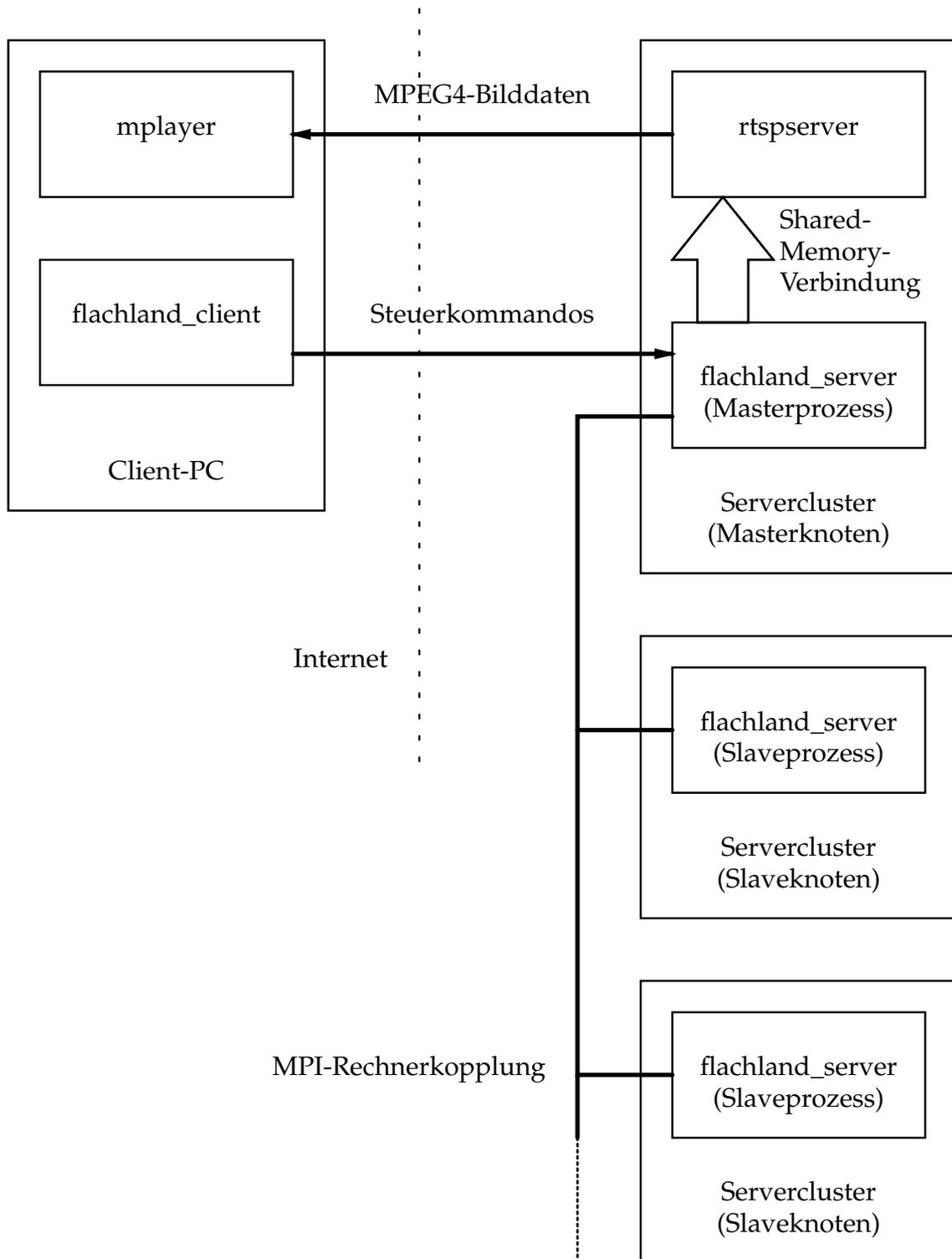


Bild 11.1: Rechnerstruktur des Flugsimulators.

11.2 Implementierungen auf verschiedenen Systemen

Der Flugsimulator wurde auf verschiedenen Rechnern implementiert:

- verschiedene Single-Processor-Systeme unter Linux und Mac OS X
- eigenes Testcluster: 3 Knoten mit AMD Athlon XP, 2000 MHz, Linux
- eigener SMP-Rechner: 2 × Quad Core Xeon, 2333 MHz, Linux
- mmoovis-Cluster des Instituts für Visualisierung und Interaktive Systeme (VIS) der Universität Stuttgart: 8 Knoten mit Dual AMD Opteron 248, 2200 MHz, Linux
- Phoenix-Cluster der Theoretischen Astrophysik Tübingen: 16 Knoten mit Dual AMD Athlon, 1400 MHz, Linux
- Kepler-Cluster der Universität Tübingen⁶: 98 Knoten mit Dual Intel Pentium III, 650 MHz, Linux
- Mozart-Cluster der Universität Stuttgart⁷: 64 Knoten mit Dual Intel Xeon, 3066 MHz, Linux

Am besten hat sich der Mozart-Cluster der Universität Stuttgart bewährt, sowohl was Performance als auch was Verfügbarkeit angeht. Die in diese Arbeit eingeflossenen Bilder wurden dort berechnet.

11.3 Programmstruktur des `flachland_servers`

Der Flugsimulator ist in C++ geschrieben. Bei der Implementierung standen zwei Ziele im Vordergrund: Erstens eine hohe Ausführungsgeschwindigkeit und zweitens die Möglichkeit durch ein Konfigurationsskript (Abschnitt 11.6 *Szenenbeschreibungssprache*, S. 153) zur Laufzeit die Dimension und die Metrik der zu untersuchenden Welt sowie die darzustellende Szene festzulegen.

Der Schwerpunkt der Anforderungen an die Rechenleistung liegt in der Speicherung und Verarbeitung großer Mengen kleiner Vektoren und Matrizen (Dimension 2–4). Die Nutzung von Standardvektorklassen mit der erwünschten dynamischen Verwaltung der Vektor- und Matrixgröße hätte gravierende Nachteile:

- Pro Vektor bzw. Tensor muss zusätzlich ein Datenelement mit der Vektordimension gespeichert werden.
- Die Speicherung der Vektorelemente erfolgt auf dem Heap; es ist für jeden Vektor zusätzlich ein Pointer zu speichern. Zugriffe auf Elemente erfordern einen weiteren Indirektionsschritt.
- Eine Optimierung von Vektoroperationen durch Loop-Unrolling oder der Einsatz von SSE-Befehlen ist nur eingeschränkt möglich.

Die Möglichkeit, das Programm von vornherein nur für eine fixe Dimension auszulegen, wie z. B. in den von D. Weiskopf (Weiskopf, 2001) und T. Müller (Müller, 2006) implementierten relativistischen Erweiterungen von A. Grönes Raytracer *RayViS* (Gröne, 1996) wurde verworfen, da die Dimensionsunabhängigkeit der Datenstrukturen und Algorithmen ein wichtiges Entwicklungsziel war.

⁶Kepler-Cluster der Universität Tübingen innerhalb des Sonderforschungsbereichs SFB 382, <http://kepler.sfb382-zdv.uni-tuebingen.de/kepler/index.shtml>.

⁷Mozart-Cluster des Instituts für Parallele und Verteilte Systeme (IPVS) der Universität Stuttgart, <http://www.ipvs.uni-stuttgart.de/abteilungen/sgs/abteilung/ausstattung/> ↵ [mozart/start](#).

11 Implementierung des relativistischen Flugsimulators

Als Lösung wurde eine Trennung in einen dimensionsunabhängigen und einen dimensionsabhängigen Programmteil vorgenommen: Der dimensionsunabhängige Teil ist für die Initialisierung, die Client-Server-Kommunikation und die Interpretation des Konfigurationsskripts zuständig. Der dimensionsabhängige Teil ist mit C++-Templates implementiert, die mit der Dimension parametrisiert sind. Diese werden zum Programmstart in allen möglichen Dimensionen (2D oder 3D räumlich und 0D oder 1D zeitlich) instanziiert und können zur Laufzeit ausgewählt werden. Über eine polymorphe Elternklasse greift der dimensionsunabhängige Programmteil abhängig von der Szenenbeschreibung auf die jeweiligen für die gewünschte Dimension optimierten rechenintensiven Kernroutinen zu. Die Vorteile dieser Vorgehensweise sind:

- Der rechenintensive Kern kann dimensionsunabhängig formuliert werden (mit der Dimension als Templateparameter).
- Da die Dimension für die jeweiligen Instanzen zur Compilezeit festliegt, können Schleifen zu Vektoroperationen entrollt werden sowie Kernroutinen durch Templatespezialisierung für die jeweilige Dimension optimiert werden.
- Die Möglichkeiten, die eine objektorientierte Programmierung bietet, bleiben voll erhalten. Die verschiedenen Raumzeit- und Objekttypen können in Klassenhierarchien organisiert werden.

11.4 Speichern der Welt

Die Konstruktion einer Triangulierung ist recht aufwendig, da die Kantenlängen aller Simplexes berechnet werden müssen. Deswegen wurde die Möglichkeit geschaffen, eine einmal berechnete „Welt“ auf Festplatte im HDF5-Format⁸ abzuspeichern und wieder zu laden.

11.5 Bedienung des Flugsimulators

11.5.1 Installation

Der Flugsimulator kann auf den in Abschnitt 11.2, S. 149 aufgelisteten Rechnerarchitekturen installiert werden.

11.5.2 Programmstart

Im Folgenden ist:

server Rechnername des Computerservers

client Rechnername des Visualisierungsclients

Verschiedene Welten (2D, 3D, unterschiedliche Metriken, unterschiedliche Objekte) können in einem dem Serverprogramm übergebenen Konfigurationsskript spezifiziert werden. Die Syntax des Konfigurationsskripts ist in Abschnitt 11.6 *Szenenbeschreibungssprache*, S. 153 beschrieben.

⁸HDF5: portables, an der University of Illinois entwickeltes Datenformat zum Speichern großer Datenmengen. <http://hdf.ncsa.uiuc.edu/>.

Single-Process-Version

1. auf dem Serverrechner im Verzeichnis `rtspserver` den Videosever starten: `spook`
2. auf dem Serverrechner im Verzeichnis `server` den Flachland-Server mit dem Namen des Konfigurationsskripts starten: `flachland_server fl_wh-3d.scm`
3. auf dem Clientrechner den Steuerclient starten: `flachland_client server`
4. auf dem Clientrechner den RTSP-Client starten: `mplayer rtsp://server:5002/`

Multi-Process-Version

Der Servercluster besteht hier aus einem Masterknoten und mehreren Slaveknoten, die über MPI gekoppelt sind. Die für den Server bestimmten Kommandos werden auf dem Masterknoten des Serverclusters eingegeben.

1. auf dem Serverrechner im Verzeichnis `rtspserver` den Videosever starten: `spook`
2. auf dem Serverrechner im Verzeichnis `server` den Flachland-Server mit dem Konfigurationsskript starten: `mpirun flachland_server fl_wh-3d.scm`
3. auf dem Clientrechner den Steuerclient starten: `flachland_client server`
4. auf dem Clientrechner den RTSP-Client starten: `mplayer rtsp://server:5002/`

Multi-Process-Version auf dem Mozart-Cluster

Beim Mozart-Cluster ergab sich die Problematik, dass erstens die Rechnerknoten keine direkte Verbindung zum Internet haben und zweitens wegen Sicherheitsbedenken des Stuttgarter Rechenzentrums außer `ssh` keine Netzwerkserverdienste nach außen freigegeben sind. Der Start auf dem Mozart-Cluster ist deshalb etwas aufwendiger. Hier ist:

master Rechnername des Mozart-Masters, „mozart“

master-node Rechnername des Mozart-Masterknotens, z. B. „node01“

slave-node Rechnername eines Mozart-Slaveknotens, z. B. „node02“

client Rechnername des Visualisierungsclients

1. auf dem Masterknoten im Verzeichnis `rtspserver` den Videosever starten:


```
spook
```
2. Reverse tunneling mit `socat` einrichten:
 - a) auf dem Mozart-Masterknoten:


```
socat -t5 tcp:client:5004,forever,intervall=10,fork }
                                           ↳ tcp:master-node:5002
```
 - b) auf dem Visualisierungsclient:


```
socat tcp-l:5006,reuseaddr,bind=127.0.0.1,fork }
                                           ↳ tcp-l:5004,bind=client,reuseaddr,retry=10
```

11 Implementierung des relativistischen Flugsimulators

3. auf dem Clientrechner den RTSP-Client starten:
`mplayer -rtsp-stream-over-tcp rtsp://localhost:5006`
4. auf dem Mozart-Masterknoten im Verzeichnis `client` die Bedienoberfläche starten:
`flachland_client node01`
5. auf dem Mozart-Masterknoten im Verzeichnis `server` den Flachland-Server starten:
`run-mpi.mozart-1-8`

11.5.3 Bedienung

Der Flugsimulator interpretiert beim Programmstart das in der Kommandozeile übergebene Konfigurationsskript (Abschnitt 11.6 *Szenenbeschreibungssprache*, S. 153). Darin kann entweder eine neue „Welt“ generiert oder eine bereits vorbereitete „Welt“ von der Festplatte geladen werden. Ferner dient das Konfigurationsskript dazu, die sichtbaren Objekte und die Startposition der virtuellen Kamera zu definieren. Enthält das Konfigurationsskript als letzten Befehl „(interactive-loop)“, geht der Flugsimulator in den interaktiven Modus. Nach dem Start des Clients, des Servers, des RTSP-Servers und des MPEG4-Players haben wir zwei geöffnete Fenster: Das Fenster des Players für das Live-Bild der virtuellen Kamera und das des Clientprogramms, das eine Bedienung über die Tastatur erlaubt (Tastenbelegung siehe nächsten Abschnitt).

Mittels Tastatur, Joystick oder Spaceball können wir jetzt in der generierten Welt umherfliegen und uns nach allen Seiten umschaun. Verschiedene Kommandos erlauben es, die Kamera in alle Richtungen zu beschleunigen, abzubremsen und zu drehen. Die Bedienelemente können auch auf ein einzelnes Objekt umgeschaltet werden, so dass einfache Experimente, wie z. B. das Werfen eines Stabes durch ein Wurmloch möglich sind.

11.5.4 Tastenbelegung

Das Clientprogramm reicht Tastendrucke an den Server weiter, von dem sie wie folgt interpretiert werden:

Taste	Funktion
Cursor	kippen der Kamera um 10° in die entsprechende Richtung
f	vorwärts beschleunigen
b	rückwärts beschleunigen
l, r, u, d	nach links, rechts, oben, unten beschleunigen
s	anhalten
T	Tracing an/aus
o	ab jetzt Objekt bewegen
k	ab jetzt Kamera bewegen
n	Kamerabrennweite auf 1,0 setzen (leichtes Weitwinkelobjektiv, 36 mm Kleinbild)
t	Kamerabrennweite auf 3,0 setzen (Teleobjektiv, 109 mm Kleinbild)
w	Kamerabrennweite auf 0,3 setzen (starkes Weitwinkelobjektiv, 11 mm Kleinbild)
c	Schnappschuss abspeichern
C	Schnappschuss in vierfacher Auflösung abspeichern
q	Server beenden
Q	Client beenden

11.6 Szenenbeschreibungssprache

Dieser Abschnitt erläutert die Szenenbeschreibungssprache des relativistischen Flugsimulators. Mit ihr können darzustellende Szenen in einfachen Skripten definiert werden.

11.6.1 Sprache

An eine Szenenbeschreibungssprache sind folgende Anforderungen zu stellen:

- einfach zu implementieren
- flexibel erweiterbar
- Turing-komplett, d. h. es soll möglich sein, in einer Szenenbeschreibung zu rechnen

Als Sprache wurde Scheme (Kelsey et al., 1998) gewählt. Die Implementierung basiert auf der Open-Source-Bibliothek TinyScheme von D. Souflis⁹.

11.6.2 Flugsimulatorspezifische Erweiterungen

TinyScheme lässt sich leicht in ein C++-Programm einbinden und durch eigene Funktionen erweitern.

Allgemeine Parameter

Eine Reihe von globalen Parametern legt das globale Verhalten fest. Sie können am Anfang des Konfigurationsskripts mit

```
(define param value)
```

gesetzt werden. Beispiel:

```
(define *vis-enable* #t)
```

schaltet die Visualisierung der Triangulierung ein.

Zur Fehlersuche kann der `flachland_server` die Triangulierung in einem OpenGL-Fenster darstellen. Zur Steuerung der Darstellung dienen folgende Parameter:

<code>*vis-enable*</code>	Visualisierung ein/aus
<code>*vis-show-label*</code>	Beschriftungen ein/aus
<code>*vis-show-simplex*</code>	Simplizes anzeigen ein/aus
<code>*vis-show-vertex*</code>	Vertizes anzeigen ein/aus
<code>*vis-show-koord*</code>	Simplexkoordinatensysteme anzeigen ein/aus
<code>*vis-show-gkoord*</code>	globales Koordinatensystem anzeigen ein/aus
<code>*vis-show-object-simplex*</code>	Objektfacets anzeigen ein/aus
<code>*vis-show-object-vertex*</code>	Objektvertizes anzeigen ein/aus
<code>*vis-font-size*</code>	Fontgröße der Beschriftungen

Zur Überprüfung einer Triangulierung kann diese nach der Erstellung ausgegeben werden. Dazu muss folgender Parameter auf `#t` gesetzt werden:

<code>*log-complex*</code>	gibt die Triangulierung in Textform aus
----------------------------	---

⁹D. Souflis, *TinyScheme*, <http://tinyscheme.sourceforge.net/>.

Beschreibung der Raumzeit

Die Funktion

```
(create-spacetime sdim tdim metric minx maxx res)
```

generiert eine Raumzeit. Parameter:

Parameter	Funktion
<i>sdim</i>	Anzahl Raumdimensionen (2...3)
<i>tdim</i>	Anzahl Zeitdimensionen (0...1)
<i>metric</i>	Kennung für die Metrik
<i>minx</i>	Vektor der Minimalwerte für jede Koordinate
<i>maxx</i>	Vektor der Maximalwerte für jede Koordinate
<i>res</i>	Vektor der Anzahl der Gitterpunkte in jeder Dimension

Für *metric* kann eine der folgenden Konstanten gewählt werden:

Name	Metrik
<i>metric-flat</i>	flacher Raum ($sdim = 2...3, tdim = 0$)
<i>metric-flatp</i>	flacher Raum in Kugelkoordinaten ($sdim = 2...3, tdim = 0$)
<i>metric-spherical</i>	sphärisch gekrümmter Raum ($sdim = 2...3, tdim = 0$)
<i>metric-wormhole</i>	Wurmloch ($sdim = 2...3, tdim = 0$)

Die Metriken sind jeweils in einem globalen Koordinatensystem definiert. Im Folgenden angegebene Ortskoordinaten oder Richtungsvektoren beziehen sich auf diese globalen Koordinatensysteme.

Raumzeit speichern und laden

```
(save-spacetime "filename")
```

speichert die aktuelle Welt in der Datei *filename* im HDF5-Format.

```
(load-spacetime "filename")
```

lädt die aktuelle Welt aus der Datei *filename* im HDF5-Format.

Beschreibung der Objekte

Die Funktion

```
(create-object :type type :pos pos :dir dir :updir updir :params params)
```

generiert ein Objekt.

Parameter	Funktion
<i>type</i>	Objekttyp
<i>pos</i>	Position als d -dimensionaler Vektor
<i>dir</i>	Richtung als d -dimensionaler Vektor
<i>updir</i>	zweite Richtung (oben) als d -dimensionaler Vektor
<i>params</i>	objektspezifische Liste von Parametern

Der Objekttyp kann folgende Werte annehmen:

Objekttyp	Beschreibung	Parameter
object-simplex	Simplex (Dreieck, Tetraeder)	Kantenlänge, Texturindex
object-cube	Quadrat, Würfel	Kantenlänge, Texturindex
object-bar	Stange	Dicke, Länge, Texturindex

Der Texturindex wählt unter verschiedenen Texturen aus.

Beschreibung der virtuellen Kamera

Die Funktion

```
(create-observer :camera-size #(xsize ysize))
```

erzeugt eine virtuelle Kamera mit einer Auflösung von *xsize* auf *ysize* Pixeln.

Die Funktion

```
(place-observer :pos pos :dir dir :updir updir)
```

setzt die virtuelle Kamera an die angegebene Position.

Parameter	Funktion
<i>pos</i>	Position als <i>d</i> -dimensionaler Vektor
<i>dir</i>	Kamerarichtung als <i>d</i> -dimensionaler Vektor
<i>updir</i>	zweite Richtung (oben) als <i>d</i> -dimensionaler Vektor

Interaktiv fliegen

```
(interactive-loop)
```

startet die interaktive Schleife.

Einzelbild aufnehmen

```
(take-picture #(xsize ysize))
```

nimmt an der aktuellen Position ein einzelnes Bild mit den gegebenen Abmessungen auf.

```
(take-picture-test-geod "name" #(xsize ysize))
```

berechnet an der aktuellen Position und mit den gegebenen Abmessungen ein Testbild mit farbkodierten Abweichungen der Regge-Geodäten zu korrekt integrierten Geodäten (Kapitel 10 *Tests des Regge-Raytracers*, S. 143).

Parameter	Funktion
<i>name</i>	Dateiname für das Bild
<i>xsize</i>	Breite des Bildes
<i>ysize</i>	Höhe des Bildes

11 Implementierung des relativistischen Flugsimulators

Plotten

Mit den folgenden Funktionen können Daten für die Erstellung von Karten (z. B. Bild 3.2, S. 36) exportiert werden.

Szene zum Plotten in einer Datei speichern:

```
(plot-world :file "filename")
```

Parameter	Funktion
<i>filename</i>	Dateiname

Einzelnes Objekt zum Plotten in einer Datei speichern:

```
(plot-object :file "filename" :object object)
```

Parameter	Funktion
<i>filename</i>	Dateiname
<i>object</i>	Nummer des auszugebenden Objekts

Lichtstrahlen des letzten Bildes zum Plotten in einer Datei speichern:

```
(plot-lightrays :file "filename")
```

Parameter	Funktion
<i>filename</i>	Dateiname

Debugging

```
(print-world)
```

gibt eine textuelle Repräsentation der Welt aus.

11.6.3 Beispiel

Das folgende Konfigurationsskript `flugsimu-wh-interaktiv.scm` definiert die erste Szene aus Kapitel 3, S. 27: ein Wurmloch, durch dessen Schlund zwei Stäbe gesteckt werden.

```
;;; Parameterfile fuer interaktiven Flugsimulator

; Triangulierung des Raumes laden
(load-spacetime "spacetime/fl_wh-3d-st-79.hdf")

; Objekte erzeugen
(define cube-size 0.05)
(create-object
 :type object-bar
```

```
:pos (vector 6 (/ pi 2) 0)
:dir '#(-1 0 0)
:updir '#(0 1 0)
:params (list cube-size (* 240 cube-size) 0))
(create-object
 :type object-bar
 :pos (vector 6 (/ pi 2) (/ pi 2))
 :dir '#(-1 0 0)
 :updir '#(0 1 0)
 :params (list cube-size (* 240 cube-size) 1))

; Kamera erzeugen
(create-observer
 :camera-size '(320 240))

; und positionieren
(place-observer
 :pos (vector 10 (/ pi 2.0001) 0.5)
 :dir '#(-1 0 0)
 :updir '#(0 0 1))

; interaktiven Flug starten
(interactive-loop)
```

12 Untersuchte Welten

Dieses Kapitel enthält eine Auflistung der in den untersuchten „Welten“ verwendeten Koordinatensysteme, Metriken und Christoffelsymbole. Nicht aufgeführte Komponenten haben den Wert null.

12.1 Zwei- und dreidimensionaler euklidischer Raum

Dieses triviale Beispiel diene als Testfall.

12.1.1 Kartesische Koordinaten

Koordinaten:

2D: kartesische Koordinaten $x^0 = x, x^1 = y$

3D: kartesische Koordinaten $x^0 = x, x^1 = y, x^2 = z$

Metrik:

$$g_{ii} = 1 \quad (12.1)$$

Christoffelsymbole:

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \quad (12.2)$$

12.1.2 Kugelkoordinaten

Koordinaten:

2D: $x^0 = r, x^1 = \phi$

3D: $x^0 = r, x^1 = \theta, x^2 = \phi$

Metrik:

2D:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{11} &= r^2 \end{aligned} \quad (12.3)$$

3D:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{11} &= r^2 \\ g_{22} &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (12.4)$$

Christoffelsymbole:

2D:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= -r \\ \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (12.5)$$

3D:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= -r \\ \Gamma^0_{22} &= -r \sin^2 \theta \\ \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^1_{22} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \cot \theta \end{aligned} \quad (12.6)$$

12.2 Zweidimensionaler Raum konstanter positiver Krümmung

Das erste Beispiel mit nichttrivialer Topologie.
Krümmungsradius R .

Koordinaten:

$$x^0 = \theta, x^1 = \phi$$

Metrik:

$$\begin{aligned} g_{00} &= R^2 \\ g_{11} &= R^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (12.7)$$

Christoffelsymbole:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= \cot \theta \end{aligned} \quad (12.8)$$

12.3 Dreidimensionaler Raum konstanter positiver Krümmung

Krümmungsradius R .

Koordinaten:

$$x^0 = \chi, x^1 = \theta, x^2 = \phi$$

Metrik:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= R^2 \\
 g_{11} &= R^2 \sin^2 \chi \\
 g_{22} &= R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta
 \end{aligned}
 \tag{12.9}$$

Christoffelsymbole:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{11} &= -\sin \chi \cos \chi \\
 \Gamma^0_{22} &= -\sin \chi \sin^2 \theta \cos \chi \\
 \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= \cot \chi \\
 \Gamma^1_{22} &= -\sin \theta \cos \theta \\
 \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} &= \cot \chi \\
 \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \cot \theta
 \end{aligned}
 \tag{12.10}$$

12.4 Zweidimensionales Wurmloch

Schlundradius b .**Koordinaten:**

$$x^0 = l, x^1 = \phi$$

Metrik:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= 1 \\
 g_{11} &= b^2 + l^2
 \end{aligned}
 \tag{12.11}$$

Christoffelsymbole:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{11} &= -l \\
 \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= l/(b^2 + l^2)
 \end{aligned}
 \tag{12.12}$$

12.5 Dreidimensionales Wurmloch

Schlundradius b .**Koordinaten:**

$$x^0 = l, x^1 = \theta, x^2 = \phi$$

Metrik:

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 \\g_{11} &= b^2 + l^2 \\g_{22} &= (b^2 + l^2) \sin^2 \theta\end{aligned}\tag{12.13}$$

Christoffelsymbole:

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{11} &= -l \\ \Gamma^0_{22} &= -l \sin^2 \theta \\ \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} &= l / (b^2 + l^2) \\ \Gamma^1_{22} &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} &= l / (b^2 + l^2) \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \cot \theta\end{aligned}\tag{12.14}$$

12.6 Schwarzschildmetrik

Masse des Zentralkörpers: M .

Koordinaten:

Kugelkoordinaten $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$

Metrik:

$$\begin{aligned}g_{00} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\g_{11} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\g_{22} &= r^2 \\g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta\end{aligned}\tag{12.15}$$

Christoffelsymbole:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
 \Gamma^1_{00} &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\
 \Gamma^1_{11} &= -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
 \Gamma^1_{22} &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\
 \Gamma^1_{33} &= -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta \\
 \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta \\
 \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} &= \cot \theta
 \end{aligned} \tag{12.16}$$

12.7 Vaidya-Metrik

12.7.1 Vaidya-Metrik für einlaufende Strahlung

Masse $M(V)$.

Koordinaten:

Kugelkoordinaten $x^0 = V, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$

Metrik:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= -\left(1 - \frac{2M(V)}{r}\right) \\
 g_{01} = g_{10} &= 1 \\
 g_{22} &= r^2 \\
 g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{12.17}$$

Christoffelsymbole:

Mit $M'(V) = dM(V)/dV$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{00} &= \frac{M(V)}{r^2} \\
 \Gamma^1_{00} &= \frac{M'(V)}{r} + \frac{M(V)}{r^2} - \frac{2M(V)^2}{r^3} \\
 \Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = -\frac{M(V)}{r^2} \\
 \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\
 \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
 \Gamma^0_{22} &= -r \\
 \Gamma^1_{22} &= 2M(V) - r \\
 \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot \theta \\
 \Gamma^0_{33} &= -r \sin^2 \theta \\
 \Gamma^1_{33} &= 2 \sin^2 \theta M(V) - r \sin^2 \theta \\
 \Gamma^2_{33} &= -\cos \theta \sin \theta
 \end{aligned} \tag{12.18}$$

12.7.2 Vaidya-Metrik für auslaufende Strahlung

Masse $M(U)$.

Koordinaten:

Kugelkoordinaten $x^0 = U, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$

Metrik:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= -\left(1 - \frac{2M(U)}{r}\right) \\
 g_{01} &= g_{10} = -1 \\
 g_{22} &= r^2 \\
 g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{12.19}$$

Christoffelsymbole:

Mit $M'(U) = dM(U)/dU$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= -\frac{M(U)}{r^2} \\
\Gamma^1_{00} &= -\frac{M'(U)}{r} + \frac{M(U)}{r^2} - \frac{2M(U)^2}{r^3} \\
\Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \frac{M(U)}{r^2} \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^0_{22} &= r \\
\Gamma^1_{22} &= 2M(U) - r \\
\Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot \theta \\
\Gamma^0_{33} &= r \sin^2 \theta \\
\Gamma^1_{33} &= 2 \sin^2 \theta M(U) - r \sin^2 \theta \\
\Gamma^2_{33} &= -\cos \theta \sin \theta
\end{aligned} \tag{12.20}$$

Literaturverzeichnis

- E. A. Abbott, *Flatland, A Romance in Many Dimensions*, Seely & Co., 1884; deutsche Übersetzung: *Flächenland. Ein mehrdimensionaler Roman*, Klett Verlag, 1982.
- R. Balbinot, R. Bergamini, *Hawking Evaporation and Space-Time Structure*, *Il Nuovo Cimento* **70 B**, 201–211, 1982a.
- R. Balbinot, R. Bergamini, *Radiation from a Black Hole: a Vaidya-Metric-Based Computation*, *Il Nuovo Cimento* **71 B**, 27–36, 1982b.
- M. Basko, R. Sunyaev, *The limiting luminosity of accreting neutron stars with magnetic fields*, *MNRAS* **175**, 395–417, 1976.
- C. Betts, *Fast Rendering of Relativistic Objects*, *J. Visual. Comp. Animat.* **9**, 17–31, 1998.
- W. Biernacki, *Evaporating black hole in a Vaidya space-time*, *Phys. Rev. D* **41**, 1356–1357, 1990.
- S. Blum, U. Kraus, *Analyzing X-Ray Pulsar Profiles: Geometry and Beam Pattern of Hercules X-1*, *ApJ* **529**, 968–977, 2000.
- M. L. Boas, *Apparent Shape of Large Objects at Relativistic Speeds*, *Am. J. Phys.* **29**, 283–286, 1961.
- M. Borchers, *Interaktive und stereoskopische Visualisierung in der speziellen Relativitätstheorie*, Dissertation, Universität Tübingen,
URL: <http://w210.ub.uni-tuebingen.de/dbt/volltexte/2005/1891/>, 2005.
- J. Brainerd, P. Mészáros, *Dynamic effects on cyclotron scattering in pulsar accretion columns*, *ApJ* **369**, 179–190, 1991.
- L. Brewin, *Particle paths in a Schwarzschild spacetime via the Regge calculus*, *Class. Quantum Grav.* **10**, 1803–1823, 1993.
- T. Bulik, P. Mészáros, J. W. Woo, F. Nagase, K. Makishima, *The polar cap structure of the X-ray pulsar 4U 1538–52*, *ApJ* **395**, 564–574, 1992.
- T. Bulik, H. Riffert, P. Mészáros, K. Makishima, T. Mihara, B. Thomas, *Geometry and pulse profiles of X-ray pulsars: Asymmetric relativistic fits to 4U 1538–52 and Vela X-1*, *ApJ* **444**, 405–414, 1995.
- S. Chakrabarti, A. P. Gentle, A. Kheyfets, W. A. Miller, *Geodesic deviation in Regge calculus*, *Class. Quantum Grav.* **16**, 2381–2391, 1999.
- M.-C. Chang, F. Lai, W.-C. Chen, *Image Shading Taking into Account Relativistic Effects*, *ACM Transactions on Graphics* **14**, 265–300, 1996.
- W. Coburn, *A Study of Magnetic Fields of Accreting X-Ray Pulsars With the Rossi X-ray Timing Explorer*, Dissertation, University of California, San Diego, 2001.

- C. Cruz-Neira, D. Sandin, T. DeFanti, R. Kenyon, J. Hart, *The CAVE: Audio Visual Experience Automatic Virtual Environment*, Communications of the ACM **35** (6), 65–72, 1992.
- A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17**, 891–921, 1905.
- J. Fukue, T. Yokoyama, *Color Photographs of an Accretion Disk around a Black Hole*, Publ. Astron. Soc. Japan **40**, 15–24, 1988.
- G. Gamow, *Mr Tompkins in Wonderland*, Cambridge University Press, 1940.
- G. Gamow, *Mr Tompkins in Paperback*, Cambridge University Press, 1993.
- G. Gamow, *Remarks on Lorentz Contraction*, Proceedings of the National Academy of Science **47**, 728–729, 1961.
- W. Gekelman, J. Maggs, L. Xu, *Real-Time Relativity*, Computers in Physics **5** (4), 372–383, 1991.
- R. Giacconi, H. Gursky, E. Kellogg, E. Schreier, H. Tananbaum, *Discovery of Periodic X-Ray Pulsations in Centaurus X-3 from UHURU*, ApJ **167**, L67–L73, 1971.
- J. G. Greenhill, D. Galloway, M. C. Storey, *Luminosity dependent changes of pulse profiles in the X-ray binary GX 1+4*, Publ. Astron. Soc. Aust. **15**, 254–258, 1998.
- A. Gröne, *Entwurf eines objektorientierten Visualisierungssystems auf der Basis von Raytracing*, Dissertation, Universität Tübingen, 1996.
- P. Hajicek, W. Israel, *What, No Black Hole Evaporation?*, Physics Letters **80 A**, 9–10, 1980.
- J. B. Hartle, *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity*, Addison Wesley, 2003.
- S. W. Hawking, *Particle Creation By Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199–220, 1975.
- F. R. Hickey, *Two-dimensional appearance of a relativistic cube*, Am. J. Phys. **47**, 711–714, 1979.
- W. Hiscock, *Models of evaporating black holes. I*, Phys. Rev. D **23**, 2813–2822, 1981a.
- W. Hiscock, *Models of evaporating black holes. II. Effects of the outgoing created radiation*, Phys. Rev. D **23**, 2823–2827, 1981b.
- P.-K. Hsiung, R. H. P. Dunn, *Visualizing Relativistic Effects in Spacetime*, Proceedings of the Supercomputing '89 Conference, 597–606, 1989.
- P.-K. Hsiung, R. H. Thibadeau, C. B. Cox, R. H. P. Dunn, *Time Dilation Visualization in Relativity*, Proceedings of the Supercomputing '90 Conference, 835–844, 1990a.
- P.-K. Hsiung, R. H. Thibadeau, C. B. Cox, R. H. P. Dunn, M. Wu, P. A. Olbrich, *Wide-band Relativistic Doppler Effect Visualization*, Proceedings of the Visualization '90 Conference, 83–92, 1990b.
- P.-K. Hsiung, R. H. Thibadeau, M. Wu, *T-Buffer: Fast Visualization of Relativistic Effects in Spacetime*, Computer Graphics (1990 Symposium on Interactive 3D Graphics) **24/2**, 83–88, 1990c.

- R. Husmann, *Koppe's Anfangsgründe der Physik mit Einschluß der Chemie und mathematischer Geographie*, Ausgabe A, 20. Auflage, G. D. Baedeker, 1898.
- R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, 1992.
- P. Kahabka, *Der 35-Tage-Zyklus von Hercules X-1*, MPE-Report 204, 139, 1987.
- R. Kelsey, W. Clinger, J. Rees (eds.), *Revised⁵ Report on the Algorithmic Language Scheme*, URL: <http://www.schemers.org/Documents/Standards/R5RS/r5rs.pdf>, 1998.
- U. Kraus, H.-P. Nollert, H. Ruder, H. Riffert, *Analyzing X-Ray Pulsar Profiles: Asymmetry as a Key to Geometry and Beam Pattern*, *ApJ* **450**, 763–783, 1995.
- U. Kraus, S. Blum, J. Schulte, H. Ruder, P. Mészáros, *Analyzing X-Ray Pulsar Profiles: Geometry and Beam Pattern of Centaurus X-3*, *ApJ* **467**, 794–805, 1996.
- U. Kraus, *Brightness and colour of rapidly moving objects: the visual appearance of a large sphere revisited*, *Am. J. Phys.* **68**, 56–60, 2000.
- U. Kraus, *Hollow Accretion Columns on Neutron Stars and the Effects of Gravitational Light Bending*, *ApJ* **563**, 289–300, 2001.
- U. Kraus, H. Ruder, D. Weiskopf, C. Zahn, *Was Einstein noch nicht sehen konnte*, *Physik Journal* 8/2002, 2002.
- U. Kraus, C. Zahn, *Tempolimit Lichtgeschwindigkeit*, Webseite, URL: <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/>, 2002.
- U. Kraus, C. Zahn, C. Weth, H. Ruder, *X-Ray Pulses from Accretion Columns: Contributions to the Energy Dependence of the Pulse Shape*, *ApJ* **590**, 424–431, 2003.
- U. Kraus, C. Zahn, *Wir basteln ein Schwarzes Loch – Regge-Calculus als Methode zur Veranschaulichung gekrümmter Raumzeiten*, DPG-Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik 2005, Tagungs-CD, 2005a.
- U. Kraus, C. Zahn, *Wir basteln ein Schwarzes Loch – Allgemeine Relativitätstheorie für die Schule*, DPG-Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik 2005, Tagungs-CD, 2005b.
- U. Kraus, C. Zahn, *Wir basteln ein Schwarzes Loch – Unterrichtsmaterialien zur Allgemeinen Relativitätstheorie*, *Praxis der Naturwissenschaften Physik, Didaktik der Relativitätstheorien*, Heft 4/54, 38–43, 2005c.
- H.-M. Lai, *Extraordinary shadow disappearance due to a fast-moving light source*, *Am. J. Phys.* **43**, 818–820, 1975.
- A. Lampa, *Wie erscheint nach der Relativitätstheorie ein bewegter Stab einem ruhenden Beobachter?*, *Z. Physik* **72**, 138–148, 1924.
- D. W. Lang, *The Meter Stick in the Match Box*, *Am. J. Phys.* **38**, 1181–1184, 1970.
- D. Leahy, *Modelling observed X-ray pulsar profiles*, *MNRAS* **251**, 203–212, 1991.

- D. A. Leahy, *Hollow-Cone Accretion Columns and Light-bending Effects*, *ApJ* **596**, 1131–1136, 2003.
- A. Levine, C. P. Ma, J. McClintock, S. Rappaport, M. van der Klis, F. Verbunt, *4U 1626–67: The binary with the smallest known mass function*, *ApJ* **327**, 732–741, 1988.
- J.-P. Luminet, *Image of a Spherical Black Hole with Thin Accretion Disk*, *Astron. Astrophys.* **75**, 228–235, 1979.
- Yu. E. Lyubarskii, R. A. Syunyaev, *Accretion-column structure*, *Sov. Astron. Lett.* **14** (5), 390–392, 1988.
- P. M. Mathews, M. Lakshmanan, *On the Apparent Visual Forms of Relativistically Moving Objects*, *Il Nuovo Cimento* **12**, 168–181, 1972.
- J. M. McKinley, P. Doherty, *In search of the “starbow”: The appearance of the starfield from a relativistic spaceship*, *Am. J. Phys.* **47**, 309–316, 1979.
- P. Mészáros, J. Ventura, *Vacuum-Polarization Effects on Thomson Cross Sections in a Magnetized Plasma*, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1544–1547, 1978.
- P. Mészáros, J. Ventura, *Vacuum polarization effects on radiative opacities in a strong magnetic field*, *Phys. Rev. D* **19**, 3565–3575, 1979.
- C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.
- M. S. Morris, K. S. Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*, *Am. J. Phys.* **56**, 395–412, 1988.
- S. Moskowitz, *Visual Aspects of Trans-Stellar Space Flight*, *Sky and Telescope* **33**, 290–294, 1967.
- T. Müller, *Visual appearance of a Morris-Thorne-wormhole*, *Am. J. Phys.* **72**, 1045–1050, 2004.
- T. Müller, *Visualisierung in der Relativitätstheorie*, Dissertation, Universität Tübingen, URL: <http://tobias-lib.ub.uni-tuebingen.de/volltexte/2006/2456/>, 2006.
- F. Nagase, R. H. D. Corbet, C. S. R. Day, H. Inoue, T. Takeshima, K. Yoshida, T. Mihara, *GINGA observations of Centaurus X-3*, *ApJ* **396**, 147–160, 1992.
- R. Nemiroff, *Visual Distortions Near a Black Hole and Neutron Star*, *Am. J. Phys.* **61**, 619–632, 1993.
- H.-P. Nollert, H. Ruder, H. Herold, U. Kraus, *The relativistic looks of a neutron star*, *Astron. Astrophys.* **208**, 153–156, 1989.
- A. N. Parmar, N. E. White, L. Stella, *The transient 42 second X-ray pulsar EXO 2030+375. II. The luminosity dependence of the pulse profile*, *ApJ* **338**, 373–380, 1989.
- K. R. Pechenick, C. Ftaclas, J. M. Cohen, *Hot Spots on Neutron Stars: The Near-Field Gravitational Lens*, *ApJ* **274**, 846–857, 1983.
- R. Penrose, *The Apparent Shape of a Relativistically Moving Sphere*, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **55**, 137–139, 1959.

- J. Postel, *RFC768: User Datagram Protocol*,
URL: <http://www.ietf.org/rfc/rfc0768.txt>, 1980.
- W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, B. Flannery, *Numerical Recipes in C++*, Cambridge University Press, 2002.
- T. Regge, *General Relativity without Coordinates*, *Il Nuovo Cimento* **19**, 558–571, 1961.
- H. Riffert, P. Mészáros, *Gravitational Light Bending near Neutron Stars. I. Emission from Columns and Hot Spots*, *ApJ* **325**, 207–217, 1988.
- W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press, 2001.
- O. Rømer, *A demonstration concerning the motion of light*, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, No. 136, 893–894, 1677.
- C. Sagan, *Contact*, Simon and Schuster, 1985.
- C. Savage, A. Searle, L. McCalman, *Real Time Relativity: exploration learning of special relativity*, arXiv:physics/0701200v1 [physics.ed-ph], 2007.
- H. Schulzrinne, A. Rao, R. Lanphier, *RFC2326: Real Time Streaming Protocol (RTSP)*,
URL: <http://www.ietf.org/rfc/rfc2326.txt>, 1998.
- K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math.-Phys. Kl.*, 189–196, 1916.
- G. D. Scott, M. R. Viner, *The Geometrical Appearance of Large Objects Moving at Relativistic Speeds*, *Am. J. Phys.* **33**, 534–536, 1965.
- G. D. Scott, H. J. van Driel, *Geometrical Appearances at Relativistic Speeds*, *Am. J. Phys.* **38**, 971–977, 1970.
- A. Searle, C. Savage, P. Altin, F. Bennet, M. Hush, *Through Einstein's Eyes*, *Australian Physics* **42**, 84–86, URL: <http://www.anu.edu.au/Physics/Savage/TEE/>, 2005.
- K. G. Suffern, *The apparent shape of a rapidly moving sphere*, *Am. J. Phys.* **56**, 729–733, 1988.
- J. Terrell, *Invisibility of the Lorentz Contraction*, *Phys. Rev.* **116**, 1041–1045, 1959.
- K. Thorne, *Gekrümmter Raum und verbogene Zeit*, Knauer, München, 1994.
- I. Wasserman, S. Shapiro, *Masses, radii, and magnetic fields of pulsating X-ray sources – Is the 'standard' model self-consistent?*, *ApJ* **265**, 1036–1046, 1983.
- J. Weeks, *Real-Time Rendering in Curved Spaces*, *IEEE Computer Graphics and Applications* **22**, 90–99, 2002.
- D. Weiskopf, U. Kraus, H. Ruder, *Searchlight and Doppler Effects in the Visualization of Special Relativity, A Corrected Derivation of the Transformation of Radiance*, *ACM Transactions on Graphics* **18** (3), 278–292, 1999.

- D. Weiskopf, D. Kobras, H. Ruder, *Image-Based Special Relativistic Visualization*, IEEE Visualization 2000 Proceedings, T. Ertl, B. Hamann, A. Varshney (eds.), ACM Press, October 2000, 303–310, 2000.
- D. Weiskopf, *An immersive virtual environment for special relativity*, in Proc. WSCG 2000, 337–344, 2000a.
- D. Weiskopf, *Four-dimensional non-linear ray tracing as a visualization tool for gravitational physics*, IEEE Visualization 2000 Proceedings, 445–448, 2000b.
- D. Weiskopf, *Visualization of four-dimensional spacetimes*, Dissertation, Universität Tübingen, URL: <http://w210.ub.uni-tuebingen.de/dbt/volltexte/2001/240>, 2001.
- D. Weiskopf, M. Borchers, T. Ertl, M. Falk, O. Fechtig, R. Frank, F. Grave, A. King, U. Kraus, T. Müller, H.-P. Nollert, I. Rica Mendez, H. Ruder, T. Schafhitzel, S. Schär, C. Zahn, M. Zatloukal, *Explanatory and Illustrative Visualization of Special and General Relativity*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **12** (4), 522–534, 2006.
- V. F. Weisskopf, *The visual appearance of rapidly moving objects*, Phys. Today **13**, No. 9, 24–27, 1960.
- C. Weth, *Simulationen kosmischer Röntgenquellen*, Dissertation, Universität Tübingen, 2002.
- R. M. Williams, G. F. R. Ellis, *Regge Calculus and Observations. I. Formalism and Applications to Radial Motion and Circular Orbits*, General Relativity and Gravitation **13** (4), 361–395, 1981.
- R. M. Williams, G. F. R. Ellis, *Regge Calculus and Observations. II. Further Applications*, General Relativity and Gravitation **16** (11), 1003–1021, 1984.
- C. Zahn, *Vierdimensionales Ray-Tracing in einer gekrümmten Raumzeit*, Diplomarbeit, Universität Stuttgart, URL: <http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~zahn/>, 1991.
- C. Zahn, *Rollende Räder*, Webseite, URL: <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/rad/rad.html>, 2002.
- C. Zahn, *Interaktives Schwarzes Loch*, Webseite, URL: <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/isl/isl.html>, 2006.
- C. Zahn, U. Kraus, *Wir basteln ein Schwarzes Loch*, Arbeitsheft mit Bastelbögen, Bärenverlag (nur Direktvertrieb) oder online URL: <http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/graum/bastel.html>, 2004.

Danksagung

Ich möchte mich bei Ute Kraus, Jörg Frauendiener und Thomas Müller für die gute Zusammenarbeit bedanken sowie bei allen Institutsmitgliedern, die mir beim Kampf gegen die Rechner immer hilfreich zur Seite standen. Ferner möchte ich mich bei der DFG und bei Hanns Ruder bedanken, die diese Arbeit ermöglicht haben.

Lebenslauf

Corvin Zahn
Talstr. 18
71272 Renningen

Persönliche Daten:

Geboren am 20.05.1964 in Stuttgart
Familienstand: ledig

Ausbildung:

1983 Abitur, Gymnasium Weil der Stadt
1983–1990 Studium der Physik, Universität Stuttgart
1986 Vordiplom
1989–1990 Diplomarbeit, Theoretische Astrophysik, Universität Tübingen
2001–2007 Doktorarbeit, Theoretische Astrophysik, Universität Tübingen
 Thema: Visualisierung der Relativitätstheorie – Koordinatenfreie und interaktive
 Werkzeuge
 Betreuer: Prof. Dr. Jörg Frauendiener, PD Dr. Ute Kraus

Berufstätigkeit:

1991–1993 wiss. Angestellter, Universität Tübingen
2001–2006 wiss. Angestellter, Universität Tübingen
parallel dazu:
1991–heute selbstständige Tätigkeit als Freiberufler in eigener Firma

Akademische Lehrer:

Prof. Dr. W. Eisenmenger, Universität Stuttgart
Prof. Dr. G. Mahler, Universität Stuttgart
Prof. Dr. H. Haken, Universität Stuttgart
Prof. Dr. U. Weiss, Universität Stuttgart
Prof. Dr. W. Weidlich, Universität Stuttgart
Prof. Dr. K.-W. Hoffmann, Universität Stuttgart
Prof. Dr. K. Kirchgässner, Universität Stuttgart
Prof. Dr. K. Strobach, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Schick, Universität Stuttgart
Prof. Dr. H.-R. Trebin, Universität Stuttgart
Prof. Dr. H. Ruder, Universität Tübingen
Prof. Dr. H. Herold, Universität Tübingen
PD Dr. U. Kraus, Universität Tübingen
Prof. Dr. J. Frauendiener, Universität Tübingen