

Zeitentwicklung langsam rotierender Neutronensterne auf allgemein-relativistischem Hintergrund

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Isabel Rica Mendez
aus Ludwigsburg

2008

Tag der mündlichen Prüfung: 29.05.2008
Dekan: Prof. Dr. N. Schopohl
1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Ruder
2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Wunner

Kurzfassung

Kompakte stellare Objekte wie Neutronensterne sind vielversprechende Quellen von Gravitationswellen. Zur Interpretation der möglicherweise in naher Zukunft zu erwartenden Messdaten ist es wichtig, die Frequenzen der axialen und polaren Schwingungsmoden theoretisch zu bestimmen.

In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns auf langsam rotierende Neutronensterne. Für diesen Fall untersuchen wir die numerische Zeitentwicklung der linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen ohne die bisher meist zugrunde gelegte Cowling-Näherung bzw. inverse Cowling-Näherung und berechnen sowohl Lösungen für fluide als auch raumzeitliche, metrische Störungen. Die gekoppelten hyperbolischen Differenzialgleichungen erster Ordnung werden im Rahmen des Arnowitt-Deser-Misner-Formalismus und unter Verwendung der Battiston-Cazzola-Lucaroni-Eichung hergeleitet. Durch die Berücksichtigung der Metrikstörungen ist es möglich, eine explizit berechnete Fehlertoleranz der Cowling-Näherung anzugeben und eine höhere Genauigkeit der resultierenden Frequenzen zu erzielen. Die zeitliche Entwicklung wurde sowohl für polytrope Sternmodelle als auch für realistische Zustandsgleichungen berechnet, insbesondere für die Zustandsgleichung MPA (Machleidt Potential A). Anhand des Spektrums konnten die f -, die p - und die w -Moden identifiziert und deren Frequenzen bestimmt werden, sowie eingeschränkt auch die der r -Mode. Für die vollrelativistische Zeitentwicklung sind dies die ersten Ergebnisse für die Zustandsgleichung MPA, die in guter Übereinstimmung mit bisher bekannten Ergebnissen der Modenanalyse dieser Zustandsgleichung stehen. Die Berücksichtigung der Kopplungen zwischen axialen und polaren Moden liefert eine bessere Einsicht in das Schwingungsverhalten von Neutronensternen: die axialen und die polaren Moden verhalten sich gegenüber dieser Art der Kopplung sehr unterschiedlich.

Darüberhinaus konnte in dieser Arbeit für realistische Zustandsgleichungen ein empirisches Skalierungsverhalten der fluiden sowie der räumlichen Moden gefunden werden, das in guter Übereinstimmung mit dem Skalierungsverhalten der Schwingungsmoden steht, welche mit Hilfe der Modenanalyse berechnet wurden.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	3
Einleitung	7
1 Grundlagen	11
1.1 Mathematische Grundlagen	11
1.1.1 Linearisierte Einsteingleichungen	11
1.1.2 Der ADM-Formalismus	12
1.1.3 Die Wahl der Eichung	13
1.1.4 Störungsrechnung für Neutronensterne	14
1.1.5 Berechnung des Spektrums	16
1.1.6 Die Cowling-Näherung	17
1.2 Das Hintergrundmodell	18
1.2.1 Der ungestörte Neutronenstern	18
1.2.2 Zustandsgleichungen	20
1.3 Klassifizierung von Schwingungsmoden	23
1.3.1 Fluidmoden	24
1.3.2 Raumzeitmoden	25
1.4 Gravitationswellen	26
1.4.1 Messgrößen und ihre Bedeutung	26
2 Störungsrechnung ohne Cowling-Näherung	29
2.1 Herleitung der Entwicklungsgleichungen	29
2.1.1 Die Störungsgleichungen	29
2.1.2 Die constraint-Gleichungen	36
2.2 Numerische Implementierung	37
2.2.1 Numerisches Verfahren	38
2.2.2 Stabilitätskriterien	38
2.2.3 Durchführung der Simulationen	41

3	Schwingungsfrequenzen ohne Cowling-Näherung	43
3.1	Sternmodelle für polytrophe Zustandsgleichungen	43
3.2	Spektrum	45
3.3	Fluidmoden	46
3.4	Räumliche Moden	48
3.5	Einfluss der Rotation auf die Moden	50
4	Genauigkeit der Näherungsverfahren	53
4.1	Cowling-Näherung	53
4.2	Inverse Cowling-Näherung	58
5	Ergebnisse für realistische Zustandsgleichungen	61
5.1	Schwingungsfrequenzen im Vergleich	62
5.2	Dämpfungszeiten der Moden	67
5.3	Einfluss der Rotation für realistische Zustandsgleichungen	68
5.4	Einfluss der Kopplung zwischen axialen und polaren Moden	72
5.5	Einfluss der Ordnungszahl l auf die Schwingungsfrequenzen	74
5.6	r -Moden	74
5.7	Skalierungsverhalten	78
5.7.1	Skalierungsverhalten von Modenfrequenzen im statischen Fall	78
5.7.2	Skalierungsverhalten von Modenfrequenzen für Rotation	83
6	Zusammenfassung und Ausblick	89
A	Theoretische Hilfsmittel	91
A.1	Die Orthogonalitätsrelationen	91
	Literaturverzeichnis	93
	Lebenslauf	103

Einleitung

Die Gravitationswellenforschung erhielt in den letzten Jahre neue Impulse, als interferometrische Detektoren wie GEO600 und VIRGO geplant und gebaut wurden. Aufgrund der Nachteile terrestrischer Detektoren befindet sich ein weiteres vielversprechendes Großprojekt in Planung: ein extraterrestrisches Laserinterferometer (LISA). Es ist zu erwarten, dass der experimentelle Nachweis von theoretisch schon sehr lange postulierten Gravitationswellen einen enormen wissenschaftlichen Fortschritt mit sich bringt. Einerseits erhält man damit einen weiteren Baustein zur Bestätigung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Andererseits enthalten Gravitationswellen, genauso wie elektromagnetische Wellen, Signaturen ihrer Quellen. Man erhält einen Fingerabdruck kompakter stellarer Objekte auf einer ganz anderen physikalischen Ebene. Auf diesem Forschungsgebiet der Astroseismologie erhofft man sich, über die Spektren der Gravitationswellen auf die Schwingungszustände von Neutronensternen zu schließen. Die Informationen, die man dadurch erhält, lassen wiederum Rückschlüsse auf den subatomaren Aufbau dieser Sterne zu. Hierbei werden auch neue Erkenntnisse in der Elementarteilchenphysik zu erwarten sein. Dies liegt unter anderem daran, dass in Neutronensternen Bedingungen herrschen – die Dichte beträgt bis zu 10^{15} g/cm³ – die mit Atomkernen vergleichbar sind und in dieser Form in keinem terrestrischen Labor erzeugt werden können.

Neutronensterne bestehen, wie der Name schon sagt, überwiegend aus Neutronen, die in extremer Dichte dem herrschenden Gravitationsdruck standhalten [1, 2]. Die Sterne rotieren um ihre eigene Achse, meist mit sehr unterschiedlicher Periodendauer, von 1,5 ms bis zu wenigen Sekunden. Der Neutronenstern XTE J1739-285 mit der bisher höchsten Drehfrequenz von 1122 1/s wurde erst kürzlich entdeckt [3]. Da auf vielen der bekannten Pulsare auch hohe Magnetfeldstärken vorhanden sind, lassen sich deren Oszillationen auch schon in den beobachteten elektromagnetischen Pulsarsignalen wiederfinden. Einige charakteristische Merkmale in der elektromagnetischen Strahlung bestimmter Radiopulsare deuten bereits auf Neutronensternschwingungen hin: bei PSR 2016+28 ($P_{rot} = 0,558$ s) und PSR 1133+16 ($P_{rot} = 1,188$ s) wurden Mikropulse gefunden, deren Perioden von rund 1 ms im Bereich möglicher akustischer p -Moden liegen. Die Anregung einer solchen Schwingung könnte etwa durch sogenannte Glitches, d.h. einer schlagartigen Änderung ihrer Rotationsfrequenz, verursacht werden. Eine andere Möglichkeit der Anregung von Schwingungen besteht in explosionsartigen Prozessen wie Röntgen- oder γ -Bursts. Die bisher bei Röntgenburstquellen beobachtete Periodizität liegt bei etwa 10 bis 70 ms und könnte auch mit Schwingungsmoden in kausaler Bezie-

hung stehen. Ferner beobachtet man bei einer Reihe von Radiopulsaren Subpulse mit Periodendauern zwischen 10 und 50 ms, die mit Torsionsschwingungen der Sterne in Beziehung gebracht werden können.

Ein Neutronenstern entsteht in einer Supernova-Explosion beim Kollaps eines Sterns, der am Ende seiner thermonuklearen Entwicklung steht. Die hohen kinetischen Energien, die bei diesem Szenario auftreten, führen ebenso dazu, dass der Neutronenstern zunächst sehr starke radiale und nichtradiale Schwingungen durchführt. Die auf diese Weise angeregten nichtradiellen Schwingungen sind nach der Relativitätstheorie von Einstein mit der Abstrahlung von Gravitationswellen verbunden und spielen daher eine große Rolle in der Interpretation der zu beobachtenden Signale [4]. Daher besteht eine der Aufgaben der theoretischen Astrophysik darin, die Schwingungsmoden von Neutronensternen zu klassifizieren, zu untersuchen und mit anderen charakteristischen Sterngrößen in Beziehung zu setzen.

Man beschäftigt sich schon lange mit schwingenden stellaren Objekten, wie der Sonne, und hat dabei auch beachtliche Ergebnisse erzielt. So hat die Helioseismologie seit der Entdeckung der solaren Oszillationen im Jahre 1960 wichtige Erkenntnisse über die Rotationsbewegung solarer Materie ($P_{rot} = 27$ d), über Geometrie und Lage der Konvektionszonen (bei ca. $0,7 R_{\odot}$) und den solaren Heliumanteil (25 %) geliefert. Der Übergang von einer rein Newtonschen Betrachtungsweise wie bei der Sonne zu einer relativistischen ist im Falle von schwingenden Neutronensternen zwingend und führt zu dramatischen Änderungen. Anschaulich ist der neue Aspekt der Theorie damit zu erklären, dass nun nicht allein die Bewegung der Materie zu Schwingungsmoden führen kann, sondern auch durch die eigene Dynamik der raumzeitlichen Metrik. Diese neue Betrachtungsweise führt sogar zu neuartigen Moden, den w -Moden, die zuerst von Kokkotas und Schutz im Jahre 1992 vorhergesagt wurden [5].

Die relativistische Betrachtung von schwingenden Neutronensternen hat eine weit zurückreichende Tradition. In einer Reihe von Veröffentlichungen stellten Thorne *et al.*, beginnend im Jahre 1967, erstmals eine vollständig relativistische Untersuchung nichtradieller Sternschwingungen an [6–12]. Er griff dabei auf eine Technik zurück, die von Regge und Wheeler 1957 [13] erstmals auf Schwingungen Schwarzer Löcher angewandt wurde: die Quasinormalmodenanalyse. Dabei werden diejenigen Moden berechnet, die neben einem realen Frequenzanteil einen imaginären Frequenzanteil besitzen, die also mit auslaufenden Gravitationswellen in enger Beziehung stehen. Auch jüngere Forschungsarbeiten beschäftigen sich mit dieser Analyse [14–16]. Eine andere Möglichkeit an Erkenntnissen über Schwingungen von Neutronensternen zu gelangen, ist die zeitliche Entwicklung der Einsteingleichungen. Bei den bisherigen Untersuchungen gelingt es jedoch nicht, das vollständige Problem ohne Näherungen zu lösen. Man behilft sich oft mit der Cowling-Näherung, die gewisse Störgrößen vernachlässigt. Leider hat man über die Gültigkeit der Näherungen bisher nur Abschätzungen. Die vorliegende Arbeit versucht hier eine Lücke zu schließen und liefert genauere Aussagen über bestehende Näherungsmethoden.

Die zeitliche Entwicklung der Einsteinschen Feldgleichungen ist ein Unterfangen, das bisher nicht in vollem Umfang geglückt ist. Analytische Lösungen sind nur wenige be-

kannt, daher ist die Verwendung von Computern zur Lösung dieser Gleichungen unumgänglich. In der Vergangenheit zeigte sich jedoch, dass die numerischen Codes zu Instabilitäten neigen, d.h. dass die Lösungen nach kurzer Zeit divergieren, also unphysikalisch sind. Viel Mühe wurde darin investiert, einen stabilen Code zu entwickeln, der möglichst viele, wenn nicht gar alle physikalischen Anfangsbedingungen regulär beliebig lange Zeit berechnet. Aus dieser kleinen Einführung wird schon deutlich, dass die Entwicklung eines vollrelativistischen numerischen Codes, welcher die Schwingungen von Neutronensternen berechnen soll, entsprechende Probleme bereiten kann. Entscheidend für den Erfolg ist hierbei die Wahl einer geeigneten Eichung. In der vorliegenden Arbeit wurde der Arnowitt-Deser-Misner-Formalismus sowie die Battiston-Cazzola-Lucaroni-Eichung verwendet. Nicht jeder Versuch in der Vergangenheit, die daraus resultierenden Gleichungen numerisch zu implementieren, war erfolgreich. Die mit dem nun vorliegenden Code erzielten und im Folgenden vorgestellten Ergebnisse zeigen jedoch, dass dies durchaus möglich ist.

Notationen und Konventionen

- Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention, griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Die Zeitkomponente ist die 0-Komponente.
- Die Signatur der Metrik ist $(-, +, +, +)$, d.h. der Betrag zeitartiger Vierervektoren ist negativ.
- Es wird in geometrischen Einheiten gerechnet, d.h. die Lichtgeschwindigkeit c und die Gravitationskonstante G sind gleich 1 gesetzt.
- Partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ werden durch ∂_μ dargestellt.

1 Grundlagen

1.1 Mathematische Grundlagen

1.1.1 Linearisierte Einsteingleichungen

Ausgangspunkt für die allgemein-relativistische Beschreibung kompakter stellarer Objekte bilden die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

(siehe z.B. [17, 18]). Sie setzen die geometrische Krümmung des Raumes in Abhängigkeit zur Verteilung der Materie. In diesen 10 linear unabhängigen Gleichungen (1.1) bezeichnen $R_{\mu\nu}$ und R den Ricci-Tensor bzw. -Skalar, $g_{\mu\nu}$ und $G_{\mu\nu}$ den metrischen bzw. Einstein-Tensor und $T_{\mu\nu}$ den Energie-Impuls-Tensor der Materie.

Diese Gleichungen bilden die Grundlage für die Berechnung von Gravitationswellen [19]. Betrachtet man die Einsteinschen Feldgleichungen in ihrer mathematischen Form als System partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, so ist das Verhalten der Lösungen als Wellen nicht direkt erkennbar. Nur unter den Voraussetzungen einer asymptotisch flachen Raumzeit im Vakuum erhält man einfache Gravitationswellen als Lösungen der linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen. Ohne diese Annahmen ist die Berechnung von Gravitationswellen weitaus komplizierter. Für unsere Zwecke, also zur Berechnung der Schwingungsmoden von Neutronensternen, werden wir die Einsteinschen Gleichungen auch in ihrer linearisierten Form verwenden.

Grundlage linearisierter Feldgleichungen ist eine bereits bekannte Lösung, also eine Metrik $g_{\mu\nu}$ bzw. Raumzeit, in der sich Materie so bewegt, dass die Gleichungen erfüllt sind. Sternoszillationen werden im Allgemeinen durch zunächst beliebige Abweichungen der Ausgangsmetrik beschrieben, indem Störterme $h_{\mu\nu}$ durch Addition mit der Ausgangsmetrik $g_{\mu\nu}$ berücksichtigt werden. Da die gestörte Metrik

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

die Feldgleichungen in ihrer ursprünglichen Form nicht mehr erfüllt, muss die rechte Seite der Feldgleichungen und damit der Energie-Impuls-Tensor neu bestimmt werden. Ausgehend von beliebigen Störungen müsste konsequenterweise ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Aufgrund dieser Schwierigkeit werden nur kleine Störungen

gegenüber der Ausgangsmetrik $g_{\mu\nu}$ berücksichtigt, also nur Terme erster Ordnung in $h_{\mu\nu}$. Die gleiche Forderung wird auch an die Störterme $t_{\mu\nu}$ des Energie-Impuls-Tensors gestellt, so dass aus diesen Forderungen ein lineares System an Differenzialgleichungen in den Störgrößen folgt.

1.1.2 Der ADM-Formalismus

Zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen in der numerischen Relativitätstheorie wird oft der ADM^1 -Formalismus [20] verwendet, den man auch als 3+1-Zerlegung bezeichnet. Ziel dieses Formalismus ist die Zerlegung der Raumzeit in Ebenen dreidimensionaler raumartiger Hyperflächen, auf denen der Zeitparameter jeweils konstant ist. Die geometrische Anschauung dieser Blätterung der Raumzeit ist in Abbildung 1.1 wiedergegeben. Der Wechsel zwischen den Hyperflächen in dieser Blätterung wird durch den Ablauf der Zeit realisiert. Der Zeitablauf von einer zur nächsten Hyperfläche erfolgt hierbei durch die Lapse-Funktion α , welche durch das Differential der Eigenzeit $d\tau$ eines Beobachters und dem der Koordinatenzeit dt über

$$d\tau = \alpha dt \tag{1.3}$$

berechnet wird. Dies entspricht gerade dem senkrechten Abstand zwischen den Hyperflächen Σ_t und Σ_{t+dt} in Abbildung 1.1.

Verschiebungen der räumlichen Koordinate auf einer Hyperfläche innerhalb der Zeitentwicklung werden durch den Shift-Vektor β^i beschrieben durch

$$dx^i_{t+dt} = dx^i_t - \beta^i dt. \tag{1.4}$$

Mit Hilfe des Linienelements γ_{ij} , der Lapse-Funktion α sowie des Shift-Vektors β^i kann die Metrik $g_{\mu\nu}$ konstruiert werden.

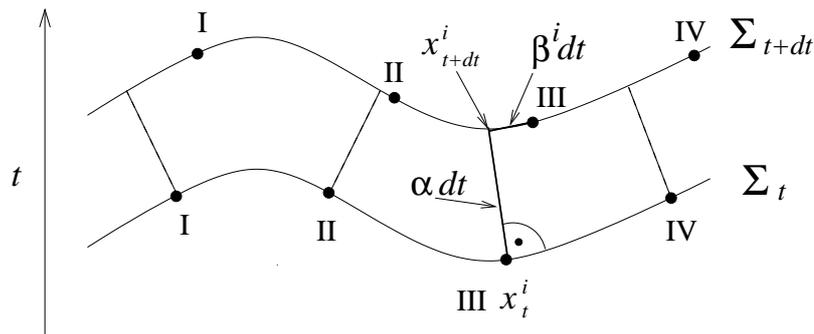


Abb. 1.1: Zweidimensionale Darstellung des Raum-Zeit-Diagramms der Lapse-Funktion α und des Shift-Vektors β^i . Die Punkte auf den beiden raumartigen Hyperflächen, welche zu den benachbarten Zeitwerten t und $t + dt$ gehören, stellen Orte dar.

¹Arnowitt-Deser-Misner

Bei der 3+1-Zerlegung werden die 10 Feldgleichungen in 6 dynamische und 4 Zwangsbedingungen (Constraints) separiert. Der Vorteil der 3+1-Gleichungen gegenüber den ursprünglichen Einsteingleichungen liegt darin, dass der Ricci-Tensor sowie -Skalar ausschließlich in der diagonalen 3-Metrik vorkommt. Somit lassen sich die Gleichungen für die Metrikterme einfacher bestimmen.

1.1.3 Die Wahl der Eichung

Die Einsteinschen Feldgleichungen bilden ein System von zehn partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung. Durch die Bianchi-Identitäten

$$R_{\beta[\lambda\mu;\nu]}^\alpha := \frac{1}{3} (R_{\beta\lambda\mu;\nu}^\alpha + R_{\beta\mu\nu;\lambda}^\alpha + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^\alpha) = 0 \quad (1.5)$$

sind jedoch nur sechs dieser Gleichungen voneinander unabhängig. Dies hat zur Folge, dass bei vorgegebener Materieverteilung lediglich sechs der zehn Komponenten des metrischen Tensors durch die Feldgleichungen bestimmt sind. Die übrigen vier Komponenten bilden die Eichfreiheit.

Die aus den Bianchi-Identitäten resultierende Eichfreiheit der Einsteinschen Theorie spiegelt sich in der Freiheit der Wahl der Blätterung Σ_t wider. Die Blätterung wird durch eine bestimmte Wahl der Lapse-Funktion sowie des Shift-Vektors festgelegt.

Eine oft verwendete Eichung ist die *Regge-Wheeler*-Eichung [13]. Diese Eichung erweist sich jedoch im rotierenden Fall für die Störungsgleichungen der linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen für numerische Zeitentwicklungen als ungeeignet. Im Allgemeinen liefert der ADM-Formalismus mit dieser Eichung ein System partieller Gleichungen erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung in den räumlichen Koordinaten. Für die numerische Entwicklung ist dies jedoch problematisch, so dass entweder ein vollständiges System erster oder zweiter Ordnung erzielt werden sollte. Im nichtrotierenden Fall stellt die Umformung des Systems kein Problem dar. Im rotierenden Fall jedoch ergeben sich hinsichtlich dieser Umformungen bei den axialen Störgleichungen große Schwierigkeiten.

Ein Ausweg aus dem Dilemma bietet die Wahl einer anderen Eichung. Für rotierende Sterne ist die *BCL*²-Eichung [21] vorteilhafter, welche erstmals von Battiston *et al.* 1971 eingeführt wurde. Der Vorteil dieser Eichung liegt darin, dass die Störungsgleichungen keine Ableitungen zweiter Ordnung enthalten, was die numerische Zeitentwicklung vereinfacht. In der BCL-Eichung stellt man an die Störung der Lapse-Funktion die Bedingung $\alpha = 0$, und die Störung des Shift-Vektors β^i wird so gewählt, dass für die Entwicklungsgleichungen der winkelabhängigen Störgrößen $\partial_t h_{ab} = 0$ mit $a, b = \{\Theta, \Phi\}$ gilt.

Jüngste Entwicklungen in der Forschung in diesem Bereich haben gezeigt, dass man von der attraktiv erscheinenden BCL-Eichung nach und nach wieder abrückt. Einer der Gründe liegt sicherlich darin, dass diese Eichung erhebliche Probleme hinsichtlich

²Battiston-Cazzola-Lucaroni

numerischer Stabilität mit sich bringt. Die vorliegende Arbeit liefert jedoch einen Hinweis darauf, dass auch mit dieser Eichung hinreichende numerische Stabilität erzielt werden kann.

1.1.4 Störungsrechnung für Neutronensterne

In der hier verwendeten Störungstheorie [22–28] gehen wir zunächst von einem ungestörten hinreichend kompakten Stern aus, der sich im Gleichgewicht befindet und dessen ungestörte physikalische Größen, wie der Druck p oder die Energiedichte ε , durch eine allein vom Radius abhängige Funktion $F_0(r)$ wiedergegeben werden. Lassen wir nun eine beliebige aber kleine Störung auf den Stern zu, so erfährt dieser eine geringe Abweichung $F_1(t, r, \Theta, \Phi)$ von seiner Gleichgewichtslage und wird nun beschrieben durch

$$F(t, r, \Theta, \Phi) = F_0(r) + F_1(t, r, \Theta, \varphi). \quad (1.6)$$

Um die Linearität zu gewährleisten, setzen wir kleine Störungen voraus.

Generell gibt es zwei verschiedene Ansätze zur Beschreibung kleiner Störungen: die Eulersche und die Lagrangesche Störung. Bei der Eulerschen Störung geht man von räumlich verankerten Koordinaten aus

$$\delta F(t, \vec{x}) \equiv F(t, \vec{x}) - F_0(\vec{x}), \quad (1.7)$$

wobei $F(t, \vec{x})$ die zeitabhängigen Größen und $F_0(\vec{x})$ die Größen im zeitunabhängigen Gleichgewichtszustand repräsentieren. Die Koordinaten \vec{x} bezeichnet man als Eulersche Koordinaten, sie sind ortsfest. Im Gegensatz dazu gibt es die Lagrangeschen Koordinaten \vec{X} , die mit den Fluidelementen wandern und sozusagen die Fluidelemente durchindizieren. Zu einem Zeitpunkt t_0 stimmen diese mit den Eulerschen Koordinaten überein, d.h.

$$\vec{X}(t_0) = \vec{x} \quad (1.8)$$

und zu einem späteren Zeitpunkt gilt

$$\vec{X}(t) = \vec{x} + \vec{\xi}(t, \vec{x}), \quad (1.9)$$

wobei $\vec{\xi}(t, \vec{x})$ die dynamische Verschiebung beinhaltet. Bei der Lagrangeschen Störung erhält man die Störgrößen aus der Differenz, die ein mitbewegter Beobachter feststellt, d.h. die Differenz an zwei unterschiedlichen räumlichen Punkten

$$\Delta F(t, \vec{X}) \equiv F(t, \vec{X}) - F(t_0, \vec{x}), \quad (1.10)$$

wobei $F(t, \vec{X})$ die räumlich mitbewegten physikalischen Größen und $F(t_0, \vec{x}) = F_0(\vec{x})$ die Gleichgewichtswerte in der Referenzposition \vec{x} darstellen.

Diese Eigenheit der Lagrangeschen Störgrößen führt dazu, dass sie am Sternrand immer Null sind [23]. Im Folgenden werden, solange nichts anderes angeführt wird, immer Eulersche Störungen betrachtet.

In diesem Kapitel legen wir zur besseren Übersicht nur das grundsätzliche Vorgehen dar. Die konkreten Gleichungen werden in Kapitel 2 dargestellt. Die Störung der Raumzeit wird durch die in Gleichung (1.2) angegebene Metrik

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

beschrieben, wobei die Störung der Metrik $h_{\mu\nu}$ klein gegenüber der Hintergrundmetrik $g_{\mu\nu}$ sein soll. Den Störungen der Fluidgrößen legen wir kleine Störungen der Geschwindigkeit δu^μ , der Dichte $\delta\rho$ und des Druckes δp zugrunde. Ausgehend von adiabatischen Schwingungen [29] können die Eulerschen Druckstörungen δp und die Störungen der Energiedichte $\delta\epsilon$ durch folgende Relation wiedergegeben werden

$$\delta p = \frac{\Gamma_1 p}{p + \epsilon} \delta\epsilon + p' \xi^r \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - 1 \right). \quad (1.11)$$

Hierbei ist Γ_1 der adiabatische Index des gestörten Systems,

$$\Gamma = \frac{p + \epsilon}{p} \frac{dp}{d\epsilon} \quad (1.12)$$

der adiabatische Index des ungestörten Hintergrunds und ξ^r die radiale Komponente des Verschiebungsvektors ξ^μ des Fluids. Die Schallgeschwindigkeit beträgt in diesem Rahmen

$$C_s^2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \frac{dp}{d\epsilon}. \quad (1.13)$$

Der Verschiebungsvektor ist mit der Störung der Vierergeschwindigkeit über

$$\delta u_\mu = (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) L_u \xi^\nu + \frac{1}{2} u_\mu u^\kappa u^\lambda h_{\kappa\lambda} + u^\nu h_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

verknüpft, wobei L_u die Lie-Ableitung entlang u^μ bezeichnet. Für die radiale Komponente des Verschiebungsvektors erhält man erst dann eine weitere Gleichung, wenn man eine entsprechende Metrik eines geeigneten Hintergrundmodells voraussetzt. Mit diesen Annahmen sowie den gestörten Einsteingleichungen

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi \delta T_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

und der Störung der Energie-Impulserhaltung, die als Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors geschrieben werden kann,

$$\delta T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (1.16)$$

erhält man für die fluiden sowie raumzeitlichen Störgrößen eines sphärisch symmetrischen, langsam rotierenden Neutronensterns die vollständigen Entwicklungsgleichungen.

Die Metrikstörungen $h_{\mu\nu}$ sind abhängig von allen vier Koordinaten

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi). \quad (1.17)$$

Aufgrund der sphärischen Symmetrie ist es vorteilhaft, die Störungen nach Kugelflächenfunktionen zu entwickeln, um die explizite Winkelabhängigkeit zu eliminieren. So erhält man ein System partieller Differenzialgleichungen für die Störgrößen, die nur noch von t und r sowie den Ordnungszahlen l und m abhängen. Bei diesem Formalismus ergeben sich wesentliche Unterschiede zwischen dem rotierenden und dem nichtrotierenden Fall, die im Folgenden zur besseren Übersicht zusammengefasst werden:

- Im nichtrotierenden Fall
 - sind die Gleichungen entkoppelt bezüglich l .
 - spalten die Gleichungen in zwei unabhängige Systeme auf: die polaren Störungen transformieren sich gemäß der Parität $(-1)^l$, die axialen gemäß $(-1)^{l+1}$.
- Die Rotation
 - führt zu einer Kopplung zwischen den polaren und den axialen Gleichungen der Ordnung l und dem System axialer bzw. polarer Gleichungen der Ordnung $l \pm 1$ (siehe Kapitel 5.5).
 - erzeugt eine Aufspaltung der m -Entartung der Schwingungsmoden, d.h. für jede nichtrotierende Schwingungsmode der Ordnung l treten weitere Moden der Ordnung $2l + 1$ auf (siehe Kapitel 3.5 und 5.3).

1.1.5 Berechnung des Spektrums

Es gibt im Wesentlichen zwei verschiedene Vorgehensweisen, um das Spektrum der Schwingungsfrequenzen zu berechnen. Eine Methode besteht darin, eine Quasinormalmodenanalyse gemäß dem Ansatz

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \sim e^{\nu\sigma t} \quad (1.18)$$

durchzuführen [30, 34], wobei nur die Moden interessant sind, die zu einer Abstrahlung von Gravitationswellen führen, also deren „Frequenz“ σ einen positiven imaginären Anteil besitzt. Die resultierenden Gleichungen, die keine zeitlichen Ableitungen mehr enthalten, können dann unter Vorgabe geeigneter Randbedingungen als Randwertproblem gelöst werden. Diese Methode der Modenanalyse erlaubt es, das gesamte Spektrum der Schwingungsmoden auf einmal zu berechnen. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Weg jedoch nicht weiter verfolgt, da die resultierenden Gleichungen numerisch nur mit sehr großem Aufwand zu lösen sind.

Ein anderer Ansatz zur Untersuchung der Schwingungsfrequenzen, der auch im Folgenden zur Anwendung kommt, liegt in einer direkten Zeitentwicklung der Störgleichungen mit geeigneten Anfangsbedingungen [23, 35–38]. Die charakteristischen Frequenzen, die entsprechend den vorgegebenen Anfangsdaten angeregt werden, erhält man durch Fouriertransformation der zeitlichen Entwicklung der Störfunktionen. Da dies nicht einer klassischen Quasinormalmodenanalyse entspricht, kann man streng genommen auch nicht von Moden sprechen. Trotzdem ist eine eindeutige Zurordnung der Frequenzpeaks im Spektrum zu den bekannten Moden meist möglich und insofern wird in der gesamten Arbeit auch von Moden gesprochen. Im Rahmen der Zeitentwicklung ist eine geeignete Wahl der Anfangsbedingung für das resultierende Frequenzspektrum von großer Bedeutung. Gibt man eine Anfangsstörung kleiner Amplitude vor bzw. wählt man die Dauer der Zeitentwicklung zu gering, so erhält man nur einen geringen Ausschnitt des Schwingungsspektrums.

1.1.6 Die Cowling-Näherung

Bei der Berechnung von Schwingungen sphärischer Sterne führte Cowling 1941 [39] eine Näherung durch, die die Eulersche Störung des Newtonschen Gravitationspotenzials in den linearisierten Störungsgleichungen vernachlässigte. Hierbei unterteilte Cowling das Frequenzspektrum in drei Bereiche: die f -Mode, sowie das Spektrum der niederfrequenten g -Moden und die im höheren Frequenzbereich anzutreffenden p -Moden. Die Newtonsche Cowling-Näherung erweist sich für alle g -Moden als geeignet, da in diesem Fall die Eulersche Massendichtestörung im Vergleich zur Fluidverschiebung vernachlässigbar ist.

Die relativistische Cowling-Näherung wurde erstmals von McDermott *et al.* [40, 41] für f -, p - und g -Moden in Neutronensternen beschrieben. In der Allgemeinen Relativitätstheorie werden analog zur Gravitationsstörung die räumlichen Metrikstörungen vernachlässigt sowie einige Eulersche Störgrößen darüberhinaus [42]. Die Metrikstörungen hängen mit den Fluidstörungen über Anfangsbedingungen sowie Kopplungen der dynamischen Gleichungen zusammen. Bisherige Abschätzungen hinsichtlich der Genauigkeit der Cowling-Näherung [43, 44] im Vergleich zur vollrelativistischen Berechnung der Schwingungsfrequenzen werden in Kapitel 4.1 genauer untersucht.

Während bei der gewöhnlichen relativistischen Cowling-Näherung alle räumlichen Störungen vernachlässigt und somit nur die Fluidmoden betrachtet werden, werden bei der inversen Cowling-Näherung - durch Vernachlässigung der Störungen der Fluidanteile - nur räumliche Moden betrachtet. Diese Vereinfachung wurde erstmals in [45] beschrieben. Durch die Entkopplung der räumlichen von den Fluidmoden können die charakteristischen räumlichen w -Moden einfacher aufgefunden werden [46].

1.2 Das Hintergrundmodell

1.2.1 Der ungestörte Neutronenstern

Als Hintergrundmodell setzen wir einen Neutronenstern voraus, der im Innern durch eine ideale Flüssigkeit beschrieben wird, d.h. es liegt ein isotroper Druck vor und es ist keine Viskosität vorhanden. Dabei wird mit dieser Idealisierung der Einfluss einer möglichen kristallinen Kruste des Neutronensterns auf die Schwingungsdynamik vernachlässigt und damit ein ganzer Zweig möglicher nichtradiärer Eigenschwingungen des Neutronensterns mit ungerader Parität nicht berücksichtigt [22]. Die Größenordnung der vernachlässigten Korrekturbeiträge der Kruste kann mit ca. 10^{-5} quantifiziert werden [47]. Im Außenraum soll sich keine Materie befinden, dort liegt also eine einfache Schwarzschildmetrik vor. Im Folgenden geben wir einen kurzen Überblick darüber, welche Schritte notwendig sind, um Modelle dieser Art zu berechnen und wodurch sie unterschieden werden können. Wichtig in diesem Zusammenhang ist zu betonen, dass sich die verschiedenen konkreten Sternmodelle durch die Wahl der Zustandsgleichung sowie durch die Wahl geeigneter Randbedingungen, wie beispielsweise der zentralen Energiedichte, unterscheiden. Für alle Modelle wird übereinstimmend angenommen, dass es sich um einen langsam rotierenden, sphärisch symmetrischen Neutronenstern handelt, dessen raumzeitliche Geometrie durch die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & -\omega r^2 \sin^2 \theta \\ 0 & e^{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ -\omega r^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

bzw. das Linienelement

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\mu(r)} dr^2 + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2) - 2\omega r^2 \sin^2 \Theta dt d\Phi \quad (1.20)$$

beschrieben wird, wobei $\omega = \omega(r)$ den sogenannten Frame-Dragging Effekt wiedergibt (siehe z.B. [50] und dortige Referenzen). Hierbei sind $\mu(r)$ und $\nu(r)$ Funktionen, die nur von der Radialkoordinate abhängen und durch die Feldgleichungen bestimmt werden. Die Abhängigkeit vom Radius r wird im Folgenden immer dann nicht ausgeschrieben, wenn eine Verwechslung mit den in der Allgemeinen Relativitätstheorie üblichen Indizes μ und ν ausgeschlossen werden kann. Die ideale Flüssigkeit wird durch einen Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

beschrieben, wobei p der Druck, ϵ die Energiedichte und u_μ die kovariante Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeit ist. Im (mitrotierenden) Ruhesystem der Flüssigkeit ist die zeitliche Koordinate U^0 die einzige von Null verschiedene Komponente, welche mit Hilfe der Normierungsbedingung

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{00} u^0 u^0 = -1 \quad (1.22)$$

zu

$$U^0 = e^{-\nu} \quad (1.23)$$

berechnet wird. Die gesamte Vierergeschwindigkeit im nicht rotierenden System ist somit

$$U^\mu = (e^{-\nu}, 0, 0, \Omega e^{-\nu}), \quad (1.24)$$

wobei Ω die beobachtete Winkelgeschwindigkeit des Sterns für einen Beobachter im Unendlichen bezeichnet. Aus den Einsteingleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

erhält man zusammen mit der Bianchi-Identität

$$G^\mu_{\nu;\mu} = 0 \quad (1.26)$$

die folgenden drei Strukturgleichungen für die vier zu berechnenden Größen μ, ν, ϵ und p

$$\mu' = \frac{1 - e^{2\mu}}{2r} + 4\pi r e^{2\mu} \epsilon \quad (1.27)$$

$$\nu' = \frac{e^{2\mu} - 1}{2r} + 4\pi r e^{2\mu} p \quad (1.28)$$

$$p' = -\nu' (p + \epsilon). \quad (1.29)$$

Zusätzlich erhält man eine vierte Gleichung für das Frame-Dragging

$$\bar{\omega}'' - \left[4\pi r e^{2\lambda} (p + \epsilon) - \frac{4}{r} \right] \bar{\omega}' - 16\pi e^{2\lambda} (p + \epsilon) \bar{\omega} = 0. \quad (1.30)$$

Hier bezeichnet $\bar{\omega} = \Omega - \omega$ eine vom Radius r abhängige Funktion, die als Differenz zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Fluides und des Inertialsystems aufgefasst werden kann. Sie wird später noch öfters benötigt. Diese vier Gleichungen bezeichnen wir im Folgenden als Tolman-Oppenheimer-Volkov(TOV)-Gleichungen, auch wenn die ursprünglichen TOV-Gleichungen in einer etwas anderen Schreibweise vorliegen [48, 49]. Durch Einführung einer Funktion $m(r)$, der sog. Massenverteilungsfunktion, mit

$$m(r) = \int_0^r (4\pi r'^2 \epsilon dr'), \quad (1.31)$$

welche mit μ nach elementaren Umformungen gemäß der Gleichung

$$e^{-2\mu} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \quad (1.32)$$

zusammenhängt, kann ein Zusammenhang zwischen der Funktion μ und einer physikalischen Größe hergestellt werden. Zur Bestimmung der Lösung des TOV-Gleichungssystems ist die Vorgabe zweier Zustandsgleichungen

$$p = p(s, n) \tag{1.33}$$

$$\epsilon = \epsilon(s, n) \tag{1.34}$$

mit der spezifischen Entropie s und der Baryondichte n notwendig. Da der Druck innerhalb eines Neutronensterns im Wesentlichen durch ein Fermigas entarteter Neutronen aufrechterhalten wird, der um viele Größenordnungen größer ist als der thermische Druck, kann von einer Temperatur $T = 0$ K innerhalb des Neutronensterns ausgegangen werden, was eine sehr gute Näherung darstellt. Somit kann auch die spezifische Entropie s zu Null gesetzt und die Baryondichte n eliminiert werden, so dass die resultierende Zustandsgleichung als Druck in Abhängigkeit der Energiedichte

$$p = p(\epsilon) \tag{1.35}$$

angegeben werden kann. Die einfachste und in Modellrechnungen meist verwendete Zustandsgleichung ist die polytrophe Zustandsgleichung

$$p = \kappa \epsilon^\gamma, \tag{1.36}$$

wobei κ die Polytropenkonstante und γ den Polytropenexponenten bezeichnen. Das Gleichungssystem wird mit Hilfe der Zustandsgleichung vom Ursprung bis zum Sternrand numerisch integriert. Der Druck wie auch die Energiedichte sind im Außenraum Null. Zur Integration des Innenraums genügt die Vorgabe des Zentraldrucks p_0 . Über die Zustandsgleichung kann dann die entsprechende Zentraldichte berechnet werden.

Die Annahme der Temperatur $T = 0$ K bedeutet zugleich die Vernachlässigung thermischer Effekte, die die Sternschwingungen beeinflussen könnten und somit das Unterbinden des Auftretens von g -Moden. Desweiteren werden durch diese Annahme die Viskosität sowie innere Reibungen ausgeschlossen, wodurch jedoch Dämpfungen von Schwingungen verhindert werden. Die Vernachlässigung der Dämpfung hat allerdings keine Auswirkung auf die numerische Zeitentwicklung, weil sie in einem anderen Zeitregime auftritt.

1.2.2 Zustandsgleichungen

Wie bereits erwähnt, liefert die Zustandsgleichung eine Beschreibung des Materieverhaltens [50, 60–66]. Diese stellt einen Zusammenhang zwischen thermodynamischen Zustandsgrößen wie Temperatur T , Energiedichte ϵ und Druck p dar. Da Materialeigenschaften unter diesen Extrembedingungen, wie sie im Innern eines Neutronensterns vorliegen, nicht exakt wiedergegeben werden können, sind die Zustandsgleichungen für Neutronensterne nicht besonders gut bekannt. Dieser liegen quantenmechanische Berechnungen von

Mehrteilchensystemen mit entsprechenden Näherungsverfahren (beispielsweise Hartree-Näherung) zugrunde.

Im Bereich der Zustandsgleichungen ist die sog. Steifigkeit eine charakteristische Größe für die Neutronensterneigenschaften. Die Steifigkeit entspricht im Allgemeinen dem Anstieg des Drucks mit der Energiedichte und damit dem Widerstand gegen eine weitere Kompression. Der dichteabhängige Druckanstieg steht in Bezug zur Schallgeschwindigkeit. Mit der Forderung, dass die Schallgeschwindigkeit stets kleiner sein muss als die Lichtgeschwindigkeit, die von relativistischen Zustandsgleichungen erfüllt wird, können Randbedingungen für die Steifigkeit hergeleitet werden. Weiche Zustandsgleichungen, also deren Kernmaterie eine hohe Kompressibilität aufweist, liefern Modelle mit kleinen Maximalmassen, kleinen Radien und großen Rotationsfrequenzen, wohingegen steife Zustandsgleichungen, also weniger kompressible Kernmaterie, Modelle mit großen Maximalmassen, großen Radien und kleinen Rotationsfrequenzen liefern.

Die einfachste Zustandsgleichung ist die schon erwähnte Polytropengleichung (1.36). Obwohl polytrophe Zustandsgleichungen nicht so realistisch sind wie ausführlich hergeleitete Zustandsgleichungen, sind sie dennoch hilfreich, um numerische Codes zu verifizieren. Die meisten Modellrechnungen werden immer auch mit dieser Zustandsgleichung erstellt. Da realistische Zustandsgleichungen in tabellarischer Form vorliegen, benötigt man zur numerischen Integration der TOV-Gleichungen Zwischenwerte, die man durch Spline-Interpolationen erhält.

Die größte Unsicherheit im Bereich der Neutronensterneigenschaften hängt mit den unbekanntem Wechselwirkungen der Neutronensternmaterie bei hohen Dichten zusammen. Es gibt zahlreiche Zustandsgleichungen mit unterschiedlichen Ansätzen. Einige hadronische Zustandsgleichungen seien im Folgenden etwas näher erläutert, da sie in der vorliegenden Arbeit für Modellrechnungen verwendet wurden. Im weiteren Verlauf werden wir die in der Literatur verbreitete Abkürzung EOS (equation of state) für Zustandsgleichungen verwenden.

- **EOS A:** Pandharipande [67]

Der Stern wird im Rahmen dieses Modells als reine Neutronenmaterie betrachtet, deren Dynamik von einem nichtrelativistischen Hamilton-Operator bestimmt wird, der ein semiphänomenologisches Wechselwirkungspotenzial beinhaltet.

- **EOS C:** Bethe-Johnson [68]

Die Zustandsgleichung C liegt im Bereich mittlerer Steifigkeit. Die Maximalmasse eines sphärischen Neutronensterns liegt, basierend auf der EOS C, bei $1,85 M_{\odot}$. Zentrale Energiedichten liegen im Bereich von $1,71 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ bis $3,23 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Dieser Zustandsgleichung liegen Hyperonen wie auch Nukleonen zugrunde. Es wird eine nichtrelativistische Wechselwirkung angenommen. Zur Beschreibung der Vielteilchentheorie wird das Variationsprinzip angewandt.

- **EOS F:** Arponen [69]
Die Berechnungen der etwas weicheren Zustandsgleichung F basieren auf der Thomas-Fermi-Theorie.
- **EOS WFF:** Wiringa-Fiks-Farbrocini [70]
Die Zustandsgleichung WFF ist von mittlerer Steifigkeit. Im Bereich hoher Dichten liefert sie sehr gute Ergebnisse. Zugrunde liegen die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung, die durch ein Zwei-Teilchen-Potenzial beschrieben wird und die phänomenologische Drei-Nukleonen-Wechselwirkung. Die Maximalmasse eines sphärisch symmetrischen Sterns liegt bei $1,84 M_{\odot}$.
- **EOS MPA:** Machleidt Potential A - Müther [71]
Die Zustandsgleichung MPA gilt bis zu einer maximalen Neutronensternmasse von $1,56$ Sonnenmassen und Rotationsperioden $< 0,5$ ms. Sie zählt zu den weichen Zustandsgleichungen und gilt als sehr gute Zustandsgleichung zur Beschreibung realistischer Neutronensternmodelle.

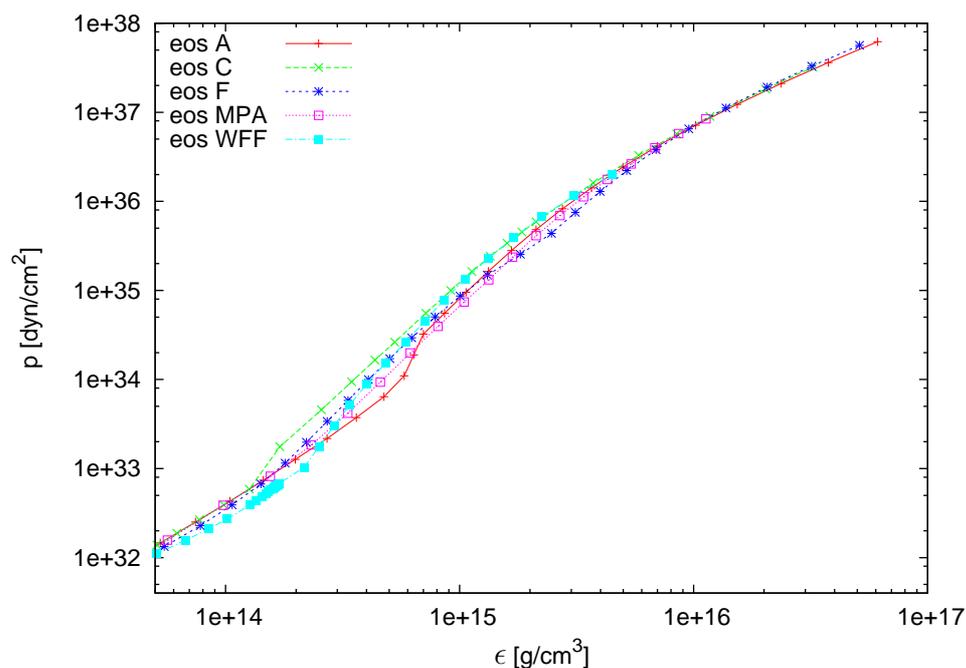


Abb. 1.2: Die im Text beschriebenen Zustandsgleichungen im Vergleich: der Druck p als Funktion der Energiedichte ϵ .

Die Gegenwart eines starken Magnetfeldes führt zur Reduzierung des Phasenraums der Elektronen in transversaler Richtung, so dass ihre Entartung erst bei höheren Dichten einsetzt. Im Falle eines Nichtvorhandenseins eines Magnetfeldes gelten die Relationen $T_F \sim \epsilon^{\frac{2}{3}}$ sowie $p_c \sim \epsilon^{\frac{2}{3}}$, während das Vorhandensein eines Magnetfeldes auf die Relationen $T_F \sim \epsilon^2$ und $p_c \sim \epsilon^3$ führt. Im Falle hoher Dichten kann ein vorhandenes Magnetfeld

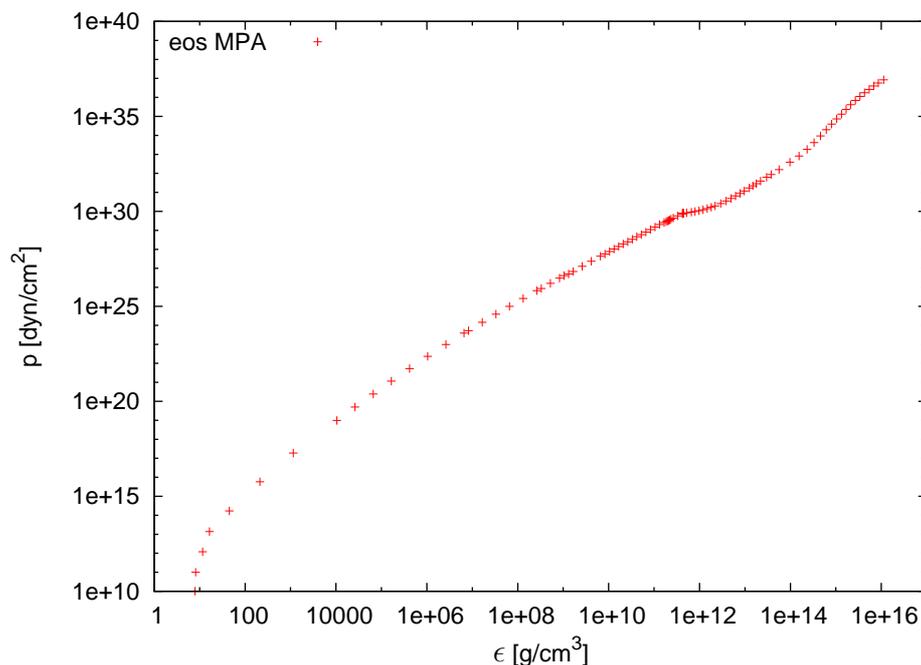


Abb. 1.3: Die im Text beschriebene Zustandsgleichung MPA: der Druck p als Funktion der Energiedichte ϵ .

jedoch vernachlässigt werden, da dann die thermodynamischen Eigenschaften relevant werden.

Die Relation zwischen dem Druck und der Energiedichte der Zustandsgleichung MPA ist in Abbildung 1.3 dargestellt. Man erkennt darin im Energiedichtebereich bei $4,3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ einen Knick im Kurvenverlauf. Dieser Knick ist als sogenannter n -Drip bzw. Neutronentropfpunkt bekannt. Ab einer Energiedichte von $\epsilon = 4,3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$, die einem Druck von $p = 2,8 \cdot 10^{29} \text{ dyn/cm}^2$ und einer e^- -Fermienergie von 23 MeV entspricht, erfolgt die Freisetzung eines n -Gases - charakterisiert durch einen Phasenübergang erster Ordnung. Während des Phasenübergangs liegt eine Koexistenz freier Neutronen und Kerne vor. Kollektive Anregungen veranlassen die Materie zur Speicherung dieser daraus resultierenden Energien. Im Bereich hoher Dichten verschwinden die Kerne aufgrund der abnehmenden Bindungsenergie. Dieser Effekt kann jedoch aufgrund des Pauli-Prinzips nicht zwischen gleichartigen Nukleonen eintreten. Mit zunehmendem Druck werden die Atomkerne daher instabil und lösen sich auf.

1.3 Klassifizierung von Schwingungsmoden

Die Unterscheidung und Klassifizierung von Schwingungsmoden von Sternen sind für die vorliegende Arbeit von grundlegender Bedeutung. Insofern ist es sinnvoll, im folgenden Abschnitt einen Überblick über die gängigsten Schwingungsmoden zu geben, ihre Namen,

den jeweiligen physikalischen Hintergrund und die zu erwartenden Größenordnungen der Frequenzen [50, 72–76].

Bei Schwingungsmoden von Fluidsternen unterscheidet man im Wesentlichen zwischen den radialen Schwingungen [51–56] ohne Winkelabhängigkeit und den winkelabhängigen nichtradialen Schwingungen [57–59]. Nur im Fall nichtrotierender und demnach sphärischer Sterne können neben den nichtradialen auch radiale Schwingungen auftreten. Jede mögliche auftretende Schwingung eines Sterns wird durch eine entsprechende rücktreibende Kraft bestimmt, die ein ausgelenktes Fluidteilchen zurück in die Gleichgewichtslage bringt. Die zwei wesentlichen rücktreibenden Kräfte, die sowohl für rotierende als auch für nichtrotierende Sterne auftreten, sind der Druck und die Auftriebskraft. Die Rotation führt zu einer weiteren rücktreibenden Kraft - die Corioliskraft, die eine neue Klasse von Schwingungsmoden hervorbringt. Diese sind auch als Inertialmoden (*inertial modes*) bekannt bzw. in der Geophysik als Rossbywellen.

1.3.1 Fluidmoden

Ausgehend von nichtrotierenden Sternen gibt es die Fluidmoden nur für polare Schwingungen. Die Eigenschaften dieser wichtigsten Moden für die Gravitationswellenabstrahlung werden wir im Folgenden näher ausführen. Die Fluidmoden lassen sich in drei wesentliche Modentypen klassifizieren: die Fundamentalmoden (*f*-Moden), die Druckmoden (*p*-Moden) sowie die Gravitationsmoden (*g*-Moden).

f-Moden

Die *f*-Moden sind stabile Moden, die nur bei nichtradialen Schwingungen auftreten. Die Frequenz ist proportional zur mittleren Dichte des Sterns und ist weitgehend unabhängig von der Sternstruktur. Im Sterninnern weisen diese Moden keine Knoten auf und nehmen zur Sternoberfläche hin zu. Der Frequenzbereich der *f*-Moden liegt zwischen 1,5 und 3 kHz. Die Dämpfungszeit liegt unterhalb einer Sekunde.

p-Moden

Dieser Modentyp tritt sowohl bei radialen als auch nichtradialen Schwingungen auf. Die rücktreibende Kraft der *p*-Moden ist der Druck. Die Frequenzen hängen von der Ausbreitungsgeschwindigkeit der akustischen Wellen im Stern ab. Die Frequenzen der *p*-Moden liegen im Bereich von 4 – 7 kHz. Die Dämpfungszeiten der ersten *p*-Moden liegen im Bereich von einigen Sekunden. Mit zunehmender Ordnung der Moden nehmen sowohl die Frequenzen als auch die Dämpfungszeiten zu.

g-Moden

Die rücktreibende Kraft der *g*-Moden ist die Auftriebskraft. Entlang von Äquipotenzialflächen gleicht die Auftriebskraft Inhomogenitäten aus. Die *g*-Moden sind dann stabil,

wenn die Störung im Vergleich zur Konvektion stabil ist. Der Frequenzbereich liegt unterhalb von hundert Hz und die Dämpfungszeit liegt im Bereich von Tagen bis Jahren.

***r*-Moden**

Die Rotationsmoden eines nichtrotierenden Sterns sind rein axiale Moden mit verschwindender Frequenz, entsprechen also einer Trivillösung. Für rotierende Sterne werden die toroidalen Moden nichttrivial mit Frequenzen in der Ordnung der Rotationsfrequenz [77,78]. Diese nennt man auch *r*-Moden oder quasi-toroidale Moden. Alle *r*-Moden mit $l \leq 2$ sind instabil hinsichtlich der Abstrahlung von Gravitationswellen [30] aufgrund der Chandrasekhar-Friedman-Schutz(CFS)-Instabilität [31–33].

1.3.2 Raumzeitmoden

Die Raumzeitmoden oder auch *w*-Moden werden in drei verschiedene Klassen unterteilt mit den englischen Bezeichnungen *curvature* (w^I), *trapped* (w^{II}) und *interface* (w^{III}) [79–81]. Die Spektren jeder einzelnen dieser drei *w*-Moden sind sowohl für polare als auch für axiale Sternschwingungen ähnlich. Charakteristisch für alle Raumzeitmoden ist das Fehlen von Fluidbewegungen.

curvature-Moden

Die w^I -Moden sind zurückzuführen auf die Raumzeitkrümmung und treten bei allen relativistischen Sternen auf. Hohe Dämpfungszeiten (einige Zehntel Millisekunden), die mit abnehmender Kompaktheit bzw. Dichte des Sterns zunehmen, sind charakteristisch für die w^I -Moden. Die Frequenzen der ersten *w*-Mode liegen für typische Neutronensterne im Bereich von 5-12 kHz und nehmen mit der Ordnung der Moden zu.

trapped-Moden

Die w^{II} -Moden sind nur bei sehr kompakten Sternen ($R \leq 3M$) anzutreffen, also wenn die Sternoberfläche innerhalb einer Potenzialbarriere des Gravitationsfeldes liegt. Mit zunehmender Sterndichte erhöht sich auch die Anzahl der w^{II} -Moden, welche nur in begrenzter Anzahl auftreten. Die charakteristischen Frequenzen liegen im Bereich einiger hundert Hz bis zu einigen kHz. Aufgrund des Gravitationspotenzials, das die Gravitationswellen überwinden müssen, erfolgt die Dämpfung sehr langsam, weshalb die Dämpfungszeiten einige Zehntel Sekunden betragen.

interface-Moden

Die w^{III} -Moden sind auf eine geringe Anzahl an Moden begrenzt. Sie weisen eine starke Dämpfung auf, die im Bereich einiger Zehntel Millisekunden liegt. Die Frequenzen liegen zwischen 2 und 15 kHz.

1.4 Gravitationswellen

1.4.1 Messgrößen und ihre Bedeutung

In der Allgemeinen Relativitätstheorie werden vor allem die Schwarzen Löcher als Objekte mit dem stärksten Gravitationsfeld vorhergesagt, obwohl relativistische Sterne, wie Neutronensterne, in dieser Hinsicht vergleichbar sind mit Schwarzen Löchern [82, 83]. Entsprechend den Schwarzen Löchern reagieren auch Neutronensterne auf Störungen und emittieren Gravitationswellen. Die von gestörten relativistischen Sternen emittierte Gravitationsstrahlung ist jedoch von weitaus höherem physikalischen Informationsgehalt als die der Schwarzen Löcher. So sollten emittierte Gravitationswellen der Sterne Auskunft über innere Sternstrukturen geben, falls sich die Erwartungen erfüllen, dass sie überhaupt gemessen werden können. Konkret sollte anhand solcher Messungen beispielsweise darüber entschieden werden können, welche Zustandsgleichungen das Innere der Neutronensterne gut beschreiben und welche weniger gut geeignet sind [61, 84]. Eine technisch noch ungelöste Aufgabe ist jedoch die Messung von Gravitationswellen relativistischer Sterne. Moderne Messungen werden durch Laserinterferometer realisiert (z. B. bei den Projekten GEO600, TAMA300, VIRGO, LIGO), welche eine große Messempfindlichkeit aufweisen [85]. Bisher hat jedoch noch keines der Projekte einen nachweislichen Messerfolg zu verbuchen.

Unter den Annahme schwacher Gravitationswellen kann die Stärke dieser Gravitationswellen – also die Verlustrate der Energie durch Gravitationswellen – bei einem Abstand d durch

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{E}{\tau} \approx 4\pi d^2 \left(\frac{c^3}{16\pi G} \right) |\dot{h}|^2 \quad (1.37)$$

wiedergegeben werden. Bei konstanter Abstrahlung bezeichnet E die gesamte abgestrahlte Energie pro Zeit τ . Bei einer Schwingungsfrequenz ν des Sterns folgt mit $\dot{h} \approx 2\pi\nu h$ aus Gleichung (1.37) eine Gravitationswellenamplitude

$$h \approx 1,2 \times 10^{-21} \left(\frac{E}{\tilde{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 \text{ ms}}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{\nu} \right) \left(\frac{50 \text{ kpc}}{d} \right), \quad (1.38)$$

wobei der Energieverlust \tilde{E} der Gravitationswelle durch relativistische Rechnungen mit $8,2 \times 10^{-8} M_{\odot} c^2$ abgeschätzt wird [82].

Als mögliche Quellen von Gravitationsstrahlung unterscheidet man zwischen Ausbrüchen, periodischen Quellen und stochastischen Quellen [86]. Zu den Ausbrüchen, auch als Bursts bezeichnet, zählen als stärkste Quellen die kollabierenden bzw. fluktuierenden Kerne von Supernovae, die Entstehung massiver Schwarzer Löcher, deren Kollision untereinander bzw. mit anderen kompakten stellaren Objekten wie Neutronensternen. Auch Ereignisse wie die Zerstörung kompakter Binärsysteme sind als Ausbruchsquelle von Gravitationswellen denkbar. Zu den periodischen Quellen zählen binäre Sternsysteme

sowie die Schwingungen deformierter Sterne, Neutronensterne und Weisser Zwerge [87]. Insofern ist eine theoretische Vorhersage von Schwingungsmoden für die Gravitationswellenastronomie von großer Bedeutung. Zuletzt seien noch die stochastischen Quellen von Gravitationswellen genannt. Hierbei kommen beispielsweise Inhomogenitäten und Strukturen aus einem frühen Stadium des Universums in Frage.

2 Störungsrechnung ohne Cowling-Näherung

2.1 Herleitung der Entwicklungsgleichungen

2.1.1 Die Störungsgleichungen

Das Gleichungssystem der Entwicklungsgleichungen kann in der schematischen Form

$$\begin{aligned} A_{lm} + \varepsilon A_{lm} + \varepsilon P_{l\pm 1,m} &= 0 \\ P_{lm} + \varepsilon P_{lm} + \varepsilon A_{l\pm 1,m} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

wiedergegeben werden, wobei A die axialen Terme, P die polaren Terme bezeichnen und ε die Ordnung angibt. Insgesamt erhält man 14 Gleichungen, vier axiale und zehn polare, sowie vier constraint-Gleichungen, die bei jedem Schritt der Zeitentwicklung erfüllt sein müssen. Darüberhinaus sind die Störgrößen der räumlichen sowie die der Fluidanteile miteinander gekoppelt. Diese Kopplungen lassen sich schematisch schreiben als

$$\begin{aligned} F_0 + S_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon S_1 &= 0 \\ S_0 + F_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon F_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet S die räumlichen Störfunktionen, während F die Störgrößen der Fluidkomponenten wiedergibt. Die Indizes 0 bzw. 1 beziehen sich jeweils auf die Komponenten ohne Rotation bzw. mit Rotation in erster Ordnung.

Die nun folgende Herleitung, welche sich an an [29] orientiert, wurde mit MAPLE durchgeführt. Wenn nichts weiter angegeben wird, gilt dabei die Konvention $G = c = 1$. Ausgangspunkt bei der Herleitung der Störungsgleichungen bildet - wie bereits in Kapitel 1 erwähnt - der ADM-Formalismus der Einsteinschen Feldgleichungen. Hierbei wird die Hintergrundmetrik $g_{\mu\nu}$ in Gleichung (1.19) des langsam rotierenden Neutronensterns mit Hilfe der ungestörten Lapse-Funktion

$$A = \sqrt{B^i B_i - g_{00}} = e^\nu + O(\omega^2), \quad (2.3)$$

des ungestörten kovarianten Shift-Vektors

$$B_i = (0, 0, -\omega r^2 \sin^2 \Theta) \quad (2.4)$$

und der Dreiermetrik

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

ausgedrückt.

Aus der äußeren Krümmung der räumlichen Hyperfläche

$$K_{ij} = \frac{1}{2A} (B^k \partial_k \gamma_{ij} + \gamma_{ki} \partial B^k + \gamma_{kj} \partial_i B^k), \quad (2.6)$$

welche durch die Dreiermetrik (2.5) beschrieben wird, resultieren

$$K_{13} = K_{31} = -\frac{1}{2} \omega' e^{-\nu} r^2 \sin^2 \Theta \quad (2.7)$$

als einzige von Null verschiedene Komponenten.

Die Störungen der Lapse-Funktion A , des Shift-Vektors B_i , der Dreiermetrik γ_{ij} , der äußeren Krümmung K_{ij} , der Vierergeschwindigkeit U_i , der Energiedichte ϵ und des Drucks p werden entsprechend durch $\alpha, \beta_i, h_{ij}, k_{ij}, u_i, \delta\epsilon$ und δp bezeichnet.

Durch Linearisierung der nichtlinearen ADM-Gleichungen

$$(\partial_t - L_\beta) \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \quad (2.8)$$

$$(\partial_t - L_\beta) K_{ij} = -\alpha_{;ij} + \alpha [R_{ij} + K_k^k K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k - 4\pi (2T_{ij} - T_\nu^\nu \gamma_{ij})], \quad (2.9)$$

mit der Lie-Ableitung L_β bezüglich β^i , erhält man die zwölf Entwicklungsgleichungen für h_{ij} und k_{ij} , welche unter Berücksichtigung der langsamen Rotation, also Betrachtung aller Terme erster Ordnung in Ω bzw. ω , reduziert werden auf

$$\partial_t h_{ij} = \partial_i \beta_j + \partial_j \beta_i - 2 (A k_{ij} + K_{ij} \alpha + \Gamma_{ij}^k \beta_k + B_k \delta \Gamma_{ij}^k) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t k_{ij} = & \alpha [R_{ij} + 4\pi(p - \epsilon)\gamma_{ij}] - \partial_i \partial_j \alpha + \Gamma_{ij}^k \partial_k \alpha + \delta \Gamma_{ij}^k \partial_k A + \\ & A \{ \delta R_{ij} + K_{ij} k - 2 (K_i^k k_{jk} + K_j^k k_{ik}) + 4\pi [(p - \epsilon)h_{ij} + \gamma_{ij} (\delta p - \delta \epsilon) \\ & - 2(p + \epsilon) (u_i \delta u_j + u_j \delta u_i)] \} + B^k \partial_k k_{ij} + (\partial_k K_{ij} - K_i^l \partial_j \gamma_{kl} - K_j^l \partial_i \gamma_{kl}) \beta^k \\ & + k_{ik} \partial_j B^k + k_{jk} \partial_i B^k + K_i^k \partial_j \beta_k + K_j^k \partial_i \beta_k, \end{aligned} \quad (2.11)$$

mit

$$k := \gamma^{ij} k_{ij} \quad (2.12)$$

$$\delta \Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \gamma^{km} (\partial_i h_{mj} + \partial_j h_{mi} - \partial_m h_{ij} - 2\Gamma_{ij}^l h_{lm}) \quad (2.13)$$

$$\delta R_{ij} := \partial_k \delta \Gamma_{ij}^k - \partial_j \delta \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{ij}^l \delta \Gamma_{lk}^k + \Gamma_{lk}^k \delta \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ik}^l \delta \Gamma_{lj}^k - \Gamma_{lj}^k \delta \Gamma_{ik}^l. \quad (2.14)$$

Weitere vier Entwicklungsgleichungen für die Fluidstörungen resultieren aus der Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors (1.16). Um physikalisch gültige Anfangsbedingungen aufzustellen sowie die Genauigkeit der numerischen Entwicklung zu gewährleisten, benötigt man noch die vier constraint-Gleichungen (Zwangsbedingungen)

$$\gamma^{ij} \delta R_{ij} - h^{ij} R_{ij} - 2K^{ij} k_{ij} = 16\pi [\delta\epsilon + 2e^{-\nu}(p + \epsilon)(\Omega - \omega)\delta u_3] \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} -8\pi [(p + \epsilon)\delta u_i + u_i(\delta p + \delta\epsilon)] &= \gamma^{jk} (\partial_i k_{jk} - \partial_j k_{ik} - \Gamma_{ik}^l k_{jl} + \Gamma_{jk}^l k_{il} - \delta\Gamma_{ik}^l K_{jl} + \delta\Gamma_{jk}^l K_{il}) \\ &\quad - h^{jk} (\partial_i K_{jk} - \partial_j K_{ik} - \Gamma_{ik}^l K_{jl} + \Gamma_{jk}^l K_{il}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Aufgrund der sphärischen Symmetrie der ungestörten Metrik (1.19), können alle Störgrößen nach Kugelfunktionen $Y_{lm} = Y_{lm}(\Theta, \Phi)$ entwickelt werden, um die Winkelabhängigkeit abzuseparieren. Je nach Wahl der Eichung erhält man im Falle der Regge-Wheeler-Eichung einen Satz von zehn Tensorharmonischen, die sich in der BCL-Eichung auf einen axialen und einen polaren Anteil reduzieren.

Man erhält somit ein Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten. Durch diesen Separationsansatz werden auch die Feldgleichungen zu partiellen Differenzialgleichungen reduziert, die nur noch von t und r abhängen.

Eine geeignete Wahl der Eichung, wie sie bereits in Kapitel 1.1.3 beschrieben wird, legt nun die Lapse-Funktion und den Shift-Vektor so fest, dass einige räumliche Komponenten von h_{ij} verschwinden. Die gewählte BCL-Eichung setzt nun das Verschwinden der Störung der Lapse-Funktion

$$\alpha = 0 \quad (2.17)$$

voraus. In der ursprünglichen Formulierung wählten Battiston *et al.* [21] nicht den ADM-Formalismus, um die Eichung festzulegen, sondern verwendeten den Ansatz $h_{tt} = h_{\Theta\Theta} = h_{\Phi\Phi} = h_{\Phi\Theta} = 0$. Diese Forderungen führen auf die Relation

$$h_{tt} = 2A\alpha + 2B^i \beta_i = 2e^\nu \alpha - 2\omega h_{t\Phi}. \quad (2.18)$$

Im rotierenden Fall, wenn $h_{tt} \neq 0$, verschwindet die Lapse-Funktion somit ebenfalls. Im nichtrotierenden Fall, wenn $\beta_i = 0$, verschwinden sowohl die Lapse-Funktion als auch h_{tt} . Für die Forderung $h_{tt} = 0$ im rotierenden Fall, würde die Lapse-Funktion nicht verschwinden und somit zu Termen in den Störgleichungen führen, die Ableitungen zweiter Ordnung in r enthielten.

Mit den in Kapitel 1.1.3 beschriebenen Anforderungen erhält man somit aus der Entwicklung der Metrik für den Shift-Vektor eine eindeutige algebraische Bedingung für den polaren Anteil

$$\beta_i^{polar} = \sum_{l,m} (e^{2\mu} S_2^{lm}, V_1^{lm} \partial_\Theta, V_1^{lm} \partial_\Phi) Y_{lm} \quad (2.19)$$

sowie für den axialen Anteil

$$\beta_i^{axial} = \sum_{l,m} \left(0, -V_2^{lm} \frac{\partial_\Phi}{\sin \Theta}, V_2^{lm} \sin \Theta \partial_\Theta \right) Y_{lm}. \quad (2.20)$$

Die polaren und axialen Anteile der Störmetrik lauten

$$h_{ij}^{polar} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} e^{2\mu} S_3^{lm} & V_3^{lm} \partial_\Theta & V_3^{lm} \partial_\Phi \\ V_3^{lm} \partial_\Theta & 0 & 0 \\ V_3^{lm} \partial_\Phi & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm}, \quad (2.21)$$

$$h_{ij}^{axial} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} 0 & -V_4^{lm} \frac{\partial_\Phi}{\sin \Theta} & V_4^{lm} \sin \Theta \partial_\Theta \\ -V_4^{lm} \frac{\partial_\Phi}{\sin \Theta} & 0 & 0 \\ V_4^{lm} \sin \Theta \partial_\Theta & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm}. \quad (2.22)$$

Für die äußere Krümmung erhält man folgende polare bzw. axiale Anteile

$$k_{ij}^{polar} = \frac{1}{2} e^{-\nu} \sum_{l,m} \begin{pmatrix} e^{2\mu} K_1^{lm} Y_{lm} & e^{2\mu} K_2^{lm} \partial_\Theta Y_{lm} & e^{2\mu} K_2^{lm} \partial_\Phi Y_{lm} \\ e^{2\mu} K_2^{lm} \partial_\Theta Y_{lm} & ** & K_5^{lm} X_{lm} \\ e^{2\mu} K_2^{lm} \partial_\Phi Y_{lm} & K_5^{lm} X_{lm} & * \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

mit

$$\begin{aligned} * &= \sin^2 \Theta [(r K_4^{lm} - \Lambda K_5^{lm}) Y_{lm} - K_5^{lm} W_{lm}] \\ ** &= (r K_4^{lm} - \Lambda K_5^{lm}) Y_{lm} + K_5^{lm} W_{lm} \end{aligned}$$

$$k_{ij}^{axial} = \frac{1}{2} e^{-\nu} \sum_{l,m} \begin{pmatrix} 0 & -e^{2\mu} K_3^{lm} \frac{\partial_\Phi Y_{lm}}{\sin \Theta} & e^{2\mu} K_3^{lm} \sin \Theta \partial_\Theta Y_{lm} \\ -e^{2\mu} K_3^{lm} \frac{\partial_\Phi Y_{lm}}{\sin \Theta} & -K_6^{lm} \frac{X_{lm}}{\sin \Theta} & K_6^{lm} \sin \Theta W_{lm} \\ -K_6^{lm} \frac{X_{lm}}{\sin \Theta} & K_6^{lm} \sin \Theta W_{lm} & K_6^{lm} \sin \Theta X_{lm} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

wobei $\Lambda := l(l+1)$ und

$$X_{lm} := 2(\partial_\Theta - \cot \Theta) \partial_\Phi Y_{lm}, \quad (2.25)$$

$$W_{lm} := \left(\partial_{\Theta\Theta}^2 - \cot \Theta \partial_\Theta - \frac{\partial_{\Phi\Phi}^2}{\sin^2 \Theta} \right) Y_{lm} = [2\partial_{\Theta\Theta}^2 + l(l+1)] Y_{lm} \quad (2.26)$$

ist. Die etwas komplizierten Entwicklungen für den Koeffizienten K_5^{lm} können umformuliert werden zu

$$W_{lm} - \Lambda Y_{lm} = 2\partial_{\Theta\Theta}^2 Y_{lm} \quad (2.27)$$

$$-\sin^2 \Theta (W_{lm} + \Lambda Y_{lm}) = 2(\cos \Theta \sin \Theta \partial_\Theta + \partial_{\Phi\Phi}^2) Y_{lm}. \quad (2.28)$$

Die Formulierung der Entwicklungen in X_{lm} und W_{lm} dient der Anwendung der Orthogonalitätsrelationen, welche im Anhang A.1 aufgeführt sind.

Für die Fluidstörungen erhält man folgende Anteile

$$\delta u_i^{polar} = -e^\nu \sum_{l,m} (u_1^{lm}, u_2^{lm} \partial_\Theta, u_2^{lm} \partial_\Phi) Y_{lm}, \quad (2.29)$$

$$\delta u_i^{axial} = -e^\nu \sum_{l,m} \left(0, -u_3^{lm} \frac{\partial_\Phi}{\sin \Theta}, u_3^{lm} \sin \Theta \partial_\Theta \right) Y_{lm}. \quad (2.30)$$

Die Energiedichtestörung $\delta\epsilon$, die Störung des Druckes δp und der Verschiebungsvektor ξ^r werden durch die Relationen

$$\delta\epsilon = \sum_{l,m} \rho^{lm} Y_{lm}, \quad (2.31)$$

$$\delta p = (p + \epsilon) \sum_{l,m} H^{lm} Y_{lm}, \quad (2.32)$$

$$\xi^r = \left[\nu' \left(1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right) \right]^{-1} \sum_{l,m} \xi^{lm} Y_{lm} \quad (2.33)$$

wiedergegeben. Aus Gleichung (1.11) erhält man folgende Relation für die Koeffizienten

$$\rho^{lm} = \frac{(p + \epsilon)^2}{\Gamma_1 p} (H^{lm} - \xi^{lm}) \quad (2.34)$$

sowie aus Gleichung (1.14)

$$(\partial_t + \Omega \partial_\Phi) \xi^r = e^{-2\mu} (e^\nu \delta u_r - \beta_r - \Omega h_{r\Phi}). \quad (2.35)$$

Aus den genannten Herleitungen resultieren folgende Entwicklungsgleichungen für h_{ij} , mit der Summation über l und m ,

$$\begin{aligned} (\partial_t + m\omega) S_3^{lm} Y_{lm} &= \left[2 (S_2^{lm})' + 2\mu' S_2^{lm} - K_1^{lm} \right] Y_{lm} \\ &+ 2\omega e^{-2\mu} \left[(V_3^{lm})' - \mu' V_3^{lm} \right] \partial_\Phi Y_{lm} \\ &+ 2\omega e^{-2\mu} \left[(V_4^{lm})' - \mu' V_4^{lm} \right] \sin \Theta \partial_\Theta Y_{lm} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left(V_3^{lm} \partial_\Theta - V_4^{lm} \frac{\partial_\Phi}{\sin \Theta} \right) Y_{lm} &= \left[(V_1^{lm})' - \frac{2}{r} V_1^{lm} + e^{2\mu} (S_2^{lm} - K_2^{lm}) \right] \partial_\Theta Y_{lm} \\ &- \left[(V_2^{lm})' - \frac{2}{r} V_2^{lm} - e^{2\mu} K_3^{lm} \right] \frac{\partial_\Phi Y_{lm}}{\sin \Theta} - \omega \Lambda V_4^{lm} \sin \Theta Y_{lm} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (V_3^{lm} \partial_\Phi + V_4^{lm} \sin \Theta \partial_\Theta) Y_{lm} &= \left[(V_1^{lm})' - \frac{2}{r} V_1^{lm} + e^{2\mu} (S_2^{lm} - K_2^{lm}) \right] \partial_\Phi Y_{lm} \\ &+ \left[(V_2^{lm})' - \frac{2}{r} V_2^{lm} - e^{2\mu} K_3^{lm} \right] \sin \Theta \partial_\Theta Y_{lm} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(2S_2^{lm} - \frac{\Lambda}{r} V_1^{lm} - K_4^{lm} + \frac{\Lambda}{r} K_5^{lm} \right) Y_{lm} \\ &+ 2\omega e^{-2\mu} (V_3^{lm} \partial_\Phi Y_{lm} + V_4^{lm} \sin \Theta \partial_\Theta Y_{lm}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$0 = (V_1^{lm} - K_5^{lm}) W_{lm} + (V_2^{lm} - K_6^{lm}) \frac{X_{lm}}{\sin \Theta} \quad (2.40)$$

$$0 = (V_1^{lm} - K_5^{lm}) X_{lm} - (V_2^{lm} - K_6^{lm}) \sin \Theta W_{lm}. \quad (2.41)$$

Aus den Gleichungen (2.40) und (2.41) erhält man folgende Bedingungen für den Shift-Vektor

$$V_1^{lm} = K_5^{lm} \quad (2.42)$$

$$V_2^{lm} = K_6^{lm}. \quad (2.43)$$

Aus Gleichung (2.39) resultiert nach Multiplikation mit Y_{lm}^* und anschließender Integration

$$S_2^{lm} = \frac{1}{2}K_4^{lm} - \omega e^{-2\mu} (\imath m V_3^{lm} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} V_4^{lm}). \quad (2.44)$$

Hierbei stellt $\mathcal{L}_1^{\pm 1}$ einen Kopplungsoperator dar, der die Gleichungen der Ordnung l mit den Gleichungen der Ordnung $l+1$ und $l-1$ koppelt. Dieser sowie zwei weitere Kopplungsoperatoren $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ und $\mathcal{L}_3^{\pm 1}$, welche später noch auftreten werden, lauten

$$\mathcal{L}_1^{\pm 1} A^{lm} := \sum_{l'm'} A^{l'm'} \int_{S_2} Y_{lm}^* \sin \Theta \partial_\Theta Y_{l'm'} d\Omega \quad (2.45)$$

$$= (l-1)Q_{lm}A^{l-1m} - (l+2)Q_{l+1m}A^{l+1m}$$

$$\mathcal{L}_2^{\pm 1} A^{lm} := \sum_{l'm'} A^{l'm'} \int_{S_2} \partial_\Theta Y_{lm}^* \sin \Theta Y_{l'm'} d\Omega \quad (2.46)$$

$$= -(l+1)Q_{lm}A^{l-1m} + lQ_{l+1m}A^{l+1m}$$

$$\mathcal{L}_3^{\pm 1} A^{lm} := \sum_{l'm'} A^{l'm'} \left[l'(l'+1) \int_{S_2} Y_{lm}^* \cos \Theta Y_{l'm'} d\Omega + \int_{S_2} Y_{lm}^* \sin \Theta \partial_\Theta Y_{l'm'} d\Omega \right] \quad (2.47)$$

$$= (l-1)(l+1)Q_{lm}A^{l-1m} + l(l+2)Q_{l+1m}A^{l+1m},$$

mit

$$Q_{lm} := \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}}. \quad (2.48)$$

Der Operator $\mathcal{L}_3^{\pm 1}$ kann durch die beiden Operatoren $\mathcal{L}_1^{\pm 1}$ und $\mathcal{L}_2^{\pm 1}$ mit Hilfe von

$$\mathcal{L}_3^{\pm 1} = -\frac{1}{2} [\mathcal{L}_1^{\pm 1}(\Lambda - 2) + \mathcal{L}_2^{\pm 1}\Lambda] \quad (2.49)$$

ersetzt werden. Unter Verwendung der angegebenen Relationen in Anhang A.1 können die Kugelflächenfunktionen eliminiert werden und man erhält das folgende System der Entwicklungsgleichungen für die Metrikstörungen

$$(\partial_t + \imath m \omega) S_3 = K_4' - K_1 + \mu' K_4 - 2\omega' e^{-2\mu} (\imath m V_3 + \mathcal{L}_1^{\pm 1} V_4) \quad (2.50)$$

$$(\partial_t + \imath m \omega) V_3 = K_5' - e^{2\mu} K_2 + \frac{1}{2} e^{2\mu} K_4 - \frac{2}{r} K_5 \quad (2.51)$$

$$(\partial_t + \imath m \omega) V_4 = K_6'' - e^{2\mu} K_3 - \frac{2}{r} K_6. \quad (2.52)$$

Aus Übersichtgründen wurden hierbei die Indizes l und m in der Notation vernachlässigt. Diese Vereinfachung der Notation wird im weiteren Verlauf beibehalten. Auf gleiche Weise werden die sechs Entwicklungsgleichungen für die äußere Krümmung hergeleitet

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\omega)K_1 &= e^{2\nu-2\mu} \left[\left(\nu' + \frac{2}{r} \right) S_3' - 2\frac{\Lambda}{r^2} V_3' + 2\mu' \frac{\Lambda}{r^2} V_3 + 2 \left(\frac{\nu'}{r} - \frac{\mu'}{r} - \frac{e^{2\mu} - 1}{r^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + e^{2\mu} \frac{\Lambda}{2r^2} \right) S_3 \right] + 8\pi e^{2\nu} (p + \epsilon) C_s^{-2} [(C_s^2 - 1) H + \xi] \\
 &\quad - 2e^{-2\mu} \omega' \left[im \left(K_5' - \frac{2}{r} K_5 \right) + \mathcal{L}_1^{\pm 1} \left(K_6' - \frac{2}{r} K_6 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\omega)K_2 &= e^{2\nu-2\mu} \left[\left(\nu' + \frac{1}{r} \right) S_3 - \frac{2}{r^2} V_3 \right] \\
 &\quad + \frac{imr^2}{2\Lambda} e^{-2\mu} \left[\omega' \left(K_4' - K_1 + \mu' K_4 - 4\frac{\Lambda-1}{r^2} K_5 \right) \right. \\
 &\quad \left. - 16\pi\bar{\omega}(p + \epsilon) (e^{2\mu} K_4 + 2e^{2\nu} u_1) \right] - \frac{\omega' e^{-2\mu}}{\Lambda} \mathcal{L}_1^{\pm 1} [\Lambda - 2] K_6
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\omega)K_3 &= e^{2\nu-2\mu} \frac{\Lambda-2}{r^2} V_4 + e^{-2\mu} \frac{\omega'}{\Lambda} [2imK_6 + (\Lambda-2)\mathcal{L}_2^{\pm 1} K_5] \\
 &\quad - \frac{r^2}{2\Lambda} e^{-2\mu} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \left[\omega' (K_4' - K_1 + \mu' K_4) - 16\pi\bar{\omega}(p + \epsilon) (e^{2\mu} K_4 + 2e^{2\nu} u_1) \right]
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\omega)K_4 &= e^{2\nu-2\mu} \left[S_3' + 2 \left(\nu' - \mu' + \frac{1}{r} \right) S_3 - \frac{2\Lambda}{r^2} V_3 \right] \\
 &\quad + 8\pi r e^{2\nu} (p + \epsilon) C_s^{-2} [(C_s^2 - 1) H + \xi] \\
 &\quad + r(\mathcal{L}_1^{\pm 1} - \mathcal{L}_2^{\pm 1}) \left[\omega' K_3 + 16\pi e^{2\nu} \bar{\omega}(p + \epsilon) u_3 \right]
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\omega)K_5 &= e^{2\nu-2\mu} \left[V_3' + (\nu' - \mu') V_3 - \frac{1}{2} e^{2\mu} S_3 \right] \\
 &\quad + \frac{r^2}{\Lambda} \left\{ im \left[\omega' \left(\frac{1}{2} K_4 - K_2 \right) - 16\pi e^{2\nu} \bar{\omega}(p + \epsilon) u_2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{L}_2^{\pm 1} \left[\omega' K_3 + 16\pi e^{2\nu} \bar{\omega}(p + \epsilon) u_3 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\omega)K_6 &= e^{2\nu-2\mu} [V_4' + (\nu' - \mu') V_4] - \frac{r^2}{\Lambda} \left\{ im \left[\omega' K_3 + 16\pi e^{2\nu} \bar{\omega}(p + \epsilon) u_3 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{L}_2^{\pm 1} \left[\omega' \left(\frac{1}{2} K_4 - K_2 \right) - 16\pi e^{2\nu} \bar{\omega}(p + \epsilon) u_2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Die Gleichungen weisen eine Symmetrie zwischen den polaren und den axialen Anteilen auf, was sich in der gleichen Struktur der Gleichungen (2.51), (2.52) sowie (2.54), (2.55) und (2.57), (2.58) widerspiegelt, mit Ausnahme zusätzlicher Terme, welche in den polaren Gleichungen auftreten aufgrund der Überzahl polarer gegenüber axialer Variablen.

Das verbleibende System der Entwicklungsgleichungen für die Fluidgrößen

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\Omega)H &= C_s^2 \left[e^{2\mu-2\nu} \left[u_1' \left(2\nu' - \mu' + \frac{2}{r} \right) u_1 - e^{2\mu} \frac{\Lambda}{r^2} u_2 \right] + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{r}K_4 - \frac{\Lambda}{r^2}K_5 \right. \\
 &\quad \left. + \varpi e^{-2\mu} \left\{ im \left[V_3' + \left(\frac{2}{r} - \mu' \right) V_3 + e^{2\mu} \left(H - \frac{1}{2}S_3 \right) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \mathcal{L}_1^{\pm 1} \left[V_4' + \left(\frac{2}{r} - \mu' \right) V_4 \right] \right\} \right] \\
 &\quad - \nu' \left[e^{2\nu-2\mu} u_1 + \frac{1}{2}K_4 + \varpi e^{-2\mu} (imV_3 + \mathcal{L}_1^{\pm 1}V_4) \right]
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\Omega)u_1 &= H' + \frac{p'}{\Gamma_1 p} \left[\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - 1 \right) H + \xi \right] - im \left\{ e^{-2\mu} \varpi \left(K_5' - \frac{2}{r}K_5 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] u_2 \right\} \\
 &\quad - \mathcal{L}_1^{\pm 1} \left\{ e^{-2\nu} \varpi \left(K_6' - \frac{2}{r}K_6 \right) + \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] u_3 \right\}
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + im\Omega)u_2 &= H + \frac{\varpi}{\Lambda} (im [2u_2 - e^{-2\nu}(\Lambda - 2)K_5] + 2\mathcal{L}_3^{\pm 1}u_3 \\
 &\quad - e^{-2\nu} \mathcal{L}_1^{\pm 1}[(\Lambda - 2)K_6]) - \frac{imr^2}{\Lambda} A
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$(\partial_t + im\Omega)u_3 = 2\frac{\varpi}{\Lambda} [im (u_3 + e^{-2\nu} K_6) - \mathcal{L}_3^{\pm 1} (u_2 + e^{-2\nu} K_5)] + \frac{r^2}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} A \tag{2.62}$$

$$(\partial_t + im\Omega)\xi = \nu' \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - 1 \right) \left[e^{2\nu-2\mu} u_1 + \frac{1}{2}K_4 + \varpi e^{-2\mu} (imV_3 + \mathcal{L}_1^{\pm 1}V_4) \right] \tag{2.63}$$

resultiert aus der in Gleichung (1.15) formulierten Bedingung bzw. aus Gleichung (2.35) sowie aus der Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors (1.16). Hierbei ist

$$\begin{aligned}
 A &= \bar{\omega} C_s^2 \left\{ e^{-2\mu} \left[u_1' + \left(2\nu' - \mu' + \frac{2}{r} \right) u_1 - e^{2\mu} \frac{\Lambda}{r^2} u_2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. e^{-2\mu} \left(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{r}K_4 - \frac{\Lambda}{r^2}K_5 \right) \right\} + \left[\bar{\omega} \left(\nu' - \frac{2}{r} \right) + \omega' \right] \left(e^{-2\mu} u_1 + \frac{1}{2}e^{-2\nu} K_4 \right).
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Die Schallgeschwindigkeit C_s wird in Gleichung (1.13) definiert.

2.1.2 Die constraint-Gleichungen

Zur vollständigen Lösbarkeit benötigt man noch die linearisierte Form der constraint-Gleichungen, um physikalisch gültige Anfangsbedingungen zu erstellen sowie die Genau-

igkeit der numerischen Entwicklung zu kontrollieren. Die Hamilton-constraint-Gleichung

$$8\pi r e^{2\mu} \rho = r S'_3 - \Lambda V'_3 + \left(1 - 2r\mu' + \frac{1}{2}e^{2\mu}\Lambda\right) + \Lambda \left(\mu' - \frac{1}{r}\right) V_3 \quad (2.65)$$

$$+ r^2 e^{2\mu} \left\{ im \left[\frac{1}{2}\omega' e^{-2\nu} K_2 + 16\pi\bar{\omega}(p + \epsilon)u_2 \right] + \mathcal{L}_1^{\pm 1} \left[\frac{1}{2}\omega' e^{-2\nu} K_3 + 16\pi\bar{\omega}(p + \epsilon)u_3 \right] \right\}$$

resultiert aus dem zeitlichen Anteil der Einsteinschen Feldgleichungen. Die Hamilton-constraint-Gleichung bezieht sich auf die Energiedichte und wird aufgrund der skalaren Eigenschaft hinsichtlich der 3d-Hyperfläche auch als skalare constraint-Gleichung bezeichnet.

Für die drei weiteren Energie-Impuls constraint-Gleichungen erhält man

$$8\pi r e^{2\nu}(p + \epsilon)u_1 = K'_4 - \frac{\Lambda}{r}K'_5 - K_1 + e^{2\mu}\frac{\Lambda}{2r}K_2 - \nu'K_4 + \frac{\Lambda}{r^2}(1 + r\nu')K_5 + \frac{im}{4}r\omega'S_3$$

$$- [8\pi r(p + \epsilon)\bar{\omega} + 2e^{-2\mu}\omega'] (imV_3 + \mathcal{L}_1^{\pm 1}V_4) \quad (2.66)$$

$$16\pi r e^{2\nu}(p + \epsilon)u_2 = -rK'_2 + rK_1 + (r\nu' - r\mu' - 2)K_2 + K_4 - \frac{2}{r}K_5$$

$$+ e^{-2\mu}\frac{r\omega'}{\Lambda} [2imV_3 - (\Lambda - 2)\mathcal{L}_2^{\pm 1}V_4] \quad (2.67)$$

$$+ \frac{imr^3}{\Lambda} \left[\frac{1}{2}e^{-2\mu}\omega'S'_3 - 16\pi\bar{\omega}(p + \epsilon) \{S_3 + C_s^{-2} [(C_s^2 + 1)H - \xi] \} \right]$$

$$16\pi r e^{2\nu}(p + \epsilon)u_3 = -rK'_3 + (r\nu' - r\mu' - 2)K_3 + \frac{\Lambda - 2}{r}K_6 + e^{-2\mu}\frac{r\omega'}{\Lambda} [2imV_4 + (\Lambda - 2)\mathcal{L}_2^{\pm 1}V_3]$$

$$- \frac{r^3}{\Lambda}\mathcal{L}_2^{\pm 1} \left[\frac{1}{2}e^{-2\mu}\omega'S'_3 - 16\pi\bar{\omega}(p + \epsilon) \{S_3 + C_s^{-2} [(C_s^2 + 1)H - \xi] \} \right], \quad (2.68)$$

welche aus den raumzeitlichen Anteilen der Einsteinschen Feldgleichungen resultieren.

In der Schreibweise der äußeren Krümmung der räumlichen Hyperflächen weisen die constraint-Gleichungen keine zeitlichen Ableitungen auf. Das bedeutet, dass diese Relationen zu jeder beliebigen Zeit erfüllt sein müssen und somit die Anfangsfunktionen nicht beliebig gewählt werden können.

2.2 Numerische Implementierung

Die Implementierung einer numerischen Diskretisierung für das vorliegende Gleichungssystem in Kapitel 2.1.1 ist nicht trivial. Schwierigkeiten bereitet die korrekte Behandlung der drei Randbedingungen – der Ursprung $r = 0$, die Sternoberfläche $r = R$ und der äußere Rand des numerischen Gitters.

2.2.1 Numerisches Verfahren

In der Literatur findet man zahlreiche Verfahren und Algorithmen zur Lösung partieller Differenzialgleichungen. Hierbei ist das *Lax-Wendroff*-Verfahren insbesondere für Erhaltungssätze besonders geeignet [88]. Der Lax-Wendroff-Algorithmus ist ein Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit. Es gliedert sich dabei in zwei Teilschritte. Zunächst werden Hilfswerte

$$u_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{j\pm 1}^n + u_j^n) \mp \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (u_{\pm 1}^n - u_j^n) \quad (2.69)$$

zum Zeitpunkt $t_{n+\frac{1}{2}}$ an den Zwischengitterpunkten $x_{\pm\frac{1}{2}}$ berechnet. Im zweiten Teilschritt werden durch zentrierte Integration die Gitterpunkte

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v\Delta t}{\Delta x} \left(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (2.70)$$

ermittelt. In Abbildung 2.1 ist das Gitter und der Informationsfluss des Lax-Wendroff-Verfahrens dargestellt.

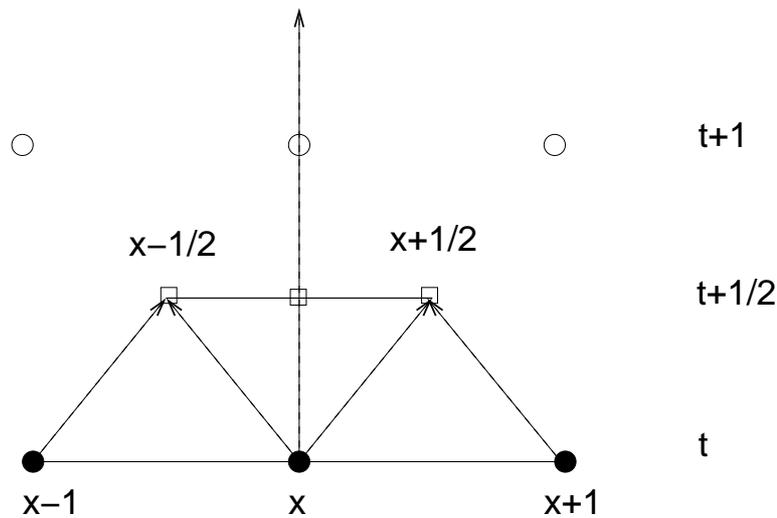


Abb. 2.1: Schematische Darstellung des Lax-Wendroff-Verfahrens.

2.2.2 Stabilitätskriterien

Das Sterninnere

Der Ursprung des Koordinatensystems, also die Mitte des Sterns, muss bei der Integration der Gleichungen als mathematischer Rand betrachtet werden, obwohl sich dort kein physikalischer Rand befindet. Dies ist eine Eigenart der verwendeten sphärischen Koordinaten. Die Bedingung, die dabei an das Sterninnere gestellt wird ist, dass alle

Variablen am Ursprung $r = 0$ regulär sein müssen. Diese Forderung stellt insofern ein Problem dar, als häufig Terme $\propto \frac{1}{r}$ bzw. $\propto \frac{1}{r^2}$ auftreten, die im Ursprung divergent sind. Um dennoch eine Regularität der Terme am Ursprung zu gewährleisten, müssen sich die divergenten Terme herausheben. Zur genaueren Untersuchung des Verhaltens der Größen am Ursprung, ist es sinnvoll eine Taylorentwicklung der Gleichungen in der Nähe des Ursprungs durchzuführen und nur die dominanten Terme zu berücksichtigen.

Die Sternoberfläche

Die Sternoberfläche $r = R$ eines schwingenden Sterns wird genauso wie im ungestörten Fall durch das Verschwinden des Gesamtdruckes charakterisiert. Da die Störungen die Sternoberfläche um einen geringen Betrag von ξ^i aus dem Gleichgewicht auslenken werden, lautet nun die Bedingung des verschwindenden Druckes an der Sternoberfläche

$$P(t, x_R^i + \xi^i) = 0, \quad (2.71)$$

mit der ungestörten Oberfläche x_R^i . Aus der Taylorentwicklung erster Ordnung dieser Formulierung erhält man nun

$$0 = P(t, x_R^i + \xi^i) = P(t, x_R^i) + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} P(x_R^i) \quad (2.72)$$

$$= p(x_R^i) + \delta p(t, x_R^i) + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} p(x_R^i). \quad (2.73)$$

Dem letzten Schritt liegt die Annahme zugrunde, dass der Gesamtdruck P als Summe des ungestörten Druckes und dessen Eulersche Störung δp geschrieben werden kann. Terme zweiter Ordnung der Störungen werden vernachlässigt, wie dies im Produkt von ξ^i und δp der Fall ist. Da der ungestörte Druck nur von der radialen Variable abhängt und an der Sternoberfläche verschwindet resultiert hieraus die Bedingung

$$\delta p(t, x_R^i) = -\xi^r p'(R). \quad (2.74)$$

Die äußere Raumzeit

Die äußere Raumzeit bildet die einfachste der drei Randbedingungen. Hierbei nehmen wir auslaufende Wellen an, aufgrund der asymptotischen Lösung $\Psi(t, r)$, welche eine auslaufende Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = e^{\nu-\mu}$ darstellt. Die Amplitude skaliert mit einer Potenz von r , so dass

$$\Psi(t, r) = r^a \Phi(ct - r). \quad (2.75)$$

Differenziation der Wellenfunktion nach t bzw. r ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, r) = cr^a \Phi'(ct - r) \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Psi(t, r) = -r^a \Phi'(ct - r) + ar^{a-1} \Phi(t, r) = -r^a \Phi'(ct - r) + \frac{a}{r} \Psi(t, r). \quad (2.77)$$

Dies führt auf folgende Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial r}\Psi(t, r) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, r) + \frac{a}{r}\Psi(ct - r). \quad (2.78)$$

Hieraus kann am Gitterrandpunkt N die Funktion $\Psi(t, r)$ zum nächsten Zeitschritt $n+1$ berechnet werden. Diskretisierung der Gleichung (2.78) an den Zwischengitterpunkten $(N - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$, unter der Annahme der Näherungen

$$\Psi_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\Psi_{N-1}^{n+1} + \Psi_{N-1}^n + \Psi_N^{n+1} + \Psi_N^n) \quad (2.79)$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta r} (\Psi_N^n - \Psi_{N-1}^n + \Psi_N^{n+1} - \Psi_{N-1}^{n+1}) \quad (2.80)$$

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta t} (\Psi_{N-1}^{n+\frac{1}{2}} - \Psi_{N-1}^n + \Psi_N^{n+1} - \Psi_N^n), \quad (2.81)$$

wobei der Zeitschritt mit Δt und der räumliche Gitterabstand mit Δx bezeichnet werden. Die resultierende Gleichung für den noch unbekanntem Wert Ψ_N^{n+1} lautet somit

$$\Psi_N^{n+1} = \frac{1}{1+B} \left((1-B)\Psi_{N-1}^n - B(\Psi_N^n + \Psi_{N-1}^{n+1}) + \frac{1-A}{1+A} (\Psi_{N-1}^{n+1} - \Psi_N^n) \right), \quad (2.82)$$

mit

$$A := \frac{\Delta x}{c\Delta t} \quad (2.83)$$

$$B := \frac{a}{(1-2N)(1+A)}. \quad (2.84)$$

In nullter Ordnung ($a = 0$) reduziert sich die Gleichung zu

$$\Psi_N^{n+1} = \Psi_{N-1}^n + \frac{1-A}{1+A} (\Psi_{N-1}^{n+1} - \Psi_N^n). \quad (2.85)$$

Die zugrundeliegende Näherung (2.78) mit der Finite-Differenzen-Methode wird jedoch zu einer teilweisen Reflexion der auslaufenden Welle auf dem Gitter führen, was die numerische Lösung beeinflusst. Daher ist es wichtig, geeignete Anfangsdaten zu wählen, um Reflexionen auszuschließen. Die sicherste Methode ist jedoch, den betreffenden Rand so weit hinaus zu legen, dass Reflexionen zu lange unterwegs sind, um an den Messpunkt zurück zu gelangen, an dem die Signale gemessen werden. Diese Randbedingung ist in der Literatur auch als Sommerfeld-Randbedingung bekannt [89].

2.2.3 Durchführung der Simulationen

Zunächst werden die TOV-Gleichungen (1.27)-(1.30) gelöst, damit ein Hintergrundmodell vorliegt. Dazu muss ein System gewöhnlicher räumlicher Differenzialgleichungen numerisch gelöst werden - dies geschieht mit Hilfe des allgemein bekannten Runge-Kutta-Verfahrens. Anschließend werden geeignete Anfangsbedingungen erstellt, die den constraint-Gleichungen (2.65)-(2.68) genügen müssen. Auch hier muss zunächst eine der Metrik- oder Fluidgrößen meist als Gaußsche Störung vorgegeben werden und anschließend die constraint-Gleichungen unter möglichst einfachen Annahmen gelöst werden - das bedeutet, dass möglichst viele Metrik- und Fluidgrößen zu Null gesetzt werden. Hinter diesem Verfahren steckt die inzwischen durch Erfahrung verifizierte Annahme, dass die genaue Form der Vorgabe einer Störfunktion für das Spektrum unerheblich ist. Wenn die constraint-Gleichungen erfüllt sind, kann die zeitliche Integration mit Hilfe des Lax-Wendroff-Verfahrens beginnen.

Die Stabilität des Codes ist von besonderer Bedeutung. In fast allen Fällen stellt sich nach endlicher Zeit eine numerische Instabilität ein. Die Ursache solcher Instabilitäten ist nicht eindeutig festzustellen. Möglicherweise sind die Gleichungen anfällig gegenüber numerische Fehler, sie sich mit der Zeit aufsummieren. Mathematische Sätze über die Lösung des Cauchy-Problems zu den Einsteinschen Gleichungen sind zwar vorhanden (siehe z.B. [90]), sind jedoch kaum auf das vorliegende Problem anzuwenden.

Fakt jedoch ist, dass bei geringer oder keiner Rotation der Code sehr viel länger stabil läuft. Eine typische Zeitreihe, die für eine Modenanalyse schon sinnvoll verwendet werden kann ist ca. 3-5 ms lang. Tritt eine Instabilität auf, muss immer entschieden werden, zu welchem Zeitpunkt die Zeitreihe abgebrochen werden muss. Die Auflösung des Frequenzspektrums Δf ergibt sich grundlegend aus der Länge T_{max} der Zeitreihe über den Zusammenhang

$$\Delta f = \frac{1}{T_{max}}. \quad (2.86)$$

Eine Auswertung der Daten erfordert eine numerische Fourieranalyse, welche mit Standardverfahren durchgeführt werden kann [88]. Die Auflösung des Frequenzspektrums bei Zeitsignalen typischer Länge beträgt demnach ca. 200 Hz. Wichtig ist hierbei zu beachten, dass dieser Fehler absolut zu sehen ist, d.h. dass für Moden mit höheren Frequenzen der relative Fehler immer geringer wird. Manche Moden mit sehr geringen Frequenzen wie w_1^{II} und w_2^{II} sind unter diesen Voraussetzungen nicht zu identifizieren. Dasselbe gilt auch für die g -Moden, die nicht zu finden sind.

Eine Besonderheit des hier verwendeten numerischen Codes ist die relative Stabilität bezüglich der Rotation. Während andere Codes oft sehr geringe Rotation schon instabil werden lässt, liefert dieser Code Ergebnisse bis zu einem sog. Rotationsparameter Ω/Ω_K von 0.8. Hierbei ist Ω die Winkelgeschwindigkeit des Sterns und Ω_K die bekannte Kepler-Frequenz. Zu beachten ist jedoch, dass für schnelle Sternrotation auch eine andere Hintergrundmetrik verwendet werden müsste, insofern darf man den Ergebnissen mit schneller Rotation weniger vertrauen.

2 Störungsrechnung ohne Cowling-Näherung

Eine weitere Besonderheit ist die relativ gute Verträglichkeit des Codes mit realistischen Zustandsgleichungen, die je nach Bedarf implementiert werden können.

3 Schwingungsfrequenzen ohne Cowling-Näherung

In diesem Kapitel werden Ergebnisse vorgestellt, die mit unserem auf der Zeitentwicklung basierenden Code erzielt wurden. Für die Berechnungen betrachten wir das relativistische System ohne Cowling-Näherung. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf sechs typische Sternmodelle im Rahmen der polytropen Zustandsgleichung, die unsere Hintergrundmodelle M1 - M6 bilden, welche in Kapitel 3.1 aufgelistet sind. Aus den durch die vorgegebene Größe der Zentraldichte resultierenden Sternparameter Masse M und Radius R führen wir zur Charakterisierung des Sternmodells einen weiteren Parameter, die Kompaktheit $\beta = M/R$ ein. Für das Sternmodell M4 haben wir in Kapitel 3.2 ein typisches Frequenzspektrum einer mit unserem Code erzielten Zeitreihe dargestellt.

Für die genannten Sternmodelle berechnen wir im statischen Fall die Frequenzen der Fluidmoden, welche in Kapitel 3.3 dargestellt sind, sowie die der räumlichen Moden, die in Kapitel 3.4 aufgelistet sind. Da bisher noch keine Frequenzen berechnet wurden für die auf der Zeitentwicklung basierenden vollrelativistischen Gleichungen, vergleichen wir zur Validierung unseres Codes die Resultate mit denen der Modenanalyse von Pfeiffer [91] für die f - und p -Moden bzw. mit denen von Leins [92] für die w -Moden, jeweils für das typische Sternmodell M4.

In Kapitel 3.5 untersuchen wir den Einfluss der Rotation des Sterns auf die Schwingungsfrequenzen für verschiedene Werte der Ordnungszahl m . Im Hinblick auf weiterführende Untersuchungen des Einflusses der Rotation in der Cowling-Näherung in Kapitel 4.1 bzw. für realistische Zustandsgleichungen im vollrelativistischen Regime in Kapitel 5.3 beschränken wir uns hierbei auf das Sternmodell M4 sowie auf die w -Mode.

3.1 Sternmodelle für polytrope Zustandsgleichungen

Die Vielzahl an veränderbaren Parametern, die in den bisher vorgestellten Gleichungen vorhanden sind, ergeben eine sehr große Anzahl an Modellen und Möglichkeiten. Zur besseren Übersicht werden zunächst die in dieser Arbeit behandelten Modelle eingegrenzt und näher spezifiziert. Zu diesem Zweck werden mehrere polytrope Sternmodelle (kurz mit M1 bis M6 bezeichnet) in Tabelle 3.1 aufgelistet. Diese unterscheiden sich durch die Wahl der zentralen Energiedichte ϵ_0 . Im Ergebnis unterscheiden sich die Modelle in der Gesamtmasse M , im Radius R und im Verhältnis M/R . Wie aus der Tabelle ersichtlich

wächst die sog. Kompaktheit der Sternmodelle von M1 bis M6.

Für die hier durchgeführten Analysen ist die Annahme wichtig, dass die Kompaktheit ein wesentlich bestimmender Faktor für die Moden ist. Vorläufig werden für alle diese Modelle die polytrophe Zustandsgleichung (1.36) verwendet, obwohl diese sicher nicht die physikalisch korrekte Gleichung ist - sie dient hauptsächlich als Test des numerischen Codes und zu Referenzzwecken. Die Ergebnisse für realistische Zustandsgleichungen werden ausführlich in Kapitel 5 diskutiert.

Polytrophe Sternmodelle ($\Gamma = 2, \kappa = 100 \text{ km}^2$)				
Modell	ϵ_0 [g/cm ³]	M [M_\odot]	R [km]	M/R
M1	$5,0 \cdot 10^{14}$	0,495	11,58	0,06
M2	$1,0 \cdot 10^{15}$	0,802	10,81	0,11
M3	$2,0 \cdot 10^{15}$	1,126	9,673	0,17
M4	$3,0 \cdot 10^{15}$	1,266	8,862	0,21
M5	$5,0 \cdot 10^{15}$	1,348	7,787	0,26
M6	$7,0 \cdot 10^{15}$	1,343	7,120	0,28

Tab. 3.1: Liste der verwendeten polytropen Sternmodelle und deren physikalische Parameter.

3.2 Spektrum

In Abbildung 3.1 ist ein typisches Spektrum dargestellt, wie man es für eine volle numerische Simulation erhält, sowie das zugehörige Zeitsignal. In dieser Art Spektrum, welches hier für einen Beobachter außerhalb des Sterns dargestellt ist, erscheinen eine Menge signifikanter Schwingungsfrequenzen, die zunächst systematisch den bekannten Moden zugeordnet werden müssen. Dies geschieht durch die Zuordnung bekannter Eigenschaften der Moden, d.h. die erwartete Lage, ihre Veränderung mit zunehmender Rotation, ihre Breite u.s.w. Das kleinere Diagramm in der Abbildung stellt eine typische Zeitentwicklung dar. Charakteristisch für diese Art Zeitreihe ist die zunächst hohe Amplitude mit extrem kurzer Abklingzeit, die von einem sehr langlebigen periodischen Signal überlagert wird. Hier ergibt sich die Zuordnung für gewöhnlich aus der einfachen Regel, dass kurze Abklingzeiten im Zeitregime zu breiten Peaks, hier die w -Moden, im Frequenzregime führen und sehr langlebige periodische Signale zu den sehr schmalen Frequenzpeaks, hier die f - und die p -Moden.

Entscheidend für ein gut aufgelöstes Frequenzspektrum ist die Dauer des Zeitsignals (siehe Gleichung (2.86)), die jedoch von der Stabilität des numerischen Codes abhängt (siehe dazu Kapitel 2.2.3).

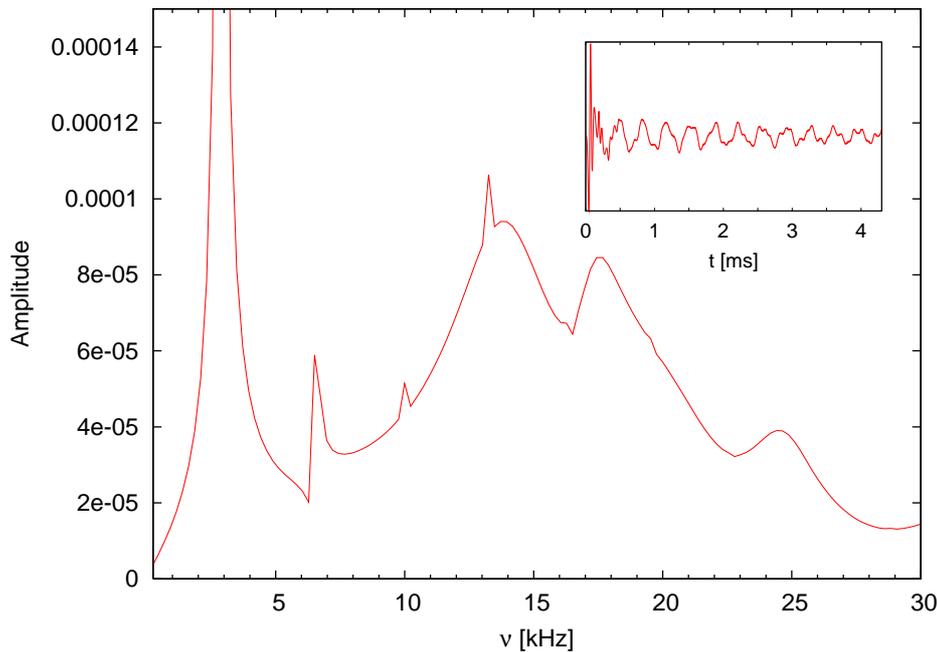


Abb. 3.1: Frequenzspektrum des oben rechts dargestellten Signals eines nichtrotierenden Sterns für das Hintergrundmodell M4 auf allgemein-relativistischem Hintergrund. Die Amplitude ist jeweils in dimensionslosen Einheiten angegeben.

3.3 Fluidmoden

In Tabelle 3.2 sind die Frequenzen aller betrachteten Fluidmoden unserer verwendeten Modelle M1 - M6 in tabellarischer Form dargestellt. Mit zunehmender Zentraldichte und somit zunehmender Kompaktheit des Sterns ist eine Zunahme der Frequenzen sowohl der f - als auch der p -Moden erkennbar, wie man es auch physikalisch erwarten würde. Zur Verifizierung des numerischen Codes vergleichen wir unsere Ergebnisse mit denen von Pfeiffer [91] aus der Modenanalyse. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst. Die Abweichungen zu den in [91] veröffentlichten Frequenzen der p -Moden sind kleiner als 1 %, was sehr gute Übereinstimmung bedeutet. Eine etwas größere prozentuale Abweichung von 2,9 % ergibt sich bei der f -Mode, was jedoch innerhalb der absoluten Fehlertoleranz liegt.

Mode	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5	Modell 6
f [kHz]	1,42	1,90	2,55	2,79	3,44	3,63
p_1 [kHz]	3,38	4,57	5,75	6,51	7,40	8,14
p_2 [kHz]	5,16	7,05	8,94	9,99	11,11	11,94
p_3 [kHz]	6,94	9,33	11,92	13,24	14,81	15,66
p_4 [kHz]	8,72	11,62	14,69	16,50	18,25	19,41
p_5 [kHz]	10,50	13,90	17,46	19,52	21,95	23,32
p_6 [kHz]	12,10	16,00	20,22	22,78	25,39	26,65
p_7 [kHz]	13,71	18,28	22,99	25,79	28,82	29,98
p_8 [kHz]	15,49	20,38	25,76	28,81	32,00	33,31
p_9 [kHz]	17,09	22,66	28,53	31,83	35,43	36,64
p_{10} [kHz]	18,69	24,76	31,29	34,85	38,87	41,64
p_{11} [kHz]	20,29	27,04	34,06	38,11	42,31	44,97
p_{12} [kHz]	22,07	29,14	36,83	41,13	45,48	48,30

Tab. 3.2: Frequenzen der Fundamentalmode f - und der p -Moden für unterschiedliche polytrope Sternmodelle nichtrotierender Sterne.

Polytropes Sternmodell M4 ($\Gamma = 2, \kappa = 100 \text{ km}^2$)			
Mode	Frequenz [kHz]	Frequenz [91] [kHz]	Abweichung
f	2,79	2,87	2,9 %
p_1	6,51	6,55	0,6 %
p_2	9,99	9,99	0,0 %
p_3	13,24	13,27	0,2 %
p_4	16,50	16,47	0,2 %
p_5	19,52	19,61	0,5 %
p_6	22,78	22,73	0,2 %
p_7	25,79	25,82	0,1 %
p_8	28,81	28,90	0,3 %
p_9	31,83	31,97	0,4 %
p_{10}	34,85	35,03	0,5 %
p_{11}	38,11	38,08	< 0,5 %
p_{12}	41,13	41,13	0,0 %

Tab. 3.3: Vergleich der mit zugrundeliegendem Code berechneten Frequenzen mit denen von Pfeiffer [91] für die Fluidmoden des polytropen Sternmodells M4 eines nichtrotierenden Sterns.

3.4 Räumliche Moden

In Tabelle 3.4 sind die Frequenzen einiger w -Moden für die Sternmodelle M2 - M5 aufgeführt. Im Gegensatz zu den Fluidmoden ist bei den w -Moden eine Abnahme der Frequenzen mit zunehmender Kompaktheit des Sterns zu erkennen. Bei unseren Berechnungen ergaben die Ergebnisse für die Modelle M1 und M6 sowie für vereinzelte Werte des Modells M2 keine eindeutigen Ergebnisse, so dass wir diese nicht in die Tabelle aufgenommen haben.

Während die Frequenz der zweiten w -Mode für das polytrope Sternmodell M4 in [92] bei 22,33 kHz liegt, finden wir mit unserem Code eine weitere Mode, deren Frequenz zwischen den Frequenzen der w_1 - und der w_2 -Mode liegt. Diese Mode bezeichnen wir mit w_2^* . Für das Modell M4 erhalten wir für w_2^* eine Frequenz bei 17,54 kHz. Diese Mode tritt in unserem Fall auch für die polytropen Modelle M2 und M3 auf, deren Frequenzen in Tabelle 3.4 angegeben sind.

Mode	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
w_1 [kHz]	13,87	13,77	13,72	13,57
w_2^* [kHz]	18,09	17,78	17,54	
w_2 [kHz]	27,99	25,12	23,93	21,95
w_3 [kHz]	35,99	34,27	31,60	28,82
w_4 [kHz]	46,08	42,15	39,73	35,43
w_5 [kHz]	58,27	51,52	47,87	42,31
w_6 [kHz]	65,32	59,61	56,00	52,36
w_7 [kHz]		70,04	67,85	65,58
w_8 [kHz]		82,17	76,21	71,40
w_9 [kHz]		90,69	84,35	78,80
w_{10} [kHz]		99,41	92,71	84,35
w_{11} [kHz]		108,35	100,61	97,05

Tab. 3.4: Frequenzen der w -Moden für unterschiedliche Sternmodelle nichtrotierender Sterne. Für das Sternmodell M2 konnten im höheren Frequenzbereich keine eindeutigen Frequenzen gefunden werden.

Für das polytrope Sternmodell 4 vergleichen wir in Tabelle 3.5 unsere Ergebnisse aus der Zeitentwicklung der räumlichen w -Moden mit den Ergebnissen der Modenanalyse von Leins [92]. Bis auf geringe Abweichungen bis zu 2,7 % stimmen die Ergebnisse der höheren w -Moden sehr gut mit denen der angegebenen Referenz überein. Als einzige Ausnahme sind die Abweichungen der w_1 - bzw. der w_2 -Moden zu nennen, die ca. 7 % betragen. Eine mögliche Erklärung hierfür wäre die relative Breite der w -Mode im Frequenzraum und die daraus resultierende Unsicherheit bei der Auswertung.

Polytropes Sternmodell M4 ($\Gamma = 2, \kappa = 100 \text{ km}^2$)			
Mode	Frequenz [kHz]	Frequenz [92] [kHz]	Abweichung
w_1	13,72	12,84	6,9 %
w_2	23,93	22,33	7,2 %
w_3	31,60	31,25	1,1 %
w_4	39,73	40,03	0,7 %
w_5	47,87	48,76	1,9 %
w_6	56,00	57,50	2,7 %
w_7	67,85	66,18	2,5 %
w_8	76,21	74,91	1,7 %
w_9	84,35	83,55	1,0 %
w_{10}	92,71	92,23	0,5 %
w_{11}	100,61	100,91	0,3 %

Tab. 3.5: Vergleich der mit zugrundeliegendem Code berechneten Frequenzen mit denen von [92] für die w -Moden des polytropen Sternmodells M4 eines nichtrotierenden Sterns.

3.5 Einfluss der Rotation auf die Moden

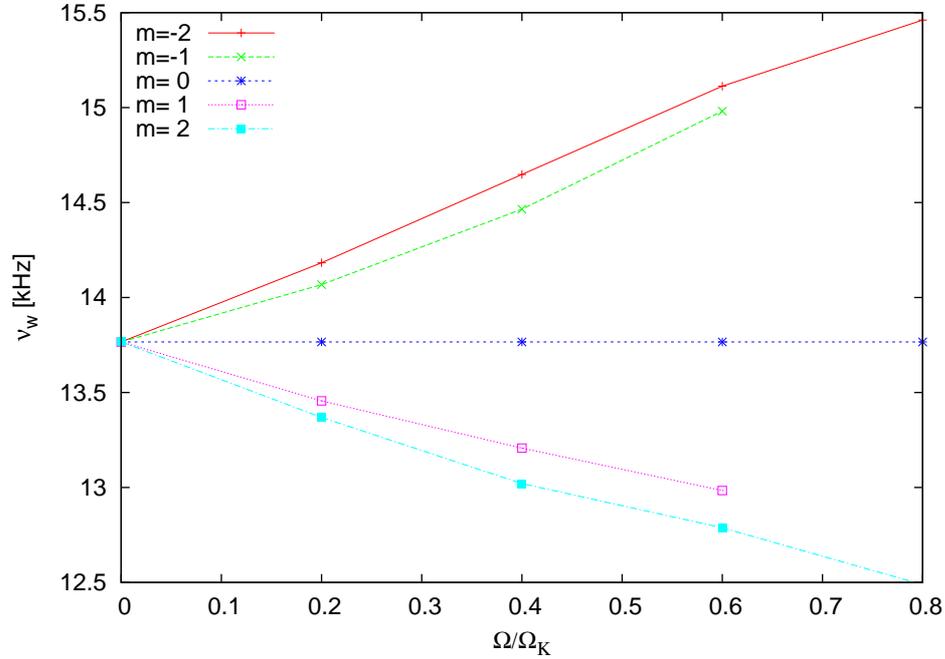


Abb. 3.2: Einfluss der Rotation hier am Beispiel der w -Mode des polytropen Sternmodells M4 für $l = 2$ sowie verschiedene Werte von m (vgl. Gleichung (3.1)).

Ein offensichtlicher Effekt bei der Einführung der Rotation oszillierender Sterne ist die Corioliskraft als rücktreibende Kraft der Inertialmoden. Für rein axiale Moden führt die Rotation zu einer Aufhebung der Entartung, welche zu den r -Moden führt, die im Kapitel 5.6 ausführlicher diskutiert werden. Ein weiterer Effekt, der durch die Rotation des Sterns hervorgerufen wird ist die Aufspaltung der Frequenzen. Die Frequenzverschiebung für rotierende Sterne verhält sich im Allgemeinen gemäß

$$\nu = \nu_0 - \kappa m \Omega. \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnet ν_0 die Frequenz im nichtrotierenden Fall, κ gibt eine Funktion spezifischer Sterngrößen wieder und Ω bezeichnet die Rotationsfrequenz des Sterns [46]. Dies nennt man auch die Aufhebung der Azimutal-Entartung hinsichtlich m .

Zu beachten ist desweiteren, dass durch die Rotation weitere Rotations-Korrekturterme hinzukommen. Die Rotation führt zu einer Kopplung der Störgleichungen für $l = 1$ mit den Gleichungen für $l = \pm 1$, also Kopplungen der polaren mit den axialen Störungen. Das bedeutet, dass die polaren Quadrupolstörungen ($l = 2$) mit den axialen Oktupol- ($l = 3$) und Dipol- ($l = 1$) Störungen koppeln. In den Abbildungen 3.2 und 3.3 ist der Einfluss der Rotation auf die Spektren dargestellt. Abbildung 3.3 zeigt sehr deutlich,

wie die Aufspaltung der Modenfrequenzen zu komplexeren Spektren führt. Die Zuordnung der Frequenzpeaks zu den Moden erfolgt am einfachsten über einen Vergleich mit dem Spektrum des nichtrotierenden Falles. Eine gründliche Untersuchung aller Spektren führt zu Darstellungen wie in Abbildung 3.2. Dieses Diagramm spiegelt das mit Gleichung (3.1) beschriebene Verhalten wider.

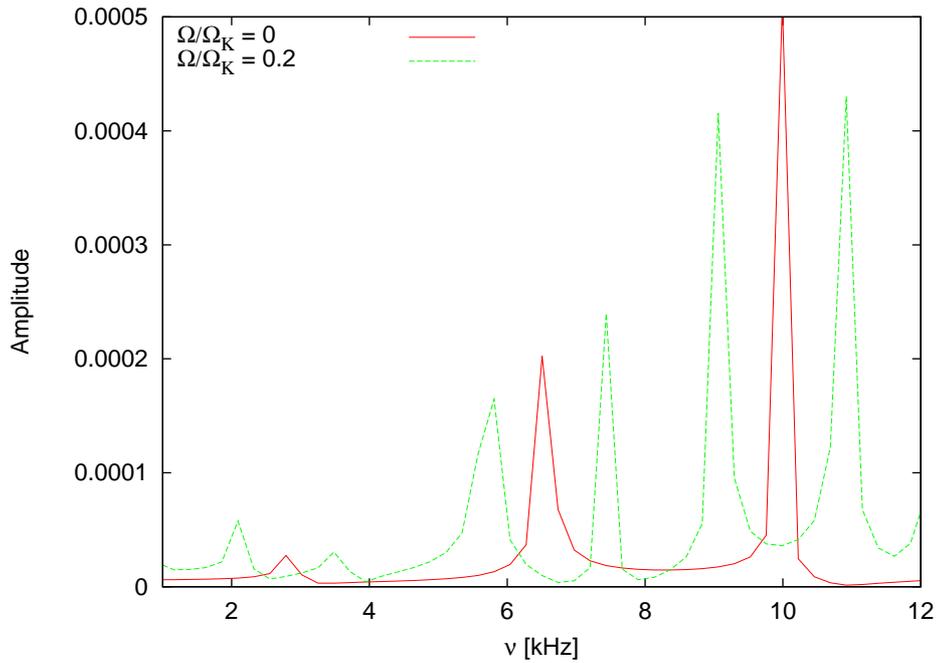


Abb. 3.3: Einfluss der Rotation auf die Frequenzen der Fluidmoden im Vergleich zum nichtrotierenden Fall für das polytrope Sternmodell M4. Die Amplitude ist in dimensionslosen Einheiten angegeben.

4 Genauigkeit der Näherungsverfahren

In diesem Kapitel widmen wir uns der Frage nach der Gültigkeit zweier in der numerischen Relativitätstheorie oft verwendeter Näherungsverfahren. Eines dieser Näherungsverfahren ist die Cowling-Näherung, welche bereits in Kapitel 1.1.6 mathematisch formuliert wurde. Während die Cowling-Näherung aufgrund der Vernachlässigung der räumlichen Störanteile für die Berechnung fluider Schwingungsfrequenzen relevant ist, liefert die inverse Cowling-Näherung nur die Schwingungsfrequenzen der raumzeitlichen Moden, da diese Näherung die Vernachlässigung aller fluiden Störanteile voraussetzt.

Bisherigen Abschätzungen [44] hinsichtlich der Abweichungen zwischen den resultierenden Frequenzen aus der Cowling-Näherung und den Frequenzen aus den vollrelativistischen Gleichungen können wir eigene Berechnungen gegenüberstellen. Für einige der in Kapitel 3.1 beschriebenen polytropen Sternmodelle führen wir Berechnungen der Fluidmoden im vollrelativistischen Regime sowie in der Cowling-Näherung durch. Die entsprechenden Ergebnisse sowie deren Abweichungen sind in Kapitel 4.1 aufgelistet.

Der bereits in Kapitel 3.5 angesprochene Effekt der Rotation des Sterns auf die Schwingungsfrequenzen wird in diesem Kapitel am Beispiel der Cowling-Näherung für unterschiedliche polytrope Sternmodelle dargestellt.

In Kapitel 4.2 betrachten wir die Abweichungen zwischen den mit unserem Code berechneten Frequenzen für die vollrelativistischen Gleichungen und den Frequenzen, die aus der inversen Cowling-Näherung resultieren. Auch im Falle der inversen Cowling-Näherung stellen wir einen Einfluss der Rotation des Sterns auf das Frequenzspektrum fest.

4.1 Cowling-Näherung

Eine bisher unzureichend beantwortete Frage ist die Zuverlässigkeit der häufig verwendeter Cowling-Näherung (siehe Kapitel 1.1.6). In dieser Näherung werden alle Störungen der Raumzeit vernachlässigt, so dass die Schwingungen des Sterns nur durch die Fluidvariablen beschrieben werden. Abschätzungen hinsichtlich der Genauigkeit der Cowling-Näherung für langsam rotierende relativistische Sterne wurden bereits von [44] durchgeführt. Auch für schnell bzw. differentiell rotierende Sterne im Newtonschen Regime gibt es bereits Abschätzungen der Genauigkeit für die Cowling-Näherung [93]. Diese Abschätzungen zeigen eine Abnahme des Fehlers mit zunehmender Frequenz der Fluidmode. Wir werden diese Aussage durch eigene Berechnungen nachvollziehen.

In Abbildung 4.1 ist exemplarisch eine Zeitentwicklung einer Fluidgröße, hier der Enthalpie H , für einen Beobachter innerhalb des Sterns dargestellt. Hierfür wurde in der Cowling-Näherung gerechnet. Entsprechend erhält man im zugehörigen Frequenzspektrum nur die Fluidmoden, also die Frequenzen der f - und der p -Moden. Entsprechend ausgedünnt, also ohne die breiten w -Moden, sieht auch das Spektrum in Abbildung 4.2 aus.

Wir betrachten hier nun ausnahmsweise einen nichtrotierenden Neutronenstern mit der Masse $1,27 M_{\odot}$ und dem Radius $8,86 \text{ km}$, der mit einer Kompaktheit von $\beta = 0,14$ zwischen den Modellen M2 und M3 liegt. In Abbildung 4.2 sind die Frequenzspektren einer Fluidkomponente mit und ohne Hinzunahme der Cowling-Näherung dargestellt. Der Vergleich der beiden Frequenzspektren zeigt bei Berücksichtigung der Cowling-Näherung eine Verschiebung der Frequenzen zu höheren Werten. Diese Verschiebung nimmt mit höheren Frequenzen ab, wie man der Tabelle 4.1 entnehmen kann. Die Abweichungen, die mit dem hier verwendeten Code berechnet wurden, liegen bei $11,8 \%$ für die f -Mode und bis zu $< 1 \%$ für die p -Moden. Diese Abweichungen für das Sternmodell M4 werden in [44] mit 15% angegeben.

In Tabelle 4.2 sind die Abweichungen der Frequenzen für die f - und die p -Moden der Sternmodelle M2 - M6 dargestellt. Bei der f -Mode sieht man eine Zunahme der Abweichung von 10% bis $17,1 \%$. Für die p -Mode ist von M2 - M5 ebenfalls eine Zunahme der Abweichung von $6,8 \%$ bis $13,5 \%$ zu beobachten, während die Abweichung für das Modell M6 bei $8,6 \%$ liegt.

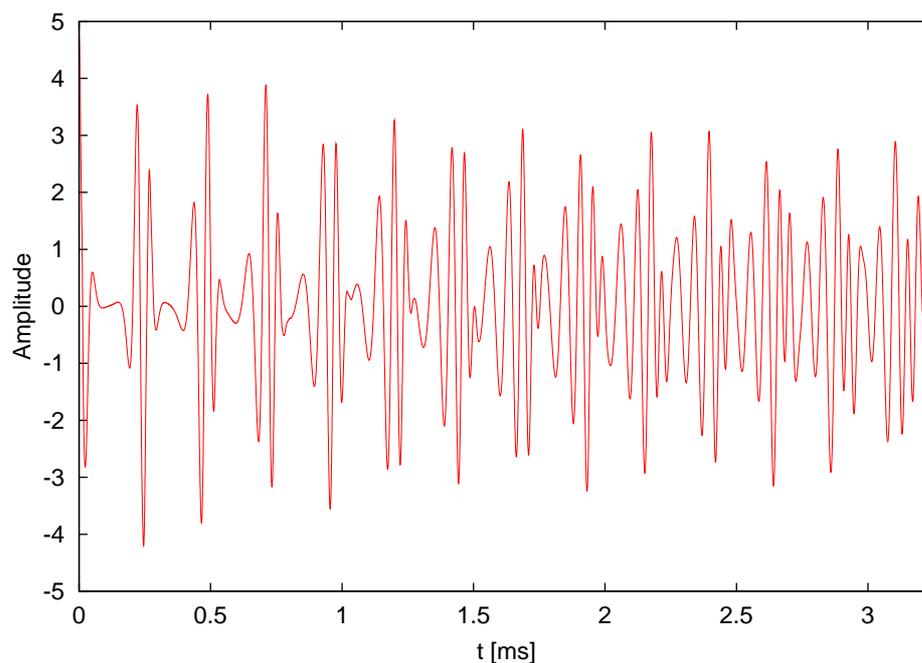


Abb. 4.1: Zeitentwicklung der Enthalpie H für das polytrope Sternmodell M4 in der Cowling-Näherung. Die Amplitude ist in dimensionslosen Einheiten angegeben.

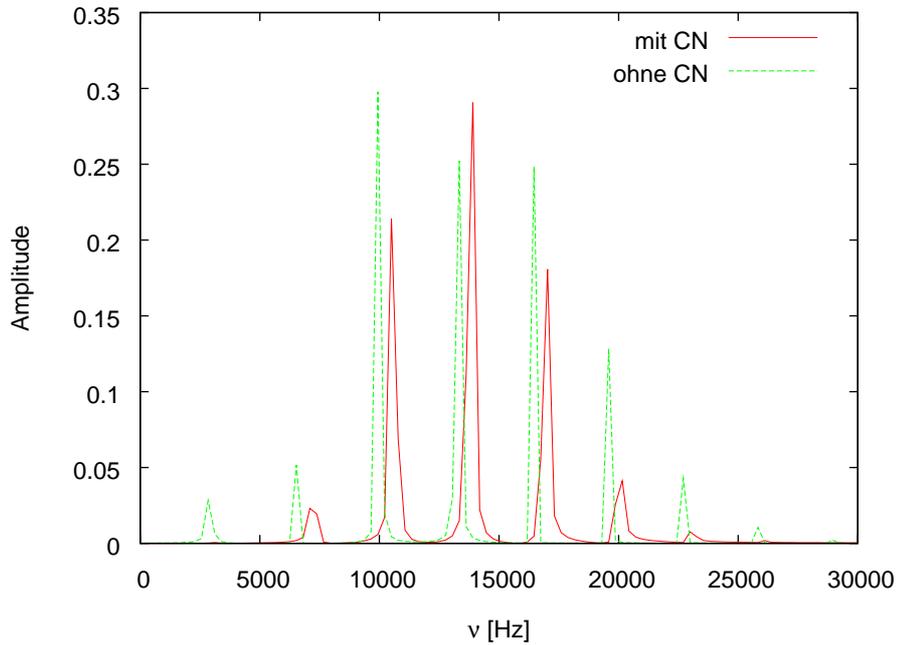


Abb. 4.2: Frequenzspektrum einer Fluidkomponente für einen nichtrotierenden Stern mit sowie ohne Berücksichtigung der Cowling-Näherung. Die Amplitude ist in dimensionslosen Einheiten angegeben.

In einer Reihe weiterer Berechnungen mit Cowling-Näherung wurde der Fall rotierender Sterne betrachtet. Auch hierfür erhält man eine Aufspaltung der Modenfrequenzen und zwar linear mit zunehmender Rotationsfrequenz Ω . Dies ist in Abbildung 4.3 überzeugend dargestellt. In Abbildung 4.4 ist die Zunahme der Modenfrequenz mit ansteigender Kompaktheit des Sterns innerhalb der Cowling-Näherung ersichtlich. Dies bedeutet, dass diese beiden Effekte vollständig auf das dynamische Verhalten der Fluidvariablen zurückzuführen sind und die Kopplung an die räumlichen Störanteile der Metrik damit nichts zu tun haben, da sie hier nicht berücksichtigt werden. Für kompaktere Sterne nimmt die Aufspaltung in Abhängigkeit der Rotation des Sterns zu, wie aus Abbildung 4.4 zusätzlich zu entnehmen ist. Diese Aufspaltung führt für $m > 0$ zu negativen Frequenzen, was möglicherweise zu einer Instabilität der Mode in diesem Bereich führt.

Als wichtiges Ergebnis dieses Kapitels kann somit festgehalten werden, dass zur Berechnung der Fluidmoden die Cowling-Näherung nur bedingt geeignet ist, vor allem bei niedrigen Frequenzen, wie sie die Fundamentalmode und die ersten beiden p -Moden aufweisen.

Polytropes Sternmodell M4 ($\Gamma = 2, \kappa = 100 \text{ km}^2$)			
Mode	ν_{Cowling} [kHz]	$\nu_{\text{vollrel.}}$ [kHz]	Abweichung
f	3,12	2,79	11,8 %
p_1	7,10	6,51	9,1 %
p_2	10,50	9,99	5,1 %
p_3	13,91	13,24	5,1 %
p_4	17,03	16,50	3,2 %
p_5	20,15	19,52	3,2 %
p_6	22,99	22,78	0,9 %
p_7	26,11	25,79	1,2 %
p_8	29,24	28,81	1,5 %
p_9	32,07	31,83	0,8 %
p_{10}	35,20	34,85	1,0 %

Tab. 4.1: Vergleich der Frequenzen für die Fluidmoden im Falle der Cowling-Näherung mit denen im vollrelativistischen Regime für das Sternmodell M4 eines nichtrotierenden Sterns.

Modell	ν_{Cowling}^f [kHz]	$\nu_{\text{vollrel.}}^f$ [kHz]	Abweichung
M2	2,09	1,90	10,0 %
M4	3,12	2,79	11,8 %
M5	3,88	3,44	12,8 %
M6	4,25	3,63	17,1 %
	ν_{Cowling}^p [kHz]	$\nu_{\text{vollrel.}}^p$ [kHz]	Abweichung
M2	4,88	4,57	6,8 %
M4	7,10	6,51	9,1 %
M5	8,40	7,40	13,5 %
M6	8,84	8,14	8,6 %

Tab. 4.2: Abweichung der berechneten Frequenzen für die f - und p - Moden in der Cowling-Näherung und im vollrelativistischen Fall für verschiedene polytrope Sternmodelle eines nichtrotierenden Sterns.

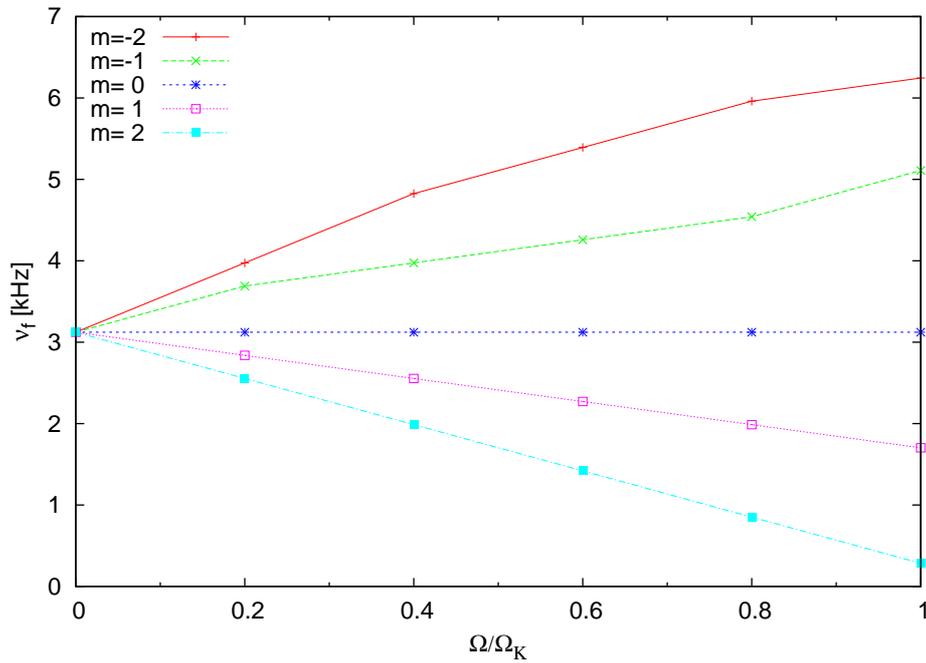


Abb. 4.3: Frequenzen der $l = 2$ f -Mode als Funktion des Rotationsparameters Ω/Ω_K für das polytrope Sternmodell M4 in der Cowling-Näherung für verschiedene Werte von m .

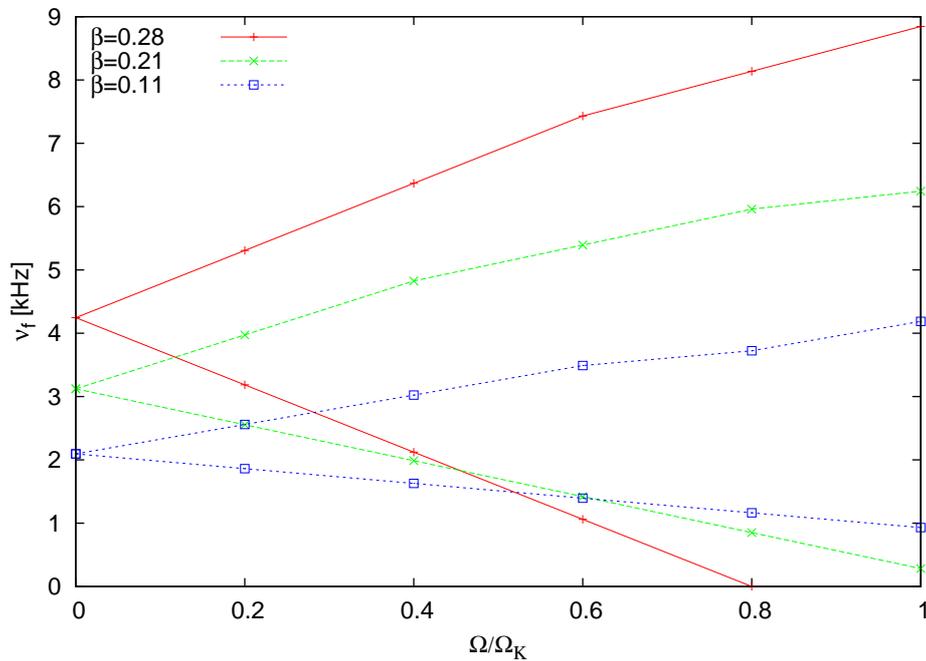


Abb. 4.4: Frequenzen der f -Mode für $l = 2$ und $m = \pm 2$ unterschiedlich kompakter Sterne als Funktion des Rotationsparameters Ω/Ω_K in der Cowling-Näherung für die Sternmodelle M2, M4 und M6.

4.2 Inverse Cowling-Näherung

Zur Bestimmung der w -Moden wird die inverse Cowling-Näherung (ICA) dadurch motiviert, dass aufgrund der stark gedämpften Schwingungen die Fluidanteile von geringer Bedeutung sind. Desweiteren sind bei Vernachlässigung der Fluidanteile die polaren Schwingungsmoden vergleichbar mit den axialen Moden, wie in [45] von Andersson *et al.* begründet wurde. Die häufig verwendete inverse Cowling-Näherung wird mit der Entkopplung der Raumzeitmoden und der Fluidmoden begründet und der damit einhergehenden Vereinfachung des Gleichungssystems. Unter der Annahme gleichen Ursprungs der axialen und der polaren w -Moden werden in [81,94] beide Fälle als fluidunabhängige „Raumzeit“-Moden interpretiert.

Vergleicht man die beiden Abbildungen 4.5 und 3.1, so wird deutlich, dass die Dämpfung der ICA-Moden geringer ist als die der w -Moden des vollrelativistischen Problems. Dies kann damit erklärt werden, dass das Fluid im vollrelativistischen Fall wegen der Kopplung der Störgrößen Gravitationswellen „abstrahlt“, die eine Charakteristik der w -Moden tragen [45].

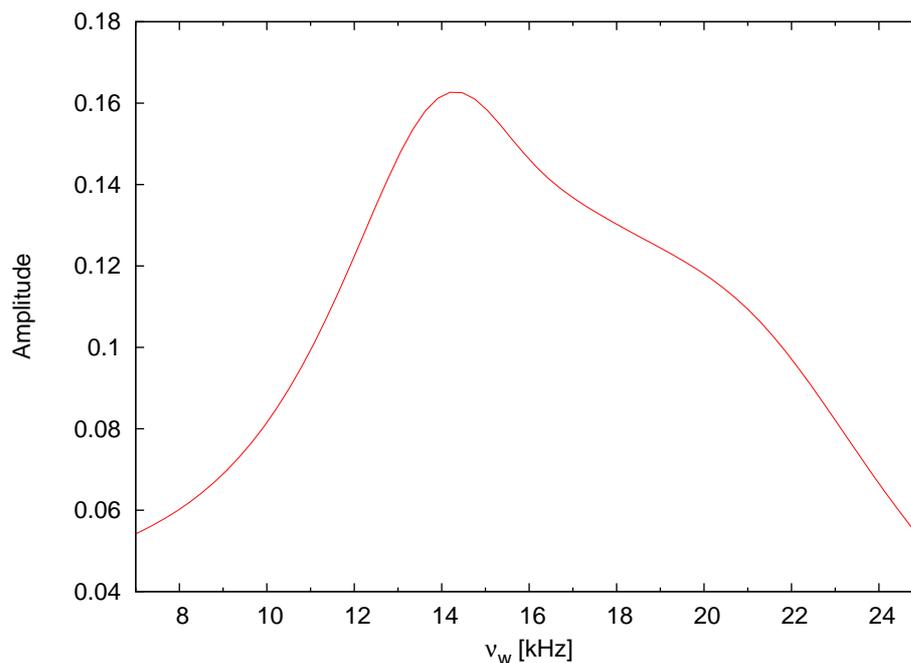


Abb. 4.5: Raumzeit-Mode des polytropen Sternmodells M4 eines nichtrotierenden Sterns. Die Amplitude ist in dimensionslosen Einheiten angegeben.

Wie man den Werten aus Tabelle 4.3 entnehmen kann, gibt es für den Fall der inversen Cowling-Näherung geringe Abweichungen der Frequenzen von den Frequenzen im Falle der polaren w -Moden, welche im vollrelativistischen Regime für verschiedene

Polytropes Sternmodell M4 ($\Gamma = 2, \kappa = 100 \text{ km}^2$)			
Ω/Ω_K	ν_{ICA}^w [kHz]	$\nu_{vollrel.}^w$ [kHz]	Abweichung
0	14,19	13,72	3,4%
0,2	14,48	14,18	2,1%
0,4	15,04	14,65	2,7%
0,6	15,61	15,11	3,3%
0,8	15,90	15,46	2,8%

Tab. 4.3: Vergleich der Frequenzen für die w -Moden in Abhängigkeit des Rotationsparameters Ω/Ω_K im Falle der inversen Cowling-Näherung mit denen im vollrelativistischen Regime für das polytrope Sternmodell M4.

Rotationen berechnet wurden. Somit erweist sich die inverse Cowling-Näherung als gute Näherungsrechnung für die polaren w -Moden.

Auch in der inversen Cowling-Näherung führt die Rotation zur Aufspaltung der Modenfrequenzen für die w -Mode, wie in Abbildung 4.6 deutlich wird. Dies zeigt jedoch, dass auch die räumlichen Störanteile eine Aufspaltung aufgrund der Rotation unabhängig von den Kopplungen an die Fluidstörungen zeigen. Insofern ähneln sich sowohl räumliche als auch fluide Störgrößen bezüglich ihres Verhaltens bei eingeschalteter Rotation, auch ohne Kopplung an die jeweils anderen Störgrößen.

Die Frequenzen räumlicher Moden in der inversen Cowling-Näherung sind genau wie die der Fluidmoden in der Cowling-Näherung zu höheren Werten verschoben im Vergleich zu den Frequenzen, die im vollrelativistischen Fall berechnet wurden.

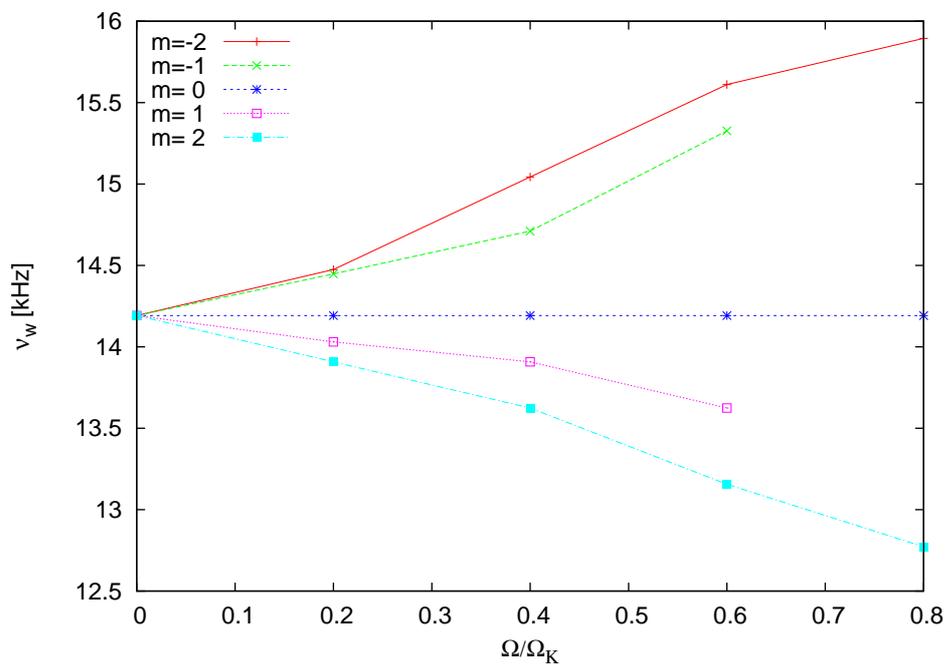


Abb. 4.6: Frequenzen der polaren $l = 2$ w -Mode für das polytrope Modell 4 in Abhängigkeit vom Rotationsparameter Ω/Ω_K für verschiedene Werte von m in der inversen Cowling-Näherung. Die Amplitude ist in dimensionslosen Einheiten angegeben.

5 Ergebnisse für realistische Zustandsgleichungen

Der Schwerpunkt unserer Berechnungen liegt auf der Bestimmung der Schwingungsfrequenzen von Neutronensternen, die durch realistische Zustandsgleichungen beschrieben werden. Während wir uns in den Kapiteln 3.1 und 4.1 ausschließlich auf polytrophe Sternmodelle beschränken, werden wir in diesem Kapitel unser Augenmerk auf die fünf realistischen Zustandsgleichungen A, C, F, MPA und WFF richten, welche in Kapitel 1.2.2 beschrieben werden. Die Auswahl dieser Zustandsgleichungen erfolgte nach dem Gesichtspunkt, den Bereich zwischen weichen und steifen Zustandsgleichungen hinreichend abzudecken.

Die Zentraldichten sowie die entsprechenden daraus resultierenden Sterngrößen Masse, Radius und Kompaktheit sind für die genannten realistischen Zustandsgleichungen in Kapitel 5.1 aufgelistet. Wir betrachten bei unseren Berechnungen vor allem die Zustandsgleichung MPA, für die bisher nur wenige Ergebnisse vorliegen. Für diese Zustandsgleichung wählen wir sechs verschiedene Hintergrundmodelle, die wir mit MPA 1 - MPA 6 bezeichnen. Diese Sternmodelle dienen als Grundlage bei der Berechnung der Frequenzen der f -, p - und w -Moden. Wie bereits für die polytropen Sternmodelle, liegen auch im Fall der realistischen Zustandsgleichung MPA bisher nur Frequenzen basierend auf der Modenanalyse vor. Diese von Pfeiffer [91] erzielten Werte der f -, p - und w -Moden ziehen wir zum Vergleich mit unseren aus der Zeitentwicklung berechneten Frequenzen heran.

In Kapitel 5.2 gehen wir auf die Dämpfungszeit der Schwingungsmoden bzw. deren Herleitung aus der Zeitentwicklung ein.

Nachdem wir bereits in den Kapiteln 3.5 und 4.1 den Einfluss der Rotation des Sterns auf die Moden für polytrophe Sternmodelle untersucht haben, werden wir diese Analyse in Kapitel 5.3 auf realistische Zustandsgleichungen ausdehnen. Anhand der Sternmodelle MPA 1 - MPA 5 stellen wir den rotationsbedingten Einfluss auf die f -, p - und w -Moden unterschiedlich kompakter Sterne für verschiedene Ordnungszahlen m dar.

Aufgrund der Unterscheidung der Störgrößen hinsichtlich ihrer Parität in axiale und polare Anteile untersuchen wir in Kapitel 5.4 den Einfluss der Kopplungen zwischen den axialen und den polaren Moden auf die Frequenzen der w -Mode für Sternmodelle unterschiedlicher Kompaktheit ausgehend von der Zustandsgleichung MPA.

Während wir den Einfluss von m auf die Moden bereits bei der Betrachtung der Rotation des Sterns betrachtet haben, untersuchen wir in Kapitel 5.5 den Einfluss höherer

Ordnungszahlen l_{max} auf die Moden unter Berücksichtigung der Kopplung der Terme von l an $l \pm 1$.

Bisher haben wir uns bei den Berechnungen der Schwingungsfrequenzen auf die f -, p - und w -Moden beschränkt. In Kapitel 5.6 gehen wir auf die bereits oft mit unterschiedlichen Verfahren berechneten Frequenzen der r -Moden ein. Hierbei unterscheiden wir zwischen den axialen und den polaren r -Moden und berechnen für die Zustandsgleichung MPA die entsprechenden Frequenzen für Sternmodelle unterschiedlicher Kompaktheit.

Für die Vielzahl an Ergebnissen, die wir durch die verschiedenen Parametereinstellungen erhalten haben, können wir in Kapitel 5.7 entsprechende Skalierungsverhalten für die einzelnen Moden finden. Wir können im statischen Fall Skalierungsverhalten für die Frequenzen der f -, p - sowie w -Moden der von uns verwendeten Zustandsgleichungen A, C, F, MPA und WFF angeben. Darüberhinaus gehen wir in diesem Kapitel auf das Skalierungsverhalten der entsprechenden Schwingungsfrequenzen der genannten Zustandsgleichungen in Abhängigkeit von der Rotation des Sterns ein.

5.1 Schwingungsfrequenzen im Vergleich

In dem nun folgenden Kapitel werden zentrale Ergebnisse der vorliegenden Arbeit vorgestellt. Nun werden verschiedene realistische Zustandsgleichungen in die Simulationen eingebaut. Die Sternmodelle der verwendeten Zustandsgleichungen müssen zunächst eingegrenzt werden. Abbildung 5.1 zeigt die Bandbreite an möglichen Sternmodellen, die mit Hilfe der Zustandsgleichungen A, C, F, MPA und WFF mit dem vorliegenden Code erzeugt werden können. Eine wichtige Größe zur Klassifizierung von Zustandsgleichungen ist die sogenannte Steifigkeit, die durch die Schallgeschwindigkeit beschrieben werden kann: eine erhöhte Steifigkeit der Zustandsgleichung führt zu einer Zunahme der Schallgeschwindigkeit sowie zu einer erhöhten Kompressibilität der Materie. Die Zustandsgleichungen lassen sich in zwei Kategorien einteilen: die weichen Zustandsgleichungen, die zu Neutronensternmodellen führen, mit maximalen Massen von $M \sim 1,4 M_{\odot}$ und Radien im Bereich unterhalb von 10 km sowie den steifen Zustandsgleichungen mit maximalen Massen $M \sim 1,8 M_{\odot}$ und Radien $R \sim 15$ km. Anhand dieser Definition lassen sich die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Zustandsgleichungen nach zunehmender Steifigkeit ordnen: $MPA < F < A < C < WFF$.

Tabelle 5.1 enthält nochmals explizit die zu den Sternmodellen der Zustandsgleichungen entsprechenden relevanten Daten. Die meisten Simulationen wurden mit der Zustandsgleichung MPA durchgeführt, da hierfür bisher kaum bekannte Ergebnisse vorliegen. Die hierfür verwendeten Zentraldichten unterscheiden sich aus Stabilitätsgründen von den vorherigen polytropen Sternmodellen M1 - M6. In Tabelle 5.2 werden die im Folgenden verwendeten Modelle nummeriert und klassifiziert. Hierfür wurde auf eine breite Auswahl von Sternmassen M/M_{\odot} von 0,7 bis 1,5 geachtet. Die Kompaktheit der Sternmodelle reicht von 0,1 bis 0,26.

EOS	$\rho_c \times 10^{15} \left[\frac{g}{cm^3} \right]$	M/M_\odot	R [km]	M/R
A	1,26	1,05	9,9	0,157
	4,11	1,65	8,4	0,291
C	1,00	1,32	12,0	0,163
	3,00	1,86	9,9	0,276
F	1,00	0,95	11,0	0,128
	3,38	1,42	8,9	0,236
MPA	1,00	0,70	10,2	0,101
	3,10	1,50	8,6	0,258
WFF	0,80	0,89	11,1	0,118
	4,00	1,83	9,2	0,294

Tab. 5.1: Verwendete Zustandsgleichungen (EOS) sowie deren minimale und maximale Zentraldichte ρ_c und die entsprechenden charakteristischen Sterngrößen Masse M , Radius R , Kompaktheit M/R in geometrischen Einheiten.

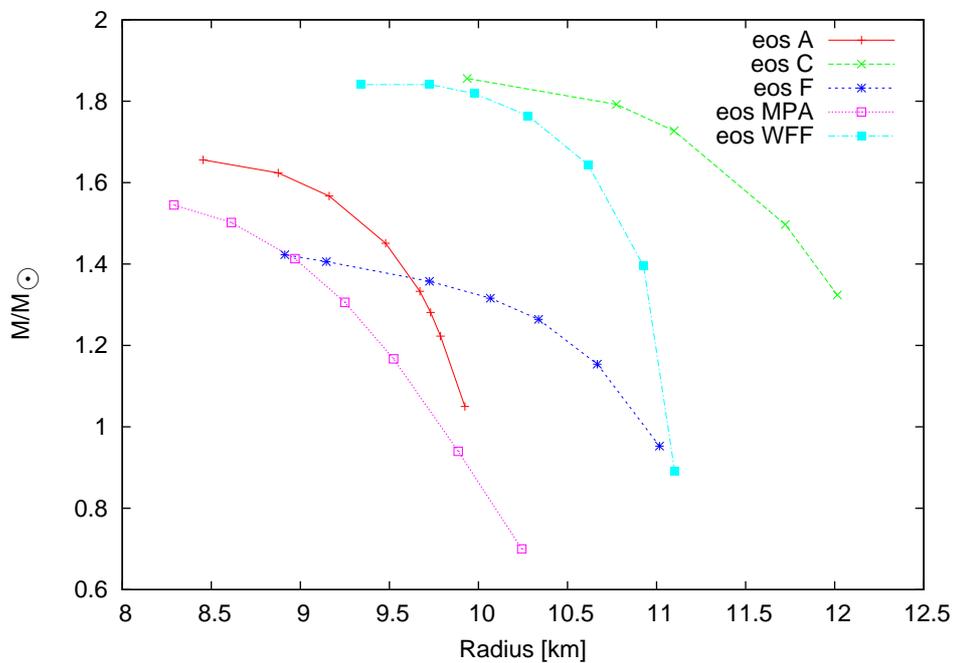


Abb. 5.1: Die im Text beschriebenen Zustandsgleichung liefern verschiedene Hintergrundmodelle. M/M_\odot ist die Masse skaliert auf die Sonnenmasse.

MPA-Sternmodelle					
Modell	ϵ_0 [g/cm ³]	p_0 [dyn/cm ²]	M [M_\odot]	R [km]	M/R
MPA 1	$1,0 \cdot 10^{15}$	$6,68 \cdot 10^{34}$	0,700	10,242	0,10
MPA 2	$1,35 \cdot 10^{15}$	$1,36 \cdot 10^{35}$	0,940	9,886	0,14
MPA 3	$1,5 \cdot 10^{15}$	$2,19 \cdot 10^{35}$	1,223	9,787	0,18
MPA 4	$2,1 \cdot 10^{15}$	$4,01 \cdot 10^{35}$	1,306	9,249	0,21
MPA 5	$2,5 \cdot 10^{15}$	$5,94 \cdot 10^{35}$	1,412	8,970	0,23
MPA 6	$3,1 \cdot 10^{15}$	$9,37 \cdot 10^{35}$	1,502	8,612	0,26

Tab. 5.2: Liste der verwendeten MPA-Sternmodelle und deren physikalische Parameter.

Die Ergebnisse der Frequenzen der Fluidmoden wurden zu Validierungszwecken mit denen von Pfeiffer [91] in Tabelle 5.5 verglichen. Pfeiffer bestimmte in seiner Arbeit Schwingungsmoden basierend auf einem von Leins entwickelten Code zur Berechnung nichtradialer Schwingungen von Neutronensternen in linearer Störungstheorie mit Hilfe des Ansatzes einer Modenanalyse. Die Ergebnisse sind durchaus innerhalb der Fehlertoleranz, abgesehen von p_5 und p_7 . Dieser Fehler könnte mit der schwierigen Ermittlung der höheren Moden in der Modenanalyse erklärt werden, worauf bereits Pfeiffer in seiner Arbeit hinweist.

Die Frequenzen für einige w -Moden vergleichen wir in Tabelle 5.6 für das Sternmodell MPA 4 mit denen der Modenanalyse von [91]. Auch in diesem Fall stimmen die Frequenzen mit einer Abweichung von bis zu 8% gut überein.

In Tabelle 5.3 sind die Ergebnisse der Frequenzen für die f - und p -Moden der Sternmodelle MPA 1 - MPA 6 dargestellt. Mit zunehmender Kompaktheit des Sterns erkennt man eine Zunahme der Frequenzen.

Die Ergebnisse für die Frequenzen der w -Moden für die entsprechenden MPA-Sternmodelle sind in Tabelle 5.4 aufgelistet. Im Gegensatz zu dem ansteigenden Frequenzverhalten der Fluidmoden erkennt man bei den w -Moden mit ansteigender Kompaktheit eine Abnahme der Frequenzen. Wie bereits im Fall polytroper Sternmodelle in Kapitel 3.4, so tritt auch für die realistische Zustandsgleichung MPA in unserem Code eine weitere w -Mode auf, die wir mit w_2^* bezeichnen und deren Frequenz zwischen der der w_1 - und der w_2 -Mode liegt. Diese zusätzliche Mode ist für die Zustandsgleichung MPA in [91] nicht aufgelistet.

Mode	MPA 1	MPA 2	MPA 3	MPA 4	MPA 5	MPA 6
f [kHz]	1,99	2,24	2,44	2,67	2,76	2,87
p_1 [kHz]	5,98	6,49	7,28	7,57	7,58	7,89
p_2 [kHz]	7,47	9,48	10,52	11,35	11,71	12,20
p_3 [kHz]	8,47	12,47	13,75	14,69	15,15	15,78
p_4 [kHz]	10,96	14,69	15,97	17,81	18,36	19,37
p_5 [kHz]	12,95	16,98	17,96	20,93	21,81	22,72
p_6 [kHz]	13,45	19,46	20,22	21,15	25,02	26,54
p_7 [kHz]	16,43	20,95	22,65	24,27	28,46	30,13

Tab. 5.3: Frequenzen der Fundamentalmode f und der p -Moden für unterschiedliche MPA-Sternmodelle nichtrotierender Sterne.

Mode	MPA 1	MPA 2	MPA 3	MPA 4	MPA 5	MPA 6
w_1 [kHz]	16,10	15,44	14,47	13,58	12,86	12,43
w_2^* [kHz]	20,58	18,42	17,11	16,92	15,95	14,95
w_2 [kHz]	30,31	27,89	25,63	24,04	22,50	21,04
w_3 [kHz]	40,04	36,35	33,32	31,61	29,38	27,02
w_4 [kHz]	58,76	45,81	42,72	39,41	36,50	33,72
w_5 [kHz]	69,23	54,78	49,55	49,20	44,76	39,93
w_6 [kHz]		65,23	65,78	63,00	58,77	53,32
w_7 [kHz]						66,47

Tab. 5.4: Frequenzen der w -Moden für unterschiedliche MPA-Sternmodelle nichtrotierender Sterne.

Sternmodell MPA 1			
Mode	Frequenz [kHz]	Frequenz [91] [kHz]	Abweichung
f	1,99	1,94	2,6 %
p_1	5,98	5,78	3,5 %
p_2	7,47	7,40	0,9 %
p_3	8,47	8,46	0,1 %
p_4	10,96	10,76	1,9 %
p_5	12,95	11,85	9,3 %
p_6	13,45	13,57	0,9 %
p_7	16,43	15,46	6,3 %

Tab. 5.5: Vergleich unserer Frequenzen mit denen von Pfeiffer [91] für die Fluidmoden des Sternmodells MPA 1 eines nichtrotierenden Sterns.

Sternmodell MPA 4			
Mode	Frequenz [kHz]	Frequenz [91] [kHz]	Abweichung
w_1	13,58	12,58	7,9 %
w_2	24,04	22,65	6,1 %
w_3	31,61	32,04	1,4 %
w_4	39,41	41,31	4,8 %
w_5	49,20	50,51	2,7 %
w_6	63,00	59,69	5,5 %

Tab. 5.6: Vergleich unserer Frequenzen mit denen von Pfeiffer [91] für die w -Moden des Sternmodells MPA 4 eines nichtrotierenden Sterns.

5.2 Dämpfungszeiten der Moden

Jede Schwingungsmode hat eine charakteristische Dämpfungszeit τ . Für die hier durchgeführte Zeitentwicklung lässt sich diese mit Hilfe des Zeitsignals bestimmen. Abbildung 5.2 zeigt das Vorgehen zur Ermittlung der Dämpfungszeit. Eine systematische Auswertung vieler Dämpfungszeiten wurde nicht durchgeführt. Als Grund wäre die Unsicherheit des Verfahrens zu nennen, welches eine hohe Fehlertoleranz aufweist.

Zur Bestimmung der Dämpfungskonstanten $\kappa = 1/\tau$ wird ein exponentieller Zerfall $\sim \exp(\kappa t)$ der Amplitude angenommen. Die Dämpfungskonstante erhält man, indem man in einem festgelegten Zeitregime, z.B. bis $t_{max} = 0,15$ ms, den Abfall der Amplitude mit dem exponentiellen Ansatz annähert. Aus Abbildung 5.2 resultiert eine Dämpfungskonstante von $\kappa \approx 30 \text{ ms}^{-1} \pm 2 \text{ ms}^{-1}$, d.h. eine Dämpfungszeit von $\tau \approx 0,033 \text{ ms} \pm 0,003 \text{ ms}$. Das ergibt einen relativen Fehler von fast 10%. Dieser Unsicherheit liegt die Tatsache zugrunde, dass man es mit einer Überlagerung vieler Modenfrequenzen zu tun hat, die jeweils verschiedene Dämpfungszeiten aufweisen, so dass eine eindeutige Zuordnung der Amplituden des Zeitsignals zu reinen Moden nicht möglich ist.

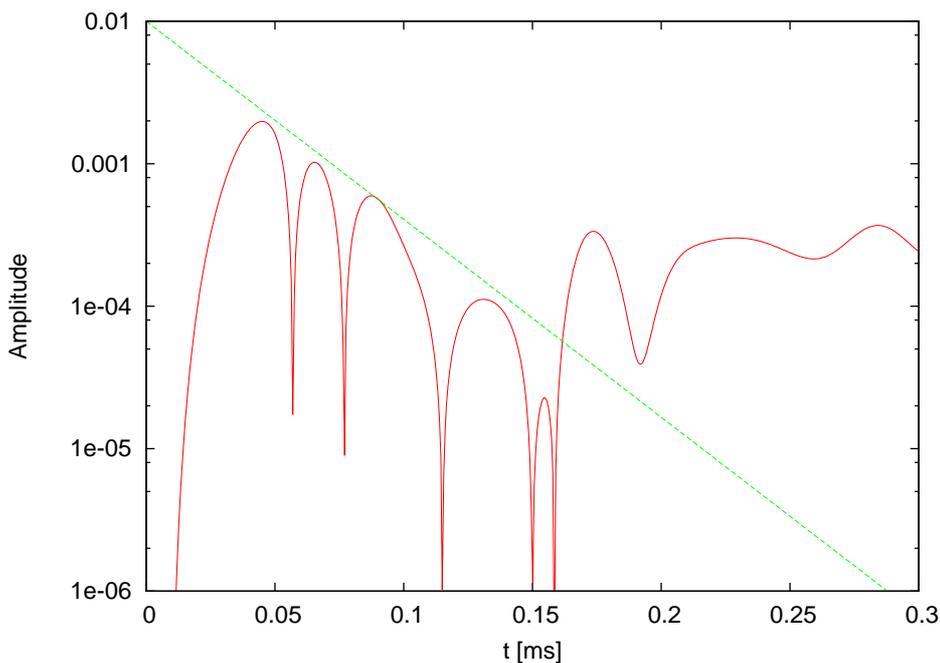


Abb. 5.2: Eine logarithmische Auftragung des Zeitsignals der Enthalpie H für das realistische Sternmodell MPA 1 zur Bestimmung der Dämpfungszeit bzw. der Dämpfungskonstanten. Die Amplitude ist in dimensionslosen Einheiten angegeben.

5.3 Einfluss der Rotation für realistische Zustandsgleichungen

In Kapitel 3.5 haben wir bereits dargelegt, in welcher Weise die Rotation prinzipiell die Frequenzen verschiedener Moden beeinflusst. In dem folgenden Kapitel haben wir dieselbe Analyse nun auch auf realistische Zustandsgleichungen ausgedehnt.

In Schaubild 5.3 ist der Verlauf der Frequenz in Abhängigkeit des Rotationsparameters Ω/Ω_K für die Fluidmode f dargestellt. Schaubild 5.4 zeigt ebenfalls die Rotationsabhängigkeit der Frequenz jedoch für die erste w -Mode. Beiden Schaubildern liegen Berechnungen mit dem Modell MPA 5 (siehe Tabelle 5.2) zugrunde. Man erhält eine Aufspaltung der Frequenzen für $m = \pm 1$ und $m = \pm 2$ bei linearer Zu- bzw. Abnahme der Frequenzen in Abhängigkeit des Rotationsparameters Ω/Ω_K . Für $m = 0$, also im Fall axialsymmetrischer Moden, ist kein Einfluss der Rotation erkennbar.

Die Frequenzverschiebung für rotierende Sterne verhält sich im Allgemeinen gemäß der schon angegebenen Gleichung (3.1). Abweichende Werte des linearen Verhaltens sowie fehlende Werte in den Schaubildern 5.3 und 5.4 sind darauf zurückzuführen, dass eine zunehmende Rotationsfrequenz des Sterns zu einer Überlappung unterschiedlicher Frequenzen im Spektrum führt und damit das Auffinden bestimmter Frequenzen erschwert wird.

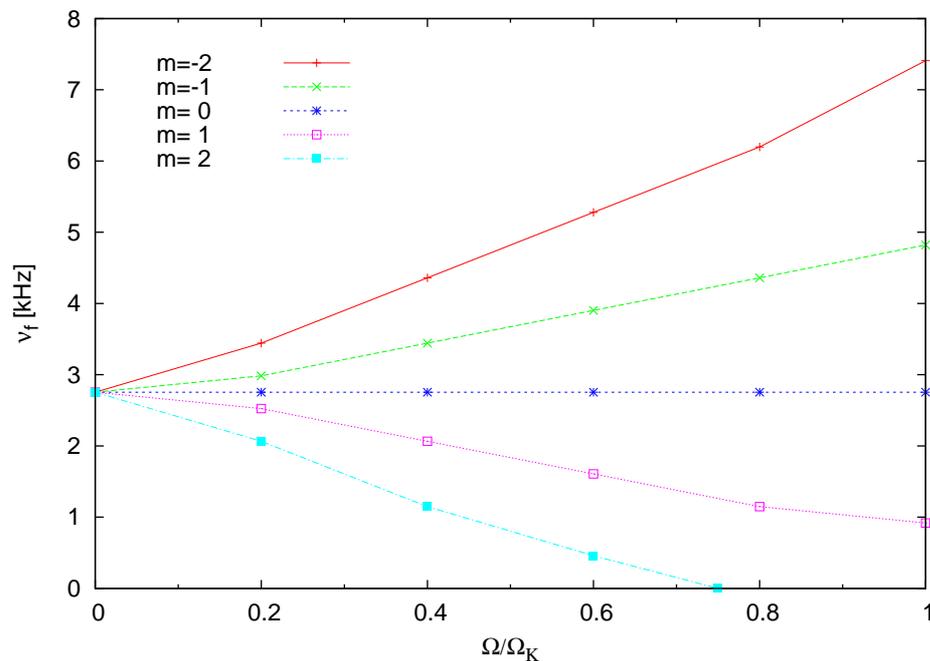


Abb. 5.3: Frequenzen der $l = 2$ f -Mode als Funktion des Rotationsparameters Ω/Ω_K für das realistische Sternmodell MPA 5.

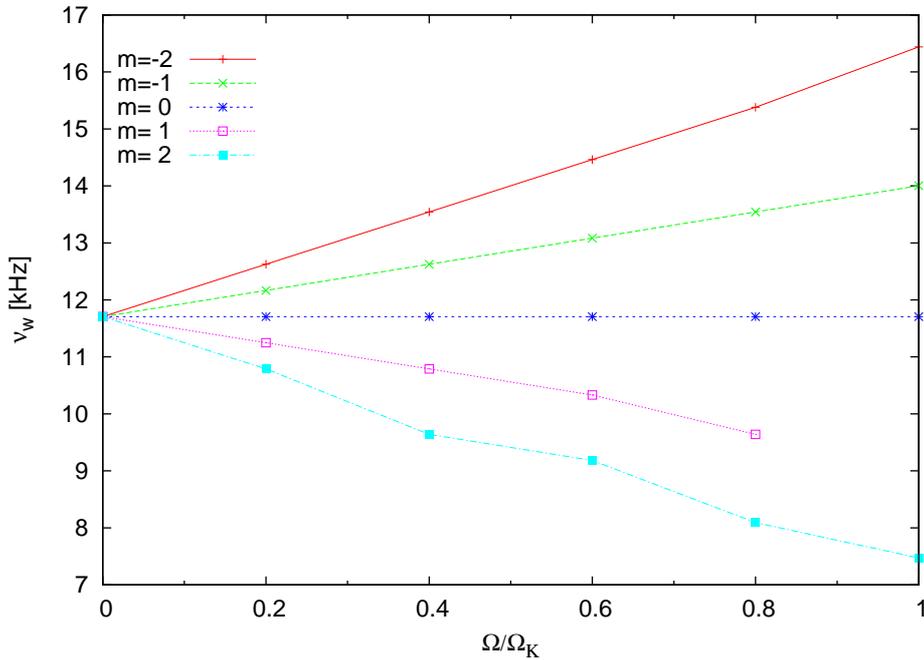


Abb. 5.4: Frequenzen der $l = 2$ w -Mode als Funktion des Rotationsparameters Ω/Ω_K für das Sternmodell 5 der realistischen Zustandsgleichung MPA.

Die Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 zeigen die Frequenzen für unterschiedliche Sternmodelle der Zustandsgleichung MPA jeweils für die f -, p - und w -Moden. Man erkennt in den Abbildungen 5.5 und 5.6, dass die Frequenzen der kompakteren Sternmodelle für die Fluidmoden höher liegen als die der weniger kompakten Sternmodelle. Bei den w -Moden ist das gegenteilige Verhalten erkennbar, wie man dem Schaubild 5.7 entnehmen kann. Für die p -Mode ist in Schaubild 5.6 ein weiteres Verhalten zu sehen. Für $m > 0$ streben die Frequenzen des kompakteren Sternmodells MPA 5 mit zunehmender Rotation schneller gegen Null als die Frequenzen der weniger kompakten Sternmodelle MPA 1 und MPA 2.

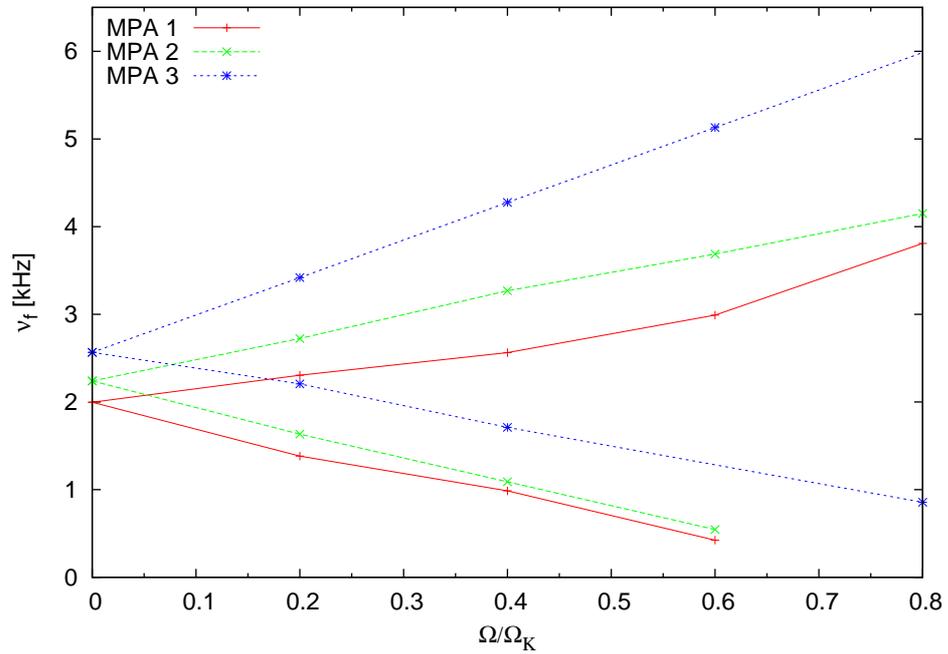


Abb. 5.5: Verhalten der Frequenzen der f -Mode für unterschiedliche realistische Sternmodelle für die Ordnungszahlen $l = 2$ und $m = \pm 2$.

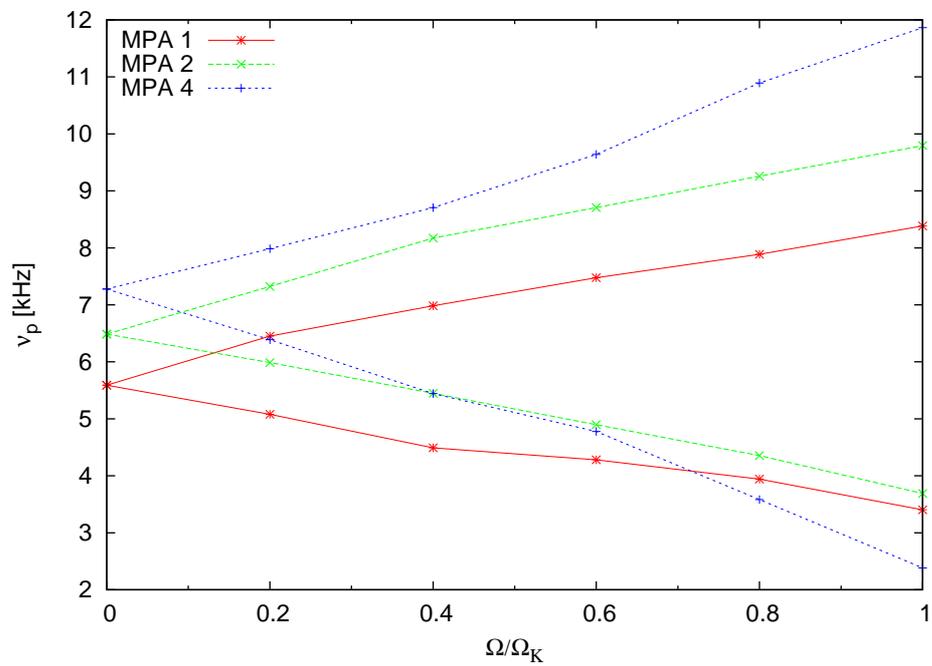


Abb. 5.6: Verhalten der Frequenzen der p -Mode für unterschiedliche realistische Sternmodelle der Ordnungszahlen $l = 2$ und $m = \pm 2$.

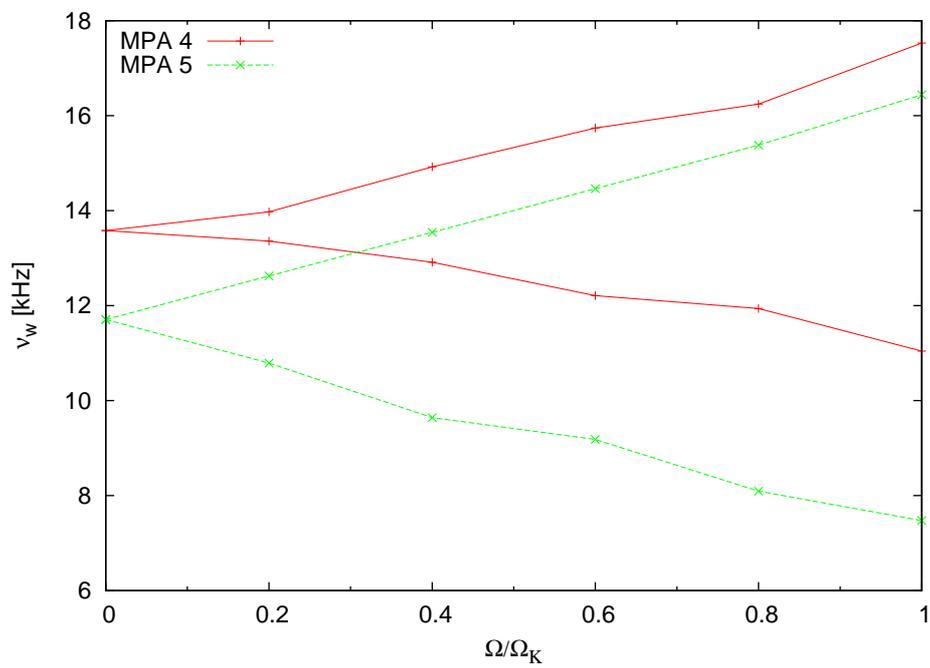


Abb. 5.7: Verhalten der Frequenzen der w -Mode für unterschiedliche realistische Sternmodelle mit den Ordnungszahlen $l = 2$ und $m = \pm 2$.

5.4 Einfluss der Kopplung zwischen axialen und polaren Moden

Das Verhalten der Störgrößen unter einer Inversion der räumlichen Koordinaten ist verantwortlich für die Bezeichnung *axial* und *polar*. Haben sie die Parität $(-1)^{l+1}$ so bezeichnet man sie als axial, bei der Parität $(-1)^l$ bezeichnet man sie als polar. Die Kopplung zwischen den Gleichungen besteht nur über die Operatoren $\mathcal{L}^{\pm 1}$ (siehe Gleichungen (2.45) - (2.47)). Vernachlässigt man die Kopplungsterme der axialen Gleichungen an die polaren und umgekehrt, so erhält man für die axialen Anteile ein System von vier Gleichungen für die Metrikvariable V_4 , die beiden Krümmungsvariablen K_3 und K_6 sowie für die axiale Komponente u_3 der Vierergeschwindigkeit. Für nichtrotierende Sterne erhält man mit einer entsprechenden axialen Anregung bei Entkopplung die axialen w -Moden, welche von Chandrasekhar und Ferrari [15] für stark relativistische Modelle sowie von Kokkotas [79] für weniger kompakte Modelle untersucht wurden. Die typischen polaren Fluidmoden, wie die f - und die p -Moden treten bei dieser Rechnung gar nicht auf. Für polytrope Sternmodelle wurden bereits axiale w -Moden in [95] und [96] berechnet (letztere für ultrakompakte Sterne). Mit zunehmendem Rotationsparameter Ω/Ω_K nimmt hierfür die Frequenz der Moden ab, entsprechend dem unteren Ast der Modenaufspaltung bei Rotation (vgl. Abbildung 5.4 und 5.7).

Die polaren Gleichungen sind die relativistische Verallgemeinerung der *tidal perturbations* der Newtonschen Theorie, dabei koppeln die Störungen des Gravitationsfeldes an das Fluid. Im Gegensatz zu den polaren Störungen sind die axialen Störungen nicht mit der Fluidbewegung gekoppelt. Die Abhängigkeit der Modenfrequenzen von den Zustandsgleichungen sollte im axialen Fall auffälliger sein als im polaren Fall. Benhar *et al.* [97] zeigten den Einfluss der Zustandsgleichung auf die axialen w -Moden. Die in Abbildung 5.8 dargestellten w -Moden zeigen einen wesentlichen Unterschied zu den in [97] gezeigten: die Frequenzen der ungekoppelten axialen w -Mode liegen oberhalb der polaren w -Mode. Dieses Verhalten könnte eine Besonderheit der MPA-Zustandsgleichung sein, es könnte jedoch auch auf die Zeitentwicklung zurückzuführen sein, dass diese hier nicht so exakte Ergebnisse hervorbringt.

Als wichtiges Ergebnis der hier berechneten w -Moden zeigt sich jedoch, dass die Kopplung der polaren w -Mode an die axialen Anteile keine Veränderung bewirkt, umgekehrt aber die Kopplung der axialen Gleichungen an die polaren für die axialen w -Moden. Diese werden, wie in Abbildung 5.8 zu erkennen ist, durch die Kopplung zu deutlich höheren Frequenzen verschoben.

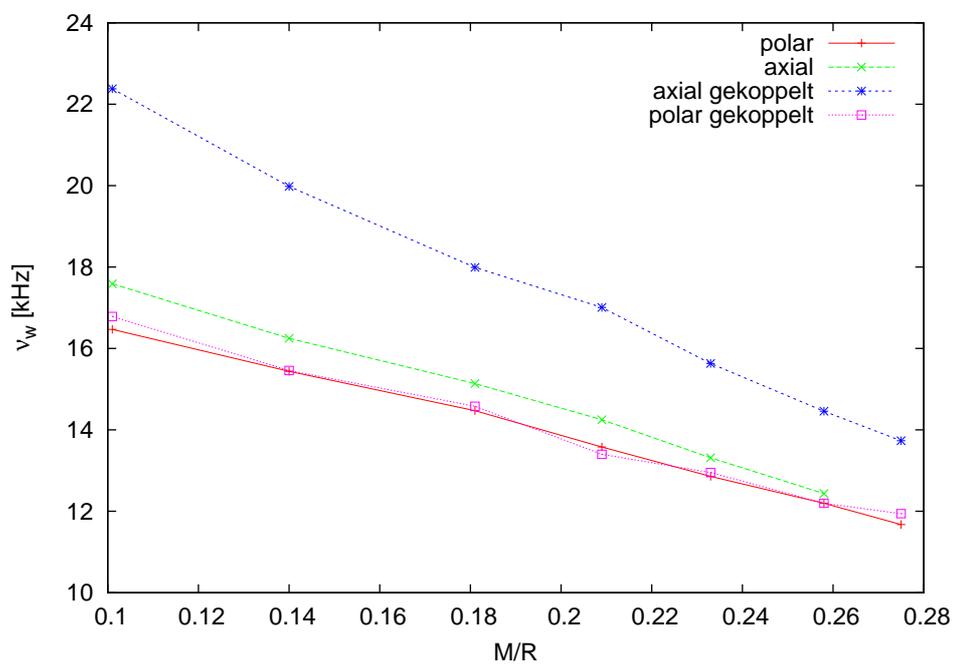


Abb. 5.8: Verhalten der Frequenzen der w -Mode für polare und axiale Anregung. Die polare w -Mode ist unabhängig von der Kopplung, die axiale w -Mode wird durch die Kopplung an die polaren Anteile zu höheren Frequenzen hin verschoben.

5.5 Einfluss der Ordnungszahl l auf die Schwingungsfrequenzen

Unter der Annahme axialsymmetrischer Störungen gibt es keine m -Aufspaltung, so dass Rotationseffekte nur auf der Kopplung der Gleichungen mit verschiedenen Werten von l basieren. Für $l_{max} = 0$ gibt es keine rotationsbedingte Korrektur, das bedeutet dass die Gleichungen den nichtrotierenden Fall beschreiben. Diesen Sonderfall nennt man auch radiale Moden. Für $l_{max} = 1$ erhält man eine Kopplung der polaren $l = 0$ Gleichungen mit den axialen $l = 1$ Gleichungen für u_3 . Unter Hinzunahme weiterer Kopplungen mit höheren Werten von l werden die weiteren Frequenzkorrekturen kleiner und konvergieren sehr schnell. Für Werte größer als $l_{max} = 3$ liegen die Frequenzkorrekturen im Bereich von 0%. Somit werden die quasiradialen Fluidmoden kaum durch die Rotation beeinflusst.

Für $m \neq 0$ erhält man die in Kapitel 5.3 erwähnte lineare Aufspaltung der Frequenzen. Aufgrund der Kopplungen polarer Anteile mit l an die axialen Anteile $l \pm 1$ liegt ein System vor, für das l von $|m|$ bis unendlich läuft, sofern m als konstant vorausgesetzt wird. Kopplungen an $l < |m|$ sind nach Definition der Koeffizienten Q_{lm} gemäß Gleichung (2.48) ausgeschlossen. Die Gleichungen bilden zwei unabhängige Systeme hinsichtlich ihrer Parität. Im nicht-rotierenden Fall unterscheidet man meist zwischen den polaren und den axialen Anteilen. Diese Unterscheidung kann im rotierenden Fall aufgrund der Kopplungen axialer und polarer Anteile nicht mehr streng aufrechterhalten werden.

Die Fluidmoden werden im nichtrotierenden Fall kaum durch die Kopplungen an $l \pm 1$ beeinflusst. Tabelle 5.7 zeigt die Entwicklung der Frequenzen für die polaren f -, p - und w -Moden im Modell MPA 3 bei Rotation Null. Höhere Kopplungen wirken sich ab $l_{max} = 2$ vernachlässigbar und ab $l_{max} = 3$ gar nicht mehr aus. Die Kopplung der polaren und axialen Störgrößen bewirken jedoch eine stärkere Abhängigkeit der quasiaxialen r -Mode von höheren l [30]. Dies konnte auch durch Modellrechnungen nachvollzogen werden. Font *et al.* [98] haben den Einfluss der Rotation auf axialsymmetrische Moden im nichtlinearen Fall auf der Grundlage der Cowling-Näherung untersucht. Da ihren Berechnungen schnell rotierende Neutronensterne zugrundeliegen, sind deren Ergebnisse mit unseren nicht vergleichbar. Es zeigt sich eine Abnahme der Frequenzen, während in unserem Fall ein Zunahme der Frequenzen mit zunehmenden Kopplungen zu beobachten ist. Eine mögliche Erklärung ist, dass bei größeren Rotationsfrequenzen die quadratischen Korrekturterme Ω^2 immer wichtiger werden.

5.6 r -Moden

Inertialmoden werden die Moden genannt, deren rücktreibende Kraft überwiegend die Corioliskraft ist, so dass r -Moden (mit $l = 2$ und $m = 2$) eine Unterklasse der Inertialmoden sind, deren Dynamik vom axialen Geschwindigkeitsfeld bestimmt wird. Inertialmoden weisen eine starke Abhängigkeit von der barotropischen Eigenschaft einer

l_{max}	ν_f [Hz]	ν_{p1} [Hz]	ν_w [Hz]
2	2564	6837	14546
3	2565	6840	14705
4	2565	6840	14705

Tab. 5.7: Der Einfluss der Kopplung an höhere l wird für die polaren f -, p - und w -Moden für höhere l_{max} immer geringer. Dargestellt sind die Ergebnisse für das Modell MPA 3 für Rotation Null.

Zustandsgleichung des zu beschreibenden Neutronensterns auf. Im relativistischen Fall existieren keine reinen axialen Moden für barotropische Sterne [99]. Im Falle reiner r -Moden müssen die polaren Anteile verschwinden. Idealisierte Rechnungen zeigen, dass die klassische Frequenz der r -Mode im Newtonschen Grenzfall sich im relativistischen Fall in ein kontinuierliches Frequenzband verbreitert, dessen Grenzen durch das Frame-Dragging im Sterninnern sowie am Sternrand bestimmt werden [100]. Erst unter Hinzunahme weiterer Kopplungen an die Störanteile der Metrik wird ersichtlich, dass neben dem Frequenzband auch weitere diskrete Moden vorkommen können. Ob diese stabil sind, also auch auftreten, hängt davon ab, ob sie vom Frequenzband überlagert werden oder nicht. Eine weitere Komplikation kommt hinzu, wenn man die Kopplungen an höhere l hinzunimmt. Es zeigt sich ein sehr komplexes Verhalten des kontinuierlichen Frequenzbandes, das nun in mehrere sich teilweise überlappende Bänder aufspalten. Numerische Berechnungen haben gezeigt, dass einzelne Modenfrequenzen, unter anderem die der r -Mode, auch innerhalb der kontinuierlichen Bänder stabil sind, andere jedoch nicht [30]. Fazit dieser Untersuchungen war, dass die komplexen Zusammenhänge der gekoppelten Gleichungen keinerlei einfache Rückschlüsse darauf zulassen, welche Moden stabil sind und welche nicht.

Eine ausführliche Betrachtung der r -Moden-Instabilität wurde für dieselben Gleichungen in Cowling-Näherung von Ruoff *et al.* schon 2003 durchgeführt und umfangreiche Ergebnisse präsentiert. Denen können wir mit Hilfe des vorliegenden numerischen Codes nur insofern etwas hinzufügen, als dass wir einen Bereich für stabile r -Moden für die MPA-Zustandsgleichungen angeben können.

Im axialsymmetrischen Fall treten die ersten diskreten Inertialmoden bei einer Kopplung von $l_{max} = 3$ auf. Zur Unterscheidung der Moden von dem kontinuierlichen Frequenzband werden in der Zeitentwicklung mehrere Beobachter an unterschiedliche Orte innerhalb des Sterns platziert. Die entsprechenden fouriertransformierten Frequenzspektren werden übereinander gelegt, so dass nur die Frequenzpeaks, welche miteinander übereinstimmen den Moden zuzuordnen sind, während die Peaks, die voneinander abweichen, dem kontinuierlichen Spektrum entsprechen. Eine Besonderheit der r -Mode ist, dass sie von der Winkelgeschwindigkeit des Sterns linear abhängen sollte, das heißt, dass man eine für einen Rotationsparameter ausgerechnete Frequenz leicht in andere

Rotationen umrechnen kann.

Zum Test der r -Mode verwenden wir zunächst eine polytrope Zustandsgleichung. Es zeigt sich tatsächlich, dass eine stabile Mode bei Rotation auftritt, die vom gewählten Sternmodell, also von M/R , abhängt. Die Modenfrequenz, die bei Rotation festgestellt werden kann, liegt jedoch zunächst im Bereich von einigen hundert Hertz, also etwas oberhalb der Auflösungsgrenze im Frequenzraum der von uns erzielten Spektren. Bei höheren Rotationen zeigt sich eine lineare Zunahme der Modenfrequenzen mit der Winkelgeschwindigkeit des Sterns. Bei einem Rotationsparameter von $\Omega/\Omega_K \approx 0,52$ liegen die Frequenzen normiert auf die Kepler-Frequenz im Bereich 0,7 bis 0,9, je nach M/R , was vergleichbar mit dem Ergebnis von [30] ist. Eine Untersuchung der r -Moden für die Zustandsgleichung MPA umgerechnet auf $\Omega/\Omega_K \approx 0,52$ und normiert auf die Kepler-Frequenz ergibt Modenfrequenzen von 0,7 bis 0,9 ansteigend mit zunehmendem M/R . Daraus kann man schließen, dass die MPA-Zustandsgleichung keine wesentliche Veränderung der Frequenzen der r -Mode mit sich bringt.

Eine andere nennenswerte Tatsache ergibt sich aus der Auswertung der Spektren. In Abbildung 5.9 sind die Inertialmoden aufgetragen, die bei Rotation in den jeweiligen Anteilen auftreten. Die Simulationen wurden mit gekoppelten axialen und polaren Anteilen durchgeführt. Daher sieht man sowohl bei den axialen Störgrößen als auch bei den polaren die Inertialmoden - meist auch an derselben Stelle. Bei kompakteren Sternen erscheint für die axialen Gleichungen ein zweiter Ast bei kleineren Frequenzen. Die polare Größe liefert ab dieser Aufspaltung nicht mehr eindeutig dieselben Ergebnisse wie die axiale, so dass man annehmen kann, dass eine Überlagerung beider Moden im Spektrum zu beobachten ist.

Da mit Hilfe des vorliegenden numerischen Codes nicht ausreichend lange Zeitreihen erstellt werden können aufgrund numerischer Instabilitäten, kann hinsichtlich der r -Mode keine gesicherte Aussage gemacht werden. Man stößt bei der Auswertung der Spektren an Grenzen. Als sicheres Ergebnis kann deshalb nur geltend gemacht werden, dass eine stabile r -Mode im erwarteten Frequenzbereich auftritt, die linear mit der Winkelgeschwindigkeit des Sterns zunimmt und deren Frequenz vom Modellparameter M/R abhängig ist. Die Bereiche, in denen diese Frequenzen auftreten sind in Abbildung 5.9 angegeben.

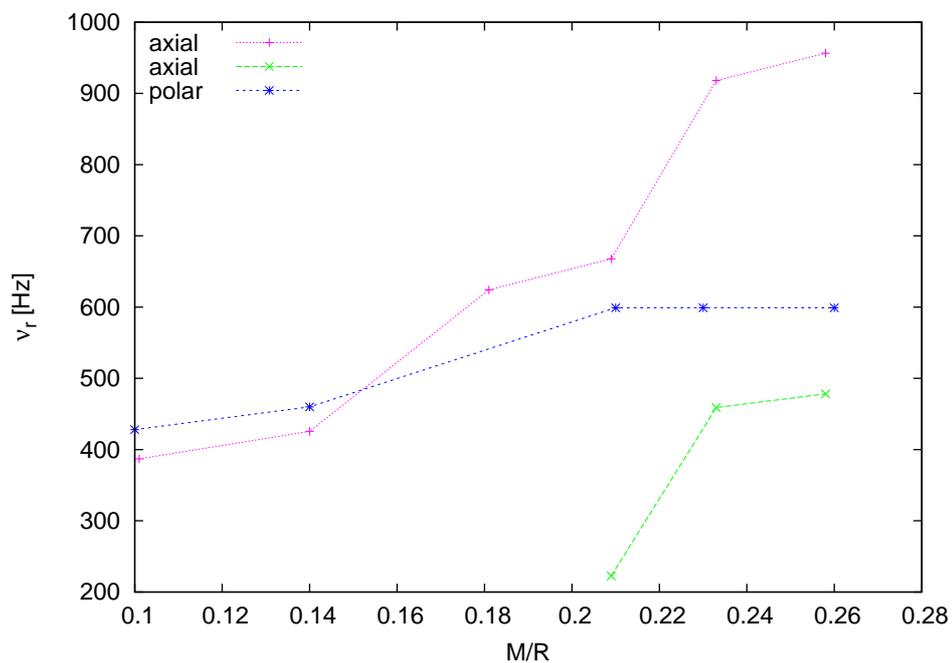


Abb. 5.9: Frequenzen der r -Mode in Abhängigkeit von der Kompaktheit M/R für die Zustandsgleichung MPA. Der mit polar bezeichnete Ast wurde aus einem Spektrum einer polaren Größe abgelesen, die mit axial bezeichneten Äste aus einem Spektrum einer axialen Größe.

5.7 Skalierungsverhalten

5.7.1 Skalierungsverhalten von Modenfrequenzen im statischen Fall

In diesem Kapitel verwenden wir unsere numerischen Ergebnisse, um empirische Skalierungsrelationen zwischen der Frequenz als Observable und den Sternparametern Masse und Radius zu finden, entsprechend den Ansätzen in [61, 84, 101].

Die Wahl der Skalierungsparameter kann folgendermaßen begründet werden. Die charakteristische Zeitskala eines dynamischen Prozesses ist bekannterweise mit der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ verknüpft [19]. Diese Tatsache ist auch für die Fluidschwingung eines Sterns von Bedeutung, so dass man für die Frequenz der f -Mode von der Relation $\nu_f \sim \bar{\rho}^{1/2}$ ausgehen kann. Unsere numerischen Ergebnisse bestätigen diesen Ansatz, wie Abbildung 5.10 für die Fundamentalmode zeigt.

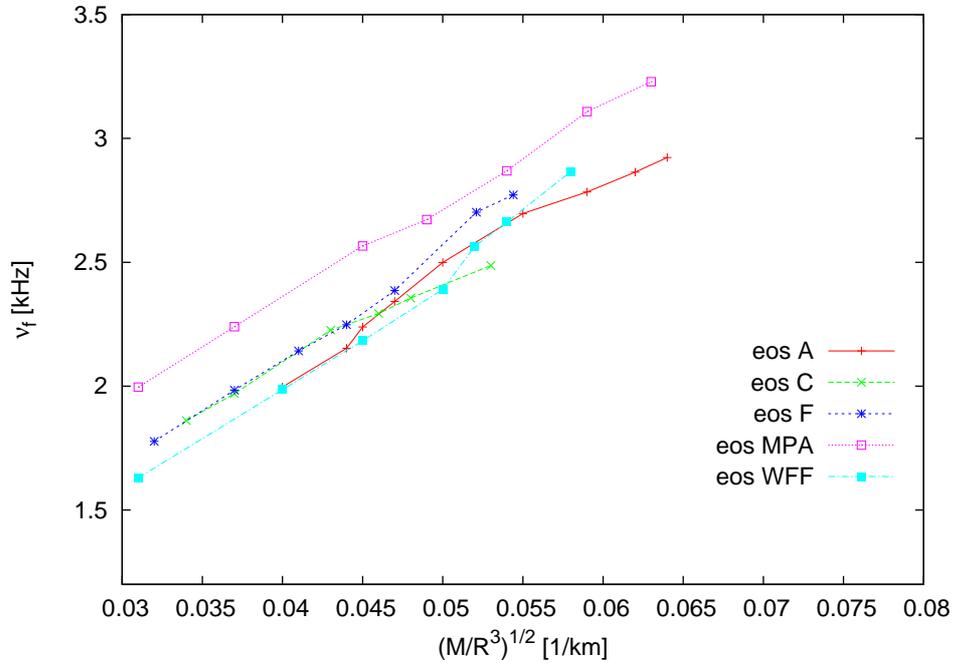


Abb. 5.10: Skalierungsverhalten der f -Moden für diverse realistische Zustandsgleichungen im statischen Fall.

Folgende Formel beschreibt das Skalierungsverhalten der f -Moden für die in Schaubild 5.10 dargestellten Zustandsgleichungen:

$$\nu_f(\text{kHz}) \approx 0,403 + 1,843 \left(\frac{M_{1,4}}{R_{10}^3} \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Dieses Resultat ist durchaus zu vergleichen mit den Ergebnissen der Modenanalyse aus [61, 84]:

$$\nu_f(\text{kHz}) \approx 0,78 + 1,637 \left(\frac{M_{1,4}}{R_{10}^3} \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Hierbei bezeichnet $M_{1,4} = M/(1,4M_\odot)$ die Masse skaliert auf 1,4 Sonnenmassen und R_{10} den Radius skaliert auf 10 km. Die Masse M wird hier stets in km angegeben bzw. umgerechnet mit einem passenden Faktor aus Konstanten. Mit dem Skalierungsverhalten aus Gleichung 5.1 folgt somit eine typische Frequenz der f -Moden von etwa 2,2 kHz, da der Faktor $M_{1,4}/R_{10}^3$ typischerweise von der Größenordnung 1 ist.

Da die p -Moden sensibler auf Änderungen der Materieverteilung innerhalb des Sterns reagieren, erweisen sich die empirischen Relationen zur Beschreibung der Frequenzen der p -Moden als nicht so zuverlässig wie die der f -Moden. Für die p -Moden zeigt sich zunächst ein ungenügendes Skalierungsverhalten bezüglich der Quadratwurzel der mittleren Dichte, wie Abbildung 5.11 belegt. Trägt man jedoch $M\nu_p$ über M/R auf, wie in Abbildung 5.12 dargestellt, so erhält man eine Gerade, d.h. es ergibt sich eine Funktion der Art

$$\nu_p(\text{kHz}) \approx \frac{1}{M_{1,4}} \left[1,73 + 6,22 \frac{M_{1,4}}{R_{10}} \right]. \quad (5.3)$$

Dies kann wieder mit einem entsprechenden Ergebnis aus [61, 84]:

$$\nu_p(\text{kHz}) \approx \frac{1}{M_{1,4}} \left[1,75 + 5,59 \frac{M_{1,4}}{R_{10}} \right] \quad (5.4)$$

verglichen werden und liefert demgemäß eine sehr gute Übereinstimmung und Bestätigung unserer Ergebnisse. Wir erhalten somit aus Gleichung 5.3 eine typische Frequenz der p -Mode von 7,3 kHz.

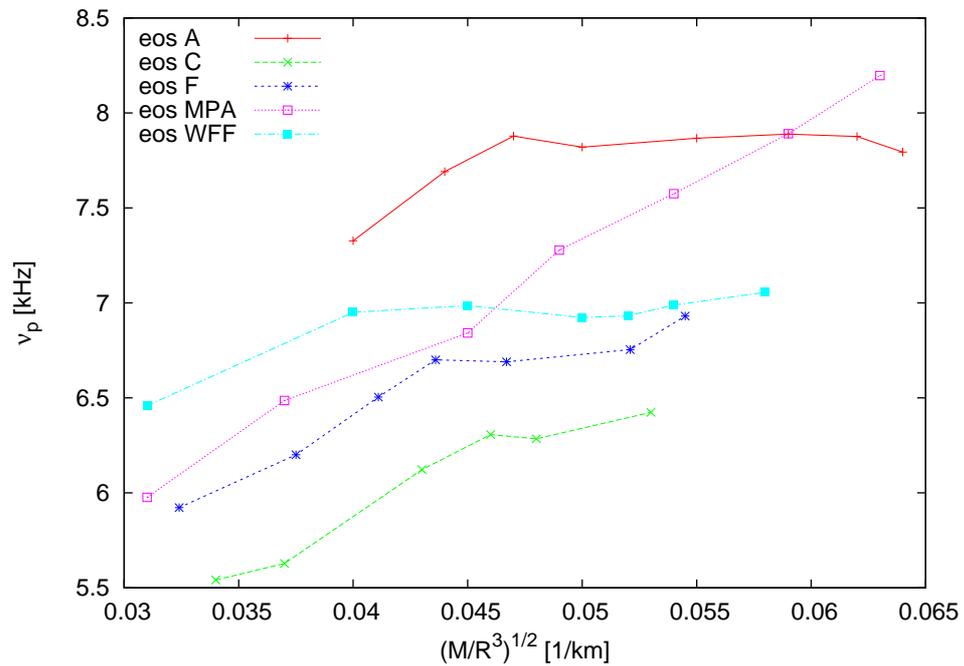


Abb. 5.11: Skalierungsverhalten der p -Moden für diverse realistische Zustandsgleichungen im statischen Fall.

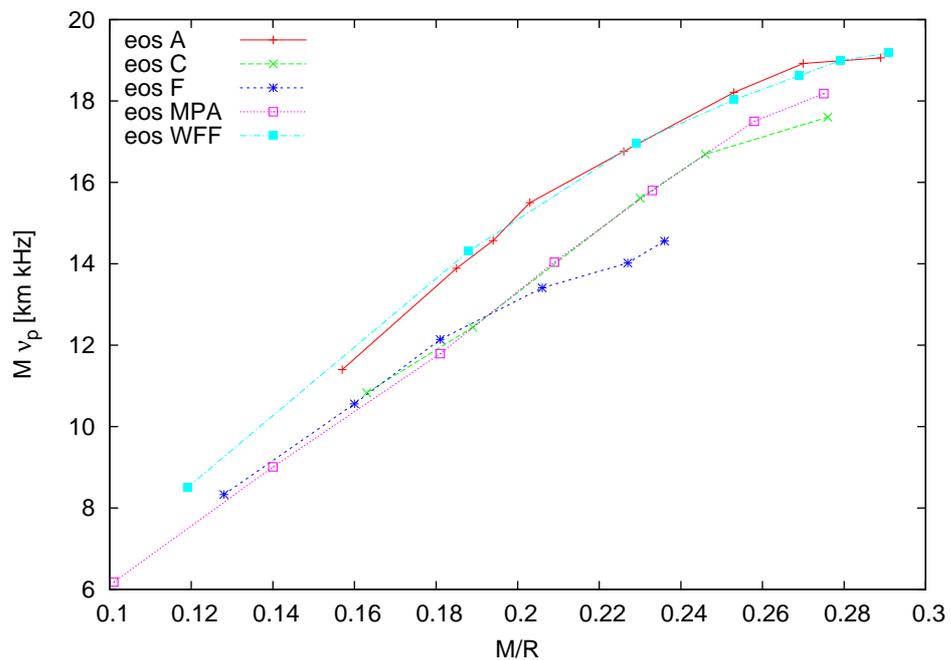


Abb. 5.12: Skalierungsverhalten der p -Moden für diverse realistische Zustandsgleichungen im statischen Fall.

Für das Skalierungsverhalten der w -Mode erhält man ein besonders überzeugendes Diagramm, welches in Abbildung 5.13 dargestellt ist. Diese Darstellung ergibt sich jedoch nicht für die Frequenz selbst sondern für das Produkt $R\nu_w$, aufgetragen über M/R . Da die w -Moden keine charakteristischen Fluidbewegungen hervorrufen [5], unterscheidet sich deren Skalierungsverhalten von dem der Fluidmoden. Als Motivation für das Auffinden des Skalierungsverhaltens der w -Moden gehen wir von den analytischen Ergebnissen [73, 80] für Modellberechnungen der w -Mode aus, die ein inverses proportionales Verhalten der Frequenz zum Sternradius aufweisen. Alle betrachteten Zustandsgleichungen liegen in unserem Fall auf der Geraden

$$\nu_w(\text{kHz}) \approx \frac{1}{R_{10}} \left[21,31 - 8,78 \frac{M_{1,4}}{R_{10}} \right]. \quad (5.5)$$

In einer anderen Betrachtung hinsichtlich der Eigenwertberechnung [61] wird die Relation

$$\nu_w(\text{kHz}) \approx \frac{1}{R_{10}} \left[20,92 - 9,14 \frac{M_{1,4}}{R_{10}} \right] \quad (5.6)$$

angegeben. Die beiden Ergebnisse stimmen sehr gut miteinander überein, wenn man die unterschiedliche Herangehensweise berücksichtigt. Aus Gleichung 5.5 erhalten wir somit eine typische Frequenz der w -Mode von 12,5 kHz.

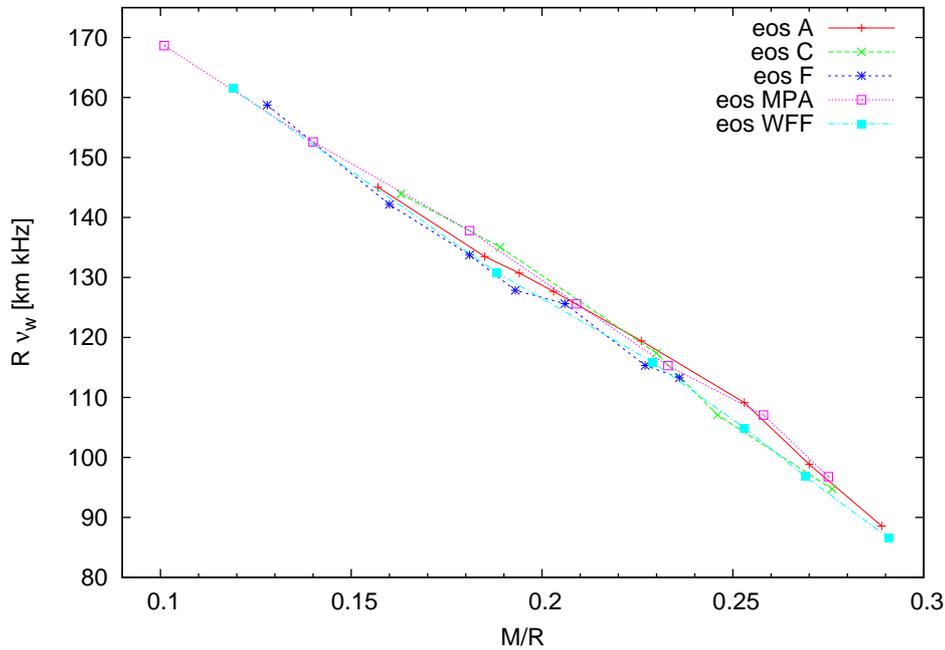


Abb. 5.13: Skalierungsverhalten der w -Moden für diverse realistische Zustandsgleichungen im statischen Fall.

Auch die Masse selbst normiert auf die Sonnenmasse M_{\odot} eignet sich als Parameter für ein geordnetes Diagramm aller Moden aller Zustandsgleichungen [84]. Abbildung 5.14 stellt genau ein solches Diagramm unserer Resultate dar. Anhand dieser Darstellung kann man sehr gut die Bereiche ablesen, in denen die verschiedenen Modenfrequenzen liegen können. Die f -Moden liegen bei 1,5 kHz - 3 kHz, die p -Moden bei 4,5 kHz - 8 kHz, die w -Moden bei 9 kHz - 16 kHz. Hierbei fällt außerdem auf, dass die MPA-Zustandsgleichung sehr hohe Frequenzen für alle Moden und für die w -Moden insbesondere liefert.

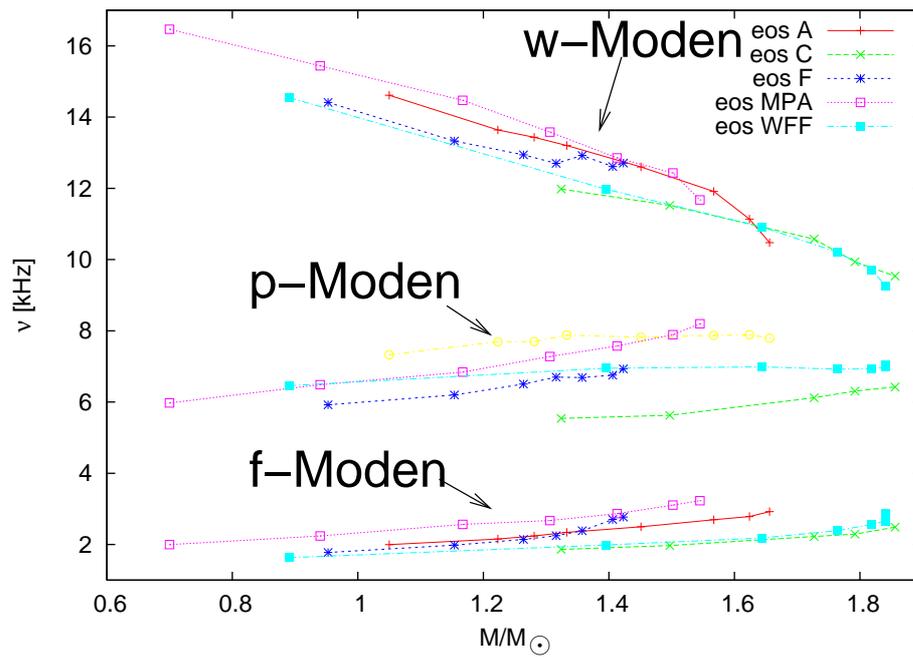


Abb. 5.14: Auftragung der Frequenz der f -, p - und w -Moden über der Masse.

5.7.2 Skalierungsverhalten von Modenfrequenzen für Rotation

Im Folgenden werden Skalierungen von Modenfrequenzen für den Fall eingeschalteter Rotation untersucht. Diese führt, wie in den Kapiteln 3.5 und 5.3 gezeigt, zu Aufspaltungen der Modenfrequenzen, die zudem von der Drehfrequenz der Rotation abhängig sind. Diese lineare Abhängigkeit kann entsprechend der Modenfrequenz im statischen Fall auch einer Skalierbarkeit unterliegen. In diesem Kapitel soll nun die Steigung einer solchen Aufspaltung untersucht werden. Hat man einmal das Skalierungsverhalten einer solchen Steigung ausfindig gemacht, steht mit einem Diagramm eine viel größere Menge an Informationen zur Verfügung. Den folgenden Diagrammen liegt die Notation zugrunde, die in dem Ansatz

$$\nu_{2,2}^f(\text{kHz}) \approx \nu_0^f + A_{2,2}^f \frac{\Omega}{\Omega_K} \quad (5.7)$$

verwendet wird. Hierbei bedeutet der Index 2,2, die Auswahl der Zweiges $l=2$, $m=2$ der Aufspaltung durch die Rotation. Die Steigung des Zweiges wird hier mit $A_{2,2}^f$ bezeichnet.

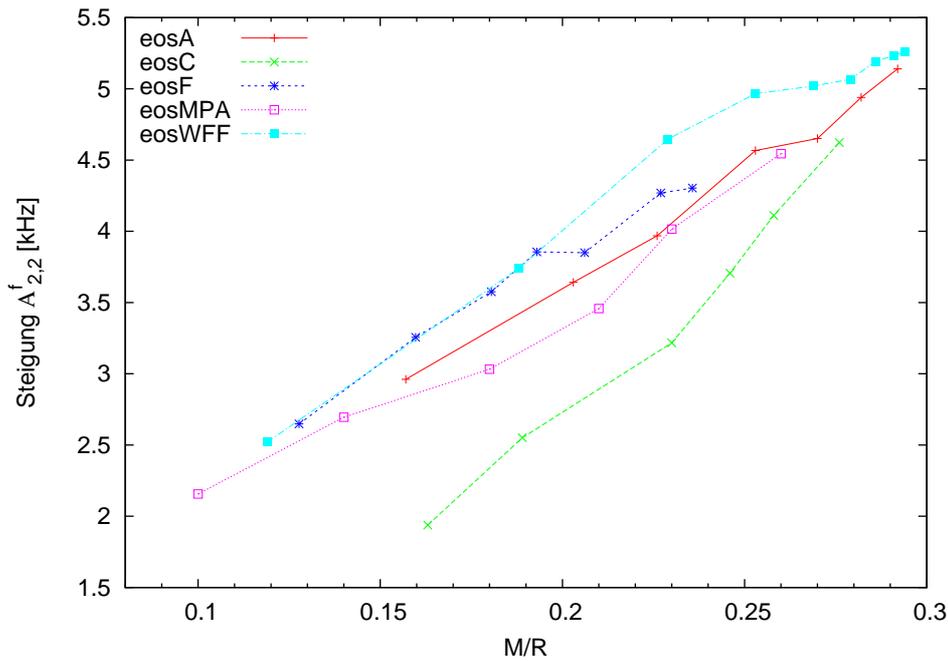


Abb. 5.15: Steigung der Frequenzen der f -Mode der entsprechenden Sternmodelle mit $l = 2$ und $m = 2$ für verschiedene Zustandsgleichungen in Abhängigkeit von M/R .

Die Ergebnisse für die f -, p - und w -Moden sind in den Diagrammen 5.15 - 5.19 dargestellt. Zunächst wird jeweils der Skalierungsfaktor M/R getestet und danach der Skalierungsfaktor $\sqrt{M/R^3}$. Es ist ausgeschlossen, dass für beide Skalierungsfaktoren ein

gutes Skalierungsverhalten resultiert. Sowohl für die f - als auch für die p -Mode ergeben die Diagramme 5.15 und 5.17 eine Darstellung, die durch eine Gerade besser angenähert werden als die Auftragung in den Diagrammen 5.16 und 5.18. Die Auswertung der Daten der MPA-Zustandsgleichung in Diagramm 5.16 ergab ein genähertes Skalierungsverhalten für $A_{2,2}^f$ entsprechend der Geraden

$$A_{2,2}^f(\text{kHz}) \approx 0,6 + 14,5 \frac{M}{R}. \quad (5.8)$$

Eine Auswertung des Diagramms 5.18 auch für die MPA-Zustandsgleichung ergab eine angenäherte Gerade

$$A_{2,2}^p(\text{kHz}) \approx 1,1 + 15,7 \frac{M}{R}. \quad (5.9)$$

Beide Auswertungen sind für die anderen Zustandsgleichung nicht exakt aber bieten einen Anhaltspunkt, in welchem Bereich eine solche Kurve liegen sollte.

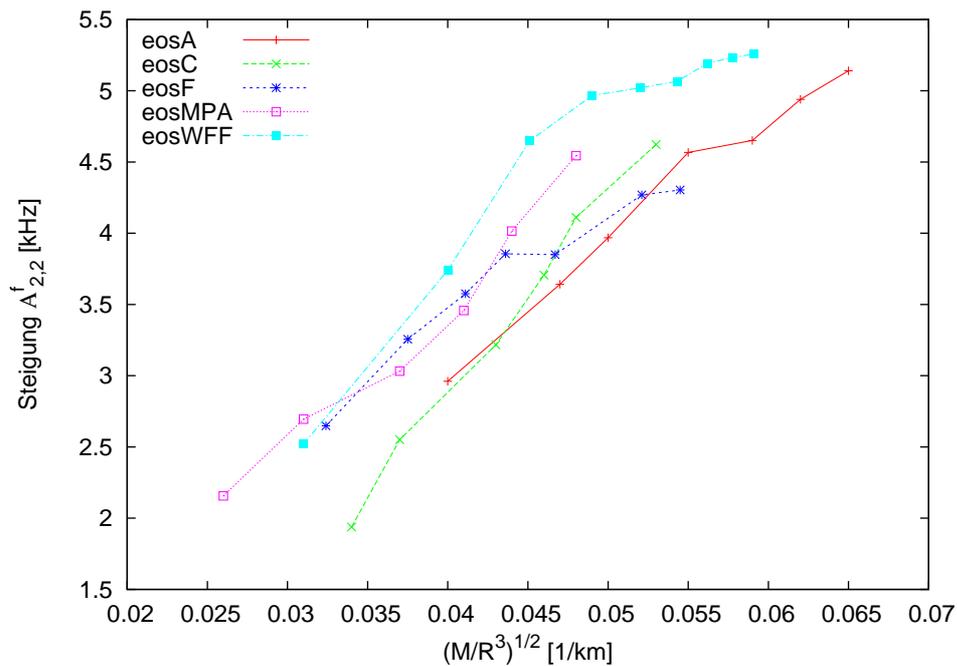


Abb. 5.16: Steigung der Frequenzen der f -Mode der entsprechenden Sternmodelle mit $l = 2$ und $m = 2$ für verschiedene Zustandsgleichungen in Abhängigkeit von $\sqrt{M/R^3}$.

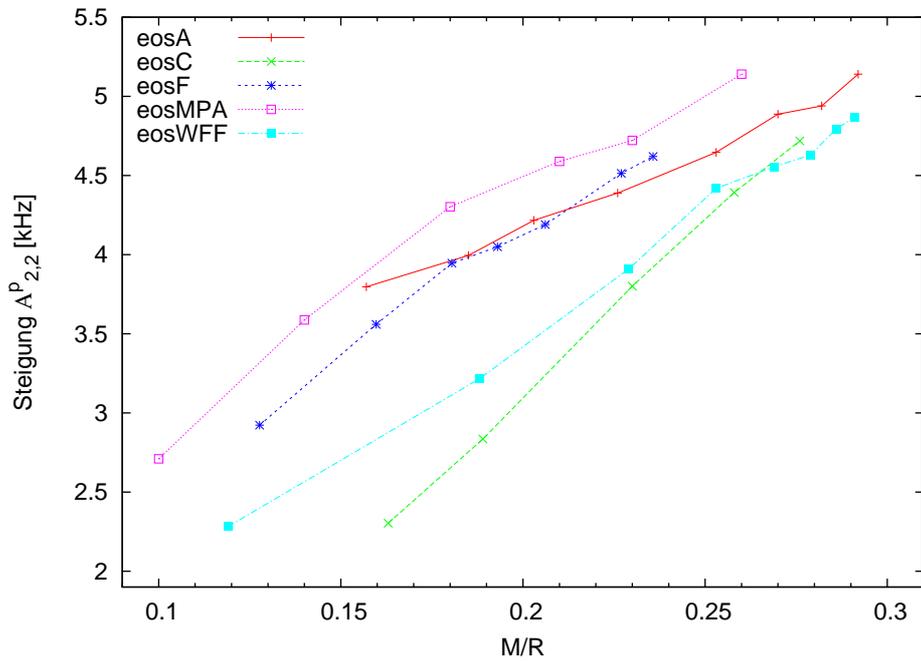


Abb. 5.17: Steigung der Frequenzen der p -Mode der entsprechenden Sternmodelle mit $l = 2$ und $m = 2$ für verschiedene Zustandsgleichungen in Abhängigkeit von M/R .

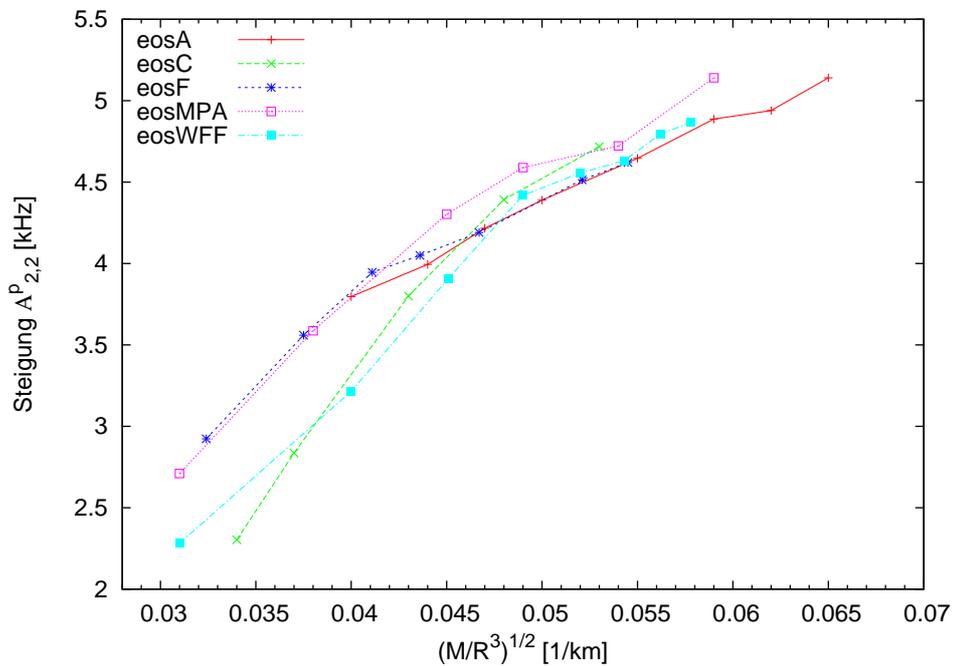


Abb. 5.18: Steigung der Frequenzen der p -Mode der entsprechenden Sternmodelle mit $l = 2$ und $m = 2$ für verschiedene Zustandsgleichungen in Abhängigkeit von $\sqrt{M/R^3}$.

In Abbildung 5.19 ist die Abhängigkeit der Frequenz der w -Mode von M/R dargestellt. Diese Auftragung wurde nur für die Zustandsgleichung MPA durchgeführt. Hierbei ergab sich eine an die Funktion angenäherte Gerade der Gleichung

$$A_{2,2}^w(\text{kHz}) \approx 2,2 + 9,9 \frac{M}{R}. \quad (5.10)$$

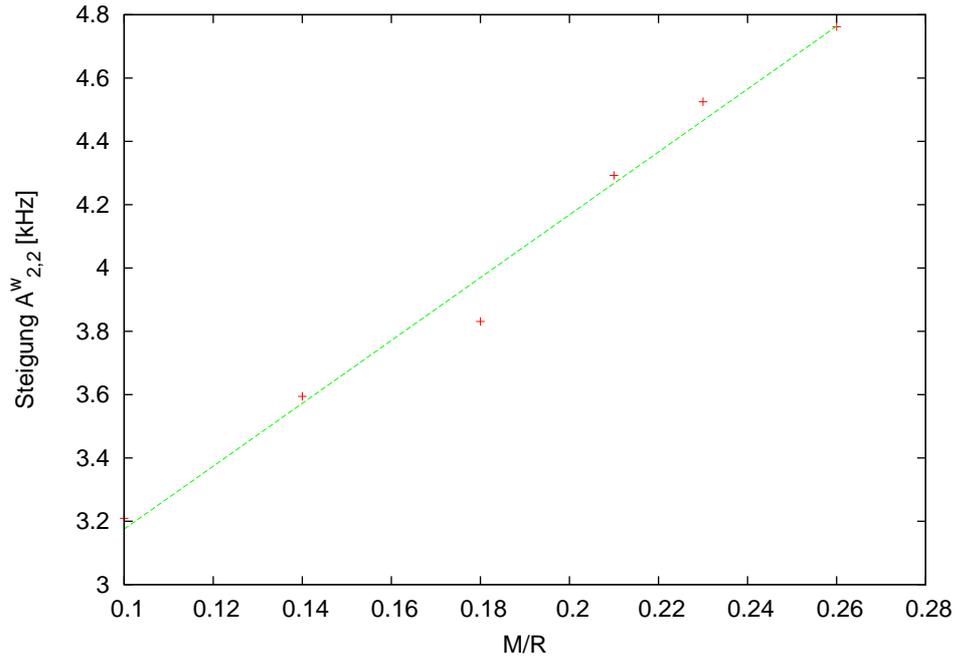


Abb. 5.19: Steigung der Frequenzen der w -Mode der entsprechenden Sternmodelle mit $l = 2$ und $m = 2$ für die Zustandsgleichung MPA in Abhängigkeit von M/R .

Eine weitere umfangreiche Darstellung ist die Auftragung der resultierenden Frequenz der jeweiligen Mode als Funktion sowohl der Rotation Ω/Ω_K als auch der Kompaktheit M/R . Der Vorteil dieser 3-d-Diagramme ist, dass hierbei keine weitere Annahme über die Skalierbarkeit getroffen werden muss. Erhält man jedoch ungefähr eine Ebene als Resultat dieser Auftragung, so ist die Aufspaltung der Frequenz in eine lineare Funktion der Art

$$\nu_{2,2}^f(\text{kHz}) \approx \nu_0 + A_{2,2}^f \frac{\Omega}{\Omega_K} + m_{2,2}^f \frac{M}{R} \quad (5.11)$$

erlaubt, ansonsten müssen andere Skalierungsfaktoren herangezogen werden. Die 3-d-Plots der Ergebnisse für die Zustandsgleichung MPA sind in den Abbildungen 5.20 - 5.22 dargestellt.

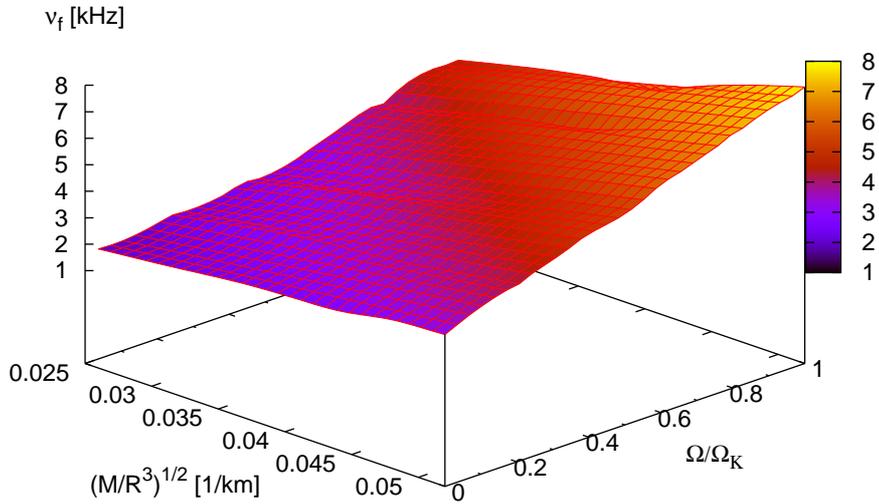


Abb. 5.20: Resultierende Frequenzen der f -Mode für die Zustandsgleichung MPA in Abhängigkeit von Ω/Ω_K für unterschiedliche Kompaktheit M/R des Sterns.

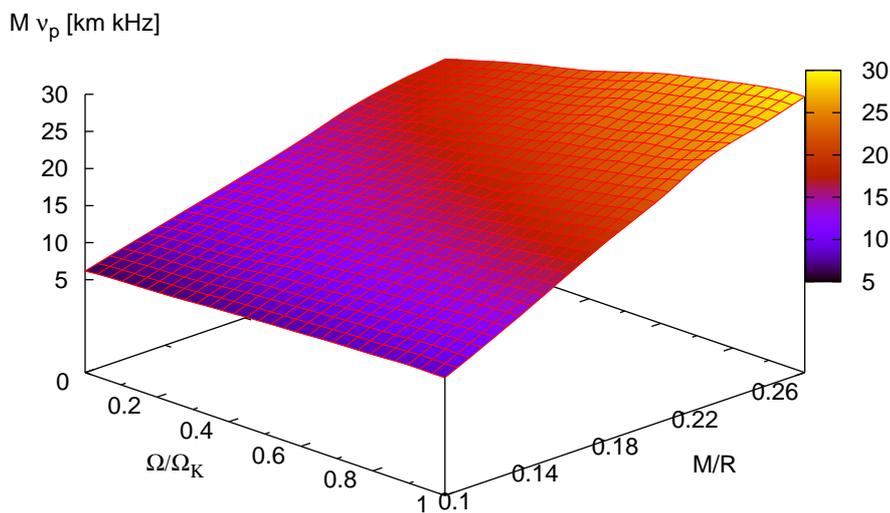


Abb. 5.21: Resultierende Frequenzen der p -Mode für die Zustandsgleichung MPA in Abhängigkeit von Ω/Ω_K für unterschiedliche Kompaktheit M/R des Sterns.

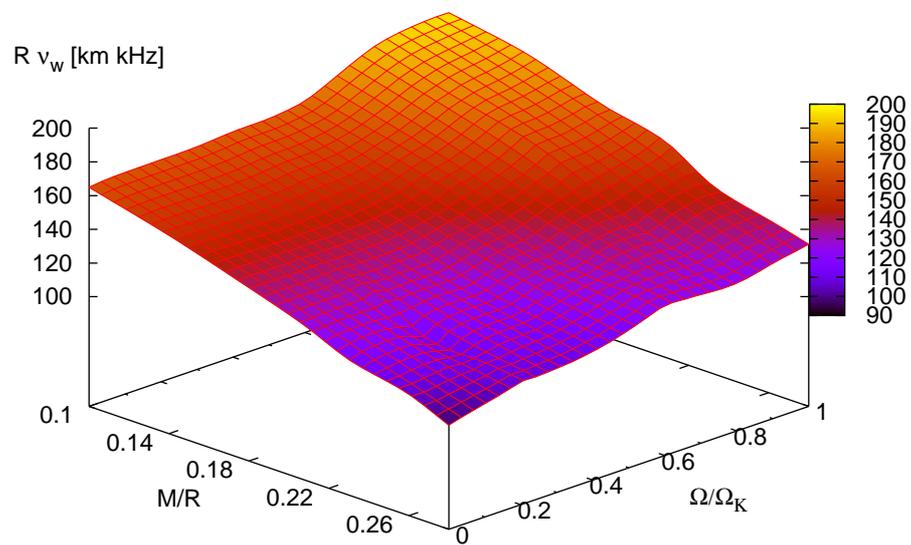


Abb. 5.22: Resultierende Frequenzen der w -Mode für die Zustandsgleichung MPA in Abhängigkeit von Ω/Ω_K für unterschiedliche Kompaktheit M/R des Sterns.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden langsam rotierende Neutronensterne im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie untersucht, dabei dienten die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen als Grundlage. Die im Arnowitt-Deser-Misner-Formalismus unter Verwendung der von Battiston, Cazzola und Lucaroni eingeführten BCL-Eichung resultierenden Gleichungen haben die Eigenschaft, an benachbarte Multipole l zu koppeln, wobei l die geometrische Ordnungszahl der sphärischen Harmonischen bezeichnet. Mit Hilfe eines numerischen Codes wurde die zeitliche Entwicklung aller fluiden sowie raumzeitlichen Störgrößen berechnet, und durch anschließende Fouriertransformation wurden die Frequenzen der Schwingungsmoden des Neutronensterns bestimmt. Insbesondere konnten die f -, die p - und die w -Moden identifiziert und berechnet werden, sowie eingeschränkt die r -Mode. Die Abhängigkeit der Modenfrequenzen von der Rotationsperiode wurde in den untersuchten Fällen als linear bestätigt, wobei eine Aufspaltung in mehrere Frequenzzweige zu beobachten war. Der Einfluss der Kompaktheit M/R sowie der Zustandsgleichung wurde zudem untersucht. Die Ergebnisse wurden in empirischen Skalierungsdiagrammen zusammengefasst. Im Rahmen dieser Berechnungen wurde außerdem der Einfluss der Kopplung an höhere l sowie der Einfluss der axial-polaren Kopplung untersucht. Es zeigte sich, dass bei den Frequenzen der Moden, mit Ausnahme der r -Mode, die Kopplung an höhere Multipole l ab $l = 3$ vernachlässigbar klein ist.

Als wichtiges Ergebnis konnte die weit verbreitete Cowling-Näherung sowie die inverse Cowling-Näherung mit den Lösungen der vollständigen Gleichungen verglichen werden. Die größten Abweichungen der Frequenzen auf der Grundlage der Cowling-Näherung resultieren hierbei für die niedrigeren Moden sowie für kompaktere Objekte, während die inverse Cowling-Näherung Ergebnisse liefert, die in guter Übereinstimmung mit denen des vollrelativistischen Falles sind, jedoch mit dem Nachteil stärkerer Dämpfungen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen eine gute Übereinstimmung mit bereits bekannten Modenfrequenzen, die mit der Methode der Quasinormalmodenanalyse berechnet wurden. Sie liefert darüber hinaus eine Reihe neuer Frequenzen für die Muthersche Zustandsgleichung MPA.

Bisher unvollständig blieb die Untersuchung der r -Mode, für die der vorliegende Code nur eingeschränkt geeignet ist. Insofern müsste man sich für genauere Ergebnisse entweder auf weitere Näherungen einlassen oder den Code numerisch weiterentwickeln, um damit sehr viel längere Zeitreihen zu erzeugen. Es liegen zwar schon sehr ausführliche Ergebnisse bezüglich der polytropen Zustandsgleichung vor, es wäre aber sicherlich wünschenswert, diese Ergebnisse auf realistische Zustandsgleichungen zu verallgemeinern. Im Rahmen dieser Arbeit mussten trotz der Berechnungen im vollrelativistischen Regime

einige Näherungen durchgeführt werden. Schnelle Rotationen konnten zwar innerhalb der numerischen Stabilität des Codes erzielt werden, allerdings erfolgte die Herleitung der Gleichungen auf der Basis langsam rotierender Sterne. Ein sicherlich interessanter Aspekt wäre die Betrachtung schnell rotierender Sterne durch die Herleitung und Lösung der entsprechenden Gleichungen für den vollrelativistischen Fall.

Ein weiterer Gesichtspunkt, der hier nicht zur Sprache kam, ist die differentielle Rotation [93, 102–104], die sich bei einer genaueren Betrachtung des Fluidverhaltens ergibt. Hierbei spielen radial veränderliche axiale Geschwindigkeitsfelder eine große Rolle, was zu veränderten Gleichungen und somit sicher auch zu veränderten Modenfrequenzen führt.

Völlig unberücksichtigt blieben in dieser Arbeit Magnetfelder. Unter Berücksichtigung der Magnetohydrodynamik würde man der wahren Natur der Neutronensterne noch einen Schritt näher sein [105, 106].

All die genannten Aspekte könnten Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein, die auch weitere Zustandsgleichungen als die hier verwendeten einbeziehen.

A Theoretische Hilfsmittel

A.1 Die Orthogonalitätsrelationen

Orthogonalitätsrelationen, die für die Entwicklungsgleichungen angewandt werden zur Separation der Kugelflächenfunktionen.

$$\begin{aligned}
 \int \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{lm}^* \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} Y_{lm}^* \frac{\partial}{\partial \Phi} Y_{l'm'} \right) d\Omega &= l(l+1) \delta_{mm'} \delta_{ll'} \\
 \int \left(\frac{X_{lm}^* X_{l'm'}}{\sin^2 \Theta} + W_{lm}^* W_{l'm'} \right) d\Omega &= l(l+1)(l(l+1) - 2) \delta_{mm'} \delta_{ll'} \\
 \int \left(\frac{X_{lm}^* W_{l'm'} - W_{lm}^* X_{l'm'}}{\sin \Theta} \right) d\Omega &= 0 \\
 \int \left(W_{lm}^* \frac{\partial}{\partial \Phi} Y_{l'm'} - X_{lm}^* \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} \right) d\Omega &= im(l(l+1) - 2) \delta_{mm'} \delta_{ll'} \\
 \int \left(\frac{X_{lm}^*}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} Y_{l'm'} + \sin \Theta W_{lm}^* \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} \right) d\Omega &= (l(l+1) - 2) \int \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{lm}^* \sin \Theta Y_{l'm'} d\Omega \\
 \int \left(\frac{\partial}{\partial \Phi} Y_{lm}^* \frac{X_{l'm'}}{\sin \Theta} + \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{lm}^* \sin \Theta W_{l'm'} \right) d\Omega &= (l'(l'+1) - 2) \int Y_{lm}^* \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} d\Omega
 \end{aligned}$$

$$l'(l'+1) \int \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{lm}^* \sin \Theta Y_{l'm'} d\Omega = -l(l+1) \int Y_{lm}^* \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} d\Omega$$

$$\sum_{l'm'} A_{l'm'} \int Y_{lm}^* \cos \Theta Y_{l'm'} d\Omega = Q_{lm} A_{l-1m} + Q_{l+1m} A_{l+1m}$$

$$\sum_{l'm'} A_{l'm'} \int Y_{lm}^* \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} d\Omega = (l-1) Q_{lm} A_{l-1m} - (l+2) Q_{l+1m} A_{l+1m}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{lm}^* \sin \Theta Y_{l'm'} d\Omega &= - \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int Y_{lm}^* \left(2 \cos \Theta Y_{l'm'} + \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} Y_{l'm'} \right) d\Omega \\
 &= -(l+1) Q_{lm} A_{l-1m} + l Q_{l+1m} A_{l+1m}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{l'm'} \int \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{lm}^* \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} Y_{l'm'} + \frac{\partial}{\partial \Phi} Y_{lm}^* \frac{\cos \Theta}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} Y_{l'm'} \right) d\Omega$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \left(l'(l'+1) \int Y_{lm}^* \cos \Theta Y_{l'm'} d\Omega + \int Y_{lm}^* \cos \Theta Y_{l'm'} d\Omega \right) \\ &= (l+1)(l-1)Q_{lm}A_{l-1m} + l(l+2)Q_{l+1m}A_{l+1m}, \end{aligned}$$

mit

$$Q_{lm} := \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}}$$

Literaturverzeichnis

- [1] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky: *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, New York: J. Wiley & Sons, 1983.
- [2] N.K. Glendenning: *Compact Stars*, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [3] P. Kaaret, Z. Prieskorn, J.J.M. Zand, S. Brandt, N. Lund, S. Mereghetti, D. Götz, E. Kuulkers, J. A. Tomsick: *Evidence of 1122 Hz X-Ray Burst Oscillations from the Neutron Star X-Ray Transient XTE J1739-285*, *Astrophys. J.* **657**, 97 (2007).
- [4] V. Ferrari, G. Miniutti and J.A. Pons: *Gravitational waves from newly born, hot neutron stars*, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **342**, 629 (2003).
- [5] K.D. Kokkotas and B.F. Schutz: *W-modes: A new family of normal modes of pulsating relativistic stars*, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **255**, 119 (1992).
- [6] K.S. Thorne and A. Campolattaro: *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. I. Analytic analysis for $l \geq 2$* , *Astrophys. J.* **149**, 591 (1967) + *Erratum*, *Astrophys. J.* **152**, 673 (1968).
- [7] K.S. Thorne: *Gravitational radiation damping*, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 320 (1968).
- [8] R. Price and K.S. Thorne: *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. II. Properties of the gravitational waves*, *Astrophys. J.* **155**, 163 (1969).
- [9] K.S. Thorne: *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. III. Analytic and numerical results for neutron stars*, *Astrophys. J.* **158**, 1 (1969).
- [10] K.S. Thorne: *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. IV. The weak-field limit*, *Astrophys. J.* **158**, 997 (1969).
- [11] A. Campolattaro and K.S. Thorne: *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. V. Analytic analysis for $l = 1$* , *Astrophys. J.* **159**, 847 (1970).
- [12] J.R. Ipser and K.S. Thorne: *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. VI. Corrections*, *Astrophys. J.* **181**, 181 (1973).

- [13] T. Regge and J.A. Wheeler: *Stability of a Schwarzschild singularity*, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).
- [14] S. Chandrasekhar and V. Ferrari: *On the non-radial oscillations of a star*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **432**, 247 (1991).
- [15] S. Chandrasekhar and V. Ferrari: *On the non-radial oscillations of a star. III. A reconsideration of the axial modes*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **434**, 449 (1991).
- [16] S. Chandrasekhar and V. Ferrari: *On the non-radial oscillations of slowly rotating stars induced by the Lense-Thirring effect*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **433**, 423 (1991).
- [17] Y.B. Zel'dovich and I.D. Novikov: *Relativistic Astrophysics: Vol. I Stars and Relativity*, Chicago Press, 1971.
- [18] S.M. Carroll: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco, 2004.
- [19] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler: *Gravitation*, San Francisco: Freeman & Co., 1973.
- [20] R. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner: *The dynamics of general relativity in Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (Wiley, New York, 1962), pp. 227–265.
- [21] L. Battiston, P. Cazzola and L. Lucaroni: *Stability of nonradial oscillations of cold nonrotating neutron stars*, Nuovo Cimento B **3**, 295 (1971).
- [22] J. Ruoff: *Schwingungen von Neutronensternen im Rahmen der (3+1)-Zerlegung*, Diplomarbeit 1996, Universität Tübingen, unpublished.
- [23] J. Ruoff: *The Numerical Evolution of Neutron Star Oscillations*, Dissertation 2000, Universität Tübingen, unpublished.
- [24] S.L. Detweiler and J.R. Ipser: *A variational principle and a stability criterion for the neutron star modes of pulsations of stellar models in general relativity*, Astrophys. J. **185**, 685 (1973).
- [25] V. Moncrief: *Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. I. The exterior problem*, Ann. Phys. **88**, 323 (1974).
- [26] V. Moncrief: *Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. II. Perfect fluid interiors*, Ann. Phys. **88**, 343 (1974).
- [27] S.L. Detweiler: *A variational principle for the fundamental frequencies of quadrupole pulsations of fluid spheres in general relativity*, Astrophys. J. **197**, 203 (1975).

-
- [28] S.L. Detweiler: *A variational principle and a stability criterion for the dipole modes of pulsations of stellar models in general relativity*, *Astrophys. J.* **201**, 440 (1975).
- [29] J. Ruoff, A. Stavridis and K.D. Kokkotas: *Evolution equations for the perturbations of slowly rotating relativistic stars*, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **332**, 676 (2002).
- [30] J. Ruoff, A. Stavridis and K.D. Kokkotas: *Inertial modes of slowly rotating relativistic stars in the Cowling approximation*, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **339**, 1170 (2003).
- [31] S. Chandrasekhar: *Solutions of two problems in the theory of gravitational radiation*, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 611 (1970).
- [32] S. Chandrasekhar: *The effect of gravitational radiation on the secular stability of the Maclaurin spheroid*, *Astrophys. J.* **161**, 561 (1970).
- [33] J.L. Friedman and B.F. Schutz: *Secular instability of rotating Newtonian stars*, *Astrophys. J.* **222**, 281 (1978).
- [34] S. Boutloukos and H.-P. Nollert: *The eigenmode frequency distribution of rapidly rotating neutron stars*, *Phys. Rev. D* **75**, 3007 (2007)
- [35] G. Allen, N. Andersson, K.D. Kokkotas, and B.F. Schutz: *Gravitational waves from pulsating stars: Evolving the perturbation equations for a relativistic star*, *Phys. Rev. D* **58**, 124012 (1998).
- [36] N. Andersson, K.D. Kokkotas, P. Laguna, P. Papadopoulos, and M.S. Sypio: *Construction of astrophysical initial data for perturbations of relativistic stars*, *Phys. Rev. D* **60**, 124004 (1999).
- [37] S. Kind and J. Ehlers: *Initial-boundary value problem for the spherically symmetric Einstein equations for a perfect fluid*, *Class. Quantum Grav.* **10**, 2123 (1993).
- [38] S. Kind, J. Ehlers, and B. Schmidt: *Relativistic stellar oscillations treated as an initial value problem*, *Class. Quantum Grav.* **10**, 2137 (1993).
- [39] T.G. Cowling: *The non-radial oscillations of polytropic stars*, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **101**, 3670 (1941).
- [40] P.N. McDermott, H.M. Van Horn, and J.F. Scholl: *Nonradial g-mode oscillations of warm neutron stars*, *Astrophys. J.* **268**, 837 (1983).
- [41] P.N. McDermott, C.J. Hansen, H.M. Van Horn, and R. Buland: *The non-radial oscillation spectra of neutron stars*, *Astrophys. J.* **297**, L37 (1985).

- [42] J.A. Font, H. Dimmelmeier, A. Gupta and N. Stergioulas: *Axisymmetric Modes of Rotating Relativistic Stars in the Cowling Approximation*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **325**, 1463 (2001)
- [43] L. Lindblom, R.J. Splinter: *The Accuracy of the Relativistic Cowling Approximation*, Astrophys. J. **348**, 198 (1990).
- [44] S. Yoshida and Y. Kojima: *Accuracy of the Relativistic Cowling Approximation in Slowly Rotating Stars*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **289**, 117 (1997).
- [45] N. Andersson, K. D. Kokkotas and B. Schutz: *Space-time modes of relativistic stars*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **280**, 1230 (1996).
- [46] A. Stavridis and K. D. Kokkotas: *Evolution Equations for Slowly Rotating Stars*, I.J.M.P. D **14**, 543 (2004).
- [47] J.L. Friedman and J.R. Ipser: *Rapidly rotating relativistic stars*, Philos.Trans. R. Soc. London, Ser. A, **340**, 391 (1992)
- [48] R.C. Tolman: *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, Phys. Rev. **55**, 364 (1939).
- [49] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff: *On Massive Neutron Cores*, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
- [50] N. Stergioulas: *Rotating stars in relativity*, [Article in Online Journal Living Reviews in Relativity], <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-3>.
- [51] J.M. Bardeen, K.S. Thorne, and D.W. Meltzer: *A catalogue of methods for studying the normal modes of radial pulsations of general-relativistic stellar models*, Astrophys. J. **145**, 508 (1966).
- [52] D.W. Meltzer and K.S. Thorne: *Normal modes of radial pulsations of stars at the end point of thermonuclear evolution*, Astrophys. J. **145**, 514 (1966).
- [53] G. Chanmugam: *Radial oscillations of zero-temperature white dwarfs and neutron stars below nuclear densities*, Astrophys. J. **217**, 799 (1977).
- [54] E.N. Glass and L. Lindblom: *The radial oscillations of neutron stars*, Astrophys. J. **53**, 93 (1983) + *Erratum*, Astrophys. J. Suppl. **71**, 173 (1989).
- [55] H.M. Vath and G. Chanmugam: *Radial oscillations of neutron stars and strange stars*, Astron. Astrophys. **260**, 250 (1992).
- [56] D. Gondek, P. Haensel, and J.L. Zdunik: *Radial pulsations and stability of proto-neutron stars*, Astron. Astrophys. **325**, 217 (1998).

-
- [57] J.R. Ipser and R.H. Price: Nonradial pulsations of stellar models in general relativity, *Phys. Rev. D* **43**, 1768 (1991).
- [58] M. Leins, H.-P. Nollert, and M.H. Soffel: *Nonradial oscillations of neutron stars: A new branch of strongly damped normal modes*, *Phys. Rev. D* **48**, 3467 (1993).
- [59] L. Lindblom and S.L. Detweiler: *The quadrupole oscillations of neutron stars*, *Astrophys. J. Suppl.* **53**, 73 (1983).
- [60] H. Riffert, H. Mütter, H. Herold, and H. Ruder: *Matter at High Densities in Astrophysics*, Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 133, 1996.
- [61] N. Andersson and K.D. Kokkotas: *Towards gravitational wave asteroseismology*, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **299**, 1059 (1998).
- [62] H.J. Huber: *Relativistische Zustandsgleichungen und Neutronensterne*, Dissertation 1999, Universität Tübingen, unpublished.
- [63] P. Haensel: *Equation of state of dense matter and maximum mass of neutron stars*, [Online Los Alamos Archive Preprint] <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0301073>, (2003).
- [64] J. M. Lattimer, M. Prakash: *Neutron Star Structure and the Equation of State*, *Astrophys. J.* **550**, 426 (2001).
- [65] J. M. Lattimer, M. Prakash: *The Physics of Neutron Stars*, *Science* **304**, 536 (2004).
- [66] W.D. Arnett and R.L. Bowers: *A microscopic interpretation of neutron star structure*, *Astrophys. J. Suppl.* **33**, 415 (1977).
- [67] V. Pandharipande, *Nucl. Phys. A* **178**, 123 (1971).
- [68] H.A. Bethe and M. Johnson: *Dense baryon matter calculations with realistic potentials*, *Nucl. Phys. A* **230**, 1 (1974).
- [69] J. Arponen, *Nucl. Phys. A* **191**, 2571 (1972).
- [70] R.B. Wiringa, V. Ficks and A. Fabrocini, *Phys. Rev. C* **38**, 1010 (1988)
- [71] X. Wu, H. Mütter, M. Soffel, H. Herold, and H. Ruder: *A new equation of state for dense matter and fast rotating pulsars*, *Astron. Astrophys.* **246**, 411 (1991).
- [72] W. Unno, Y. Osaki, A. Ando, H Saio and H Shibahashi: *Nonradial Oscillations of Stars*, Second Edition, University of Tokyo Press (1989)
- [73] K.D. Kokkotas and B.F. Schutz: *Normal modes of a model radiating system*, *Gen. Rel. Grav.* **18**, 913 (1986).

- [74] Y. Kojima: *Two families of normal modes in relativistic stars*, Prog. Theor. Phys. **79**, 665 (1988).
- [75] L. Lindblom and R.J. Splinter: *The dipole oscillations of general relativistic neutron stars*, Astrophys. J. **345**, 925 (1989).
- [76] K.D. Kokkotas and B.G. Schmidt: *Quasi-normal modes of stars and black holes*, [Article in Online Journal Living Reviews in Relativity], <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume2/1999-2kokkotas>.
- [77] J. Papaloizou and J.E. Pringle, Mon. Not. R. Astr. Soc. **182**, 423 (1978).
- [78] B.L. Schumaker and K.S. Thorne: *Torsional oscillations of neutron stars*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **203**, 457 (1983).
- [79] K.D. Kokkotas: *Axial modes for relativistic stars*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **268**, 1015 (1994) + *Erratum*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **277**, 1599 (1995).
- [80] N. Andersson: *Two simple models for gravitational waves modes of compact stars*, Gen. Rel. Grav. **28**, 1433 (1996).
- [81] N. Andersson, Y. Kojima, and K.D. Kokkotas: *On the oscillation spectra of ultra-compact stars: An extensive survey of gravitational-wave modes*, Astrophys. J. **462**, 855 (1996).
- [82] L. Rezzolla: *Gravitational waves from perturbed black holes and relativistic stars*, Lecture Notes, SISSA (2002).
- [83] H.-P. Nollert: *Quasinormal modes: the characteristic 'sound' of black holes and neutron stars*, Class. Quantum Grav. **16**, R159 (1999).
- [84] K.D. Kokkotas, T.A. Apostolatos and N. Andersson: *The inverse problem for pulsating neutron stars: a 'fingerprint analysis' for the supranuclear equation of state*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **320**, 307 (2001).
- [85] K.S. Thorne: *Gravitational Waves*, Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology in the Next Millenium, Proceedings of the 1994 Snowmass Summer Study held 29 June - 14 July, 1994. Edited by E.W. Kolb and R.D. Peccei. Singapore: World Scientific, 1995., p.160.
- [86] E.E. Flanagan and S.A. Hughes: *The basics of gravitational wave theory*, N. J. Phys. **7**, 204 (2005).
- [87] L. Rezzolla: *Periodic Sources of Gravitational Waves*, Lecture Notes, Frascati (Rome) (2004).

-
- [88] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery: *Numerical Recipes in C*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1999.
- [89] L. Rezolla: *Numerical Methods for the Solution of Hyperbolic Partial Differential Equation*, Lecture Notes, SISSA (2005).
- [90] H. Friedrich and A. Rendall: *The Cauchy Problem for the Einstein Equation in Einstein's Field Equation and Teir Physical Implications*, Edited by B.G. Schmidt, Springer Verlag (2000).
- [91] E. Pfeiffer: *Schwingungen von Neutronensternen mit realistischen Zustandsgleichungen*, Diplomarbeit 1999, Universität Tübingen, unpublished.
- [92] M. Leins: *Nichtradiale Schwingungen von Neutronensternen in der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Dissertation 1994, Universität Tübingen, unpublished.
- [93] S. Karino: *Importance of Perturbed Gravitational Potentials in Differentially Rotating Newtonian Stars*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **343**, 175 (2003).
- [94] Y. Kojima, N. Andersson, K.D. Kokkotas: *On the oscillation spectra of ultracompact stars* Proc. R. Soc. London, Ser. A **471**, 341 (1995).
- [95] N. Andersson: *A new class of unstable modes in rotating relativistic stars*, Astrophys. J. **502**, 708 (1998).
- [96] K.D. Kokkotas, J. Ruoff and N. Andersson: *The w-mode instability of ultracompact relativistic stars*, Phys. Rev. D **70**, 3003 (2004).
- [97] O. Benhar, E. Berti and V. Ferrari: *The imprint of the equation of state on the axial w-modes of oscillating neutron stars*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **310**, 797 (1999).
- [98] J.A. Font, H. Dimmelmeier, A. Gupta and N. Stergioulas: *Axisymmetric Modes of Rotating Relativistic Stars in the Cowling Approximation*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **325**, 1463 (2001).
- [99] K.H. Lockitsch, N. Andersson and J.L. Friedman: *Rotational modes of relativistic stars: Analytic results*, Phys. Rev. D **63**, 4019 (2001).
- [100] K. D. Kokkotas and J. Ruoff: *Instabilities of Relativistic Stars in 2001 : A Relativistic Spacetime Odyssey, Proceedings of the 25th Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory, Firenze, Italy, 3-5 September 2001.*, edited by Ignazio Ciufolini, Daniele Dominici, and Luca Lusana (World Scientific, New Jersey, 2003) **75**, 325.
- [101] O. Benhar, V. Ferrari and L. Gualtieri: *Gravitational waves from neutron stars described by modern EOS*: AIP Conf. Proc. **751**, 211 (2005).

- [102] A.L. Watts, N. Andersson, R.L. Williams: *The oscillation and stability of differentially rotating spherical shells: the initial-value problem*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **350**, 927 (2004).
- [103] A.L. Watts, N. Andersson, H. Beyer, B.F. Schutz: *The oscillation and stability of differentially rotating spherical shells: the normal-mode problem*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **342**, 1156 (2003).
- [104] A. Stavridis, A. Passamonti and K.D. Kokkotas: *Nonradial oscillations of slowly and differentially rotating compact stars*, arXiv:gr-qc0701122v1 (2007).
- [105] K. Glampedakis and N. Andersson: *Lagrangian perturbation theory for rotating magnetic stars*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **377**, 630 (2007).
- [106] P. Cerdá-Durán, J.A. Font and H. Dimmelmeier: *General relativistic simulations of magneto-rotational core collapse with microphysics*, Astron. Astrophys. **3597**, (2007).

Danksagung

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

- Herrn Prof. Dr. H. Ruder für die Möglichkeit zur Promotion durch eine Stelle beim SFB/TR7 sowie für die zahlreichen Dienstreisen, die er immer bewilligt hat, sogar nach Australien,
- Herrn Prof. Dr. G. Wunner für die Übernahme des Mitberichtes,
- thanks to Prof. Dr. Kostas Kokkotas for very helpful discussions - *ευχαριστώ πολύ*
- Dr. Johannes Ruoff, der sich stets für meine Fragen Zeit genommen hat auch in der Zeit als er bereits bei Zeiss eingespannt war,
- Heike und Bettina Fricke für ihre stets freundliche Hilfsbereitschaft,
- allen meinen Kollegen für die interessanten Diskussionsrunden und das angenehme Arbeitsklima,
- Nadja für die zahlreichen Mitfahrgelegenheiten nach Tübingen,
- ganz besonders Oliver für die Korrekturlesung sowie für die Unterstützung und Förderung meiner Promotion während der gesamten Zeit - danke für Deine unendliche Geduld!
- meiner Familie für ihr Interesse am Fortgang meiner Arbeit.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Isabel Rica Mendez
Geburtstag	02.01.1977
Geburtsort	Ludwigsburg

Schulen

1983-1987	Grundschule Freiberg a.N.
1987-1996	Oscar-Paret-Gymnasium Freiberg a.N.
6/1996	Abitur

Wissenschaftlicher Werdegang

1996-2002	Physikstudium an der Universität Stuttgart
7/2002	Abschluss: Physik-Diplom, Diplomarbeit über <i>Dynamik rotierender Neutronensterne</i> bei Prof. Dr. H. Ruder und Prof. Dr. G. Wunner
2003-2007	Wissenschaftliche Angestellte am Institut für Astronomie und Astrophysik, Theoretische Astrophysik, Universität Tübingen
2003-2007	Anfertigung der vorliegenden Dissertation <i>Zeitentwicklung langsam rotierender Neutronensterne auf allgemein-relativistischem Hintergrund</i> am Institut für Astronomie und Astrophysik, Theoretische Astrophysik, der Universität Tübingen unter Anleitung von Prof. Dr. H. Ruder

Akademische Lehrer

M. Bestehorn, G. Denninger, M. Fähnle, W. Frank, H. Hermann, K. Höllig, U. Kneißl, S. Luding, G. Mahler, M. Mehring, A. Muramatsu, T. Pfau, H. Ruder, H.-R. Trebin, G. Wäckerle, G. Wunner