

Visualisierung in der Relativitätstheorie

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik und Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Thomas Müller
aus Villingen-Schwenningen

Tübingen
2006

Tag der mündlichen Prüfung: 10.07.2006
Dekan: Prof. Dr. Peter Schmid
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Hanns Ruder
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Jörg Frauendiener
3. Berichterstatter: Prof. Dr. Daniel Weiskopf

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine objektorientierte Software zum erweiterten vierdimensionalen Raytracing namens „GeoViS“ vorgestellt. Diese ermöglicht es auch solche Raumzeiten zu visualisieren, die nicht mehr nur mit einer einzelnen Karte beschrieben werden können, sondern einen ganzen Atlas benötigen. Der Schwerpunkt liegt dabei in der lokalen Beschreibung von Beobachter und Objekten mit Hilfe eines lokalen Bezugssystems. Dessen freie oder geodätische Bewegung in der Raumzeit wird durch den Paralleltransport der lokalen Tetrade realisiert. Eine erste Anwendung findet „GeoViS“ bei der Visualisierung des Gravitationskollapses eines transparenten Staubsterns, der mit Hilfe zweier Karten beschrieben werden kann.

Ist der Gravitationskollaps eines Sterns nicht mehr aufzuhalten, so entsteht schließlich ein Schwarzes Loch. Neben der Herleitung der analytischen Lösung der Geodätengleichung für die Schwarzschild Raumzeit, die ihre Verwendung bei der interaktiven Visualisierung findet, steht die Simulation einer Strahlungsquelle um ein Schwarzes Loch im Vordergrund. So zeigt sich, daß GeoViS auch bei der Modellbildung in der Astrophysik ein hilfreiches Werkzeug sein kann. Am Beispiel eines Sterns auf dem letzten stabilen Orbit um ein Schwarzes Loch werden alle wichtigen Effekte der Relativitätstheorie wie zum Beispiel die Krümmung der Raumzeit, die geodätische Präzession, die Rotverschiebung und die endliche Lichtlaufzeit berücksichtigt.

Obwohl Wurmlöcher sehr an Science Fiction erinnern, sind sie mit der Allgemeinen Relativitätstheorie prinzipiell verträglich. Das einfachste Wurmloch wurde von Morris und Thorne vorgestellt und dient aus ihrer Sicht als gutes Beispiel um die Allgemeine Relativitätstheorie zu erlernen. Für das Morris-Thorne Wurmloch wird ebenfalls die analytische Lösung der Geodätengleichung hergeleitet. Anschließend wird die Geometrie des Wurmlochs anhand einiger Beispielszenen veranschaulicht.

Die stereoskopische oder binokulare Sicht auf Objekte ermöglicht die Einschätzung von Entfernung und Orientierung, birgt aber auch verschiedenste Täuschungseffekte. Bei relativistischen Geschwindigkeiten werden solche Täuschungseffekte noch massiv verstärkt. Im Fall von gekrümmten Lichtstrahlen scheint die Verschmelzung beider Bilder kaum noch möglich.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Mathematische Vorbereitung	7
2.1	Mannigfaltigkeit, Karte, Atlas	7
2.2	Vektor, Tangentialraum, Metrik	8
2.3	Lokale Tetrade	9
2.4	Lokaler Zusammenhang, Christoffel-Symbole, Geodätengleichung	12
2.5	Riemann-, Ricci-, Einstein-Tensor	14
2.6	Gleichung der geodätischen Abweichung	15
2.7	Parallel- und Fermi-Walker-Transport	16
2.8	Rotverschiebung	18
2.9	Pseudo-kartesische Koordinaten	18
3	Raytracing in vierdimensionalen Raumzeiten	19
3.1	Raytracing Konzept	19
3.2	Konventionelles Raytracing	19
3.3	Vierdimensionales Raytracing	20
3.4	Raytracing in komplexen Raumzeiten	20
3.5	RayViS	21
3.6	GeoViS	22
3.7	Geodätenbetrachter: GvsGeodViewer	34
3.8	Verschiedene Modell-Szenarien	36
3.9	Ausblick	40
4	Visualisierung eines Gravitationskollapses	41
4.1	Physik des Gravitationskollapses	41
4.2	Raumzeit	42
4.3	Lokale Tetraden	48
4.4	Geschwindigkeiten im Außenraum	48
4.5	Nullgeodäten	49
4.6	Visualisierung eines opaken Staubsterns	54
4.7	Visualisierung in Gegenwart eines transparenten Staubsterns	60
4.8	Ausblick	64
5	Visualisierung in der Schwarzschild-Raumzeit	65
5.1	Einführung in die Schwarzschild-Raumzeit	66
5.2	Qualitatives Verhalten von Geodäten	67
5.3	Analytische Lösung der Geodätengleichung	74
5.4	Anwendungen der analytischen Lösung	85
5.5	Interaktive Visualisierung	90
5.6	Simulation einer Strahlungsquelle um Sagittarius A*	93

6	Visualisierung von Wurmlöchern	109
6.1	Definition eines statischen Wurmlochs	110
6.2	Morris-Thorne-Raumzeit	110
6.3	Einfachste Morris-Thorne-Metrik	113
6.4	Geodäten in der Morris-Thorne-Raumzeit	116
6.5	Visualisierung der einfachen Morris-Thorne-Raumzeit	130
6.6	Ausblick	139
7	Stereoskopische Visualisierung in der Relativitätstheorie	141
7.1	Wahrnehmung von räumlicher Tiefe und Größe	142
7.2	Stereoskopie in der Speziellen Relativitätstheorie	146
7.3	Stereoskopie in der Allgemeinen Relativitätstheorie	159
A	Verschiedenes	163
A.1	Notation	163
A.2	Symbole	164
A.3	Naturkonstanten und sonstige Größen	164
A.4	Planck-Spektrum	166
A.5	Vom Spektrum zum RGB-Wert	167
A.6	Geodäten in konform transformierten Raumzeiten	168
A.7	Sphärisch-symmetrische Raumzeiten	168
A.8	Lochkamera beim Raytracing	170
A.9	Filmbeschreibungen zum Raytracing-Kapitel	171
B	Details zum Kollaps	172
B.1	Metriken aus den Feldgleichungen	172
B.2	Christoffel-Symbole, Riemann-Tensor, Ricci-Tensor, Ricci-Skalar	173
B.3	Geodätengleichungen	175
B.4	Fallendes Objekt im Außenraum	176
B.5	Kruskal-Koordinaten	176
B.6	Implementierung in RayViS und GeoViS	178
B.7	Hilfsprogramme	179
B.8	Filmbeschreibungen	179
C	Elliptische Integrale und Funktionen	181
C.1	Allgemeine Form eines elliptischen Integrals	181
C.2	Elliptische Integrale	181
C.3	Elliptische Funktionen	184
C.4	Berechnung mittels Computer-Algebra-Systemen	187
D	Details zur Schwarzschild-Raumzeit	189
D.1	Details zur Metrik	189
D.2	Fermi-Walker-Transport auf Kreisbahnen	191
D.3	Annäherung an ein Schwarzes Loch	193
D.4	Beschreibung zum „Schnellen Bildbetrachter“: BHFastView	197
D.5	Beschreibung zum „Scheibenbetrachter“: BHDiskView	199
D.6	Notwendige Bildauflösung beim Raytracing	201
D.7	Weitere Hilfsprogramme	202
D.8	Szene-Datei für kugelförmige Strahlungsquelle	203
D.9	Filmbeschreibungen	205

E	Details zum Thema Wurmloch	207
E.1	Formeln zur Morris-Thorne-Metrik	207
E.2	Details zu Geodäten	211
E.3	Filmbeschreibungen	213
F	Details zur Stereo-Visualisierung	215
F.1	Filmbeschreibungen	215
	Bildverzeichnis	220
	Tabellenverzeichnis	221
	Index	222
	Literatur	224

Kapitel 1

Einführung

Uns Menschen stehen verschiedene Sinnessysteme zur Verfügung, um unsere Umwelt zu erfahren und zu begreifen. Der für uns, subjektiv betrachtet, wichtigste Sinn ist wohl der Lichtsinn. Wir wollen daher in dieser Arbeit zur „*Visualisierung in der Relativitätstheorie*“ unseren Lichtsinn dahingehend nutzen, die Vorhersagen der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie zu veranschaulichen und zu verstehen.

— *Visualisierung* — Wir wollen von Visualisierung immer dann sprechen, wenn wir Informationen graphisch aufbereiten, sei es nun die Darstellung eines Funktionsverlaufs anhand einer Kurve im xy -Diagramm oder die Modellierung einer virtuellen Umgebung. Die heutige Computergrafik ermöglicht uns in beiden Fällen eine schnelle und teilweise auch sehr realistisch wirkende Umsetzung. In vielen Fällen, wie etwa bei der Computertomographie, erhalten wir erst durch die Visualisierung Einblicke, die wir so sonst nie zu Gesicht bekämen.

— *Relativitätstheorie* — Die Spezielle Relativitätstheorie [23] beschreibt die Struktur der Raumzeit bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit. Entscheidend ist hier die relative Bewegung zwischen zwei Systemen. Die Allgemeine Relativitätstheorie [24] hingegen deutet die Anziehungskraft zwischen Massen als eine Krümmung der Raumzeit. Reicht das Newtonsche Gravitationsgesetz für kleine Massen noch völlig aus, so versagt es jedoch bei der Beschreibung schwerer Objekte.

— *Visualisierung in der Relativitätstheorie* — Da wir es in unserem Zwickel der Raumzeit und in unserem alltäglichen Leben weder mit hohen Geschwindigkeiten noch mit sehr massiven Objekten zu tun haben — die Erde zählt hier noch nicht als massives Objekt! —, fehlt uns das intuitive Verständnis über die Struktur einer gekrümmten Raumzeit. Die rein mathematische Beschreibung durch die Relativitätstheorie hilft uns dabei nur bedingt. Moderne Computer, teilweise zu einem ganzen Cluster vernetzt, eröffnen uns eine Sicht auf unsere Welt, die uns trotz modernster Ingenieurskunst aber immer (noch) verschlossen bleibt. Den freien Fall auf einen kollabierenden Stern würden wir nicht überleben und ob wir je durch ein Wurmloch in unsere Nachbargalaxie fliegen steht wahrhaftig in den Sternen. Die Visualisierung soll aber nicht nur als pädagogisches Hilfsmittel für die Vermittlung der Relativitätstheorie dienen, sondern auch ein Instrument zur Modellbildung aktueller astronomischer und astrophysikalischer Forschung sein.

Motivation

In dieser Arbeit besprechen wir drei relativistische Schwerpunkte: Dies ist der Gravitationskollaps eines Staubsterns, die Schwarzschild-Raumzeit und die einfachste Wurmloch-Topologie.

— *Kollaps* — John Michell (1724-1793) [63] erkannte 1784, nach heutiger Sicht als erster, daß es so schwere Körper geben muß, daß nicht einmal Licht ihnen entweichen kann. Viel bekannter ist jedoch Pierre Simon (Marquis de) Laplace (1749-1827). Er stellte 1796 auf der Basis der Newtonschen Gravitationstheorie fest, daß bei genügend hoher Masse, konzentriert auf einen kleinen Raumbereich, die Fluchtgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit wird [59]. Daraus schloß Laplace, daß es massereiche Sterne geben muß, denen kein Licht

entweichen kann und die demnach dunkel sein müssen. Ein Stern mit der mittleren Dichte der Erde wäre dann dunkel, wenn er einen Radius von etwa dem 250-fachen des Sonnenradius hätte.

Robert Oppenheimer (1904-1967) und Volkoff zeigten 1939, daß ein Stern, dessen Kernbrennstoff aufgebraucht und dessen Restmasse größer als etwa zwei Sonnenmassen ist, unausweichlich und ohne Halt kollabiert [76]. Kein Strahlungsdruck oder Entartungsdruck kann den Kollaps noch aufhalten. Brennt ein Stern zwischen einigen Millionen und einigen Milliarden Jahre, so liegt die Kollapszeit im Bereich von Minuten bis wenigen Stunden [53]. Im gleichen Jahr berechneten Oppenheimer und Snyder den sphärisch-symmetrischen Kollaps im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

— *Schwarzschild* — Karl Schwarzschild (1873-1916), Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums Potsdam, entdeckte 1916, kurz nach Erscheinen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die nach ihm benannte Schwarzschild-Metrik [89, 88]. Diese beschreibt alle statisch kugelsymmetrischen Vakuum-Lösungen der Einstein-Gleichungen, kann also in erster Näherung für den Außenbereich unserer Sonne verwendet werden. Jedoch bietet sie auch die Beschreibung eines noch viel dramatischeren Objekts — eines Schwarzen Lochs. In der Regel haben Schwarze Löcher einen Drehimpuls, weshalb die Schwarzschild-Metrik auch nur ein sehr vereinfachtes Modell davon darstellt. Rotierende Schwarze Löcher hingegen werden durch die Kerr-Metrik [54] beschrieben.

Die heutige Astronomie/Astrophysik geht davon aus, daß sich im Zentrum jeder Galaxie ein supermassives Schwarzes Loch von einigen Millionen bis zu mehreren Milliarden Sonnenmassen befindet. Neuere Beobachtungen deuten immer stärker darauf hin, daß es sich bei der kompakten Radioquelle Sagittarius A* im Zentrum unserer Milchstrasse um ein Schwarzes Loch mit etwa drei Millionen Sonnenmassen handelt. Die stets besser werdenden Beobachtungsmöglichkeiten lassen hoffen, daß in naher Zukunft sogar Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie um das vermeintliche Schwarze Loch nachweisbar werden.

— *Wurmloch* — Die heutigen Raketenantriebe erlauben es dem Menschen gerade einmal bis zum Mond zu fliegen. Mit ungeheurem technischen Aufwand, was vor allem die lebenserhaltenden Maßnahmen betrifft, mag es ihm in naher Zukunft möglich sein, dem Mars einen Besuch abzustatten. Unbemannt konnte er sogar seine Fühler bis hinaus an den Rand des Sonnensystems ausstrecken. Bis zu Proxima Centauri, mit einer Entfernung von etwa vier Lichtjahren der nahestgelegene Stern, würde eine Reise immerhin schon etwa 70000 Jahre dauern. Ferne Planeten scheinen daher unerreichbar zu sein.

Aber selbst wenn es einmal gelingen sollte, mit nahezu Lichtgeschwindigkeit zu fliegen, so müßte man dabei die Effekte der Speziellen Relativitätstheorie berücksichtigen. Aufgrund der Zeitdilatation respektive Längenkontraktion könnte ein Reisender zum Beispiel innerhalb etwa 13 Jahren zur 25 Lichtjahre entfernten Vega und wieder zurück fliegen; auf der Erde wären dann aber schon 54 Jahre vergangen. Abgesehen von der riesigen Energiemenge für die Beschleunigungsphasen könnte ein Wagemutiger zu Lebzeiten sogar bis ins Zentrum unserer Milchstraße in etwa 26000 Lichtjahren Entfernung vorstoßen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie bietet faszinierenderweise zwei andere Möglichkeiten der schnellen Fortbewegung: den Warp-Antrieb [2] und Wurm Löcher [67]. Beide sind zwar Lösungen der Einsteinschen Feldgleichung, verletzen aber Prinzipien der klassischen Physik. Beim Warp-Antrieb, der leider nur von außen steuerbar ist [29], staucht man den Raum vor dem Raumschiff zusammen und „spuckt“ ihn hinten wieder aus. Ein Wurmloch hingegen verbindet direkt zwei räumlich und/oder zeitlich weit entfernte Gebiete und dient als Abkürzung.

Den Begriff des Wurmlochs im Zusammenhang mit der topologischen Form einer Raumzeit führte 1955 erstmals John Archibald Wheeler (*1911) ein [66, 113]. Matt Visser [106] spannt sogar den Bogen bis zurück zu Ludwig Flamm (1885-1964) [33] ins Jahr 1916. Letzterer hat sich jedoch nur mit Maßverhältnissen einer zweidimensionalen Hyperfläche der Schwarzschild-Raumzeit beschäftigt, was wir heute als Einbettungsdiagramm verstehen und in diesem Fall als Flammisches Paraboloid bezeichnen; die eigentliche Idee eines Wurmlochs taucht bei ihm überhaupt nicht auf. Albert Einstein (1879-1955) und Nathan Rosen (1909-1995) hingegen versuchten 1935 auf der Basis der Schwarzschild-Raumzeit elementare Teilchen zu beschreiben [25]. Durch eine geschickte Koordinatentransformation schnitten sie den Bereich innerhalb des Ereignishorizonts heraus — der Unterschied zwischen echter und Koordinatensingularität war damals noch nicht bekannt —, mit dem Resultat, daß sie nun zwei kongruente „Blätter“ hatten, welche durch eine „Brücke“ miteinander verbunden waren. Diese „Einstein-Rosen-Brücke“ deuteten sie schließlich als das eigentliche Teilchen. Die kongruenten „Blätter“ hingegen identifizierten

sie mit ein und demselben physikalischen Raum, weshalb auch sie nicht als Entdecker der Wurmlochidee gelten. Die Einstein-Rosen-Brücke, manchmal auch als Schwarzschild-Wurmloch bezeichnet, erweckt zwar aufgrund der Form ihres Einbettungsdiagrammes den Anschein, ein Wurmloch zu sein, jedoch schafft es höchstens ein einzelner Lichtstrahl, es zu passieren [36]. Von außen ist leider auch nicht zu erkennen, ob es sich um ein Schwarzes Loch oder vielleicht doch um eine Einstein-Rosen-Brücke handelt.

Wheeler war ebenso auf der Suche nach einer Beschreibung von Teilchen (Körpern) innerhalb der Allgemeinen Relativitätstheorie. Dazu betrachtete er „Geons“ [112] — der Begriff soll als Abkürzung für eine gravitativ-elektromagnetische Größe stehen —, was nach seiner Ansicht eine elektromagnetische Störung, der eine Masse zugeordnet werden kann, beschreiben soll. Die Masse wirkt dabei anziehend und hält so die Störung zusammen. Dem Geon schreibt er schließlich Teilchencharakter zu. Zur Beschreibung von einzelnen Ladungen braucht er eine Raumzeit, die nicht nur einfach zusammenhängend ist, was ihn letztendlich zur Topologie eines Wurmlochs führt. Der Begriff „Wurmloch“ taucht aber erst in der Arbeit über „Classical Physics as Geometry“ [66] bei Charles Misner auf. Erst 1962 schreibt Wheeler der Einstein-Rosen-Brücke den Charakter eines Wurmlochs zu [113], stellt aber mit Robert Fuller [36] fest, daß kein Teilchen dieses Schwarzschild-Wurmloch durchqueren kann.

Auch Homer Ellis suchte nach einer Teilchenbeschreibung [27] und stieß dabei auf eine Metrik, deren Spezialfall wir später als Morris-Thorne-Wurmloch identifizieren. Allerdings bezeichnete Ellis die Raumzeit als „drain-hole“ (Abflußloch), da er ein Vektorfeld darauf definiert, welches einen Ätherfluß beschreiben soll.

Brandon Carter (*1942) [16] bestimmte 1966 die vollständige analytische Erweiterung der von Roy Kerr (*1934) [54, 46] 1963 entdeckten Raumzeit, welche ein rotierendes Schwarzes Loch beschreibt. Carter wies darauf hin, daß die Ringsingularität der Kerr-Metrik für extreme Rotation bei geeigneter Identifizierung von Raumgebieten eine unendliche Anzahl von Wurmlöchern ermöglichen sollte.

Erst 1988 beschrieben Michael Morris und Kip Thorne (*1940) in ihrem Artikel über Wurmlöcher und deren Verwendung für interstellare Reisen [67] die Anforderungen, welche an ein Wurmloch gestellt werden müssen, damit es auch für den Menschen nutzbar gemacht werden kann. Im selben Jahr stellten die beiden, zusammen mit Ulvi Yurtsever, die Möglichkeit vor, ein Wurmloch zu einer Zeitmaschine umzubauen [68]. Seither gibt es ein reges Interesse an den unterschiedlichen Formen und der Physik von Wurmlöchern. Das Hauptaugenmerk richtet sich dabei auf die Verletzung der verschiedenen Energiebedingungen, die so gering wie möglich zu halten sind.

Neben den drei Raumzeiten spielt aber auch die Raytracing-Methode, die wir zur Visualisierung dieser Raumzeiten verwenden wollen, eine große Rolle in dieser Arbeit. Außerdem versuchen wir einen Schritt von der monokularen hin zur binokularen Sicht in der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie zu machen:

— *Raytracing* — Strahlverfolgung oder Raytracing ist die natürlichste Methode, um innerhalb eines virtuellen, dreidimensionalen Modells Verdeckungsberechnungen der einzelnen Objekte durchzuführen (siehe z.B. Glassner [41]). Geht man im dreidimensionalen Raytracing noch von unendlich schnellen Lichtstrahlen aus, so müssen wir im vierdimensionalen Raytracing die endliche Lichtlaufzeit berücksichtigen. Daß Licht eine endliche Geschwindigkeit besitzt, entdeckte 1676 Olaf Christensen Rømer (1644-1710) [83, 115] durch Beobachtungen der Jupitermonde. Aber erst zwei Jahre später bestimmte Christiaan Huygens (1629-1695) den Wert von $c \approx 214000 \text{ km/s}$. James Bradley (1692-1762) verbesserte diesen Wert 1728 durch Parallaxenmessungen auf 283000 km/s . Einen recht genauen Wert von 298000 km/s ermittelten Armand-Hippolyte-Louis Fizeau (1819-1896) 1849 mittels eines Zahnrades und ein Jahr später Jean Bernard Léon Foucault (1819 - 1868) mit einem rotierenden Spiegel. Albert Abraham Michelson (1852-1931) [64] kam bereits 1878 auf einen Wert von 298789 km/s , der dem heute definierten Wert der Lichtgeschwindigkeit von $299792,458 \text{ km/s}$ sehr nahe kommt.

Da die Strahlverfolgung vom Beobachter zurück zum Emissionsort erfolgt, müssen wir beim vierdimensionalen Raytracing den Lichtstrahl nun auch rückwärts in der Zeit verfolgen. Beim allgemein-relativistischen Raytracing müssen wir zusätzlich die gekrümmte Raumzeit berücksichtigen, indem wir die Lichtstrahlen mittels der Geodätengleichung integrieren. Währenddessen können sich auch einige Objekte mit sehr hoher Geschwindigkeit bewegen, woraus schon jetzt folgt, daß wir diese nicht dort sehen, wo sie sich zum Zeitpunkt der Lichtaussendung befanden.

Die Raytracing-Methode steht aber auch für eine realistische Visualisierung, sowohl im Hinblick auf die Oberflächeneigenschaften als auch auf die Beleuchtung. Im relativistischen Fall können wir die Oberflächenbeschrei-

bung an sich übernehmen, müssen aber bei der Schattenberechnung ebenfalls die endliche Lichtgeschwindigkeit berücksichtigen. Außerdem sind die Lichtstrahlen in das jeweilige Ruhesystem der einzelnen Objekte zu transformieren. Beim relativistischen Raytracing spielt insbesondere die Frequenzverschiebung (Doppler-Effekt) sowie die Verstärkung (Searchlight-Effekt) des Lichts eine große Rolle.

— *Stereoskopie* — Berücksichtigen wir das eben Gesagte über das relativistische Raytracing, so ist leicht einzusehen, daß zwei Augen oder zwei Kameras, welche sich an unterschiedlichen Orten befinden, verschiedene „raumzeitliche“ Perspektiven haben. Euklid (365-300 v.Chr.) befaßte sich bereits im vierten Jahrhundert vor Christus mit dem räumlichen Seheindruck. Das erste Stereoskop baute 1838 Sir Charles Wheatstone (1802-1875). 1858 entwickelte Wilhelm Rollmann (1821-1890) das Anaglyphenverfahren, bei dem die beiden Bilder für das linke und rechte Auge in Komplementärfarben übereinander gedruckt werden. Die heutige Computergrafik erlaubt es, stereoskopische Darstellungen in Echtzeit zu berechnen. Um die beiden Halbbilder den Augen getrennt zu übergeben, werden häufig Shutter- oder Polarisations-Brillen verwendet.

Bisherige Arbeiten

— *Speziell-relativistische Visualisierung* — Albert Einstein selbst schreibt in seiner Veröffentlichung zur Speziellen Relativitätstheorie [23]: „Für $v = V$ schrumpfen alle bewegten Objekte — vom ruhenden System aus betrachtet — in flächenhafte Gebilde zusammen.“ Verstehen wir Einstein wörtlich in dem Sinn, daß er mit „betrachten“ *sehen* verstanden hat, so ging er davon aus, daß man die Längenkontraktion tatsächlich sehen kann. Einstein übersah dann aber die Tatsache, daß „Sehen“ einen Prozess beschreibt, bei dem Licht aus unterschiedlichen Richtungen *gleichzeitig im Auge* eintrifft. Die Lichtlaufzeit vom Objekt zum Beobachter muß daher berücksichtigt werden. Anton Lampa war 1924 der erste, der die Lichtlaufzeit mit einbezog [58], jedoch wurde seiner Arbeit kaum Bedeutung beigemessen. George Gamow veranschaulichte 1939 sogar ausdrücklich in seinem Buch „Mr. Tompkins in Wonderland“ [37], daß die Längenkontraktion deutlich sichtbar sei. Erst 1959 beschrieb Roger Penrose, daß der Umriss einer bewegten Kugel aufgrund der zu berücksichtigenden Lichtlaufzeit stets gleich dem einer ruhenden Kugel sei [77]. James Terrell veröffentlichte im selben Jahr einen Artikel [102], in dem er das Aussehen schnell bewegter, kleiner Objekte beschreibt und darauf hinweist, daß ein Stab verdreht erscheinen müsse. Seither gibt es zahlreiche Artikel, welche die (Un)Sichtbarkeit der Längenkontraktion zeigen (siehe z.B. [108, 111, 91, 62]), dabei betrachten alle Autoren nur Teilaspekte oder Spezialfälle. Scott und van Driel [90] brachten 1970 den Aspekt der stereoskopischen Betrachtung, auf den Terrell schon 1959 hinwies [102], in die Diskussion ein, wobei sie behaupteten, daß die Phantombilder einer Kugel binokular zu sehen sein sollten. Eine ausführliche Beschreibung der stereoskopischen Visualisierung lieferten aber erst Boas, Calhoun und Horan [7].

1989 entwickelten Hsiung und Dunn [50] eine Raytracing-Methode zur Darstellung relativistischer Effekte (REST=*Relativistic Effects in SpaceTime*), wobei zunächst nur ein bewegter Beobachter und eine ruhende Szene realisierbar war. Ein Jahr später zeigten sie mit Hilfe von REST eine Darstellung der Zeitdilatation unter Verwendung eines blinkenden Gitters [49]. Die korrekte Einbeziehung von Searchlight- und Doppler-Effekt beschrieben 1999 Weiskopf u.a. [110]. Weiskopf [109] entwickelte 2001 weitere speziell-relativistische Visualisierungsmethoden wie das texturbasierte und das bildbasierte relativistische Rendering. 2005 entwickelte Borchers [8] einen Algorithmus zur interaktiven Visualisierung speziell-relativistischer Effekte unter Verwendung aktueller Grafikkarten mit programmierbaren Vertex- und Pixeleinheiten.

— *Allgemein-relativistische Visualisierung* — Aufgrund der Lichtablenkung in einer im allgemeinen gekrümmten Raumzeit und der Tatsache, daß wir Licht nur geradlinig (im euklidischen Sinn) zurückverfolgen können, folgt, daß wir in der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Regel mit einer sehr verzerrten Sicht in der Nähe massiver Objekte rechnen müssen. Die Ansicht eines Neutronensterns, beschrieben durch die Schwarzschild-Metrik [89], illustrierten 1989 Nollert u.a. [74] und Ertl u.a. [28]. Steve Bryson stellte 1992 nur den Verlauf der Geodäten in Koordinatendarstellung dar [14]. Eine sehr ausführliche Darstellung dessen, was ein Beobachter in der Nähe eines Neutronensterns oder eines statischen Schwarzen Lochs sähe, gab 1993 Robert Nemiroff [72]; die geometrischen Effekte zeigte er in einer ganzen Reihe von berechneten Bildern.

Eduard Gröller schlug 1995 nicht-lineares Raytracing als Visualisierungsmethode vor [44], wobei er sich auf

die Newtonsche Formulierung der Gravitation beschränkte. Eine übersichtliche Darstellung der Vorgehensweise beim allgemein-relativistischen Raytracing beschrieben Nollert u.a. [73]. Die Verwendung des nicht-linearen Raytracings zur Visualisierung in der Allgemeinen Relativitätstheorie und die Umsetzung in RayViS beschrieb 2000 Daniel Weiskopf [109].

— *Raytracing-Software* — Eine bereits bestehende Software für speziell- und allgemein-relativistisches Raytracing, welche wir in Kapitel §3 noch näher beschreiben werden, ist der in C++ [100] objekt-orientiert programmierte Raytracer „RayViS“. Ebenfalls objekt-orientiert ist „Light++“ [5] von Werner Benger, wobei jedoch nur die Schwarzschild-Raumzeit implementiert ist. Der wohl bekannteste freie Raytracer ist „POV-ray“. Auch hier gibt es modifizierte Versionen, welche die Möglichkeit zur speziell-relativistischen Visualisierung geben; ein Beispiel hierfür sind die Bilder von Brewin [12]. Eine Erweiterung für allgemein-relativistisches Raytracing ist auch hier auf die Schwarzschild-Raumzeit beschränkt.

Zielsetzung

Die bisher entwickelten Visualisierungsprogramme auf der Basis von Raytracing sind jeweils auf spezielle Raumzeiten zugeschnitten. Ein Ziel dieser Arbeit ist, das Raytracing-Verfahren im Hinblick auf die Spezielle und vor allem die Allgemeine Relativitätstheorie zu erweitern. Dabei sollen beliebige Raumzeiten, insbesondere solche mit nicht-trivialer Topologie, einfach zu implementieren sein. Dies stellt sowohl an den eigentlichen Programm-Code wie auch an die Szenenbeschreibungssprache hohe Ansprüche. RayViS in der Version von Weiskopf [109] soll als Orientierung dienen, wobei einige Teile direkt übernommen werden können. Die Szenenbeschreibungssprache wird komplett neu entwickelt. Für eine möglichst koordinatenunabhängige Visualisierung mittels lokaler Objekte sowie die Beschreibung von Bewegung ist die Implementierung einer lokalen Tetrade unumgänglich. Neben der eigentlichen Geodätenintegration muß daher auch der Parallel-Transport von Vektoren umgesetzt werden. Zu einer möglichst realistischen Darstellung gehört nicht nur die geometrische Verzerrung, sondern ebenso die Frequenzverschiebung des Spektrums der einzelnen Objekte. Nach der Umsetzung all dieser Aspekte in dem neuen Programm-Code *GeoViS* soll es mit diesem dann möglich sein, bei der Suche nach Erklärungen für tatsächliche astronomische Beobachtungen durch einfache Modellbildung zu helfen.

Neben dem eigentlichen Raytracing-Programm *GeoViS* soll ein interaktiver Geodätenbetrachter entwickelt werden, der den Verlauf der Geodäten in pseudo-kartesischen Koordinaten darstellen kann. Er dient gleichzeitig auch als Hilfsmittel für die Auswahl eines geeigneten Geodätenintegrators und dessen Parameter in *GeoViS*.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist die Umsetzung der Raytracing-basierenden Visualisierung auf verschiedene Raumzeiten. Anhand eines Gravitationskollapses wird die Verwendung eines Atlas dargestellt. Die Topologie eines einfachen Wurmloches soll anhand unterschiedlicher Szenen erklärt werden.

Aufgrund der sehr einfachen sphärisch-symmetrischen Geometrie der Schwarzschild-Metrik ist es möglich, eine analytische Lösung der Geodätengleichung zu finden. Für die Umsetzung mit Hilfe gängiger Programm-Bibliotheken ist es notwendig, die elliptischen Funktionen und Integrale auf eine weitestgehend reelle Form zu bringen. Mit der analytischen Lösung ist dann eine interaktive Visualisierung einer einfachen symmetrischen Szene möglich. Im Gegensatz zu bisherigen Implementierungen, bei denen im voraus berechnete Tabellen verwendet werden, sollen sich hier alle Parameter in nahezu Echtzeit variieren lassen.

Zum Schluß soll die stereoskopische Visualisierung aufgegriffen und sowohl für die Spezielle als auch die Allgemeine Relativitätstheorie umgesetzt werden. Für die erklärenden Abbildungen zur stereoskopischen Visualisierung eines Morris-Thorne-Wurmloches ist die analytische Lösung der Geodätengleichung dringend erforderlich.

Überblick

Diese Arbeit ist in sechs Kapitel unterteilt, die alle nahezu unabhängig voneinander gelesen werden können. Es sind dabei ganz bewußt einige Erklärungen, wie etwa die für die Anfangsbedingungen der Geodätengleichung, in gewissem Maße redundant.

Die mathematische Vorbereitung in Kapitel §2 streift die für diese Arbeit wichtigsten Begriffe und geht vor allem auf die zentrale Bedeutung der lokalen Tetrade, der Geodätengleichung und des Transports eines Vektors

ein.

Die erweiterte Raytracing Software RayViS und insbesondere die innerhalb dieser Arbeit neu entwickelte, auf Teilen von RayViS aufbauende, Software GeoViS stellen das Fundament für die weitere Visualisierung dar. Ausgehend vom Raytracing-Konzept werden daher in Kapitel §3 die Erweiterungen auf vierdimensionales Raytracing und deren Umsetzung in RayViS kurz dargestellt. Das Hauptaugenmerk liegt dann aber bei der Erläuterung der einzelnen Bausteine von GeoViS. Die Motivation für eine neue und flexiblere Raytracing-Software war einerseits die Anforderung, Raumzeiten visualisieren zu können, welche nur durch einen ganzen Atlas beschrieben werden können. Andererseits soll durch den Einsatz lokaler Objekte sowohl die Koordinatenabhängigkeit der Visualisierung verringert als auch die Beschreibung des Beobachters im Rahmen eines lokalen Bezugssystems erleichtert werden.

All diese Anforderungen finden ihre Anwendung bei der Visualisierung eines Gravitationskollapses im Kapitel §4. Die Folge eines solchen Gravitationskollapses ist ein Schwarzes Loch, dessen umgebende Raumzeit im statischen Fall durch die Schwarzschild-Metrik beschrieben wird. Kapitel §5 beschäftigt sich mit der analytischen Lösung der Geodätengleichung für diese Schwarzschild-Metrik und deren Verwendung insbesondere für die interaktive Visualisierung. Außerdem wird anhand eines sehr vereinfachten Modells die Einsatzfähigkeit der Visualisierung in der aktuellen astronomischen Forschung zum galaktischen Zentrum demonstriert.

Neben der bis jetzt doch seriösen Visualisierung scheint Kapitel §6 etwas in Science-Fiction abzuschweifen. Die Existenz von Wurmlöchern ist bis heute weder bestätigt noch widerlegt. Wenn sie auch extrem unwahrscheinlich sind und heutigen Prinzipien der Physik teilweise widersprechen, so stellen sie dennoch eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen dar und eignen sich gut für das Erlernen mit deren Umgang. Zudem sind Wurmlöcher ein gutes Beispiel dafür, daß die Visualisierung ein wichtiges didaktisches Hilfsmittel in der Relativitätstheorie sein kann.

Die Visualisierung in der Relativitätstheorie ermöglicht Einblicke in Geschwindigkeitsbereiche und Raumzeitkrümmungen, die ein Mensch wohl kaum überleben kann. Sollte er je doch die Möglichkeit haben, mit annähernd Lichtgeschwindigkeit zu reisen oder sich in der Nähe eines Schwarzen Lochs aufzuhalten, so würde seine räumliche Wahrnehmung große Schwierigkeiten bekommen. Im abschließenden Kapitel §7 wird daher die binokulare Sicht innerhalb der Speziellen und der Allgemeinen Relativitätstheorie behandelt.

Kapitel 2

Mathematische Vorbereitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) wird im mathematischen Apparat der Differentialgeometrie formuliert. Eine Raumzeit wird dabei als gekrümmte Mannigfaltigkeit dargestellt, innerhalb derer sich Teilchen und Lichtstrahlen auf Geodäten bewegen.

Wir wollen hier nur auf einige wenige Details und Begriffe eingehen, um vor allem unsere Notation zu klären, und verweisen für eine ausführliche Darstellung auf die Literatur (z.B. [71], [107], [15], [82], [65]). Unser Hauptaugenmerk liegt auf den lokalen Tetraden, welche eine zentrale Rolle bei der Visualisierung in gekrümmten Raumzeiten einnehmen, und auf dem Fermi-Walker-Transport, der als Spezialfall den Parallel-Transport beinhaltet. Außerdem möchten wir hier den Begriff der pseudo-kartesischen Koordinaten einführen.

2.1 Mannigfaltigkeit, Karte, Atlas

Eine *Mannigfaltigkeit* \mathcal{M} — im weiteren durch MF abgekürzt — ist eine Menge, welche sich lokal durch ein Koordinatensystem überdecken läßt. Es gibt folglich zu jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine Umgebung $U \subset \mathcal{M}$ und ein Homeomorphismus φ , der U auf eine offene Menge des \mathbb{R}^m abbildet. Im allgemeinen benötigt man mehrere Umgebungen U_i und Homeomorphismen φ_i , um die MF vollständig abzudecken. Ist die Schnittmenge zweier Umgebungen U_i und U_j ungleich Null, so muß $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ eine C^∞ -Abbildung zwischen $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ und $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ sein. Das Paar (U, φ) heißt *Karte*, wohingegen eine ganze Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ *Atlas* genannt wird.

Ein sehr einfaches Beispiel für eine MF ist die Einheitskugel S^2 [71]. Weder in sphärischen noch in stereographischen oder sonstigen Koordinaten kann sie durch eine einzige Karte abgedeckt werden. Wir setzen dabei voraus, daß jeder Punkt eindeutige Koordinaten besitzen soll und benachbarte Punkte auch durch benachbarte Koordinaten beschrieben werden sollen. Sphärische Koordinaten

$$x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta, \quad (0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi),$$

beschreiben daher nur die geschlitzte Kugel; die Punkte der Kugel, welche auf der Halbebene $x \geq 0$ liegen, fehlen. Stereographische Koordinaten erhält man durch die Projektion vom Nordpol auf die Äquatorebene:

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z}, \quad (-\infty < X < \infty, -\infty < Y < \infty).$$

Der Nordpol fällt in diesen Koordinaten jedoch weg.

Liegt eine Mannigfaltigkeit mit sphärischer Symmetrie vor, so wollen wir in der Regel auch sphärische Koordinaten verwenden. Wir müssen deswegen aber nicht gleich einen ganzen Atlas verwenden, sondern berücksichtigen lediglich, daß etwa der Azimutwinkel φ 2π -periodisch ist. Wichtig wird dies vor allem bei der Berechnung von Koordinatenabständen. So müssen wir zum Beispiel den Winkelabstand $\Delta\varphi$ wie folgt bestimmen: Gegeben seien zwei Winkel φ_1 und φ_2 , dann gilt

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) \pmod{2\pi}$$

und es muß die zusätzliche Fallunterscheidung

$$\text{wenn } \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi > \pi \\ \Delta\varphi < -\pi \end{array} \right\}, \quad \text{dann } \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi \mapsto \Delta\varphi - 2\pi \\ \Delta\varphi \mapsto \Delta\varphi + 2\pi \end{array} \right\}$$

gemacht werden. Der Winkelabstand beträgt daher immer $|\Delta\varphi| \leq \pi$.

In der Relativitätstheorie beschreiben wir die vierdimensionale Raumzeit mit einer *Lorentz*schen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , die mit einer Metrik der Signatur ± 2 ausgestattet ist. Punkte von \mathcal{M} sind Ereignisse in dieser Raumzeit, die wir häufig auch kurz als Orte bezeichnen. Die flache Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie wird durch die Minkowski-Raumzeit beschrieben.

2.2 Vektor, Tangentialraum, Metrik

Den anschaulichen Begriff eines Vektors als Pfeil, der zwei Punkte miteinander verbindet, kann so nicht auf Mannigfaltigkeiten umgesetzt werden. Vielmehr wollen wir unter einem Vektor eine Tangente oder Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ an eine Kurve $\zeta : (a, b) \mapsto \mathcal{M}$ im Punkt $\zeta(\lambda = 0)$ verstehen [71],

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(\zeta(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} &= \left. \frac{d}{d\lambda} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \zeta(\lambda)) \right|_{\lambda=0} = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1}(x^\nu))}{\partial x^\mu} \cdot \left. \frac{dx^\mu(\zeta(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \\ &= t^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \varphi^{-1}(x^\nu)), \end{aligned}$$

wobei $(a, b) \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $\lambda \in (a, b)$ und (U, φ) eine Karte für den Punkt $\zeta(\lambda = 0)$ ist. Den Tangentenvektor \mathbf{t} können wir nun als Operator

$$\mathbf{t} \equiv t^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv t^\mu \partial_\mu \quad (2.2.1)$$

schreiben. Ein Vektor \mathbf{t} setzt sich im allgemeinen aus einer Linearkombination von Basis-Vektoren $\{\partial_\mu\}$ entlang der Koordinatenachsen $x^\mu = \text{const}$ zusammen. Die t^μ repräsentieren die Komponenten des Vektors \mathbf{t} . Die Basis-Vektoren $\{\partial_\mu\}$, $(\mu = 0, \dots, 3)$, spannen den Tangentialraum $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ am Punkt $p = \zeta(\lambda = 0)$ auf.

Neben der Basis $\{\partial_\mu\}$ für den Tangentialraum $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ können wir auch eine duale Basis $\{dx^\mu\}$ für den Cotangentenraum $\mathcal{T}_p^*\mathcal{M}$ definieren

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu.$$

Ein Cotangentenvektor, auch dualer Vektor genannt, lautet dann

$$\mathbf{w} = w_\mu dx^\mu.$$

Eine Metrik \mathbf{g} definiert Abstände und Winkel auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Wir verwenden den Begriff Metrik sowohl für den eigentlichen Tensor \mathbf{g} als auch für das Linienelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Die flache Minkowski-Raumzeit besitzt die Metrik $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Das Skalarprodukt zweier Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} lautet dann

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{g}} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(u^\rho \partial_\rho, v^\sigma \partial_\sigma) = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu (u^\rho \partial_\rho, v^\sigma \partial_\sigma) = g_{\rho\sigma} u^\rho v^\sigma = u_\rho v^\rho.$$

Die Länge $|\mathbf{v}|$ eines Vektors \mathbf{v} bestimmt sich aus

$$|\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{g}} = v_\mu v^\mu.$$

Da wir in der Allgemeinen Relativitätstheorie stets eine Lorentz-Metrik mit der Signatur $\text{sign}(\mathbf{g}) = \pm 2$ vorliegen haben, ist die Länge eines Vektors keine positiv-definite Größe. Für die Signatur $+2$ unterscheiden wir zwischen zeitartigen ($|\mathbf{v}|^2 < 0$), lichtartigen ($|\mathbf{v}|^2 = 0$) und raumartigen ($|\mathbf{v}|^2 > 0$) Vektoren.

Abstrakte Indexnotation

Wir wollen noch kurz auf die *abstrakte Indexnotation* eingehen, die vor allem in Wald [107] Verwendung findet. Eine kontravariante Größe (Vektor, Tensor) wird mit oberen Indizes, kovariante Größen (Kovektor, Tensor) mit unteren Indizes gekennzeichnet, wobei wir in der Regel lateinische Buchstaben verwenden wollen. Die Transformation der abstrakten Notation in die Koordinatendarstellung, angedeutet durch griechische Buchstaben, erfolgt durch die Identifikation

$$X^b \mapsto X^\beta \partial_\beta \quad \text{oder auch} \quad X^b = X^\beta (\partial_\beta)^b \quad (2.2.2)$$

für kontravariante Vektoren und

$$X_b \mapsto X_\beta dx^\beta \quad \text{oder auch} \quad X_b = X_\beta (dx^\beta)_b \quad (2.2.3)$$

für kovariante oder duale Vektoren. Über einen gleichnamigen unteren und oberen Index wird in beiden Fällen summiert. Diese Notation läßt sich auch direkt auf beliebige Tensoren erweitern.

2.3 Lokale Tetrade

Eines der wichtigsten Objekte in dieser Arbeit ist die lokale Tetrade. Sie ist das lokale Bezugssystem sowohl für den Beobachter und als auch einzelner lokaler Objekte. Wir unterscheiden hierbei zwischen einer natürlichen lokalen Tetrade, welche entweder der Symmetrie oder einer anderen Vorzugsrichtung der Raumzeit angepaßt ist, und einer allgemeinen lokalen Tetrade ohne äußeren Bezug.

2.3.1 Definition der lokalen Tetrade

Den im vorherigen Abschnitt definierten Tangentialraum $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ wollen wir nun nicht durch die Koordinatenvektoren $\{\partial_\mu\}$, sondern durch eine *Tetrade* $\{e_\alpha\}$ am Ort p aufspannen (Abb. 2.1).

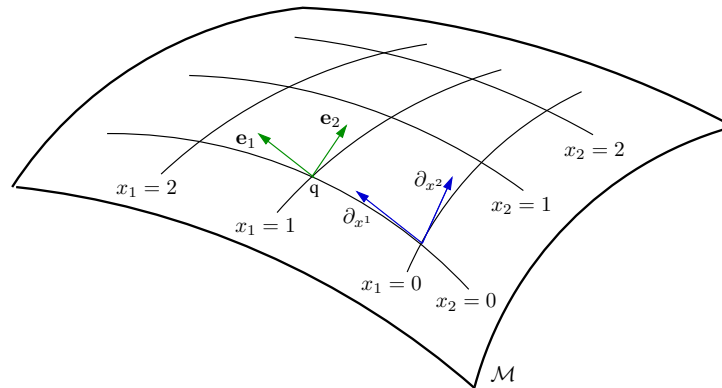


Abbildung 2.1: Der Tangentialraum $\mathcal{T}_q\mathcal{M}$ der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} am Ort q kann durch Koordinatenvektoren $\{\partial_{x^\mu}\}$ oder eine lokale Tetrade $\{e_\nu\}$ aufgespannt werden.

Diese Tetrade ist durch die Linearkombination

$$\mathbf{e}_\alpha = e_\alpha^\mu \partial_\mu \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad (2.3.1)$$

definiert, wobei $e_\alpha^\mu \in GL(4, \mathbb{R})$ und $\det e_\alpha^\mu \neq 0$ gilt und α als Tetradenindex bezeichnet wird. Weiterhin muß die Tetrade $\{e_\alpha\}$ die Orthonormierungsbedingung

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta},$$

mit der Minkowski-Metrik η , erfüllen. Die *duale Tetrade* $\{\theta^\alpha\}$ entsteht aus der Tetrade über die Definition

$$\delta_\beta^\alpha \stackrel{!}{=} \langle \theta^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \langle \theta^\alpha_\nu dx^\nu, e_\beta^\mu \partial_\mu \rangle = \theta^\alpha_\mu e_\beta^\mu,$$

wobei θ^α_μ die Inverse von e_α^μ ist. Wir können die Metrik bzw. das Linienelement daher auch wie folgt schreiben:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha \otimes \theta^\beta.$$

Die lokale Tetrade $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ stellt also das lokale Bezugssystem im Punkt q dar. Besitzt die Metrik spezielle Symmetrien und ist die lokale Tetrade an diese Symmetrien angepaßt, so wollen wir diese Tetrade als *natürliche lokale Tetrade* bezeichnen.

2.3.2 Beispiele für natürliche lokale Tetraden

Die einfachste natürliche lokale Tetrade finden wir bei der *Minkowski-Metrik* in kartesischen Koordinaten

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.3.2)$$

In diesem Fall passen wir die lokale Tetrade den Koordinatenachsen an:

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{c} \partial_t, \quad \mathbf{e}_x = \partial_x, \quad \mathbf{e}_y = \partial_y, \quad \mathbf{e}_z = \partial_z. \quad (2.3.3)$$

Ein weiteres einfaches Beispiel einer natürlichen lokalen Tetrade finden wir bei der *Schwarzschild-Metrik*

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_s/r} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.3.4)$$

Diese statische, sphärisch-symmetrische Raumzeit zeichnet sowohl die Zeitrichtung ∂_t wie auch die Radialrichtung ∂_r aus. Die beiden Winkelrichtungen ∂_ϑ und ∂_φ repräsentieren die sphärische Symmetrie. So können wir aus dem Linienelement sehr schnell die natürliche Tetrade

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{c\sqrt{1 - r_s/r}} \partial_t, \quad \mathbf{e}_r = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \partial_r, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{r} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \quad (2.3.5)$$

ableiten.

Die *Kerr-Metrik* hingegen läßt die Wahl zweier natürlicher Tetraden zu. In Boyer-Lindquist-Form lautet die Kerr-Metrik (in geometrischen Einheiten, $G = c = 1$)

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\vartheta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (a \sin^2 \vartheta d\varphi - dt)^2 \quad (2.3.6)$$

mit $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ und $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$. Einerseits können wir eine *statische natürliche lokale Tetrade* (LSF = Local Static Frame) angeben,

$$\mathbf{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2mr}{\rho^2}}} \partial_t, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} \partial_r, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\rho} \partial_\vartheta, \quad (2.3.7a)$$

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{2mar \sin \vartheta}{\sqrt{\rho^2 \Delta} \sqrt{\rho^2 - 2mr}} \partial_t + \frac{\sqrt{\rho^2 - 2mr}}{\sqrt{\rho^2 \Delta} \sin \vartheta} \partial_\varphi \quad (2.3.7b)$$

mit $\det(e_\alpha^\mu) = 1/(\rho^2 \sin \vartheta)$, wobei sich „statisch“ auf konstant bezüglich der drei Raumkoordinaten (r, ϑ, φ) bezieht [65]. Die statische Tetrade ist jedoch nur außerhalb der Ergosphäre gültig. Andererseits läßt sich auch eine *lokal nicht-rotierende Tetrade* (LNRF = Local Non-Rotating Frame) definieren:

$$\mathbf{e}_0 = \sqrt{\frac{A}{\rho^2 \Delta}} (\partial_t + \omega \partial_\varphi), \quad \mathbf{e}_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{\rho^2}} \partial_r, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\rho} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_3 = \sqrt{\frac{\rho^2}{A}} \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi \quad (2.3.8)$$

mit $\det(e_\alpha^\mu) = 1/(\rho^2 \sin \vartheta)$, $A = (r^2 + a^2) \rho^2 + 2ma^2 r \sin^2 \vartheta$ und $\omega = 2mar/A$.

2.3.3 Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

In der Praxis können wir eine lokale Tetrade häufig nur durch einen zeitartigen Vektor, wie etwa die Vierergeschwindigkeit, und drei nahezu beliebige Vektoren angeben. Alle vier Vektoren müssen natürlich schon eine Basis bilden. Um aus diesen vier Basis-Vektoren eine orthonormierte Tetrade zu bestimmen, verwenden wir das Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt (siehe z.B. [31]).

Gegeben seien vier linear unabhängige Vektoren \mathbf{e}_0 , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 und \mathbf{u}_3 , wobei \mathbf{e}_0 bereits ein zeitartiger Vektor sei. In der Regel ist \mathbf{e}_0 tangential zur Bewegungsrichtung eines Objekts, dessen Bezugssystem die lokale Tetrade darstellen soll. Es gilt also $\mathbf{g}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = -1$. Folgen wir dem bekannten Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt, so projizieren wir zunächst den Vektor \mathbf{u}_1 auf \mathbf{e}_0 und erhalten so

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{e}_0, \mathbf{u}_1) \mathbf{e}_0. \quad (2.3.9)$$

Da aber $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{e}_0$ raumartig ist, also $|\mathbf{v}_1| \neq 0$, können wir den zweiten Basisvektor

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \quad (2.3.10)$$

definieren, der tatsächlich orthogonal zu \mathbf{e}_0 ist. Den Vektor \mathbf{u}_2 projizieren wir nun auf den zweidimensionalen Unterraum $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ wie folgt

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{g}(\mathbf{e}_0, \mathbf{u}_2) \mathbf{e}_0 - \mathbf{g}(\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2) \mathbf{e}_1. \quad (2.3.11)$$

Auch \mathbf{v}_2 liegt im Orthogonalraum von \mathbf{e}_0 und ist daher ebenfalls raumartig. Der dritte Basisvektor lautet also $\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2/|\mathbf{v}_2|$. Analog gehen wir auch für den vierten Basisvektor \mathbf{e}_3 vor.

2.3.4 Transformation zwischen zwei Tetraden

Eine Tetrade $\{\hat{\mathbf{e}}_\alpha\}$ kann natürlich auch bezüglich einer anderen Tetrade $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, welche sich am selben Ort (Ereignis) befindet, gegeben sein:

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = e_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta, \quad (2.3.12)$$

wobei auch hier $e_\alpha^\beta \in GL(4, \mathbb{R})$ sein muß. Zusätzlich fordern wir noch, daß die Determinante $\det e_\alpha^\beta$ echt positiv und der Zusammenhang beider Tetraden damit orientierungserhaltend ist.

Messung im bewegten System

Als Beispiel betrachten wir zwei Beobachter in der Minkowski-Raumzeit, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen. Legen wir die Bewegungsrichtung entlang der x -Achse, so folgt aus der Minkowski-Metrik

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.3.13)$$

für die lokale Tetrade $\{\mathbf{e}_i\}$ (System \mathbf{S}) des einen Beobachters

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{c} \partial_t, \quad \mathbf{e}_x = \partial_x, \quad \mathbf{e}_y = \partial_y, \quad \mathbf{e}_z = \partial_z, \quad (2.3.14)$$

und für die Tetrade $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ (System $\hat{\mathbf{S}}$) des relativ zu ihm bewegten Beobachters

$$\hat{\mathbf{e}}_0 = \gamma(\mathbf{e}_t + \beta \mathbf{e}_x), \quad \hat{\mathbf{e}}_1 = \gamma(\beta \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_x), \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_y, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_z, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.3.15)$$

Weiterhin ist ein Stab, der bezüglich \mathbf{S} ruht und die Länge L besitzt, gegeben. Sein eines Ende befindet sich im Ursprung von \mathbf{S} , das andere Ende befindet sich am Ort $\vec{X} = L \cos \phi \mathbf{e}_x + L \sin \phi \mathbf{e}_y$. Führt der bewegte Beobachter im System $\hat{\mathbf{S}}$ eine Messung des Stabs durch — beide Tetraden müssen dann natürlich am selben Ort sein —, so erhält er für die Komponenten \hat{X}^α des Vierervektors \mathbf{X} des Stabs, bezogen auf sein System,

$$\mathbf{X} = \hat{X}^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha = 0 \hat{\mathbf{e}}_0 + \hat{L} \cos \hat{\phi} \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{L} \sin \hat{\phi} \hat{\mathbf{e}}_2 + 0 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (2.3.16)$$

Die verschwindende Zeitkomponente \hat{X}^0 zeigt, daß der Beobachter beide Stabenden *gleichzeitig*¹ bestimmt. Setzen wir die Beziehung (2.3.15) in den Vierervektor \mathbf{X} ein, so erhalten wir

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \gamma \beta \hat{L} \cos \hat{\phi} \mathbf{e}_t + \gamma \hat{L} \cos \hat{\phi} \mathbf{e}_x + \hat{L} \sin \hat{\phi} \mathbf{e}_y. \quad (2.3.17)$$

Aus dem Vergleich $L \cos \phi \mathbf{e}_x + L \sin \phi \mathbf{e}_y = \gamma \hat{L} \cos \hat{\phi} \mathbf{e}_x + \hat{L} \sin \hat{\phi} \mathbf{e}_y$ folgt für die Orientierung des Stabes $\tan \phi = \frac{1}{\gamma} \tan \hat{\phi}$ und für seine Länge \hat{L}

$$\hat{L}^2 = \frac{1 + \gamma^2 \tan^2 \phi}{1 + \tan^2 \phi} \frac{L^2}{\gamma^2} < L^2. \quad (2.3.18)$$

Vom System $\hat{\mathbf{S}}$ aus betrachtet bewegt sich der Stab und erscheint deshalb, wie wir es auch nach der Speziellen Relativitätstheorie erwarten, kürzer. Was für den Beobachter im System $\hat{\mathbf{S}}$ gleichzeitig ist ($\hat{X}^0 = 0$) — er mißt beide Stabenden gleichzeitig —, ist für \mathbf{S} nicht gleichzeitig. So haben für \mathbf{S} die beiden Enden eine Zeitdifferenz von $X^t = \gamma \beta \hat{L} \cos \hat{\phi}$.

2.4 Lokaler Zusammenhang, Christoffel-Symbole, Geodätengleichung

2.4.1 Lokaler Zusammenhang und Christoffel-Symbole

Neben der Metrik benötigen wir noch eine weitere Größe, den lokalen Zusammenhang, um eine Raumzeit-Mannigfaltigkeit beschreiben zu können². Daraus kann man im Anschluß die innere Krümmung der Raumzeit ableiten. Aus dem lokalen Zusammenhang läßt sich in einem ersten Schritt ein Ableitungsoperator ∇_a definieren. Dieser bestimmt über den Parallel-Transport eines Vektors den Zusammenhang zweier Vektorräume V_p und V_q an den Orten p und q , die durch eine Kurve miteinander verbunden sind. Der lokale Zusammenhang ist zunächst noch beliebig wählbar, wird aber durch die Forderung, daß das innere Produkt zweier Vektoren beim Parallel-Transport konstant bleibt, $\nabla_a g_{bc} = 0$, eindeutig festgelegt.

Die kovariante Ableitung eines Vektors v^μ lautet dann

$$\nabla_\nu v^\mu = \partial_\nu v^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu v^\lambda, \quad (2.4.1)$$

wobei der lokale Zusammenhang durch die Christoffel-Symbole $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ gegeben ist, die sich aus der Metrik $g_{\mu\nu}$ wie folgt berechnen lassen³,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}). \quad (2.4.2)$$

Die Christoffel-Symbole stellen allerdings keine Tensoren dar, da sie sich nicht wie Tensoren transformieren.

2.4.2 Geodätengleichung

Unter einer Geodäten wollen wir salopp eine geradest mögliche Linie in einer gekrümmten Raumzeit verstehen. Mathematisch läßt sich eine Geodäte dadurch definieren, daß sie die Kurve ist, welche ihren Tangentenvektor t^a parallel zu sich selbst transportiert. Mit dem Ableitungsoperator aus dem vorherigen Abschnitt muß der Tangentenvektor die Gleichung (in abstrakter Indexnotation)

$$\nabla_t t^b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^a \nabla_a t^b = 0 \quad (2.4.3)$$

erfüllen, wobei wir schon vorausgesetzt haben, daß die Geodäte affin parametrisiert wurde. Übersetzen wir die Gleichung (2.4.3) in Koordinatendarstellung, so muß die Geodäte $x^\mu(\lambda)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.4.4)$$

¹Messen heißt „gleichzeitig am Objekt“; Sehen hingegen bedeutet „gleichzeitig beim Beobachter“.

²Eine ausführliche Erklärung, auf die wir hier zurückgreifen, findet man z.B. in Carroll [15] oder Wald [107].

³In Maple/grTensorII können die Christoffel-Symbole mittels 'grcalc(Chr(dn,dn,up))' berechnet werden.

mit dem affinen Parameter λ genügen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, daß wir zwei Anfangswerte angeben können, um die Lösung dieser Differentialgleichung eindeutig festzulegen. In unserem Fall sind dies der Startort $x^\mu(\lambda = 0)$ und die Startrichtung $\dot{x}^\mu(\lambda = 0) = dx^\mu/d\lambda(\lambda = 0)$ der Geodäten.

In der Relativitätstheorie unterscheiden wir zwischen drei Typen von Geodäten: zeitartige, lichtartige und raumartige Geodäten. Alle drei Typen sind Lösungen der Differentialgleichung (2.4.4). Sie unterscheiden sich lediglich in der zusätzlichen Forderung

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \kappa c^2 \quad (2.4.5)$$

an die Startrichtung, welche sie erfüllen müssen. Unter der Voraussetzung, daß die Signatur der Metrik +2 ist, gilt $\kappa = -1$ für zeitartige, $\kappa = 0$ für licht- oder nullartige und $\kappa = 1$ für raumartige Geodäten.

2.4.3 Anfangsbedingungen

Geben wir die Startrichtung \mathbf{y} einer Geodäten an, so können wir dies entweder durch deren Koordinatendarstellung $\{\partial_\mu\}$ oder bezogen auf eine lokale Tetrade $\{\mathbf{e}_n\}$ tun,

$$\mathbf{y} = \dot{y}^\mu \partial_\mu = \tilde{y}^n \mathbf{e}_n. \quad (2.4.6)$$

Die eigentliche Integration der Geodätengleichung werden wir hier jedoch nur in der Koordinatendarstellung durchführen. Innerhalb einer lokalen Tetrade wollen wir anstelle der kartesischen Koordinaten \tilde{y}^n die Richtungsangabe auch mittels zweier Winkel χ und ξ angeben (Abb. 2.2).

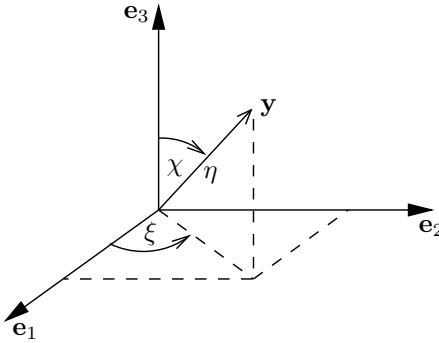


Abbildung 2.2: Anfangsrichtung \mathbf{y} mit Winkel-Koordinaten χ und ξ bezüglich einer lokalen Tetrade.

Die Startrichtung \mathbf{y} setzt sich dann wie folgt zusammen

$$\mathbf{y} = \tilde{y}^0 \mathbf{e}_0 + \eta \sin \chi \cos \xi \mathbf{e}_1 + \eta \sin \chi \sin \xi \mathbf{e}_2 + \eta \cos \chi \mathbf{e}_3 \quad (2.4.7)$$

und muß der Bedingung (2.4.5), hier in lokaler Darstellung,

$$\kappa c^2 \stackrel{!}{=} |\mathbf{y}|^2 = \eta_{\alpha\beta} \tilde{y}^\alpha \tilde{y}^\beta = -(\tilde{y}^0)^2 + \eta^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}^0 = \pm \sqrt{\eta^2 - \kappa c^2}, \quad (2.4.8)$$

im weiteren auch Startbedingung genannt, genügen. Das Vorzeichen entscheidet darüber, ob die Geodäte zukunfts- oder vergangenheitsgerichtet ist. Im Fall lichtartiger Geodäten können wir $\eta = 1$ wählen. Bei zeitartigen Geodäten beschreibt \mathbf{y} die Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u} = \gamma (c\mathbf{e}_0 + v\vec{n})$, wobei \vec{n} senkrecht auf \mathbf{e}_0 steht. Vergleichen wir \mathbf{u} mit Gleichung (2.4.7), so folgt

$$\eta = v\gamma = c\beta\gamma \quad \text{und} \quad \tilde{y}^0 = \pm c\gamma.$$

Wie bereits erwähnt, benötigen wir die Koordinatendarstellung von \mathbf{y} zur Geodätenintegration. Hierfür zerlegen wir die Tetradenbasen \mathbf{e}_α in ihre Koordinatendarstellung (vgl. Gl.(2.3.1)):

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= y^0 \mathbf{e}_0 + y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2 + y^3 \mathbf{e}_3 \\ &= \tilde{y}^\alpha e_\alpha^0 \partial_0 + \tilde{y}^\alpha e_\alpha^1 \partial_1 + \tilde{y}^\alpha e_\alpha^2 \partial_2 + \tilde{y}^\alpha e_\alpha^3 \partial_3 \\ &= \dot{y}^0 \partial_0 + \dot{y}^1 \partial_1 + \dot{y}^2 \partial_2 + \dot{y}^3 \partial_3. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

2.4.4 Numerische Integration der Geodätengleichung

Zur numerischen Integration der Geodätengleichung (2.4.4) führen wir dieses System zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung über. Mit den neuen Variablen y^a ($a = 0, \dots, 8$), wobei

$$y^a = (y^\mu, y^{\mu+4}) = (x^0, \dots, x^3, \dot{x}^0, \dots, \dot{x}^3),$$

erhalten wir ein System von insgesamt acht Gleichungen ($\mu = 0, \dots, 4$):

$$\dot{y}^\mu = \dot{x}^\mu = y^{\mu+4} = f^\mu(y^a), \quad (2.4.10a)$$

$$\dot{y}^{\mu+4} = \dot{\dot{x}}^\mu = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu(y^\rho)y^{\nu+4}y^{\sigma+4} = f^{\mu+4}(y^a), \quad (2.4.10b)$$

oder in kompakter Form:

$$\dot{y}^a = f^a(y^b) \quad (\{a, b\} = 0, \dots, 8). \quad (2.4.11)$$

Zur Lösung dieses Systems aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung verwenden wir sowohl einen einfachen Runge-Kutta-Integrator zweiter Ordnung, als auch ein Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit Schrittweitensteuerung [78]. Für die aufwendigeren Verfahren benötigen wir zusätzlich noch die Jacobi-Matrix $J^{ab} = \partial f^a / \partial y^b$ mit

$$J^{ab} = \begin{pmatrix} J^{\mu,\nu} & J^{\mu,\nu+4} \\ J^{\mu+4,\nu} & J^{\mu+4,\nu+4} \end{pmatrix},$$

wobei sich die einzelnen Untermatrizen wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} J^{\mu,\nu} &= \mathbb{0}^{\mu,\nu}, & J^{\mu+4,\nu} &= -\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^\mu}{\partial y^\nu} y^{\rho+4} y^{\sigma+4}, \\ J^{\mu,\nu+4} &= \mathbb{1}^{\mu,\nu+4}, & J^{\mu+4,\nu+4} &= -2\Gamma_{\rho\nu}^\mu y^{\rho+4}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbb{0}^{\alpha\beta}$ die Null-Matrix und $\mathbb{1}^{\alpha\beta}$ die Einheitsmatrix.

2.5 Riemann-, Ricci-, Einstein-Tensor

Transportieren wir einen beliebigen Vektor parallel entlang einer geschlossenen Kurve, so stimmt er nach einem Umlauf im allgemeinen nicht mehr mit dem nicht transportierten überein. Wie stark sich der Vektor dabei verändert hat, wird durch den Riemann-Tensor $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ angegeben. In der Darstellung von Wald [107] ist der Riemann-Tensor definiert durch die Gleichung (in abstrakter Indexnotation)

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (2.5.1)$$

für alle dualen Vektorfelder ω_c . Eine andere, zu (2.5.1) äquivalente Definition für den Riemann-Tensor lautet [21]

$$\nabla_{\mathbf{X}} (\nabla_{\mathbf{Y}} Z^\alpha) - \nabla_{\mathbf{Y}} (\nabla_{\mathbf{X}} Z^\alpha) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} Z^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} Z^\beta X^\gamma Y^\delta \quad (2.5.2)$$

mit den Vektorfeldern \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{Z} . Drücken wir den Riemann-Tensor durch die Christoffel-Symbole aus, so folgt für seine Koordinatendarstellung

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\mu - \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda. \quad (2.5.3)$$

Der Ricci-Tensor $R_{\nu\sigma}$ ergibt sich nun aus dem Riemann-Tensor durch Spurbildung $R_{\nu\sigma} = R^\mu{}_{\nu\mu\sigma}$; nach einer weiteren Spurbildung erhalten wir den Krümmungsskalar $R = g^{\sigma\nu} R_{\nu\sigma}$. Aus dem Riemann-Tensor können wir schließlich einen total spurfreien Tensor, den sogenannten Weyl-Tensor, konstruieren:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} (g_{\mu[\rho} R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho} R_{\sigma]\mu}) + \frac{1}{3} R g_{\mu[\rho} g_{\sigma]\nu}.$$

Zentraler Kern der Allgemeinen Relativitätstheorie sind die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad \varkappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (2.5.4)$$

mit dem Einstein-Tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$, dem Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$, der kosmologischen Konstanten Λ und der Gravitationskonstanten G . Der kosmologischen Konstanten kann man eine Energiedichte $\rho_\Lambda = \Lambda/\varkappa$ zuordnen, die unter anderem die Vakuum-Energiedichte ρ_{vac} widerspiegeln soll. Astronomische Beobachtungen geben eine obere Schranke für ρ_Λ an (siehe Straumann [99]):

$$\rho_\Lambda \leq \rho_{\text{krit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 1.88 \cdot 10^{-29} h_0^2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

wobei H_0 der Hubble-Parameter und $h_0 \approx 0.6$ ist.

2.6 Gleichung der geodätischen Abweichung

Aus der Gleichung der geodätischen Abweichung können wir mit Hilfe des Riemann-Tensors und der Vierergeschwindigkeit die relative Beschleunigung und damit auch die Gezeitenkräfte zweier benachbarter Teilchen berechnen.

Betrachten wir zunächst eine Kongruenz zeitartiger Geodäten $x^\mu = x^\mu(\tau, \lambda)$, wobei τ eine Geodäte selbst und λ die einzelnen Geodäten parametrisiert [21]. Die Geodäten stellen die Integralkurven eines Vektorfelds $v^\mu = \partial x^\mu / \partial \tau$ dar. Das zweite Vektorfeld wird durch die Verbindungsvektoren $\xi^\mu = \partial x^\mu / \partial \lambda$ erzeugt.

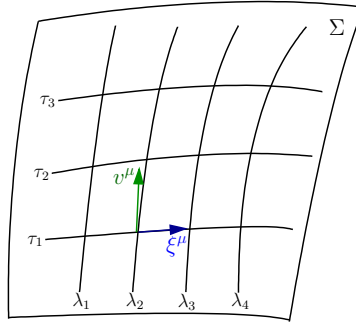


Abbildung 2.3: Kongruenz zeitartiger Geodäten mit den Vektorfeldern v^μ und ξ^μ . Der Parameter λ parametrisiert die einzelnen Geodäten, wohingegen τ eine Geodäte selbst parametrisiert. Die Kongruenz spannt dabei die Hyperfläche $\Sigma \subset \mathcal{M}$ auf.

Der Kommutator $[v, \xi]^\mu$ der beiden Vektorfelder verschwindet, sofern wir davon ausgehen, daß die zeitartigen Kurven $x^\mu(\tau, \lambda)$ zweimal stetig differenzierbar sind

$$[v, \xi]^\mu = v^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu - \xi^\alpha \partial_\alpha v^\mu = 0.$$

Da es sich bei dem Kommutator um die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v \xi^\mu = [v, \xi]^\mu$ handelt, können wir aufgrund der Eigenschaften der Lie-Ableitung partielle durch kovariante Ableitungen ersetzen und erhalten so die Relation

$$\nabla_v \xi^\mu = \nabla_\xi v^\mu.$$

Zusammen mit der Definition des Riemannschen Krümmungstensors (2.5.2) und den Vektorfeldern $\mathbf{X} = \mathbf{Z} = \mathbf{v}$ und $\mathbf{Y} = \xi$ erhalten wir die Gleichung der geodätischen Abweichung in Koordinatendarstellung

$$a^\mu = \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} v^\nu v^\rho \xi^\sigma. \quad (2.6.1)$$

Anstelle der Koordinatendarstellung können wir die geodätische Abweichung auch mit Hilfe der lokalen Tetraden $e_i = e_i^\mu \partial_\mu$ bestimmen, wobei $e_0 = \mathbf{u}$ in Richtung der zeitartigen Geodäten mit der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} zeigt. Da die Tetrade entlang der Geodäte parallel-transportiert wird, verschwindet die kovariante Ableitung $De_i^\mu/D\tau$. Für den Verbindungsvektor $\xi^i = e_i^\mu \xi^\mu$ erhalten wir dann die Gleichung der geodätischen Abweichung in Tetradendarstellung

$$a^i = \frac{D^2 \xi^i}{D\tau^2} = \frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} e_i^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} u^\nu u^\rho \xi^\sigma e_i^\mu = K^i{}_j \xi^j \quad \text{mit} \quad K^i{}_j = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} e_i^\mu e_0^\nu e_0^\rho e_j^\sigma. \quad (2.6.2)$$

2.7 Parallel- und Fermi-Walker-Transport

Die Bewegung eines Objekts, welches bezüglich einer lokalen Tetrade gegeben ist, beschreibt man durch einen Parallel-Transport der lokalen Tetrade sofern die Bewegung kräftefrei erfolgen soll. Möchte man auch eventuelle Antriebe berücksichtigen, so muß die lokale Tetrade Fermi-Walker-transportiert werden. Da der Parallel-Transport ein Spezialfall des Fermi-Walker-Transports ist, wollen wir letzteren zuerst betrachten. Zuvor definieren wir die Fermi-Walker-Ableitung $\mathbb{F}_\mathbf{u} X^b$ eines beliebigen Vektors X^b in abstrakter Indexnotation und formulieren die Ableitung dann in Koordinaten- und Tetradendarstellung.

2.7.1 Fermi-Walker-Ableitung in abstrakter Notation

Ein Objekt bewege sich auf einer beliebigen zeitartigen Kurve $x^b = x^b(\tau)$, die es mittels seiner Eigenzeit τ parametrisiere. Die Fermi-Ableitung eines beliebigen Vektors X^b lautet dann in abstrakter Index-Notation:

$$\mathbb{F}_\mathbf{u} X^b = \nabla_\mathbf{u} X^b + \frac{1}{c^2} (X^e u_e a^b - X^e a_e u^b), \quad (2.7.1)$$

wobei \mathbf{u} die Vierergeschwindigkeit und \mathbf{a} die Viererbeschleunigung des Objekts sein soll [97].

2.7.2 Fermi-Walker-Ableitung in Koordinatendarstellung

Transformieren wir die Fermi-Walker-Ableitung (2.7.1) von der abstrakten Notation in die Koordinatendarstellung mittels Identifikation (2.2.2), so folgt für den ersten Summanden aus Gleichung (2.7.1)

$$\begin{aligned} \nabla_\mathbf{u} X^b &= \nabla_{u^\alpha \partial_\alpha} (X^\beta (\partial_\beta)^b) \\ &= u^\alpha \left\{ (\partial_\alpha X^\beta) (\partial_\beta)^b + X^\beta \nabla_{\partial_\alpha} (\partial_\beta)^b \right\} \\ &= u^\alpha \left\{ (\partial_\alpha X^\beta) (\partial_\beta)^b + X^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma (\partial_\gamma)^b \right\}, \end{aligned}$$

und mit der Relation

$$\frac{dX^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = u^\beta \partial_\beta X^\alpha$$

folgt

$$\nabla_\mathbf{u} X^b = \frac{dX^\beta}{d\tau} (\partial_\beta)^b + u^\alpha X^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta (\partial_\beta)^b. \quad (2.7.2)$$

Als kleinen Zwischenschritt betrachten wir den Ausdruck

$$u_e a^b - a_e u^b = g_{ec} (u^c a^b - a^c u^b). \quad (2.7.3)$$

Die kontravarianten Vektoren können wir wieder mit der Identifikation (2.7.1) ausdrücken, wohingegen wir die Matrix g_{cd} wie folgt schreiben müssen:

$$g_{ec} = g_{\rho\sigma} (dx^\rho)_e \otimes (dx^\sigma)_c. \quad (2.7.4)$$

Dabei gilt $(dx^\rho)_c (\partial_\epsilon)^c = \delta_\epsilon^\rho$. Aus Gleichung (2.7.3) wird folglich

$$g_{\rho\sigma} (u^\sigma a^\beta - a^\sigma u^\beta) (\partial_\beta)^b.$$

Faßt man alles zusammen, so lautet die Fermi-Walker-Ableitung in Koordinatendarstellung

$$\mathbb{F}_{\mathbf{u}} X^\beta = \frac{dX^\beta}{d\tau} + X^\gamma u^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta + \frac{1}{c^2} (g_{\gamma\sigma} u^\sigma a^\beta - g_{\gamma\sigma} a^\sigma u^\beta) X^\gamma. \quad (2.7.5)$$

Die Beschleunigung a^b erhält man aus

$$\begin{aligned} a^\beta (\partial_\beta)^b &= a^b = \nabla_{\mathbf{u}} u^b = u^\alpha (\partial_\alpha u^\beta) (\partial_\beta)^b + u^\alpha u^\beta \nabla_{\partial_\alpha} (\partial_\beta)^b \\ &= \frac{du^\beta}{d\tau} (\partial_\beta)^b + u^\alpha u^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta (\partial_\beta)^b, \end{aligned}$$

also

$$a^\beta = \frac{du^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\alpha u^\gamma = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (2.7.6)$$

Aus dem Vergleich mit der Geodätengleichung (2.4.4) folgt sofort, daß die Beschleunigung a^β für Geodäten identisch verschwindet.

2.7.3 Fermi-Walker-Ableitung in Tetradendarstellung

Anstelle der Koordinatenbasis tritt nun die Tetrade (e_i^b) , wobei wir die Tetradenindizes mittels lateinischen Buchstaben (i, j, k, \dots) kennzeichnen wollen. Damit läßt sich dann die abstrakte Notation wie folgt umformen:

$$X^b = X^i e_i^b. \quad (2.7.7)$$

Im ersten Schritt betrachten wir wieder zunächst den ersten Summanden aus der Gleichung (2.7.1):

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} X^b &= \nabla_{\mathbf{u}} (X^j e_j^b) = (\nabla_{\mathbf{u}} X^j) e_j^b + X^j \nabla_{\mathbf{u}} e_j^b \\ &= \frac{dX^j}{d\tau} e_j^b + X^j \nabla_{u^i e_i^a} e_j^b = \left(\frac{dX^j}{d\tau} + X^k u^i \omega_{ik}^j \right) e_j^b \end{aligned}$$

mit der Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u} = u^i e_i^a$ und den Rotationskoeffizienten $\omega_{ij}^k \mathbf{e}_k = \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j$. Weiterhin gilt:

$$X^c a_c = g_{cd} X^c a^d = g_{cd} X^j e_j^c a^i e_i^d = \eta_{ji} X^j a^i,$$

wobei wir hier ausgenutzt haben, daß die Tetrade e_i^b orthonormiert sein soll. Insgesamt erhalten wir für den Fermi-Walker-Transport in Tetradendarstellung

$$\frac{dX^j}{d\tau} + X^k u^i \omega_{ik}^j + \frac{1}{c^2} (\eta_{ki} u^i a^j - \eta_{ki} a^i u^j) X^k = 0. \quad (2.7.8)$$

In analoger Weise erhalten wir für die Tetradenkomponenten a^i der Beschleunigung

$$a^i = \frac{du^i}{d\tau} + u^k u^j \omega_{jk}^i. \quad (2.7.9)$$

2.7.4 Fermi-Walker-Transport

Der eigentliche Fermi-Walker-Transport für einen beliebigen Vektor X^b entlang der Kurve $x^b = x^b(\tau)$ mit dem Tangentenvektor $u^b = dx^b/d\tau$ lautet nun

$$\mathbb{F}_{\mathbf{u}} X^b = 0. \quad (2.7.10)$$

Das Verschwinden der Fermi-Ableitung eines raumartigen Vektors steht dafür, daß dieser nicht rotiert [86].

2.7.5 Parallel-Transport in Koordinatendarstellung

Der Parallel-Transport $\mathbb{P}_{\mathbf{u}}X^b = 0$ eines Vektors X^b geht nun aus dem Fermi-Walker-Transport $\mathbb{F}_{\mathbf{u}}X^b = 0$ dadurch hervor, daß die Bewegung auf einer Geodäten verläuft und die Beschleunigung \mathbf{a} daher identisch verschwindet. Aus Gleichung (2.7.5) folgt dann

$$\mathbb{P}_{\mathbf{u}}X^\beta = \frac{dX^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\alpha X^\gamma = 0, \quad (2.7.11)$$

wobei u^b die Vierergeschwindigkeit entlang der zeitartigen Geodäten $x^b = x^b(\tau)$ und τ die Eigenzeit ist. Wie man leicht sieht, wird der Tangentenvektor u^b an die Geodäte automatisch parallel-transportiert, da aus $\mathbb{P}_{\mathbf{u}}u^b = 0$ die Geodätengleichung (2.4.3) folgt.

2.8 Rotverschiebung

Gegeben sei eine lokale Tetrade $\{\mathbf{e}_i\}$ eines emittierenden beziehungsweise absorbierenden Objekts am Ort p . Die Geschwindigkeit \mathbf{u} des Objekts ist durch die Forderung $\mathbf{e}_0 \stackrel{!}{=} \mathbf{u}/c$ berücksichtigt. Der Wellenvektor \mathbf{k} lautet in dieser Tetrade

$$\mathbf{k} = -\omega (\mathbf{e}_0 + n^1 \mathbf{e}_1 + n^2 \mathbf{e}_2 + n^3 \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{k}^2 = 0, \quad (2.8.1)$$

mit $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$ und $(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1$. Sei nun $\{\mathbf{e}_{i,\text{obs}}\}$ die Tetrade des Beobachters und $\{\mathbf{e}_{i,\text{emit}}\}$ die Tetrade des emittierenden Objekts, wobei in der jeweiligen Tetrade die Bewegung einbezogen ist. Dann stellt der Beobachter eine Gesamtrötverschiebung z_{ges} von

$$z_{\text{ges}} = \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{emit}}} = \frac{\langle \mathbf{k}_{\text{obs}}, \mathbf{e}_{0,\text{obs}} \rangle}{\langle \mathbf{k}_{\text{emit}}, \mathbf{e}_{0,\text{emit}} \rangle} \quad (2.8.2)$$

fest.⁴ Dabei geht \mathbf{k}_{obs} durch Parallel-Transport von \mathbf{k}_{emit} entlang der Nullgeodäten, die beide verbindet, hervor. Werte von z_{ges} im Intervall $(0, 1)$ entsprechen einer Rotverschiebung, wohingegen $z_{\text{ges}} > 1$ eine Blauverschiebung darstellt.

2.9 Pseudo-kartesische Koordinaten

Die meisten Metriken, die wir in dieser Arbeit untersuchen, haben entweder eine sphärische oder eine axiale Symmetrie. Wir verwenden daher sphärische (r, ϑ, φ) oder zylindrische (r, φ, z) Koordinaten. In der euklidischen Geometrie ist die Transformation dieser Koordinaten in kartesische (x, y, z) Koordinaten wohl bekannt. So gilt für sphärische Koordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta \quad (2.9.1)$$

und für zylindrische Koordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (2.9.2)$$

In der Relativitätstheorie haben wir generell eine pseudo-Riemannsche oder Lorentzsche Geometrie vorliegen. Transformieren wir die sphärischen oder zylindrischen Koordinaten einer Metrik wieder entsprechend den Gleichungen (2.9.1) und (2.9.2), so wollen wir die resultierenden Koordinaten (x, y, z) als *pseudo-kartesische* Koordinaten bezeichnen.

Pseudo-kartesische Koordinaten werden dann wichtig, wenn wir Objekte einer Szene nicht bezüglich einer lokalen Tetrade sondern in Koordinatendarstellung angeben. Prinzipiell berechnen wir Geodäten weiterhin in den Koordinaten, in denen auch die Metrik gegeben ist. Für die Schnittberechnung mit nicht-lokalen Objekten (siehe Abschnitt §3.6.7) müssen wir sie jedoch auf pseudo-kartesische Koordinaten transformieren.

⁴Die hiesige Definition der Rotverschiebung weicht von der sonst üblichen Form $z = \nu_{\text{emit}}/\nu_{\text{obs}} - 1$ ab.

Kapitel 3

Raytracing in vierdimensionalen Raumzeiten

3.1 Raytracing Konzept

Ein Bild unserer Umgebung entsteht in unserem Gehirn oder auf einer Bildplatte, indem Licht auf unsere Netzhaut, auf einen Film oder ein CCD-Chip fällt. Dieses Licht kommt entweder direkt von einer Lichtquelle (selbstleuchtendes Objekt) oder von einem reflektierenden Objekt. In unser Auge oder in unsere Kamera gelangt jedoch nur ein geringer Bruchteil des Lichts, welches von einem Objekt im allgemeinen in alle Richtungen emittiert oder reflektiert wird. Ein Verfahren, welches diesen natürlichen Prozess simulieren würde, wäre sehr ineffizient, da der Großteil der Lichtstrahlen unnötigerweise verfolgt würde. Anstelle dessen verfolgt man Lichtstrahlen vom Auge oder der Bildplatte zurück bis zum Ort ihrer Emission — dies nennt man das *Raytracing-Verfahren* (siehe Abb. 3.1).

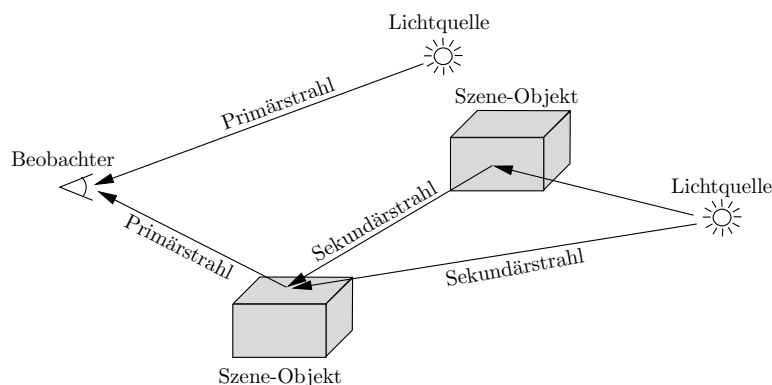


Abbildung 3.1: Prinzip des Raytracings: Lichtstrahlen werden vom Beobachter rückwärts in die Szenerie hinein verfolgt bis sie auf ein Szenerie-Objekt treffen oder das zu betrachtende Gebiet verlassen. Anschließend werden weitere Strahlen, sogenannte Sekundär- oder Schattenstrahlen, verfolgt. Die Lichtquellen und Shader der Objekte tragen so zum eigentlichen Farbwert bei.

3.2 Konventionelles Raytracing

Konventionelles dreidimensionales Raytracing geht von geradlinigen Lichtstrahlen aus und vernachlässigt die endliche Lichtlaufzeit. Ein Bild entsteht, indem zu jedem Pixel, in Abhängigkeit des Kameratyps (Loch-, Panorama-,

2π -Kamera) ein Lichtstrahl generiert wird. Dieser Primärstrahl testet nun, ob er auf eine Lichtquelle trifft oder einen Schnitt mit einem Objekt besitzt. Im letzteren Fall wird geprüft, ob das Objekt selbst leuchtet oder beleuchtet wird. Die Beleuchtung kann entweder durch eine Lichtquelle oder ein anderes, reflektierendes Objekt stattfinden. Um dies zu testen wird ein Sekundärstrahl erzeugt, der nun seinerseits einen Schnittpunkt mit allen Objekten durchführt. Die Richtung des Sekundärstrahls wird durch geometrische Faktoren (Auftrittswinkel und Beschaffenheit der Oberfläche) und physikalische Faktoren (Reflexionseigenschaften des Materials) bestimmt.

3.3 Vierdimensionales Raytracing

Beim vierdimensionalen Raytracing muß man in erster Linie die endliche Lichtlaufzeit berücksichtigen. Weiterhin geht man auch nicht mehr von statischen Objekten aus. So kann sich sowohl die Kamera wie auch jedes einzelne Objekt im Raum bewegen. Ist eine rein statische Szene — wobei wir unter einer Szene alle Objekte und Lichtquellen, jedoch nicht den Beobachter selbst verstehen wollen — gegeben, so genügt es, die Aberration des Lichts bei der Strahlrichtung zu berücksichtigen. Der eigentliche Strahl kann dann als geradliniger Strahl wie im dreidimensionalen Fall behandelt werden. Bewegen sich auch die Szenenobjekte, so muß vor jeder Schnittberechnung der Strahl mittels Lorentz-Transformation auf das entsprechende Ruhssystem transformiert werden.

Neben diesen rein geometrischen Faktoren kann man zusätzlich auch den Doppler- und Searchlight-Effekt berücksichtigen. Der Doppler-Effekt ist für die Frequenzänderung des Lichts verantwortlich, welche abhängig von der relativen Bewegung zwischen Beobachter und Objekt ist. Die Verstärkung oder Abschwächung des Strahlungsflusses (Searchlight-Effekt) wird beim vierdimensionalen Raytracing dadurch berücksichtigt, daß die Zahl der verfolgten Lichtstrahlen je Raumwinkelelement variiert.

3.4 Raytracing in komplexen Raumzeiten

Weichen wir ab von der flachen Minkowski-Raumzeit und gehen über zu komplexeren Raumzeiten¹ wie etwa dem Kollaps eines Sterns, statischen oder rotierenden Schwarzen Löchern, Wurmlöchern oder Warp-Metriken, so müssen wir gekrümmte Lichtstrahlen berücksichtigen. Allerdings werden Wellenphänomene des Lichts beim Raytracing vernachlässigt und statt dessen die Näherung der geometrischen Optik verwendet. Hierfür werden Lichtstrahlen durch Nullgeodäten dargestellt. Wird eine Raumzeit durch eine analytisch gegebene Metrik beschrieben, so ist es einfach, die Geodätengleichung numerisch zu integrieren. Ein Lichtstrahl setzt sich so aus einem Polygonzug zusammen, dessen Feinheit oder Genauigkeit vom verwendeten Integrator abhängt. Nach der Berechnung der Nullgeodäte wird diese mit allen Objekten in der Szenerie geschnitten. Dies ist ein sehr aufwendiges Verfahren, da jedes Segment des Lichtstrahls mit jedem Objekt geschnitten werden muß. Eine Abhilfe schafft hier die Aufteilung der Raumzeit in Raum-Zeit-Segmente ähnlich der Aufteilung eines dreidimensionalen Raums in Voxel.

Die Berechnung der Nullgeodäten erweist sich als das kleinste Problem bei der Visualisierung komplexer Raumzeiten. Schwieriger ist die Beschreibung von Objekten an sich in einer Raumzeit. Die Freiheit, eine Raumzeit in beliebigen Koordinaten beschreiben zu können, hat zur Folge, daß ein Objekt, wie zum Beispiel ein Würfel, in jedem Koordinatensystem anders beschrieben werden müßte, damit dieser bei der Visualisierung stets als Würfel gesehen werden könnte. Weiterhin müßte man berücksichtigen, daß ein massiver Körper sich aufgrund von Gezeitenkräften in einer gekrümmten Raumzeit verzerren würde. Es ist daher stets zu beachten, daß die Verzerrung von Objekten nicht immer nur von gekrümmten Lichtstrahlen herrühren.

Bisher haben wir noch nicht berücksichtigt, daß eine Raumzeit gegebenenfalls nicht durch eine Karte alleine beschrieben werden, sondern ein Atlas aus mehreren Karten erforderlich sein kann.² Am einfachsten ist ein Atlas dadurch zu realisieren, daß man neben den Koordinaten eines Punktes zusätzlich eine Nummer speichert, die auf die jeweilige zu verwendende Karte verweist. Im Fall eines Wurmloches könnte so zwischen den zwei Universen unterschieden werden (siehe Kapitel §6). Verläßt ein Objekt den Gültigkeitsbereich einer Karte, so muß eine Koordinatentransformation zwischen beiden Karten vermitteln.

¹Unter komplexen Raumzeiten wollen wir hier kompliziertere Raumzeiten oder solche mit nicht-trivialer Topologie verstehen. Komplex hat hier also nichts mit der Menge der komplexen Zahlen zu tun.

²Zum Begriff einer Karte bzw. eines Atlas siehe Kapitel §2.

3.5 RayViS

Die zu Beginn dieser Arbeit zugrundeliegende Raytracing Software war RayViS. Zunächst als reiner konventioneller dreidimensionaler Raytracer von Alwin Gröne [45] entwickelt, wurde dieser von Daniel Weiskopf [109] auf vierdimensionales Raytracing erweitert und parallelisiert. Die Erweiterung von RayViS zur Visualisierung komplexer Raumzeiten, auf die wir hier nicht eingehen wollen, wurde vom Autor [70] vorgenommen. Wir greifen hier nur einige, für das vierdimensionale Raytracing notwendige, Strukturen heraus und verweisen sonst auf die Arbeiten von Alwin Gröne [45] und Daniel Weiskopf [109].

3.5.1 Basis-Protokoll

Die objektorientierte Programmierung eignet sich sehr gut für die Implementierung des Raytracing-Verfahrens. Die Klassenstruktur von RayViS ist in Abbildung 3.2 vereinfacht skizziert.

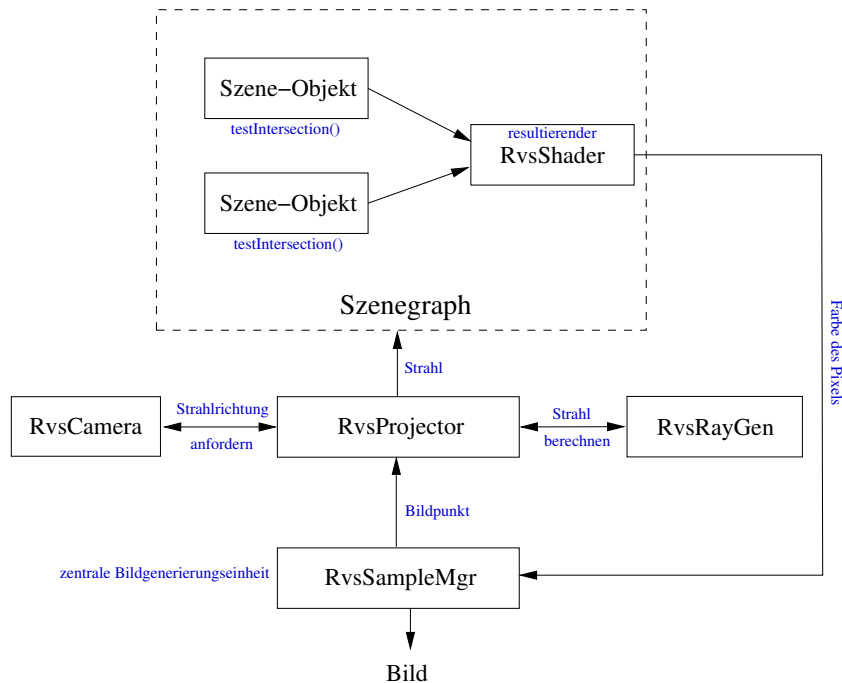


Abbildung 3.2: Basisprotokoll von RayViS. Die einzelnen Blöcke repräsentieren die Klassenstruktur, welche das Raytracing-Verfahren darstellen. Eine genauere Erklärung findet sich im Text.

Die wichtigste Klasse ist der Sample-Manager, der die zentrale Bildgenerierungseinheit darstellt. Er gibt den zu rendernden Bildpunkt an den Projektor weiter. Dieser fordert von der Kamera eine zugehörige Strahlrichtung an, welche er an den Strahlgenerator weitergibt. Der berechnete Strahl wird anschließend vom Projektor an den Szenegraph weitergeleitet, der nun sämtliche Objekte mit dem Strahl schneidet. Das Resultat dieser Schnittberechnung ist ein Shader, der einen Farbwert berechnet und ihn an den Sample-Manager zurückgibt, welcher letztendlich das Bild ausgibt. Der Strahlgenerator (`RvsRayGen`) ist beim einfachen dreidimensionalen Raytracing nicht notwendig, da durch den Strahlursprung und die Strahlrichtung der Lichtstrahl bereits vollständig beschrieben ist. Allerdings spielt er eine entscheidende Rolle beim vierdimensionalen Raytracing im nächsten Abschnitt.

3.5.2 Erweiterungen für vierdimensionales Raytracing

Die Vorteile der objektorientierten Programmierung treten nun bei der Erweiterung auf vierdimensionales Raytracing zutage. Sofern wir es nur mit der flachen Minkowski-Raumzeit zu tun haben und der Beobachter sich durch eine ruhende Szenerie bewegt, genügt es, den Projektor (`RvsProjector`) dahingehend zu modifizieren, daß er einen Lichtstrahl zunächst vom bewegten Beobachtersystem auf das Ruhsystem der Szenerie transformiert. Anschließend kann die Strahltraversierung durch die Szenerie als reine dreidimensionale Schnittberechnung durchgeführt werden. Bewegen sich jedoch die Objekte der Szenerie oder haben wir es mit einer komplexeren Raumzeiten zu tun, so muß man noch weitere Modifikationen vornehmen.

Wie bereits erwähnt spielt der Strahlgenerator (`RvsRayGen`) dann eine wichtige Rolle, wenn er die Erzeugung der Lichtstrahlen in einer (gekrümmten) Raumzeit übernehmen soll. Nach Vorgabe eines Beobachterorts und einer Blickrichtung durch die Kamera übernimmt der Strahlgenerator der jeweiligen Raumzeit die Aufgabe, den zugehörigen Lichtstrahl (`RvsPolRay4D`) zu berechnen indem er die Geodätengleichung integriert und daraus einen Polygonzug erstellt. Dieser besteht aus einem Array von vierdimensionalen Punkten.

Da die Lichtstrahlen nun als Polygonzüge beschrieben werden, müssen sämtliche Szene-Objekte mit einer Schnittberechnung aufgerüstet werden, die jedes Segment des Polygonzuges auf Schnitt mit dem Objekt testet. Eben diese aufwendigen Schnittberechnungen machen es erforderlich, die Bildberechnung zu parallelisieren.

3.5.3 Erweiterungen für Raytracing in komplexen Topologien

Unter Raumzeiten mit komplexen Topologien wollen wir solche verstehen, welche nur bedingt mit einer Karte oder nur durch einen Atlas beschrieben werden können. Darunter fallen die hier betrachteten Raumzeiten: Kollaps eines sphärisch-symmetrischen Staubsterns und Wurmlöcher. Wie bereits erwähnt wird das Konzept des Atlas durch Hinzunahme einer Kartenummer zu den Punkten einer Raumzeit realisiert. Ein Lichtstrahl besteht daher aus einem Polygonzug, dessen einzelne Elemente fünfdimensionale Punkte sind; dabei stehen vier Dimensionen für die Koordinaten und eine Dimension für die Kartenummer. Alle Szene-Objekte tragen nun ebenfalls eine Nummer, die ihre Zugehörigkeit zu einer bestimmten Karte symbolisiert. Bei der Schnittberechnung werden zunächst die Kartenummern eines Strahlsegments und eines Objekts verglichen und erst dann die eigentliche Schnittberechnung durchgeführt.

3.5.4 Wahl der Koordinaten

Im Prinzip ist das Raytracing-Verfahren koordinatenunabhängig, da genau das visualisiert wird, was ein Beobachter tatsächlich sehen würde. Das Problem ist jedoch, daß jedes Szene-Objekt durch Koordinaten dargestellt werden muß. In `RayVis` ist die Schnittberechnung eines Lichtstrahls mit einem Szene-Objekt jedoch nur in sogenannten pseudo-kartesischen Koordinaten realisiert. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Koordinaten einer Raumzeit, wie etwa sphärische Koordinaten der Schwarzschild-Raumzeit, wie in der euklidischen Geometrie auf kartesische Koordinaten umgerechnet werden können. Ein so entstehendes kartesisches Gitter besitzt im allgemeinen keine rechten Winkel mehr. Ein Würfel in pseudo-kartesischen Koordinaten kann daher ein ungewohntes Bild ergeben, welches nicht nur aufgrund der gekrümmten Lichtstrahlen entsteht.

Obwohl `RayVis` so konzipiert wurde, daß es leicht zu erweitern ist, stieß es gerade im Hinblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie und deren Koordinatenunabhängigkeit auf enge Grenzen, weshalb sich der Autor entschloß, eine neu überarbeitete Raytracing-Software (`GeoVis`) zu entwickeln.

3.6 GeoVis

Das Raytracingsystem `GeoVis` (Geodesic Visualization System) ist kein vollständig neu entwickelter Code, sondern übernimmt einige Strukturen des ursprünglichen 3d-Systems `RayVis`, welche keine Änderungen beim Übergang zum relativistischen Raytracing benötigen. Gründe, die zur Entscheidung führten, einen eigenständigen Code zu entwickeln waren unter anderem folgende: es sollte

- ein einfacherer Einbau einer beliebigen Lorentz-Metrik,
- die Behandlung nichttrivialer Topologien (Atlas),
- die Auswahl von verschiedenen Integratoren für die Geodätenintegration,
- der Einbau lokaler Objekte (lokale Tetrade) und
- die 4D-Bewegung von Beobachter und Objekten

möglich sein. Zudem sollte mit Hilfe einer flexibleren und programmierbaren Szenenbeschreibungssprache (SDL=*scene description language*) eine übersichtlichere Szenedatei und eine einfachere Filmerstellung ermöglicht werden. Außerdem war das Ziel, einen etwas deutlich strukturierteren, moderneren, sowie stabileren Code zu entwickeln. So konnte auf Teilen von GeoViS, insbesondere auf den Metrik- und Integrator-Klassen, eine zusätzliche Software zur Geodätenveranschaulichung (GvsGeodViewer, siehe Abs. §3.7) programmiert werden. Prinzipiell ist auch der Einbau von Lichtquellen in der Minkowski-Metrik und gegebenenfalls anderen Raumzeiten, von denen man eine analytische Lösung der Geodätengleichung besitzt, möglich. Neben dem Lichtstrahl selbst könnte auch die Polarisation des Lichts berücksichtigt werden.

Nach der Vorstellung des Basis-Protokolls zur Bildberechnung im nächsten Abschnitt wollen wir in den darauffolgenden Abschnitten näher auf die Hauptklassen von GeoViS eingehen, ihre Besonderheiten aufzeigen und gegebenenfalls das interne Protokoll näher beleuchten.

3.6.1 Basis-Protokoll und Sample-Manager von GeoViS

Die Basis-Struktur in GeoViS wurde in weiten Bereichen von RayViS übernommen (vgl. Abb. 3.2 und 3.3). Da aber GeoViS im Gegensatz zu RayViS speziell für vierdimensionales Raytracing ausgelegt wurde, weichen insbesondere die Strahlerzeugung und die Darstellung der Objekte von RayViS ab.

Der Sample-Manager ist im wesentlichen von RayViS übernommen. Neu dabei ist die Möglichkeit, die Rotverschiebung als Bild und vor allem als Datenfile³ rauszuschreiben. Ein Bild kann entweder Pixel für Pixel, oder in einzelnen Blöcken — zwischenliegende Punkte werden interpoliert — gerendert werden. Die Bildkoordinaten (x, y) werden dem Projektor (siehe Abschnitt §3.6.6) übergeben, der die zugehörige rgb-Farbe und gegebenenfalls die Rotverschiebung z ermittelt. Neben der Rotverschiebung können auch die Emissionszeitpunkte der Lichtstrahlen als Datenfile extrahiert werden.⁴

3.6.2 Basisklasse

Die Basisklasse nahezu aller Klassen ist **GvsBase**. Ihre Aufgabe besteht lediglich darin, die Parameter der abgeleiteten Klassen zu verwalten. So können alle „aktivierten“ Parameter der Unterklassen über ihren Parameternamen angesprochen und geändert werden. Die „Aktivierung“ geschieht durch die Methode

```
addParam("paramName", paramType);
```

wobei der Parametername und der Parametertyp (double, P5D,...) übergeben werden. Sofern der Parametername bereits vorhanden ist, wird eine Fehlermeldung ausgegeben und das Programm beendet. Das Setzen eines Parameters geschieht dann durch die Methode

```
setParam("paramName", paramValue);
```

welche in der Regel erst am Schluß beim Aufbau der Szenerie für jedes Einzelbild aufgerufen wird.

³Die Daten werden im hdf5-Format (<http://hdf.ncsa.uiuc.edu/HDF5/>) rausgeschrieben.

⁴Die Emissionszeitpunkte sind dann von Interesse, wenn z.B. ein einzelnes Objekt Helligkeitsschwankungen unterworfen ist, die man nachträglich modifizieren möchte. Siehe dazu auch Abschnitt §5.6.1.

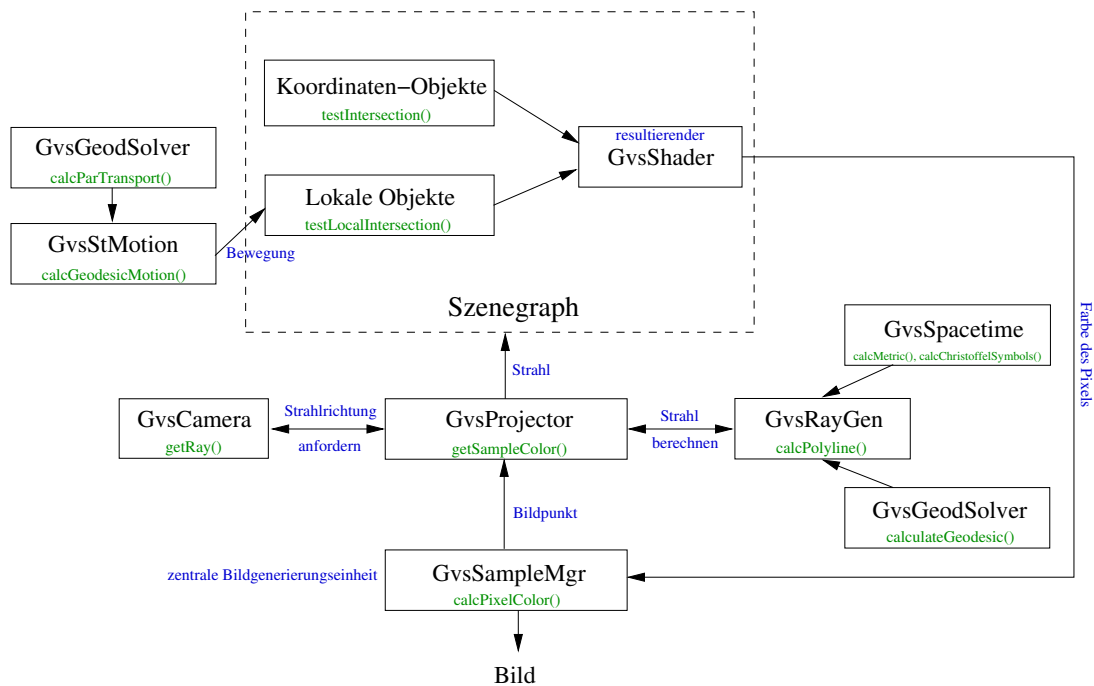


Abbildung 3.3: Basisprotokoll von *GeoVis*. Die einzelnen Blöcke repräsentieren die Klassenstruktur, welche das Raytracing-Verfahren darstellen. Im Gegensatz zu *RayVis* sind die Szenen-Objekte in Koordinaten- und lokale Objekte untergliedert, wobei letzteren auch eine Bewegung (***GvsStMotion***) zugeordnet werden kann. Der Strahlgenerator wird nun durch die Raumzeit-Klasse (***GvsSpacetime***) und die Geodätenintegratorklasse (***GvsGeodSolver***) unterstützt. Eine genauere Erklärung befindet sich im Text.

3.6.3 Raumzeiten

Ein fundamentaler Baustein in *GeoVis* sind die Raumzeiten (***GvsSpacetime***), deren Klassenstruktur in Abbildung 3.4 dargestellt ist. Diese Klassen-Struktur trägt der Tatsache Rechnung, daß eine Raumzeit-Mannigfaltigkeit entweder durch eine einzelne Karte bzw. Metrik oder durch einen Atlas beschrieben werden kann. Die Karten eines Atlas werden, jede für sich, als einzelne Metrik implementiert. Der Atlas ist dann dafür verantwortlich, die Koordinatentransformationen am Kartenrand und auf pseudo-kartesische Koordinaten bereitzustellen.

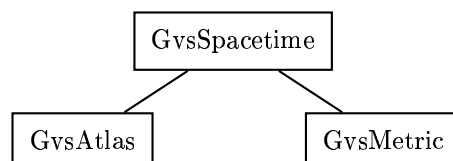


Abbildung 3.4: Klassen-Struktur der Raumzeiten. Die abgeleitete Metrik-Klasse ***GvsMetric*** ist die Mutterklasse der einzelnen Metriken wie z.B. der Schwarzschild- oder der Morris-Thorne-Metrik. Von der Atlas-Klasse werden die einzelnen Atlanten abgeleitet.

Da eine Raumzeit stets in Koordinaten beschrieben wird, stellt die Mutterklasse ***GvsSpacetime*** hierfür zwei Attribute zur Verfügung. Dies sind zum einen der Koordinatentyp (`CoordType`) — zum Beispiel kartesisch, sphärisch oder zylindrisch — und zum anderen eine Charakterisierung einer einzelnen Koordinate (`CoordinateType`), ob sie etwa linear oder periodisch ist. Weiterhin sind in der Mutterklasse auch die zugehörigen Transformatio-

nen `coordTransf()` zwischen den Koordinatentypen implementiert, wobei insbesondere die Transformation in (pseudo-)kartesische Koordinaten wichtig ist (siehe Abs. §3.6.7). Die Transformationen können von den Kindklassen überladen werden, was vor allem dann wichtig wird, wenn eine andere Transformation vorgeschaltet werden soll. Als Beispiel dient hier die Morris-Thorne-Metrik (siehe Abs. §6.2), bei der zunächst von Eigenradial- auf Radialkoordinaten und im Anschluß daran auf pseudo-kartesische Koordinaten transformiert wird.

In den meisten Fällen liegt eine Metrik in geometrischen Einheiten (siehe Anhang §A.3.5) vor. Allerdings können wir auch physikalische Einheiten verwenden oder zum Beispiel die Lichtgeschwindigkeit künstlich herabsetzen indem wir die entsprechenden Parameter der `GvsSpacetime`-Klasse ändern.

Metrik

Die Hauptaufgabe einer Metrik ist die Berechnung der Metrik-Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ sowie der Christoffel-Symbole $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ in ihren Koordinaten x^{μ} ($\mu = 0, \dots, 3$). Der Gültigkeitsbereich dieser Koordinaten kann durch die Methode `breakCondition()` eingeschränkt werden, wobei auf Koordinatensingularitäten und nicht definierte Bereiche geprüft wird. Weiterhin stellt die Metrik die Umrechnung von Punkten und Vektoren zwischen der natürlichen lokalen Tetrade⁵ und der Koordinatendarstellung bereit.

Am Beispiel der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_s/r} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

wollen wir kurz diese Aspekte verdeutlichen. Der Gültigkeitsbereich der Radial-Koordinate r ist hier aufgrund des Ereignishorizonts auf $r > r_s$ beschränkt. Die Zeitkoordinate t hingegen unterliegt keiner solchen Schranke. Obwohl die eigentlichen sphärischen Koordinaten ϑ und φ auf die Intervalle $(0, \pi)$ beziehungsweise $(0, 2\pi)$ beschränkt sind, können sie hier zunächst beliebige Werte annehmen. Allerdings werden diese Werte dann auf die entsprechenden Intervalle abgebildet (siehe Abs. §2.1).

Sei ein Vektor \mathbf{u} gegeben, so lautet dessen Tetraden-Darstellung $u^{\alpha} = (u^t, u^r, u^{\vartheta}, u^{\varphi})$,

$$\mathbf{u} = u^t \mathbf{e}_t + u^r \mathbf{e}_r + u^{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + u^{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi},$$

wobei

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}} \partial_t, \quad \mathbf{e}_r = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \partial_r, \quad \mathbf{e}_{\vartheta} = \frac{1}{r} \partial_{\vartheta}, \quad \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_{\varphi}$$

die natürliche lokale Tetrade der Schwarzschild-Metrik repräsentiert. Die Koordinaten-Darstellung \tilde{u}^{μ} von \mathbf{u} lautet daher

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{u^t}{\sqrt{1 - r_s/r}} \partial_t + u^r \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \partial_r + \frac{u^{\vartheta}}{r} \partial_{\vartheta} + \frac{u^{\varphi}}{r \sin \vartheta} \partial_{\varphi} \\ &= \tilde{u}^t \partial_t + \tilde{u}^r \partial_r + \tilde{u}^{\vartheta} \partial_{\vartheta} + \tilde{u}^{\varphi} \partial_{\varphi}. \end{aligned}$$

Die beiden Methoden `localToCoord()` ($u^{\mu} \mapsto \tilde{u}^{\mu}$) und `coordToLocal()` ($\tilde{u}^{\mu} \mapsto u^{\mu}$) vermitteln zwischen diesen beiden Darstellungen. Sind mehrere natürliche lokale Tetraden, wie etwa bei der Kerr-Metrik in Boyer-Lindquist-Koordinaten, definiert, so kann bei beiden Methoden noch ein zusätzlicher Parameter (`GvsLFTType`) übergeben werden, der angibt, welche Tetrade zu verwenden ist.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Bestimmung des Abstands zweier benachbarter Punkte in einer Raumzeit. Unter dem Abstand zweier Punkte wollen wir einerseits die räumliche (*spacedist*), Δ_{space} , und andererseits die zeitliche (*timedist*), Δ_{time} , Projektion dieses Abstandes verstehen. Hierfür stellt die Methode `coordDiff()` zunächst die Berechnung von Koordinatendifferenzen Δx^{μ} unter Berücksichtigung der Periodizität einer Koordinate zur Verfügung,

$$\Delta x^{\mu} = (x_2^{\mu} - x_1^{\mu})_{\text{mod}}$$

⁵Details zur lokalen Tetrade befinden sich im Abschnitt §3.6.5 und im Kapitel §2.

wobei x_i^μ die Koordinaten eines Punktes oder Ereignisses und $()_{\text{mod}}$ die Modulo-Funktion mit der Periode der Koordinaten x^μ darstellt. Räumlicher und zeitlicher Abstand definieren wir dann wie folgt,

$$\Delta_{\text{space}} = \sum_{\substack{\mu, \nu=0, \dots, 3 \\ \mu, \nu \neq \text{timelike}}} g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad \text{bzw.} \quad \Delta_{\text{time}} = - \sum_{\substack{\mu, \nu=0, \dots, 3 \\ \mu, \nu = \text{timelike}}} g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu,$$

wobei in jedem Koordinatensatz $\{x^\mu\}$ eine Koordinate als Zeitkoordinate mit dem Attribut `timelike` ausgezeichnet wird. Beide Abstände werden durch die Methode `calcDist()` berechnet. Es sei darauf hingewiesen, daß dieser Abstand nicht der tatsächliche raumartige Abstand ist, der durch die Verbindung beider Punkte mittels einer raumartigen Geodäte entsteht, sondern lediglich einer ersten Näherung entspricht. Im allgemeinen läßt sich der exakte raumartige Abstand nur sehr aufwendig ermitteln, es sei denn, es liegt eine analytische Lösung der Geodätengleichung vor.⁶

Die Koordinatendifferenz können wir auch noch zur Umrechnung einzelner Punkte von der Koordinatendarstellung in eine lokale Tetrade mit der Methode `transToNatLocTed()` verwenden. Prinzipiell kann jeder Punkt transformiert werden, sinnvoll ist jedoch nur ein Punkt, der sich nahe dem Ort der lokalen Tetrade befindet. Was hier „nahe“ bedeutet hängt von der Krümmung der Raumzeit ab und ist nicht pauschal zu beantworten. Auch hier gilt wieder, daß die Umrechnung nur in erster Näherung stimmt.

Das Setzen und Verändern von Parametern einer Metrik kann direkt durch die Parameternamen mittels der Methode `setParam()`, wie in Abschnitt §3.6.2 bereits erwähnt, erfolgen. In der Regel ist ein Metrik-Parameter vom Typ `double`. Um auch Funktionen⁷, wie sie etwa für eine allgemeine Wurmloch-Metrik gebraucht werden, übergeben zu können, lassen sich auch `string`-Werte als Parameter setzen.

Zur Verwendung im Geodätenbetrachter „GvsGeodViewer“ (siehe Abs. §3.7) kann in der Metrik-Klasse auch noch eine Einbettungsfunktion eingebaut werden. Außerdem ist der Einbau einer analytischen Lösung der Geodäten-gleichung vorgesehen.

Atlas

Mit der Atlasklasse ist es möglich, auch Raumzeiten mit nicht-trivialer Topologie, welche nicht mehr durch eine Metrik alleine beschrieben werden können, zu realisieren. Die Metriken aus denen der Atlas besteht müssen zunächst, jede für sich, als Metrik implementiert und anschließend in der Atlasklasse zusammengestellt werden. Die Berechnung der Metrik-Koeffizienten und Christoffel-Symbole wird, abhängig von der Kartenummer, an die jeweilige Metrik-Klasse weitergeleitet.

Die wichtigste Methode, die in jeder abgeleiteten Atlas-Klasse vorhanden sein muß, ist `chartChanged()`, welche prüft, ob ein Kartenwechsel notwendig ist und diesen dann gegebenenfalls durchführt. Die restlichen Methoden gleichen denen einer Metrik und leiten die jeweilige Berechnung an die zugehörige Metrik weiter.

In Einzelfällen, wie etwa beim einfachsten Morris-Thorne-Wurmloch aus Abschnitt §6.3, können wir einen Atlas auch durch eine einzige Karte simulieren. Die Kartenummer, welche wir bei jedem Segment eines Lichtstrahl speichern, können wir dabei verwenden, unterschiedliche Transformationen auf pseudo-kartesische Koordinaten zu definieren (siehe Anhang §E.2.3).

3.6.4 Geodäten

Ein weiterer fundamentaler Baustein in `GeoVis` sind die Geodätenintegratoren. Geodäten spielen in zweierlei Hinsicht eine dominante Rolle. Zum einen repräsentieren Nullgeodäten die Lichtstrahlen, die in die Szene zurückverfolgt werden. Zum anderen beschreiben zeitartige Geodäten die Bewegung von Testteilchen, welche zur Visualisierung einer Raumzeit hilfreich und teilweise auch notwendig sind.

Zur Integration der Geodätengleichung steht die Klassenstruktur aus Abbildung §3.5 zur Verfügung.

Die Basis-Klasse der Integratoren (`GvsGeodSolverBase`) speichert den Typ (`light-`, `time-`, `spacelike`) sowie die zeitliche Richtung (`backward`, `forward`) und die räumliche Richtung (`co-`, `contradir`) einer Geodäten. Unter der

⁶Mehr zu Geodäten im nächsten Abschnitt und im Kapitel §2.

⁷Die Behandlung von Funktionen in `GeoVis` ist in Abschnitt §3.6.12 beschrieben.

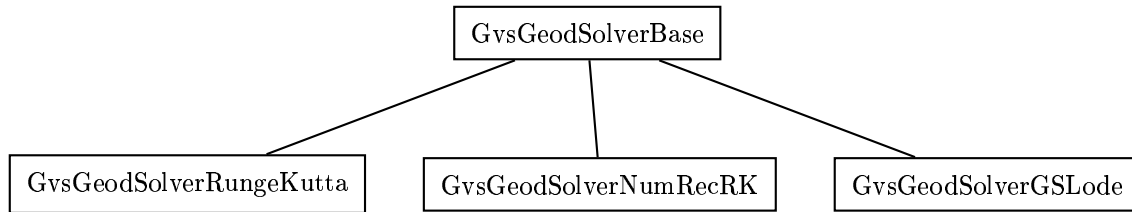


Abbildung 3.5: Klassen-Struktur der Geodäten-Integratoren. Von der Mutterklasse sind die drei Integratoren: einfacher Runge-Kutta-Integrator zweiter Stufe, Runge-Kutta-Integrator vierter Stufe mit Schrittweitensteuerung (Numerical Recipes [78]) und die ODE-Integratoren der GSL abgeleitet.

räumlichen Richtung wollen wir hier das Vorzeichen eines dreidimensionalen Richtungsvektors verstehen, wobei ‚co‘ für positives und ‚contra‘ für negatives Vorzeichen steht.

Die Bewegung eines Testteilchens wird als zeitartige Geodäte beschrieben, welche sowohl in die Zukunft (forward, codir), als auch in die Vergangenheit (backward, contradir) integriert werden kann. Betrachtet man jedoch Nullgeodäten zum Zweck des Raytracings, so handelt es sich um lichtartige Geodäten, welche in die Vergangenheit (backward, codir) integriert werden müssen (Abb. 3.6).

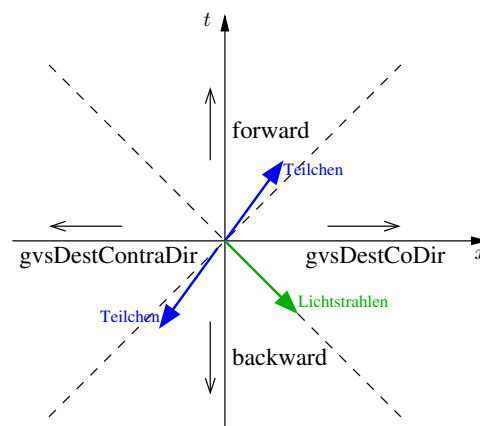


Abbildung 3.6: Integrationsrichtungen bezüglich einer lokalen Tetrade (lokales Minkowski-System). Die gestrichelte Linie kennzeichnet den Lichtkegel. Eine licht- oder zeitartige Geodäte kann von einem Punkt aus sowohl rückwärts in die Vergangenheit als auch vorwärts in die Zukunft gerechnet werden. Geben wir einen Richtungsvektor als Geschwindigkeitsvektor eines Teilchens oder eine Blickrichtung eines Beobachters vor, so können wir entlang (codir) oder entgegengesetzt (contradir) der Richtung integrieren.

Wichtig bei der Integration einer Geodäten sind die Anfangsbedingungen. Da es sich bei der Geodätengleichung um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, können wir auch zwei Anfangswerte vorgeben. Dies ist zum einen der Startort, welcher durch den Projektor (siehe Abschnitt §3.6.6) vorgegeben wird, und zum anderen die Startrichtung, welche bezüglich einer lokalen Tetrade (siehe Abschnitt §3.6.5) oder auch direkt in Koordinaten angegeben werden kann.

Die Wahl eines Raytracing-Integrators hängt entscheidend von der Szenerie ab. Besteht die Szene nur aus ruhenden Objekten, kann ein Integrator mit Schrittweitensteuerung verwendet werden. Bewegen sich jedoch einige Objekte, so muß man in der Regel die Schrittweitensteuerung vermeiden, da ansonsten die Interpolation zwischen den einzelnen Punkten so schlecht wird, dass die Schnittmethode mit dem bewegten Objekt unvollständig oder sogar falsch wird. Der Integrator für eine geodätische Bewegung sollte im allgemeinen keine Schrittweitensteuerung besitzen. Für einen bewegten Beobachter hat es dann den Vorteil, daß er zum Beispiel in gleichen Eigenzeitinter-

vallen jeweils ein Bild aufnehmen kann.

Die Integration der Geodätengleichung ergibt eine Kurve, welche aus lauter einzelnen Segmenten besteht, deren Gesamtheit wir als „Polyline“ bezeichnen wollen. Begrenzt wird die Integration im wesentlichen durch drei Schranken. Dazu gehört die maximale Anzahl an Punkten, die wir für eine Geodäte zulassen wollen. Dabei müssen wir berücksichtigen, daß die Anzahl hoch genug ist, damit alle Objekte geschnitten werden, aber klein genug ist, um die Rechenzeit nicht unnötig in die Höhe zu treiben. Eine zweite Schranke ist die Vorgabe einer „BoundingBox“, die eine Art Definitionsbereich der Koordinaten festlegt. Natürlich müssen alle Objekte innerhalb dieser „BoundingBox“ liegen. Sie sollte jedoch nicht zu groß sein, um ebenfalls nicht die Rechenzeit zu verlängern. Zuletzt wird die dritte Schranke durch die Raumzeit selbst gegeben, welche zum Beispiel innerhalb eines Gebietes nicht mehr definiert ist. In der Schwarzschild-Metrik ist der Ereignishorizont solch eine dritte Schranke. Eine zusätzliche Abbruchbedingung ist der Test, ob die Geodäte die Zwangsbedingung (2.4.5) erfüllt.

Neben der eigentlichen Geodätenintegration ist auch die gleichzeitige Integration des Parallel-Transports einer lokalen Tetrade implementiert. Der Parallel-Transport ist dann wichtig, wenn sich entlang der Geodäten ein Objekt bewegt, welches bezüglich einer lokalen Tetrade beschrieben wird. Andererseits ist der Parallel-Transport auch bei Nullgeodäten denkbar, um die Polarisierung des Lichts zu berücksichtigen.

Die verwendeten Integratoren sind: ein einfacher Runge-Kutta-Integrator zweiter Ordnung, der Runge-Kutta-Integrator vierter Ordnung mit Schrittweitensteuerung aus den Numerical Recipes [78] und sämtliche Integratoren gewöhnlicher Differentialgleichung (ODE) der GSL⁸.

3.6.5 Lokale Tetrade

Eine lokale Tetrade hat zum einen die Funktion, den Bezugsrahmen für einen lokalen Beobachter — in Form des Projektors — zu liefern und andererseits das lokale Bezugssystem eines Testteilchens bereitzustellen. Die Klasse **GvsLocalTetrad** speichert hierfür die momentane Position, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Koordinaten sowie die vier Tetraden-Vektoren e_α und deren duale Vektoren b^α . Für die Vektoren kann noch angegeben werden, ob sie bezüglich einer natürlichen Tetrade \hat{e}_α (`inCoords=false`) oder in Koordinaten (`inCoords=true`) dargestellt werden sollen,

$$e_\alpha = \hat{e}_\alpha^\beta \hat{e}_\beta \quad \text{bzw.} \quad e_\alpha = e_\alpha^\mu \partial_\mu,$$

wobei auch mehrere natürliche Tetraden, wie etwa bei der Kerr-Metrik, mittels dem Argument `lfType` berücksichtigt werden können. Die Eingabe der Tetraden-Vektoren wird dadurch erleichtert, daß die Vektoren lediglich grob angegeben werden brauchen. Die Methode `adjustTetrad()` ermittelt zunächst die Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} und richtet den Tetraden-Vektor e_0 nach diesem aus, $e_0 = \mathbf{u}/c$. Die anderen Tetraden-Vektoren werden anschließend mit dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren (siehe Abschnitt §2.3.3) zu einer orthonormalen Tetrade vervollständigt. Ob am Schluß eine rechtshändige Tetrade vorliegt, kann mit der Methode `isRightHanded()` abgefragt werden.

Mit den Methoden `localToCoord()` und `coordToLocal()` können Richtungsvektoren \mathbf{y} von der lokalen Tetrade in Koordinaten und umgekehrt transformiert werden. Mit $\mathbf{y} = y^\alpha e_\alpha = \tilde{y}^\mu \partial_\mu$ folgt für diese beiden Transformationen,

$$y^\alpha \xrightarrow{\text{localToCoord}} \tilde{y}^\mu = y^\alpha e_\alpha^\mu \quad \text{und} \quad \tilde{y}^\mu \xrightarrow{\text{coordToLocal}} y^\alpha = \tilde{y}^\mu e_\mu^\alpha.$$

beziehungsweise mit $\mathbf{y} = \hat{y}^\alpha \hat{e}_\alpha = \tilde{y}^\mu \partial_\mu$ folgt

$$\hat{y}^\alpha \xrightarrow{\text{localToCoord}} \tilde{y}^\mu = \hat{y}^\alpha \hat{e}_\alpha^\beta e_\beta^\mu \quad \text{und} \quad \tilde{y}^\mu \xrightarrow{\text{coordToLocal}} \hat{y}^\alpha = \tilde{y}^\mu e_\mu^\beta \hat{e}_\beta^\alpha.$$

Diese Transformationen sind von großer Bedeutung, da Blickrichtungen und Geschwindigkeiten in der Regel im lokalen System angegeben werden. Neben den Richtungen benötigen wir aber auch die Transformation von einzelnen Punkten von der Koordinatendarstellung in die lokale Tetrade (`transToLocTetrad`) und wieder zurück (`transToCoords`).

⁸GNU Scientific Library (ODE): http://www.gnu.org/software/gsl/manual/gsl-ref_25.html

Die lokale Tetrade kennt auch die Metrik, die an ihrem Ort gegeben ist und speichert eine „Raumzeit-Box“, sofern sie das Bezugssystem für Testteilchen darstellt. Diese „Raumzeit-Box“ hat die Form $I \times S^2$, wobei das zeitliche Intervall I im Fall von ruhenden Objekten unbeschränkt, bei bewegten Objekten jedoch beschränkt ist. Räumlich entspricht sie einer Kugel mit Radius R , wobei R die Länge der Diagonalen der tatsächlichen „Bounding-Box“ aller Objekte (siehe Abschnitt §3.6.7) im lokalen System ist. Die „Raumzeit-Box“ dient bei der Schnittberechnung dazu, zunächst einen Schnitt zwischen dem Lichtstrahl und ihr durchzuführen, bevor die Umrechnung des Strahls in die lokale Tetrade und die Schnittberechnung mit den lokalen Objekten stattfindet. Dies hat den einfachen Grund, daß zunächst ein schneller Schnittest durchgeführt werden kann, bevor eine eventuell lange Schnittberechnung mit vielen Einzelobjekten fällig wird.

3.6.6 Projektor

Der Projektor repräsentiert den eigentlichen Beobachter der Szenerie. Er stellt das lokale Bezugssystem — in Form einer lokalen Tetrade oder einer Bewegung — zur Verfügung innerhalb dem die Kameraorientierung festgelegt werden kann. Es ist also seine Aufgabe, den Beobachtungsort, die Beobachtungszeit und die Orientierung des Beobachtersystems bereitzustellen.

Vom Sample-Manager erhält der Projektor nach und nach die zu berechnenden Bildkoordinaten (ξ, η) . In der Methode `getRayDir()` läßt sich der Projektor, von der entsprechenden Kamera, aus einer bestimmten Bildkoordinate (ξ_i, η_i) eine Startrichtung \mathbf{y}_i bezüglich der lokalen Tetrade berechnen. Diese Richtung transformiert er gleich in die Koordinatendarstellung und läßt durch den Strahlgenerator aus seinem Standort und dieser Startrichtung einen Lichtstrahl erzeugen. Den vollständigen Strahl übergibt er dann dem Szenegraphen, der auf Schnitte mit den einzelnen Objekten testet. Liegt ein Schnitt vor, so wird der zugehörige Shader nach dem einfallenden Licht (`getIncidentLight`) gefragt. Besitzt die Metrik eine analytische Lösung für die Geodätengleichung, so kann ein Schattenstrahl losgeschickt werden. Ansonsten wird beim vierdimensionalen Raytracing nur ambientes Licht berücksichtigt.

Hat die Kamera einen „Filter“ für die Rotverschiebung (`gvsCamFilterRGBz`), dann wird diese, wie im Abschnitt §2.8 beschrieben, berechnet und in einem Datenfile⁹ gespeichert. Sofern es sich bei dem geschnittenen Objekt um ein Objekt in Koordinatendarstellung handelt, muß zunächst eine lokale Ruhetetrade am Ort des Schnittpunkts erzeugt werden, um die Rotverschiebung korrekt berechnen zu können.

3.6.7 Objekte

Ein Objekt können wir sowohl als Koordinaten-Objekt wie auch als lokales Objekt beschreiben. Unter einem Koordinaten-Objekt wollen wir ein Objekt verstehen, dessen Maßangaben, wie etwa die Kantenlänge oder der Mittelpunkt einer Kugel, in pseudo-kartesischen Koordinaten (siehe Abschnitt §2.9) dargestellt sind. Im Gegensatz dazu beschreiben wir ein lokales Objekt durch euklidische Koordinaten in einer lokalen Tetrade, deren Position und Geschwindigkeit wir wiederum in Koordinaten angeben müssen. Die generelle Klassenstruktur ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Ein lokales Objekt selbst besitzt jedoch keinen Zugang zu einer lokalen Tetrade sondern muß in einem Verbund, dem sogenannten Local-Compound-Object (`GvsLocalCompObj`) beschrieben werden.

Der Unterschied zwischen Koordinaten- und lokalem Objekt kommt insbesondere bei der Schnittberechnung (`test(Local)Intersection`) mit einem Lichtstrahl zum tragen. Prinzipiell wird ein Lichtstrahl zunächst komplett erzeugt, wobei komplett hier so zu verstehen ist, daß die Geodätengleichung soweit integriert wird, bis eine Abbruchbedingung erfüllt ist. Der komplette Strahl wird anschließend an das Objekt übergeben, welches auf einen Schnitt mit dem Strahl testet.

Befinden sich mehrere Objekte in einem Verbund, so wird eine sogenannte „Bounding-Box“, welche alle Objekte umfaßt, erzeugt. Diese „Bounding-Box“ ergibt sich aus den natürlichen „Bounding-Boxen“ (kleinste objektumfassende Box) der einzelnen Objekte durch einfache Überlagerung.

Im einzelnen speichert das Szene-Objekt (`GvsSceneObj`) den Objekttyp, den Pointer auf die komplette Raumzeit und die Bewegung des Objekts. Die Kenntnis der Raumzeit ist notwendig, um den Lichtstrahl vor dem Schnitt

⁹Die Daten werden im hdf5-Format (<http://hdf.ncsa.uiuc.edu/HDF5/>) rausgeschrieben.

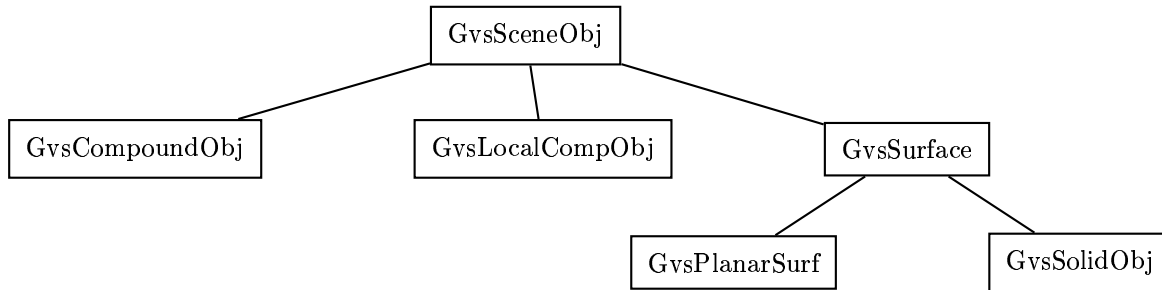


Abbildung 3.7: Klassenstruktur der Objekte. Von der Mutterklasse aller Szenenobjekte, wobei hier Objekte im eigentlichen Sinne gemeint sind, leiten sich sowohl zusammengesetzte Objekte wie auch Objekt-Primitive wie Dreieck oder Würfel ab.

test von den ursprünglichen in pseudo-kartesische Koordinaten transformieren zu können. Die Oberflächenklasse (**GvsSurface**) ist für den Oberflächenshader und die Berechnung der Texturparameter verantwortlich. Von ihr leiten sich sowohl flache (**GvsPlanarSurf**) wie auch räumliche Objekt-Primitive ab. Der Verbund **GvsCompound-Obj** kann mehrere Objekte zusammenfassen und kann selbst wieder als einzelnes Objekt in einen Verbund eingefügt werden. Im Gegensatz dazu ergibt es keinen Sinn, einen lokalen Verbund wieder als Objekt eines lokalen Verbundes einzubauen.

Schnitt mit Koordinaten-Objekt

Da ein Koordinaten-Objekt in der Regel in pseudo-kartesischen Koordinaten gegeben ist, der Lichtstrahl aber in Koordinaten der Metrik vorliegt, muß jedes Segment des Lichtstrahls vor dem Schnitt in pseudo-kartesische Koordinaten transformiert werden. Im Anschluß daran wird überprüft, ob die Kartenummer des Objekts mit der des Segments übereinstimmt. Die Reihenfolge — erst Transformation, dann Kartentest — ist wichtig, da eventuell bei der Transformation auf pseudo-kartesische Koordinaten eine Umnummerierung der Karten stattfinden kann.¹⁰ Danach erfolgt der Schnitt mit dem Objekt, wobei Ein- und Austrittszeit bestimmt werden.

Schnitt mit lokalem Objekt

Ein lokales Objekt muß stets in einem lokalen Verbund (**GvsLocalCompObj**), der den Bezugsrahmen darstellt und daher die lokale Tetrade beinhaltet, eingebunden sein. Der Schnitttest erfolgt nun analog zum Koordinaten-Objekt zunächst mit der „Raumzeit-Box“ des Verbunds. Liegt ein Schnitt vor, so wird das entsprechende Strahlsegment in die lokale Tetrade transformiert, wo dann ein Schnitttest mit allen zugehörigen Objekten durchgeführt wird.

3.6.8 Bewegung

Ein Hauptbestandteil von `GeoVis` ist die Umsetzung von Bewegung in einer vierdimensionalen Raumzeit, sei es nun die schlichte, geradlinige Bewegung in der Minkowski-Raumzeit oder die komplizierte Bewegung auf zeitartigen Geodäten in einer allgemeinen Raumzeit. Die Berechnung der Bewegung wird dabei jeweils vor dem eigentlichen Rendern einer Szene durchgeführt.

Für den Fall einer zeitartigen Geodäten ist zunächst ein Geodätenintegrator, der unabhängig vom Strahlgenerator sein darf, zu wählen. Anschließend muß ein Startort in Koordinaten und eine Startgeschwindigkeit wahlweise in Koordinaten oder bezüglich der natürlichen lokalen Tetrade am Startort angegeben werden. Mit der Startzeit synchronisiert man die Koordinatenzeit der Bewegung mit der des Beobachters. Da ein Lichtstrahl rückwärts in die Vergangenheit verfolgt wird, muß sichergestellt sein, daß die Bewegung ausreichend weit in die Vergangenheit integriert wird.

¹⁰Durch solch eine Umnummerierung ist es möglich, die Morris-Thorne-Wurmloch-Raumzeit aus Abs. §6.3 durch eine einzige Metrik darzustellen. Die Transformation auf pseudo-kartesische Koordinaten ermöglicht die Unterscheidung zwischen oberem und unterem Universum.

Gespeichert wird eine Bewegung in einem „Kontainer“, der das Hinzufügen von Elementen — in diesem Fall von lokalen Tetraden — sowohl an den Anfang als auch an sein Ende erlaubt.¹¹ Beim Schnitttest wird für jeden Punkt eines Strahlsegments die lokale Tetrade der Bewegung herausgesucht, welche dem Punkt zeitlich am nächsten liegt. Erst dann wird auf Schnitt mit der Raum-Zeit-Box getestet.

Die Bewegung kann nicht nur einem Objekt, sondern auch dem Beobachter zugeordnet werden. Dies wird erreicht, indem man einfach die Bewegung anstelle einer fixen lokalen Tetrade dem Projektor übergibt.

3.6.9 Lichtquellen

Die einfachste Art einer Lichtquelle beim Raytracing ist ambientes Licht, welches keine diskrete Quelle besitzt sondern vielmehr an jedem Punkt des Raumes leuchtet. Ein Objekt, welches ambientes Licht vollständig reflektiert, scheint eigenständig zu „leuchten“. Leider ist ambientes Licht beim allgemein-relativistischen Raytracing in der Regel die einzige Lichtquelle, da wir ansonsten einen Lichtstrahl vom Objekt zur Quelle zurückverfolgen müßten. Dies ist aber nur dann möglich, wenn eine analytische Lösung der Geodätengleichung vorhanden ist. Im Fall der Minkowski-Metrik handelt es sich bei den Lichtstrahlen lediglich um Geraden, für die Schwarzschild- und die Morris-Thorne-Metrik haben wir sogar eine analytische Lösung (siehe Abschnitte §5.3 und §6.4). So können wir neben dem ambienten Licht auch eine Punktlichtquelle anschalten, die in zwei Ausführungen vorliegt: einerseits als konstante Lichtquelle (**GvsPointLight**), andererseits als Stroboskoplampe (**GvsFlashLight**) mit variablem Blitzmuster (siehe Abb. 3.8).

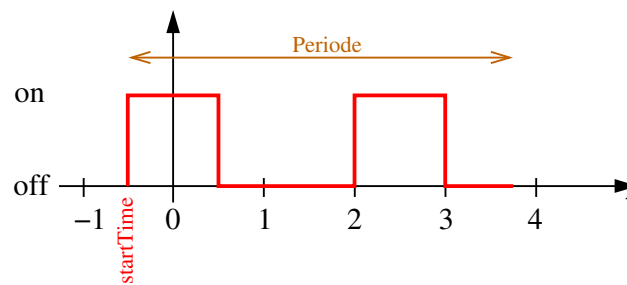


Abbildung 3.8: Blitzmuster „10010“ für Stroboskoplampe mit der Startzeit $t_{\text{startTime}}$. Die Gesamtperiode setzt sich zusammen aus der Länge der An- und Auszeiten; hier $\Delta t_{\text{on}} = 1$ und $\Delta t_{\text{off}} = 0.75$. Ein Singleflash erzeugt dieses Muster nur ein einziges Mal; beim Multiflash wird das Muster zeitlich in beide Richtungen periodisch fortgesetzt.

3.6.10 Device

Sind alle Teile einer Szenerie definiert, so können sie zu einem „Device“ zusammengestellt werden. Unter einem „Device“ verstehen wir alle notwendigen Teile und Parameter, die zur Erstellung *eines* Bildes notwendig sind. Standardmäßig muß ein „Device“ mindestens

- eine Metrik oder einen Atlas zur Beschreibung der Raumzeit,
- einen Geodätenintegrator für die Nullgeodäten,
- einen Strahlgenerator zur Strahlerzeugung,
- eine Beobachtkamera,
- eine lokale Tetrade für den Beobachter,
- einen Projektor,
- den Lichtquellenmanager (für ambientes Licht), sowie
- ein Objekt

beinhalten. Im „Device“ können nachträglich Parameter der verschiedenen Objekte angepaßt werden. Die Speicherung aller in einer Szene definierten Objekte übernimmt der Parser, so daß in den einzelnen Devices im wesentlichen nur noch die Pointer auf die Objekte und die Änderungen gespeichert werden.

¹¹In C++ wird dies durch den „deque“-Kontainer (double-ended queue) umgesetzt.

3.6.11 Szenenbeschreibungssprache

Der Aufbau einer Szene, die sich aus einem Beobachter, einer Raumzeit-Mannigfaltigkeit, unterschiedlichen Objekten und eventueller Lichtquellen zusammensetzt, wäre in „C++“-Code sehr unübersichtlich zu implementieren. Zu diesem Zweck wurde eine Szenenbeschreibungssprache (SDL = *Scene Description Language*) auf der Basis der Programmiersprache SCHEME¹² entwickelt.

Die Basisstruktur unserer SDL besteht aus Makros, welche aber nicht in SCHEME sondern in C++ programmiert sind. Die Makros setzen sich aus einem Schlüsselwort (*keyword*), welches in der Regel ein Objekt von Geovis, wie etwa eine Metrik oder eine Lichtquelle, erzeugt, und einem oder mehreren Daten (*datum*) zusammen:

```
( <keyword> <datum> . . . )
```

In der Klasse **GvsParser** sind alle erlaubten Schlüsselwörter, jeweils zusammen mit ihrem zugehörigen Funktionsaufruf, in der Methode `read_scene()` deklariert. `<datum>` ist in der Regel eine Liste von literalen Ausdrücken, welche selbst aus einem Paar bestehen. Jedes Paar setzt sich aus einem Schlüsselwort (*type*) und einem Wert (*value*), der entweder ein Wahrheitswert (boolean), eine Zahl (int oder double), ein Vektor, ein String oder selbst ein Paar sein kann, zusammen:

```
'(<type> <value>)
```

Die `<type>`-Bezeichnungen repräsentieren die Methoden oder Parameternamen der verschiedenen Objekte, wobei `<value>` den zu setzenden Parameterwerten entspricht. In den jeweiligen „parse“-Files ist die Syntax eines jeglichen ‚keyword‘ definiert (einige Beispiele werden weiter unten ausführlicher besprochen), wobei auch alle erlaubten ‚type‘-Namen aufgeführt werden. Der wichtigste ‚type‘-Name ist die Identifizierungsnummer (ID), welche, solange sie nicht explizit gesetzt, automatisch vergeben wird. Mit dieser ID kann nachträglich das entsprechende Objekte angesprochen werden. Alle zu erzeugenden Objekte (Kamera, Metrik, Integrator, . . .) werden zunächst mit dieser ID in der Klasse **GvsParser** gespeichert und erst am Schluß zu einem Device zusammengefügt.

Die Methode `parse()` der Klasse **GvsParseScheme** ist das zentrale Bindeglied zwischen dem externen SCHEME-Interpreter und Geovis. Sie zerlegt und speichert die einzelnen Elemente der gerade besprochenen Strukturen.

Der große Vorteil von SCHEME ist nun, daß innerhalb der Szene-Datei kurze Rechnungen durchgeführt werden können. Dabei stehen die gängigsten mathematischen Funktionen zu Verfügung. Zusammen mit der Möglichkeit, Schleifen zu programmieren, können nun Objekte, die mehrfach auftauchen sollen und sich nur etwa um die Position leicht unterscheiden, einfach dargestellt werden.

Anhand einiger Beispiele wollen wir die allgemeine Syntax in Geovis erläutern. Wichtig hierbei ist die Klammerung, wie sie in SCHEME üblich ist. Ausdrücke in eckigen Klammern sind nicht zwingend erforderlich; für sie gibt es Standardwerte. Wichtig ist zu berücksichtigen, daß SCHEME an sich keine Unterscheidung zwischen Groß- und Kleinschreibung macht. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sind alle ‚keywords‘ und ‚types‘ klein geschrieben. Allerdings ist bei ‚string‘-Werten die Groß- und Kleinschreibung zu beachten.

Metrik

Unabdingbar ist der Name der Metrik selbst¹³. Zusätzlich können natürlich die Parameter der Metrik eingegeben werden. Die Reihenfolge, in der die Parameter eingegeben werden, spielt jedoch keine Rolle.

```
(init-metric '(type "Schwarzschild")
              [ '(masse 1.0) ]
              [ '(id "metric") ]
)
```

¹²SCHEME gehört, im Gegensatz zum prozedural-objektorientierten C++, zu den funktional-deklarativen Sprachen. Grundlage ist der Interpreter 'TinyScheme' von Dimitrios Souflis <http://tinyscheme.sourceforge.net/> Version 1.33. Eine gute Übersicht über die Funktionsweise von SCHEME findet man im „Revised⁵ Report on the Algorithmic Language Scheme“ (R5RS) <http://www.schemers.org/Documents/Standards/R5RS/> Stand: 25.09.2003.

¹³Welche Metriken bereits implementiert sind, läßt sich am einfachsten in der Datei '/Metric/GvsMetricDatabase.h' nachlesen.

Wir erzeugen hier eine Schwarzschild-Metrik mit dem Massen-Parameter 1.0. Wichtig hierbei ist, daß der Parameter nicht als Integer übergeben wird, da ansonsten eine Fehlermeldung ausgegeben wird.

Objekt

Die Einbindung eines Objekts erfolgt über den Aufruf des entsprechenden ‚keywords‘ unter Angabe des Objekttyps (lokales: `gpObjTypeLocal` oder nicht-lokales: `gpObjTypeInCoords` Objekt).

```
(solid-ellipsoid `(objtype ,gpObjTypeInCoords)
                  `(center #(0.0 0.0 0.0))
                  `(axlen #(15.0 15.0 15.0))
                  `(transform ,(translate-obj #(40.0 0.0 0.0) (rotate-obj "y" -0.7854 )))
                  `(shader "earthShader")
                  `(id "earth")
)
```

In diesem Fall erzeugen wir eine Kugel mit Radius 15 in Koordinatendarstellung, deren Mittelpunkt sich zunächst im Koordinatenursprung befindet. Anschließend wird die Kugel zuerst um 45° um die y -Achse gedreht und dann entlang der x -Achse an den Ort $(40, 0, 0)$ verschoben. Zuvor müssen wir jedoch den Shader mit der ID „earthShader“ definiert haben.

Lokale Tetrade

Eine ruhende lokale Tetrade wird durch ihre Position (`pos`) und die vier Basisvektoren (`e0,e1,e2,e3`) definiert, welche in diesem Fall bezüglich der natürlichen lokalen Tetrade der zugehörigen Metrik ausgerichtet ist (`incoords=false`).

```
(local-tetrad `(pos #(0.0 12.0 1.5708 0.0 0.0))
              `(e0 #(1.0 0 0 0) )
              `(e1 #(0.0 -1 0 0) )
              `(e2 #(0.0 0 0 -1) )
              `(e3 #(0.0 0 -1 0) )
              `(incoords #f)
              `(id "locTedBall")
)
```

Device

Von zentraler Bedeutung für die Bildberechnung ist das Objekt „Device“. Jedes Device steht letztlich für ein Bild. Um eine ganze Filmsequenz rechnen zu können, muß für jedes Bild ein Device erstellt werden.

```
(init-device `(type "standard")
             `(setparam ("locTedBall" "pos" ,(vector 0.0 20.0 1.5708 0.0 0.0)))
             `(obj "scene")
)
```

Da sich die einzelnen Bilder meist nur durch wenige Parameter der Szene unterscheiden, lassen sich die zugehörigen Devices mittels Schleifen erzeugen. Eine Bildsequenz aus 100 Einzelbildern könnte wie folgt eingegeben werden:

```
(do ((count 0 (+ count 1))) ((= count 100))
    (init-device `(type "standard")
                `(setparam ("locTedBall" "pos" ,(vector 0.0 (+ 20.0 (* count 0.1) 1.5708 0.0 0.0)))
                `(obj "scene")
    )
)
```

In diesem Fall würden sich die einzelnen Bilder lediglich in der Position der lokalen Tetrade „locTedBall“ unterscheiden. Eine vollständige Szenen-Datei befindet sich im Anhang §D.8.

3.6.12 Funktionen

Für die Übergabe einer Funktion an `GeoVis`, wie sie zum Beispiel bei dem allgemeinen Morris-Thorne-Wurmloch oder beim Fermi-Walker-Transport gebraucht wird, steht zur Zeit ein externer Funktionsparser¹⁴ zur Verfügung. Zunächst muß die Funktion mit all ihren Parametern in Form *eines* „Strings“ eingegeben werden. Für das einfache Morris-Thorne-Wurmloch würde die Radius-Funktion dann wie folgt aussehen:

```
"b0^2+1^2, 2l, b0, 1",
```

wobei `"b0^2+1^2"` die eigentliche Funktion und `"2l"` deren Ableitung, die auch entfallen kann, ist. Im Anschluß daran stehen alle Parameter und schließlich die eigentliche Variable `"1"`. Erlaubt ist nur eine Variable, dafür können nahezu beliebig viele Parameter verwendet werden.

Die Klasse `GvsFunction` erlaubt nach Eingabe der Funktion, die Parameterwerte zu setzen und die Funktion beziehungsweise ihre Ableitung zu berechnen. Die Parameter werden dabei mit ihren Namen angesprochen.

3.6.13 MPI-Rendering

Die Visualisierung einer allgemein-relativistischen Szene inklusive sich bewegender Objekte ist sehr rechenintensiv. Für jeden einzelnen Bildpunkt muß eine Geodäte von mindestens Tausend Einzelpunkten berechnet werden. Der daraus entstehende Polygonzug (Polyline) muß anschließend Segment für Segment mit allen Objekten der Szene geschnitten werden. Für ein Bild mit einer Auflösung von etwa 1000×1000 Pixeln und einem einzigen, statischen Objekt, müssen so bereits eine Milliarde Schnittberechnungen durchgeführt werden. Da ein Schnitttest etwa $3 \mu s$ in Anspruch nimmt, dauert die Berechnung eines Bildes bereits 50 min . Das Rendern einer Filmsequenz von lediglich einer Sekunde benötigt dann schon 25 Stunden. Es ist daher unumgänglich, die Bildberechnung zu parallelisieren.

Die einfachste Möglichkeit der Parallelisierung ist die Verteilung der Bildberechnung auf mehrere Prozessoren. Dabei rechnet jeder Prozessor getrennt ein Bild einer Sequenz. Da Nullgeodäten unabhängig voneinander sind, ist eine andere Möglichkeit die Unterteilung eines Bildes in mehrere Streifen, wobei jeder Prozessor nur einen Teil eines Bildes berechnet und der Masterprozessor anschließend das Bild aus den Einzelstreifen zusammensetzt. Die letztere Version eignet sich vor allem dann, wenn nur ein einziges Bild mit sehr hoher Auflösung berechnet werden soll.

Die Umsetzung der Parallelisierung mit Hilfe von MPI (Message Passing Interface)¹⁵ ist weitestgehend von `RayVis` übernommen. Jedoch wird nicht für jedes Bild eine neue Szene-Datei eingelesen, sondern auf die im Parser gespeicherten und im Device zusammengefaßten Objekte und Szenerien zurückgegriffen.

3.7 Geodätenbetrachter: GvsGeodViewer

Der Geodätenbetrachter „GvsGeodViewer“ ist ein hilfreicher Bestandteil und manchmal auch notwendiges Werkzeug von `GeoVis`. Er ermöglicht die Untersuchung von licht-, zeit- und raumartigen Geodäten in den verschiedenen Raumzeiten, wobei sowohl die Parameter der Raumzeit als auch Startort und Startrichtung der Geodäte eingestellt werden können. Die Steuerung findet über eine graphische Benutzeroberfläche (GUI = *Graphical User Interface*) statt (siehe Abb. 3.9).

Dargestellt werden kann sowohl die räumliche Projektion als auch die einzelnen Koordinatenabhängigkeiten einer Geodäten. Voraussetzung für die räumliche Projektion ist die Möglichkeit, die Koordinaten der Raumzeit in pseudo-kartesische Koordinaten (siehe Abs. 2.9), welche dann gezeichnet werden, zu transformieren. Die Darstellung der Koordinatenabhängigkeiten sind von der Form

$$x^\mu = x^\mu(x^\nu), \quad \{\mu, \nu\} = \{0, 1, 2, 3\}.$$

¹⁴Implementiert ist der Funktionsparser von Juha Nieminen und Joel Yliluoma (<http://www.students.tut.fi/~warp/FunctionParser/>); zum Zeitpunkt der Abgabe dieser Arbeit war diese Seite leider nicht mehr online. Der Einbau eines anderen Funktionsparsers stellt keine Probleme dar.

¹⁵The Message Passing Interface (MPI) standard: <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpl> (Stand: 07.03.2005).

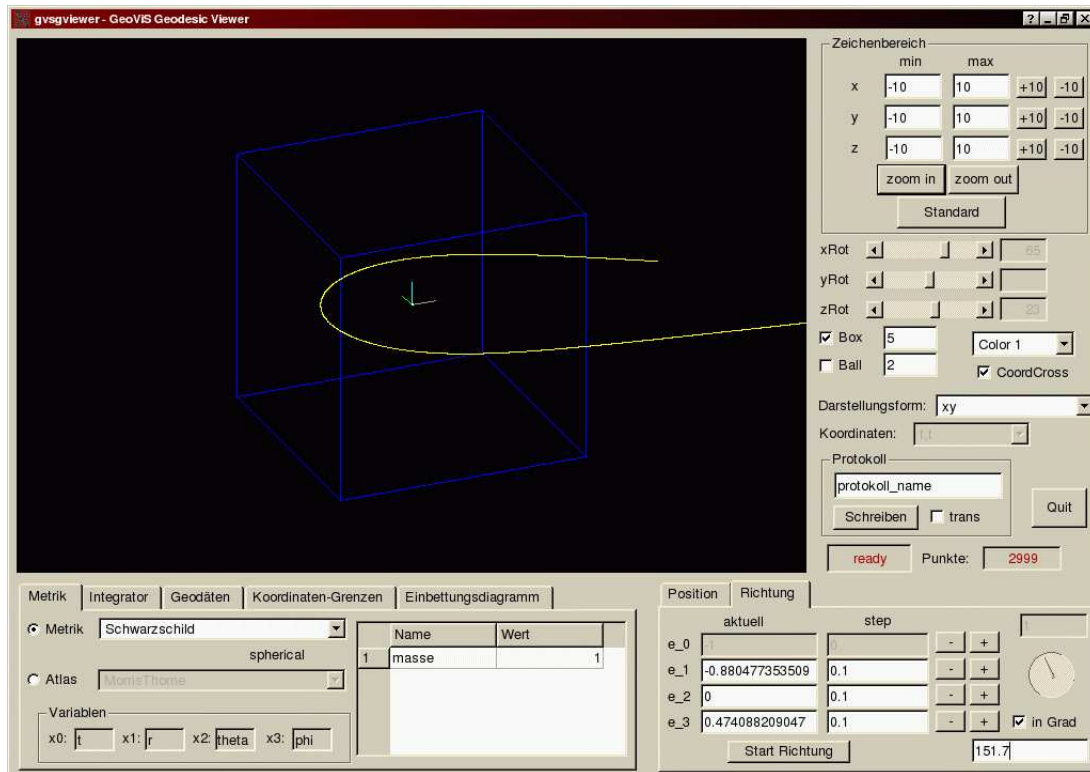


Abbildung 3.9: Graphische Benutzeroberfläche (GUI) des Geodätenbetrachters „GvsGeodViewer“.

Sofern vorhanden kann eine Geodäte auch innerhalb eines Einbettungsdiagramms dargestellt werden. Insbesondere beim Morris-Thorne-Wurmloch (siehe Abs. §6.3.3) können so die Geodäten leicht verfolgt werden.

3.7.1 Implementierung

Die graphische Benutzeroberfläche des Geodätenbetrachters ist in QT¹⁶ implementiert, wobei die eigentliche Geodätendarstellung mittels OpenGL¹⁷ umgesetzt ist. Mit Hilfe der Benutzeroberfläche lassen sich alle relevanten Parameter und Module, die für die Integration der Geodätengleichung notwendig sind, einstellen. Dies sind im wesentlichen die Metrik und der Geodätenintegrator, welche in GeoViS eingebaut sind.

3.7.2 Steuerung

Die Steuerung der Geodätendarstellung teilt sich in zwei Hauptbereiche auf. Dies sind einerseits die Register *Metrik*, *Integrator*, *Position*,... (siehe Tabelle □3.1), innerhalb derer die Parameter für die Geodätenintegration eingegeben werden können. Zum anderen sind dies die Steuerelemente für den Zeichenbereich, die Orientierung der Darstellung, die Darstellungsform sowie die Protokollausgabe.

Die Ausgabe eines Protokolls umfaßt eine Tabelle der Einzelpunkte der Geodäte, das Darstellungsbild im ppm-Format und eine Parameterdatei mit den wichtigsten Einstellungen. Die Geodäte kann entweder in den Metrik- oder in pseudo-kartesischen Koordinaten gespeichert werden.

Bei der Darstellungsform können die drei Hauptebenen xy , xz und yz , sowie die Koordinatenrelationen oder das Einbettungsdiagramm, sofern vorhanden, ausgewählt werden.

¹⁶Verwendete Version: QT 3.0 für OpenSource-Anwendungen. <http://www.trolltech.com>.

¹⁷OpenGL: <http://www.opengl.org/>.

Register	Beschreibung
Raumzeit	Auswahl einer Metrik oder eines Atlas; Einstellung der Parameter
Integrator	Auswahl eines Integrators; Einstellung der Schrittweite, der Genauigkeit und der maximalen Anzahl der zu berechnenden Punkte.
Geodäten	Typ der Geodäten (licht-, zeit- oder raumartig) einstellbar; betrachte Geodäte entlang (codir) oder entgegengesetzt (contradir) der Startrichtung; Zeitrichtung der Geodäte.
Koordinaten-Grenzen	Intervalle für die einzelnen Koordinaten, innerhalb derer die Geodäte berechnet werden soll.
Einbettungsdiagramm	Sofern die ausgewählte Metrik ein Einbettungsdiagramm besitzt, können hier Darstellungsparameter eingegeben werden.
Position	Direkte Eingabe der Startposition oder schrittweise Änderung möglich.
Richtung	Die Startrichtung wird bezüglich der natürlichen lokalen Tetrade angegeben. Die Einstellung erfolgt entweder direkt über die Eingabe dreier Richtungskordinaten oder als Gradangabe über eine Wählscheibe. Bei einer zeitartigen Geodäten kann oberhalb der Wählscheibe eine Startgeschwindigkeit angegeben werden.

Tabelle 3.1: Registerbeschreibung des Geodätenbetrachters *GvsGeodViewer*.

3.8 Verschiedene Modell-Szenarien

Um die Leistungsfähigkeit und die Möglichkeiten von *GeoViS* aufzuzeigen, wollen wir in diesem Abschnitt einige Beispiele visualisieren, ohne aber näher auf ihren physikalischen Hintergrund einzugehen.

3.8.1 GeoViS und die SRT

Betrachten wir in der Speziellen Relativitätstheorie entweder einen bewegten Beobachter und eine ruhende Szene, oder einen ruhenden Beobachter und eine bewegte Szene, deren Objekte sich alle mit der gleichen Geschwindigkeit in die gleiche Richtung bewegen, so genügt eine einfache Visualisierung z.B. mit *RayViS* [109]; eine interaktive Visualisierung ist ebenfalls möglich [8]. Aber bereits bei zwei unterschiedlichen Bewegungen müssen wir die Szenerie in der Minkowski-Raumzeit betrachten und die Nullgeodäten entsprechend integrieren; diese Integration ist insbesondere bei einer eventuellen Beleuchtung wichtig.

Verschiedene Bewegungsrichtungen

Gegeben sei eine Reihe aus 16 Fußbällen, die entlang der y -Achse aufgereiht sind und das Ruhssystem S kennzeichnen. Ein weiterer Fußball (System S') bewege sich mit $v = 0.9c$ über die Fußballreihe in positiver y -Richtung (Abb. 3.10, links). Der Beobachter (System S'') hingegen bewegt sich entlang der x -Achse mit $v = 0.9c$ auf die Fußballreihe zu (Abb. 3.10, rechts). Zur Koordinatenzeit $t = 0$, welche auf das Ruhssystem S der Ballreihe bezogen ist, befindet sich der bewegte Fußball am Ort $\vec{a}_{\text{ball}} = (0, -5, 2)^T$ und der Beobachter am Ort $\vec{a}_{\text{obs}} = (6, 0, 1)^T$.

Beleuchtung

Beim relativistischen Raytracing müssen wir die endliche Lichtlaufzeit berücksichtigen. Verwenden wir zunächst eine Blitzlampe mit dem einfachen Blitzmuster „1010“ und den Zeiten $\Delta t_{\text{on}} = 0.2$, $\Delta t_{\text{off}} = 0.1$ und $t_{\text{startTime}} = -48.0$ (vgl. Abs. §3.6.9) am Ort $\vec{l} = (0, 48, 0)^T$. Der Beobachter sitzt am Ort $\vec{b} = (0, 8, 0)^T$ und beobachtet zu den Zeitpunkten $t_1 = 10.43$ und $t_2 = 10.598$ (siehe Abb. 3.11).

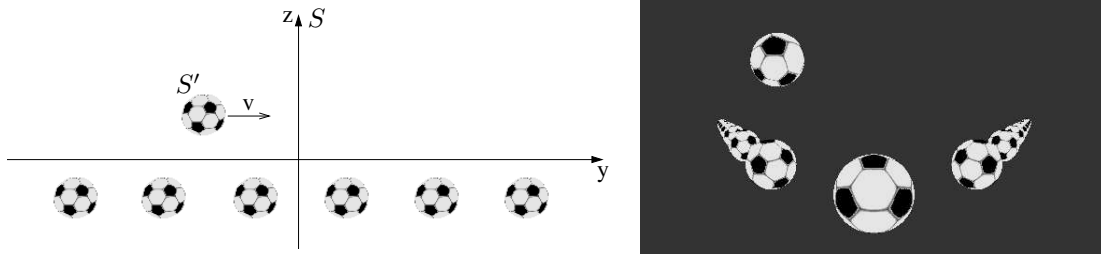


Abbildung 3.10: Eine ruhende Ballreihe sei entlang der y -Achse ausgerichtet. Ein weiterer Ball bewege sich mit $v = 0.9c$ parallel zur Ballreihe (links). Bewegt sich der Beobachter mit $v = 0.9c$ senkrecht auf die Ballreihe zu, so nimmt er zur Zeit $t_S \approx 5.74$ ($t_{S'} = 2.5$) mit seiner Panoramakamera (Sichtbereich: $120^\circ \times 40^\circ$) das rechte Bild auf. [Film](#)

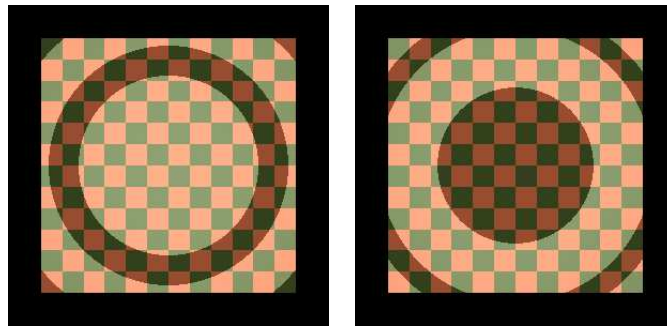


Abbildung 3.11: Ein Blitzlicht mit dem einfachen Blitzmuster „1010“ und den Zeiten $\Delta t_{on} = 0.2$, $\Delta t_{off} = 0.1$ und $t_{startTime} = -48.0$ am Ort \vec{l} trifft auf einen reflektierenden Würfel mit Vorderkante bei $y = -1$. Das Licht der Blitzlampe erreicht den Beobachter (Lochkamera mit Sichtfeld: $30^\circ \times 30^\circ$) zu den Zeiten $t_1 = 10.43$ und $t_2 = 10.598$. [Film](#)

Ein interessanterer Fall ist nun, wenn zwischen Beobachter und einer Wand ein sich schnell bewegtes Objekt vorbeizieht. Dieses können wir einerseits mit einer konstanten Punktlichtquelle, andererseits mit einem Blitzlicht anleuchten und dann den Schattenwurf beobachten. Dabei stellt sich die Frage, ob es mit Hilfe des Blitzlichts möglich ist, die Längenkontraktion zu beobachten, da eventuell der Blitz eine „Messung“ am linken und rechten Rand der Kugel vornehmen könnte. Leider ist dem nicht so; auch der Schatten einer Kugel ist ein perfekter Kreis. Dies können wir uns mit folgender Rechnung klarmachen:

Bewegt sich eine Kugel mit Radius $r_0 = 1$ entlang der positiven x -Achse mit der Geschwindigkeit v , so ist sie, bezogen auf das Ruhssystem der Wand und des Beobachters, in Bewegungsrichtung längenkontrahiert auf $r = r_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Das so entstehende Ellipsoid — hier auf 2 Dimensionen reduziert — können wir durch die Gleichung

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (x - vt)^2 + y^2 = 1 \quad (3.8.1)$$

darstellen. Der Lichtblitz, als Ebene angenähert, wird durch $y = ct$ beschrieben. Schneiden wir die Gleichung für das Ellipsoid mit der Geraden, so erhalten wir die Beziehung

$$x = vt \pm \sqrt{\frac{1 - c^2 t^2}{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.8.2)$$

wobei $\Delta x = x_{\max} - x_{\min} = 2r_0$ ist. Genau dieser Abstand wird aber als Schatten auf die Wand projiziert! [Film](#).

3.8.2 GeoViS und die ART

Die Stärken von `GeoViS` kommen hauptsächlich in der Allgemeinen Relativitätstheorie zum tragen. Prinzipiell kann jede Raumzeit, welche durch eine explizite Metrik dargestellt werden kann, visualisiert werden. Eine Schwierigkeit bei Raumzeiten mit nichtdiagonalen Metriken ist das Auffinden einer geeigneten natürlichen lokalen Tetrade. Komplexere Raumzeiten, die durch einen Atlas überdeckt werden müssen, werfen das Problem auf, die richtigen Kartentransformationen bereitzustellen. Sind diese Hürden überwunden, gilt es im Anschluß, eine aussagekräftige Szenerie zu entwickeln. Dabei sollte, wenn möglich, auf Koordinatenobjekte verzichtet werden; andernfalls ist deren Bedeutung bei der Interpretation der Visualisierung zu berücksichtigen.

Statisches Einstein-Universum

Das statische Einstein-Universum wird durch die Metrik

$$ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (3.8.3)$$

beschrieben [21], wobei $T \in (-\infty, \infty)$ die Koordinatenzeit und $R \in (0, \pi)$ die Radialkoordinate darstellt. $\vartheta \in (0, \pi)$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ sind die gewöhnlichen sphärischen Koordinaten. Die Singularitäten bei $R = 0$ und $R = \pi$ sind reine Koordinatensingularitäten; der Kretschmann-Skalar $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 12$ bleibt an diesen Stellen endlich.

Befindet sich nun ein Beobachter am Ort $(R = 2, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0)$ und betrachtet eine Erdkugel am Ort $(R, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi)$, so erhält er die Bildfolge [3.12](#).

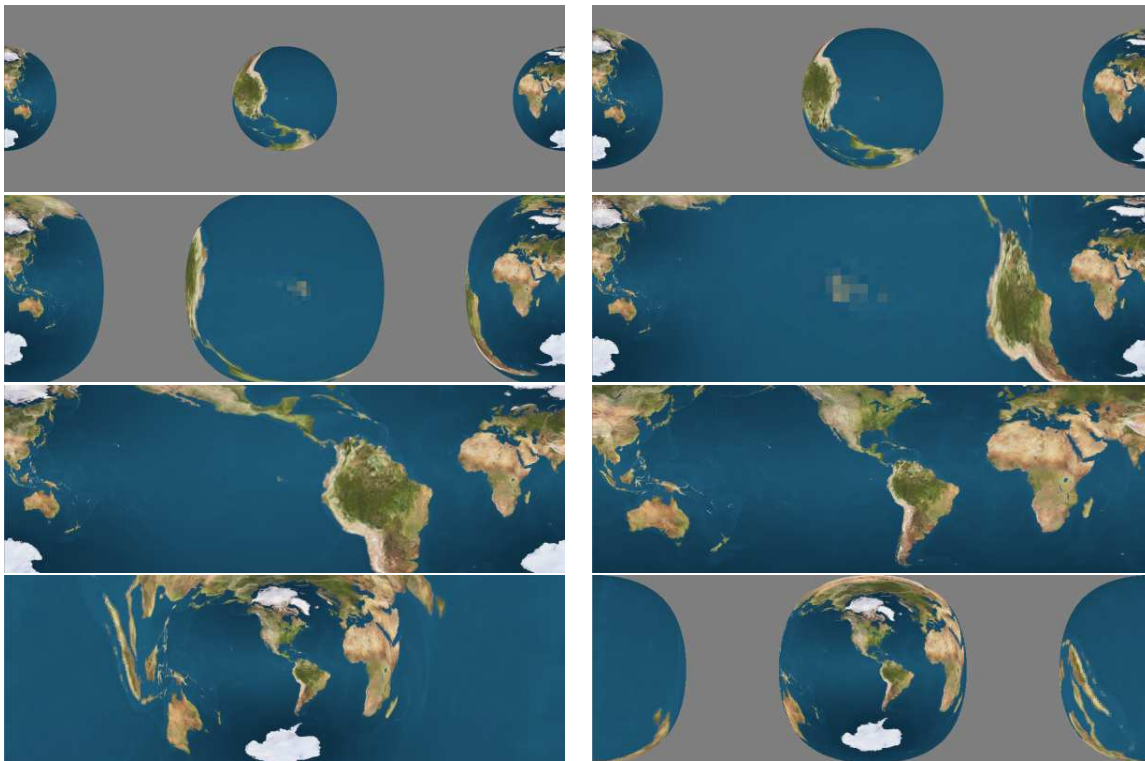


Abbildung 3.12: Ein Beobachter im statischen Einstein-Universum betrachte vom Ort $(R = 2, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0)$ aus mit seiner Panoramakamera (Sichtfeld: $360^\circ \times 120^\circ$) eine Erdkugel mit Radius $R_{\text{Erde}} = 0.2$, die sich beim Radius $R = \{0.760, 0.851, 0.916, 0.955, 1.020, 1.150, 1.332, 1.371\}$ befindet (links oben nach rechts unten). [Film](#)

Am Verlauf der Nullgeodäten (Abb. [3.13](#)) können wir uns klarmachen, warum wir für bestimmte Orte R_{Erde} die gesamte Oberfläche der Erdkugel sehen.

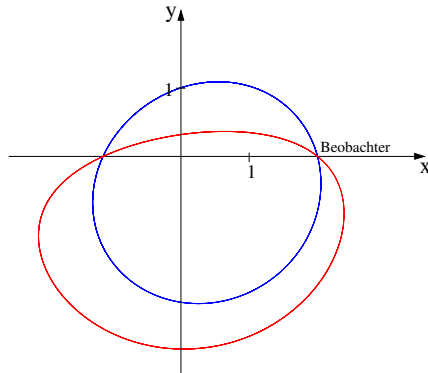


Abbildung 3.13: Verlauf zweier Nullgeodäten im statischen Einstein-Universum, die beim Beobachter am Ort $(R = 2, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0)$ unter dem Winkel $\xi = 120^\circ$ (rot) bzw. $\xi = 160^\circ$ (blau) zur äußeren Radialrichtung eintreffen. Außer in den Grenzfällen $\xi = 0^\circ$ und $\xi = 180^\circ$ bilden die Nullgeodäten stets geschlossene Kurven.

Fiktive Raumzeit

Ändern wir an der Metrik (3.8.3) lediglich die Komponente $g_{\varphi\varphi}$, so erhalten wir zum Beispiel die fiktive Metrik

$$ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R (d\vartheta^2 + R^2 d\varphi^2) \quad (3.8.4)$$

Belassen wir den Beobachter am selben Ort und setzen die Erde an die Position $(R = 2, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi)$, so erhalten wir die Abbildung [3.14](#).

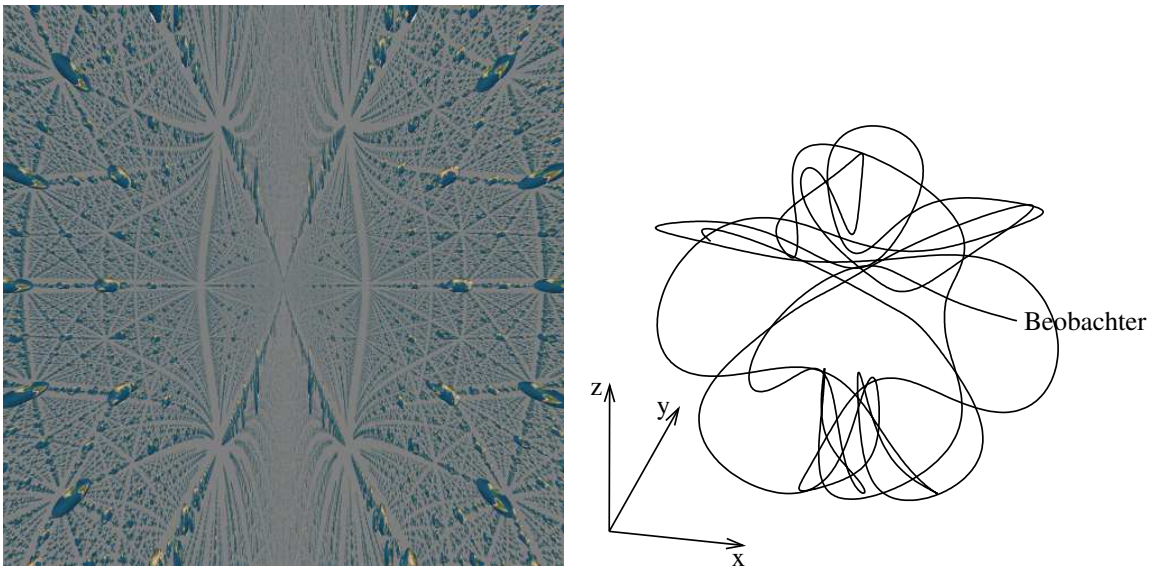


Abbildung 3.14: Sicht für einen Beobachter in einer fiktiven Raumzeit. **Links:** Aufnahme mit einer Lochkamera mit Sichtfeld $10^\circ \times 10^\circ$. **Rechts:** Verlauf einer Nullgeodäten innerhalb der fiktiven Raumzeit.

Schwarzschild-Raumzeit

Die Schwarzschild-Raumzeit beschreiben wir in Kapitel [§5](#) noch im Detail. In diesem Beispiel nähert sich ein Beobachter auf der zeitartigen Kurve $r(\tau) = r_i - a\tau$ vom Startort r_i dem Horizont bei $r = r_s$.¹⁸ Schaut der Beob-

¹⁸Die genaue Bahn wird im Anhang [§D.3.3](#) beschrieben.

achter nach außen auf eine rotierende Erde am Ort r_{Erde} , so scheint diese, von seinem Standpunkt aus betrachtet, einerseits kleiner zu werden aber zusätzlich auch immer schneller zu rotieren. Dies resultiert aus der Tatsache, daß die Zeit für den Beobachter kontinuierlich immer langsamer vergeht. Nehmen wir an, die Erdkugel drehe sich, bezogen auf ihr Ruhssystem, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{Erde}} = 0.1$, dann hat sie sich nach ihrer Zeit $\tau_{\text{Erde}} = 2\pi/\omega_{\text{Erde}}$ einmal gedreht. Da sie sich am Ort r_{Erde} befindet, ist inzwischen die Koordinatenzeit $t_{\text{Erde}} = \tau_{\text{Erde}}/\sqrt{1 - r_s/r_{\text{Erde}}}$ verstrichen. Ist jedoch für den Beobachter, bezüglich seines Systems, die Eigenzeit $\tau_{\text{beob}} = \tau_{\text{Erde}}$ vergangen, so entspricht dies einer Koordinatenzeit von $t_{\text{beob}} = \tau_{\text{beob}}/\sqrt{1 - r_s/r_{\text{beob}}} > t_{\text{Erde}}$ für $r_{\text{beob}} < r_{\text{Erde}}$. Insgesamt erhalten wir das Verhältnis $z = \sqrt{1 - r_s/r_{\text{Erde}}}/\sqrt{1 - r_s/r_{\text{beob}}}$ zwischen den Eigenzeiten.

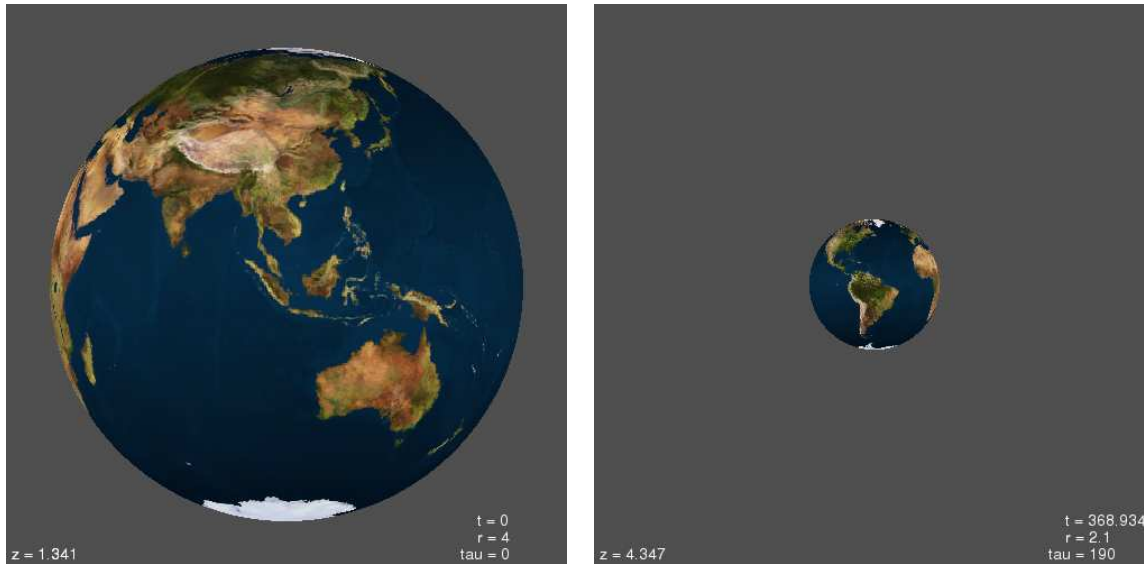


Abbildung 3.15: Ein Beobachter in der Schwarzschild-Raumzeit schaue radial nach außen auf eine rotierende Erdkugel am Ort r_{Erde} . Dabei nähert er sich quasistatisch mit seiner Lochkamera (Sichtfeld: $10^\circ \times 10^\circ$) immer mehr dem Horizont. Im Bild angegeben ist seine Eigenzeit τ , seine momentane Position r , die inzwischen verstrichene Koordinatenzeit t . Der Faktor z gibt das Verhältnis zwischen seiner Eigenzeit und der der Erdkugel an. [Film](#)

3.9 Ausblick

GeoViS ist mit Sicherheit noch nicht am Ende seiner Entwicklung. Vor allem bei sehr vielen Szene-Objekten, welche sich gegebenenfalls auch noch beliebig bewegen können, muß die Raumzeit in kleine Bereiche aufgeteilt werden. Eine hierarchische Struktur wie sie beim dreidimensionalen Raytracing angewandt wird, kann jedoch nicht ohne Weiteres übernommen werden. Da die Flexibilität hinsichtlich der Koordinatenwahl gewährleistet bleiben soll, muß auch die Unterteilung der Raumzeit flexibel gestaltet werden. Dabei treten jedoch ähnliche Schwierigkeit wie bei der numerischen Relativitätstheorie auf, die nach geeigneten Schnitten der Raumzeit sucht. Außerdem müssen wir die Bewegung eines Objekts berücksichtigen, welches sich nun von einem Raumzeit-Element zum anderen bewegt. Die Strahltraversierung durch eine unterteilte Raumzeit erfolgt dann über die Schnittberechnung des Lichtstrahls mit den einzelnen Raumzeit-Elementen. Ist ein Objekt in diesem Element vorhanden, so kann die eigentliche Schnittberechnung durchgeführt werden.

Neben der mehr pädagogischen Verwendung von GeoViS zum Verständnis einer Raumzeit, kann der Raytracer auch zur Modellbildung astronomischer Objekte eingesetzt werden. Da Effekte wie Lichtlaufzeit, Rotverschiebung und Linseneffekt berücksichtigt werden, liefert der Raytracer ein detailliertes Abbild einer Modellszenarie. Als Beispiel werden wir in Abschnitt §5.6.1 ein Modell eines Flares um das Galaktische Schwarze Loch behandeln, aus dem direkt die Lichtkurven hergeleitet werden können. Die Polarisation des Lichts ist zwar noch nicht implementiert, stellt jedoch keine große Schwierigkeit dar.

Kapitel 4

Visualisierung eines Gravitationskollapses

Das Ende eines Sterns ist stets der Anfang eines neuen Objekts. Abhängig von der Restmasse des Sterns, welche nach seinem Tod übrig bleibt, schrumpft er zu einem Weißen Zwerg oder einem Neutronenstern. Übersteigt die Restmasse das Limit von etwa drei Sonnenmassen, so kann kein innerer Druck des Sterns mehr der Gravitation entgegenstehen und der gesamte Stern kollabiert zu einem Schwarzen Loch. Da Sterne generell einen Drehimpuls besitzen, ist dieser Kollaps ein sehr komplexer Vorgang, der nur noch numerisch behandelt werden kann.

Wir wollen hier den Kollaps eines sehr vereinfachten Sternmodells betrachten, bei dem eine Staubwolke konstanter Dichte in sich zusammenstürzt. Die Gravitation ist dabei die einzig auftretende Wechselwirkung zwischen den Teilchen. Ausgangspunkt ist jedoch kein stabiler Stern, der plötzlich anfängt zu kollabieren, sondern eine Staubwolke die, würden wir sie in die Vergangenheit zurück verfolgen, immer und immer größer wird.

Zur Einführung behandeln wir in Abschnitt §4.1 die klassische Gleichgewichtsbedingung, die einen Stern stabilisiert. Schalten wir diese Stabilisation aus, so kollabiert der Stern, wobei wir die Raumzeit im Innen- wie auch im Außenraum in mitfallenden Koordinaten beschreiben können (Abs. §4.2). Da mitfallende Koordinaten bei der Visualisierung nur bedingt brauchbar sind, benötigen wir die Transformation auf Schwarzschild-Koordinaten. Neben den lokalen Tetraden in Abschnitt §4.3, die wir sowohl für den Beobachter wie auch für einzelne Objekte benötigen, beschreiben wir in Abschnitt §4.4 die vom Beobachter abhängige Sichtweise, wie Geschwindigkeit in der Kollapsmetrik beurteilt wird. Im Abschnitt §4.5 beschäftigen wir uns mit den Nullgeodäten, die uns als Lichtstrahlen einen Einblick in die Krümmung der Raumzeit geben. Was wir tatsächlich von dem Kollaps sehen könnten, besprechen wir in den letzten beiden Abschnitten, wobei wir vor allem auf den transparenten Staubstern eingehen wollen.

Die Visualisierung einer Kollapsmetrik ist nicht neu. Bereits Ames/Thorne [3] und Jaffe [51] haben sich mit der optischen Erscheinung beim Gravitationskollaps auseinandergesetzt. Zahn [117] und Rau [80] verwendeten die Raytracing-Methode und entwickelten die ersten Bilder eines Gravitationskollapses. Wir verwenden die Kollapsraumzeit als erstes Beispiel für Raytracing unter Verwendung eines Atlas. In der Diplomarbeit von Grave [43] wird die hier entwickelte Visualisierung weitergeführt und an vielen Bildern anschaulich erklärt.

4.1 Physik des Gravitationskollapses

Damit ein Stern nicht unter seiner eigenen Gravitation kollabiert, muß er einer Gleichgewichtsbedingung genügen. Aus newtonscher Sicht bleibt ein Stern nur dann stabil, solange die Gravitationskraft \vec{F}_{grav} und der innere Druck \vec{F}_{druck} sich die Waage halten. Betrachten wir ein Massenelement $\rho dA dr$ und die daran wirkenden Kräfte, so folgt mit $F_{\text{grav}} = F_{\text{druck}}$ die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\mathfrak{M}(r)}{r^2}\rho(r) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr',$$

wobei $\mathfrak{M}(r)$ die Masse des Sterns bis zum Radius r , G die Gravitationskonstante, ρ die Dichte und p der Druck am Ort r ist. Betrachten wir einen Stern mit konstanter homogener Dichte ($\rho = \rho_k = \text{const}$), so erhalten wir für

den Druck im Innern des Sterns ($0 \leq r < R_b$)

$$p(r) = \frac{2\pi}{3} G \rho_k^2 (R_b^2 - r^2).$$

Am Sternrand R_b verschwindet natürlich der Druck.

Im allgemeinen können wir jedoch nicht von einer homogenen Dichte ausgehen, sondern müssen eine Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ vorgeben. Auf eine Untersuchung, wie die Zustandsgleichung von Druck und Temperatur abhängt und welche Rolle die Kern- und Hochenergiephysik dabei spielt, verzichten wir hier und verweisen auf die Literatur (z.B. [93, 65]).

Wollen wir die Gleichgewichtsbedingung sphärisch-symmetrischer, nicht-rotierender Sterne im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie behandeln, so müssen wir die zur Schwarzschild-Lösung gehörende Innenraum-Lösung bestimmen. Die Materie soll dabei durch eine ideale Flüssigkeit mit dem Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) c^{-2} u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

gegeben sein. Die Vierer-Geschwindigkeit u^μ muß dabei der Normierungsbedingung $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$ genügen, die dafür sorgt, daß u^μ ein zeitartiger Vektor ist. Aus dem Ansatz für eine sphärisch-symmetrische Metrik

$$ds^2 = -e^\nu c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

und den Einstein-Gleichungen (2.5.4) erhalten wir die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung [93]

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G(\rho(r) + p(r)c^{-2})(\mathfrak{M}(r) + 4\pi c^{-2} r^3 p(r))}{r^2 \left(1 - \frac{2G\mathfrak{M}(r)}{c^2 r}\right)} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

Setzen wir wieder eine inkompressible Materie konstanter, homogener Dichte ($\rho = \rho_k = \text{const}$) voraus, so erhalten wir für den Druck im Innern des Sterns ($0 \leq r < R_b$)

$$p(r) = \frac{\sqrt{1 - A\rho_k r^2} - \sqrt{1 - A\rho_k R_b^2}}{3\sqrt{1 - A\rho_k R_b^2} - \sqrt{1 - A\rho_k r^2}} \rho_k c^2 \quad \text{mit} \quad A = \frac{8\pi G}{3 c^2}.$$

Im Außenraum haben wir die gewöhnliche¹ Schwarzschild-Lösung vorliegen.

Kann ein Stern die Gleichgewichtsbedingung nicht mehr erfüllen, so kollabiert er entweder bis zu einem neuen Gleichgewicht oder bis zu einem Schwarzen Loch. Der Einfachheit halber „schalten“ wir künstlich den Druck vollständig ab, betrachten also einen Staubstern, der nur noch durch seine eigene Gravitation zusammengehalten wird. Da nun aber kein Druck mehr zur Stabilisierung vorhanden ist, stürzt der Staubstern unausweichlich in sich zusammen. Aufgrund des Birkhoff-Theorems [107] ändert sich die Raumzeit außerhalb des Staubsterns nicht; diese wird weiterhin durch die gewöhnliche Schwarzschild-Lösung beschrieben. Der Innenraum ähnelt nun aber dem Kollaps eines Universums und sollte mit einer Friedmann-Robertson-Walker-Metrik beschrieben werden können [82].

Im folgenden wollen wir uns dem Kollaps widmen, den Oppenheimer und Snyder in ihrem Artikel [75] beschrieben haben. Einen konkreten Startpunkt des Kollapses gibt es nicht, vielmehr beschreiben Oppenheimer und Snyder eine sphärisch-symmetrische Staubwolke, deren Radius R_b in Richtung Vergangenheit immer mehr zunimmt.

4.2 Raumzeit

Es erweist sich als günstig, Koordinaten zu verwenden, die sich mit der Materie mitbewegen [105, 75]. Die Raumzeit an sich können wir jedoch nicht mit einer einzelnen Karte überdecken, sondern wir benötigen einen Atlas mit zwei Karten. Eine Karte beschreibt den Innenraum, die andere Karte den Außenraum. In diesem Kapitel setzen wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

¹Unter der gewöhnlichen Schwarzschild-Lösung wollen wir im weiteren stets die Außenraum-Lösung verstehen.

4.2.1 Innen- und Außenraum-Metrik

In mitfallenden Koordinaten können wir folgenden Ansatz für das Linienelement in beiden Karten machen [75]:

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{\Omega(\tau,R)} dR^2 + e^{\omega(\tau,R)} (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (4.2.1)$$

Aus den Feldgleichungen erhalten wir dann jeweils eine Lösung für den Innenraum ($R < R_b$) und eine für den Außenraum ($R \geq R_b$),

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau\right)^{4/3} (dR^2 + R^2 d\sigma^2) \quad \text{für } R \leq R_b, \quad (4.2.2a)$$

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{R}{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)^{2/3}} dR^2 + \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{4/3} d\sigma^2 \quad \text{für } R \geq R_b, \quad (4.2.2b)$$

wobei $R_b = \text{const}$ der Rand des Staubsterns, $d\sigma^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$ das Oberflächenelement einer Sphäre, $r_s = 2M$ der Schwarzschildradius und τ die globale Eigenzeit der kollabierenden Materie ist (siehe Anhang §B.1). Die Winkelvariablen ϑ und φ sind wie gewohnt in den Intervallen $0 < \vartheta < \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ definiert. *Zu beachten ist, daß zwar beide Metriken die gleichen Symbole für die Koordinaten besitzen, diese haben aber zunächst einmal noch nichts miteinander zu tun.* Im weiteren wollen wir den Außenraum mit seiner Metrik als Karte 1, den Innenraum mit dessen Metrik als Karte 2 bezeichnen. Das Linienelement des Innenraums entspricht einer flachen Robertson-Walker-Metrik [82].

Der Staubstern ist vollständig kollabiert, sobald die Innenraum-Metrik entartet. Dies ist der Fall, wenn in Gleichung (4.2.2a) die erste Klammer verschwindet. Die daraus resultierende Kollaps-Eigenzeit ist

$$\tau_C = \frac{2R_b^{3/2}}{3\sqrt{r_s}}. \quad (4.2.3)$$

Die Innenraum-Metrik (4.2.2a) ist daher nur für Eigenzeiten $\tau < \tau_C$ gültig. Der erlaubte Wertebereich der Radial-Koordinate R im Außenraum beschränkt sich auf

$$R > R_A(\tau) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{2/3}, \quad \text{für } \tau > \tau_C, \quad (4.2.4)$$

da ansonsten auch hier die Metrik für $R < R_A(\tau)$ entartet. Anders formuliert können wir aus Gleichung (4.2.4) auch den Zeitpunkt $\tau_c(R)$ angeben, zu dem die Sphäre mit dem Radius R kollabiert ist:

$$\tau_c(R) = \frac{2}{3\sqrt{r_s}} R^{3/2}.$$

Der Gültigkeitsbereich der Koordinaten τ und R ist in Abbildung \S 4.1 nochmals zusammenfassend dargestellt.

4.2.2 Transformation am Kartenrand

Um von einer Karte in die andere Karte zu gelangen, müssen wir eine Koordinaten-Transformation durchführen. Wie bereits erwähnt, beschreibt τ die globale Zeit; sie ändert sich demnach nur durch eine Konstante, die wir aber Null setzen. Der Rand R_b des Staubsterns ist eine zweidimensionale sphärische Fläche, auf der beide Metriken identisch sein müssen. Wir identifizieren daher die Winkelkoordinaten ϑ und φ von Außen- und Innenraum miteinander. Aus numerischen Gründen soll die Oberfläche des Staubsterns auch in einer kleinen Umgebung durch beide Metriken beschrieben werden. Dann folgt aber mit ($d\tau = dR = 0$) durch Vergleich der beiden Metriken für die Transformation der Radial-Koordinate²

$$\text{Karte 1} \rightarrow \text{Karte 2} \quad : \quad R_{\text{in}} = \left(\frac{R_{\text{out}}^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}{1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau}\right)^{2/3}, \quad \text{bzw.} \quad (4.2.5)$$

$$\text{Karte 2} \rightarrow \text{Karte 1} \quad : \quad R_{\text{out}} = \left[\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau\right) R_{\text{in}}^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right]^{2/3}. \quad (4.2.6)$$

²Die Index-Kennung *in* kennzeichnet den Innenraum, *out* den Außenraum.

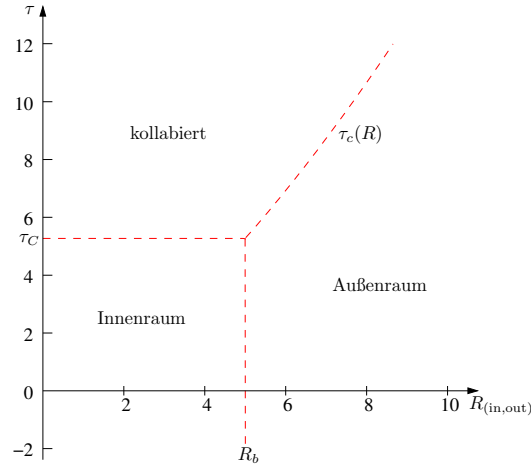


Abbildung 4.1: Gültigkeitsbereich der Koordinaten τ und R für die Parameter ($R_b = 5, r_s = 2$). Der Innenraum ist zur Eigenzeit τ_C kollabiert. Im Außenraum sind die Radialwerte R durch $\tau_c(R)$ beschränkt.

Unumgänglich ist die Transformation der Radial-Richtung beim Kartenwechsel. So folgt für einen Vektor y mit der Darstellung

$$y = y^\tau \partial_\tau + y^{R_{\text{in}}} \partial_{R_{\text{in}}} = \tilde{y}^\tau \partial_\tau + \tilde{y}^{R_{\text{out}}} \partial_{R_{\text{out}}} \quad (4.2.7)$$

und der Transformation $\partial_{R_{\text{in}}} = dR_{\text{out}}/dR_{\text{in}} \partial_{R_{\text{out}}}$

$$\tilde{y}^{R_{\text{out}}} = \sqrt{\frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{out}}}} \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau \right) y^{R_{\text{in}}} \quad (4.2.8)$$

und analog für den entgegengesetzten Kartenwechsel.

4.2.3 Standardform der Metrik

Aus dem Birkhoff-Theorem [107] folgt, daß jede sphärisch-symmetrische Vakuumlösung der Einstein-Gleichungen äquivalent zur Schwarzschild-Lösung ist. Im Außenraum können wir also ebensogut Schwarzschild-Koordinaten verwenden. Der Innenraum hingegen ist konform flach — der Weyl-Tensor verschwindet identisch — und entspricht der Friedmann-Robertson-Walker-Metrik.

Sowohl Außen- als auch Innenraum können wir auf die Standardform

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (4.2.9)$$

bringen. Das sphärische Oberflächenelement $d\sigma^2$ bleibt erhalten, so daß nur die Zeit- und die Radial-Koordinate transformiert werden müssen.

Schwarzschild-Koordinaten im Außenraum

Im Außenraum erwarten wir aufgrund des Birkhoff-Theorems die bekannte Schwarzschild-Metrik (5.1.1) mit

$$e^{\nu(r)} = 1 - \frac{r_s}{r} \quad \text{und} \quad e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - r_s/r}.$$

Einen Beobachter wollen wir als „statisch“ bezeichnen, wenn er bezüglich der Schwarzschild-Metrik ruht, d.h. wenn r, ϑ und φ konstant bleiben.

Für die Transformation von mitbewegten Koordinaten auf Schwarzschild-Koordinaten erhalten wir

$$r = \left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau \right)^{2/3}, \quad (4.2.10a)$$

$$t = \frac{2}{3\sqrt{r_s}} \left(R^{3/2} - r^{3/2} \right) - 2\sqrt{rr_s} + r_s \ln \frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_s}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_s}}, \quad (4.2.10b)$$

und für die Rücktransformation von Schwarzschild- auf mitbewegte Koordinaten entsprechend

$$R = \left[\frac{3\sqrt{r_s}}{2} \left(t + 2\sqrt{rr_s} - r_s \ln \frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_s}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_s}} \right) + r^{3/2} \right]^{2/3}, \quad (4.2.11a)$$

$$\tau = \frac{2}{3\sqrt{r_s}} \left(R^{3/2} - r^{3/2} \right) = t + 2\sqrt{rr_s} - r_s \ln \frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_s}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_s}}. \quad (4.2.11b)$$

Im Prinzip ist die Transformation (4.2.10a) für alle R und τ gültig. Allerdings haben wir die Bedingung $R \geq R_b$ und Gleichung (4.2.4) zu erfüllen. Dennoch kann sich aus Gleichung (4.2.10a) ein Radialwert $r < r_s$ ergeben, wobei für diesen dann die Transformation (4.2.10b) nicht mehr ohne Weiteres möglich ist. Auch die Rücktransformationen (4.2.11a) und (4.2.11b) sind nur für Radialwerte $r > r_s$ durchführbar. Gleichung (4.2.4) verschärft sich demnach zu

$$R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau \geq R_b^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau > r_s^{3/2}. \quad (4.2.12)$$

Aus Gleichung (4.2.10a) folgt mit $R = R_b$ die Eigenzeit τ_{BH} , ab der der Staubrand R_b unter dem Schwarzschild-Horizont verschwindet:

$$\tau_{\text{BH}} = \frac{2}{3\sqrt{r_s}} \left(R_b^{3/2} - r_s^{3/2} \right). \quad (4.2.13)$$

Die Eigenzeit $\tau_{\text{fall}} = \tau_C - \tau_{\text{BH}} = \frac{2}{3} r_s$, vom Überqueren des Horizonts bis zum Sturz in die Singularität, hängt also lediglich von der Masse des Schwarzen Lochs ab. Da wir im weiteren Verlauf auch eine Transformation für die Richtungen benötigen, fügen wir diese gleich an:

$$\partial_r = \frac{\partial R}{\partial r} \partial_R + \left(\frac{\partial \tau}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) \partial_\tau = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{R}(r-r_s)} \partial_R + \frac{\sqrt{rr_s}}{r-r_s} \partial_\tau, \quad (4.2.14a)$$

$$\partial_t = \frac{\partial R}{\partial t} \partial_R + \frac{\partial \tau}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t} \partial_\tau = \sqrt{\frac{r_s}{R}} \partial_R + \partial_\tau. \quad (4.2.14b)$$

Entsprechend gilt für die umgekehrte Richtungstransformation:

$$\partial_R = \sqrt{\frac{R}{r}} \partial_r - \frac{\sqrt{Rr_s}}{r-r_s} \partial_\tau, \quad (4.2.15a)$$

$$\partial_\tau = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} \partial_r + \frac{r}{r-r_s} \partial_t. \quad (4.2.15b)$$

Schwarzschild-Koordinaten im Innenraum

Im Innenraum haben wir die Koordinaten-Transformation

$$r = R \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau \right)^{2/3}, \quad (4.2.16a)$$

$$t = \frac{2}{3\sqrt{r_s}} \left(R_b^{3/2} - (r_s y)^{3/2} \right) - 2r_s \sqrt{y} + r_s \ln \frac{\sqrt{y} + 1}{\sqrt{y} - 1} \quad (4.2.16b)$$

$$\text{mit } y = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{R}{R_b} \right)^2 - 1 \right] + \frac{r R_b}{r_s R}.$$

Die Transformation (4.2.16a) ist für $\tau < \tau_C$ (Gl. (4.2.3)) nur dann sinnvoll, solange der Stern noch nicht kollabiert ist. Eine zweite Forderung an τ bzw. R folgt aus (4.2.16b), da $y > 1$ sein muß. Damit gilt für konstantes R :

$$\tau < \frac{2}{3\sqrt{r_s}} R_b^{3/2} - \frac{2}{3} r_s \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_b} \right)^2 \right]^{3/2},$$

bzw. für konstantes τ :

$$R^2 > R_b^2 \left[3 - \frac{2R_b}{r_s} \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau \right)^{2/3} \right].$$

Aus der Bedingung $y > 1$ können wir aber auch noch eine weitere Relation herleiten. So folgt

$$\frac{r}{r_s} > \frac{R}{R_b} \left(\frac{3}{2} - \frac{R^2}{2R_b^2} \right) \quad (4.2.17)$$

und damit kann die Transformation (4.2.16a) nicht jeden Radialwert r annehmen. Aufgrund dieser Beschränkungen ist es nicht sinnvoll, im Innenraum auf Schwarzschild-Koordinaten zu transformieren. Objekte im Innenraum werden wir demnach nur in mitfallenden Koordinaten beschreiben.

Kruskal-Koordinaten für den Außenraum

Da die Schwarzschild-Koordinaten am Schwarzschild-Horizont ungeeignet sind, wollen wir hier die Transformation von mitfallenden auf Kruskal-Koordinaten bereitstellen³. Für den Außenraum gilt

$$X = e^{\frac{r}{2r_s}} \left[\sqrt{\frac{r}{r_s}} \cosh \alpha + \sinh \alpha \right], \quad T = e^{\frac{r}{2r_s}} \left[\sqrt{\frac{r}{r_s}} \sinh \alpha + \cosh \alpha \right], \quad (4.2.18)$$

mit $\alpha = \tau/(2r_s) - \sqrt{r/r_s}$ und $r = (R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)^{2/3}$. In diesem Fall ist $r = r(\tau, R)$ lediglich eine Funktion der mitfallenden Koordinaten und hat nicht mehr die Bedeutung der Schwarzschild-Radialkoordinate.

In Abbildung 4.2 ist der Rand ($R = R_b$) des Staubsterns überquert in Kruskal-Koordinaten den Horizont $r = r_s$ in endlicher Zeit und stürzt in die Singularität ($r = 0$).

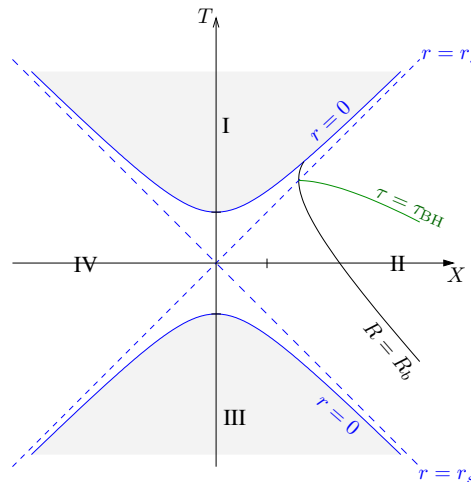


Abbildung 4.2: Der Rand ($R = R_b$) des Staubsterns überquert in Kruskal-Koordinaten den Horizont $r = r_s$ in endlicher Zeit und stürzt in die Singularität ($r = 0$).

³Eine kurze Erläuterung zu Kruskal-Koordinaten und die Herleitung der Transformation (4.2.18) findet sich im Anhang §B.

4.2.4 Zusammenhang zwischen den Koordinaten

Die Trennung von Innen- und Außenraum durch den Staubrand R_b wird in Schwarzschild-Koordinaten durch die zeitartige Geodäte in Abbildung 4.3 definiert. Der Staubrand überquert zwar nach seiner Eigenzeit $\tau = \tau_{\text{BH}}$ den Ereignishorizont r_s , in Schwarzschild-Koordinaten — die die Sichtweise eines unendlich entfernten Beobachters widerspiegeln — erreicht der Staubrand den Horizont jedoch nie.

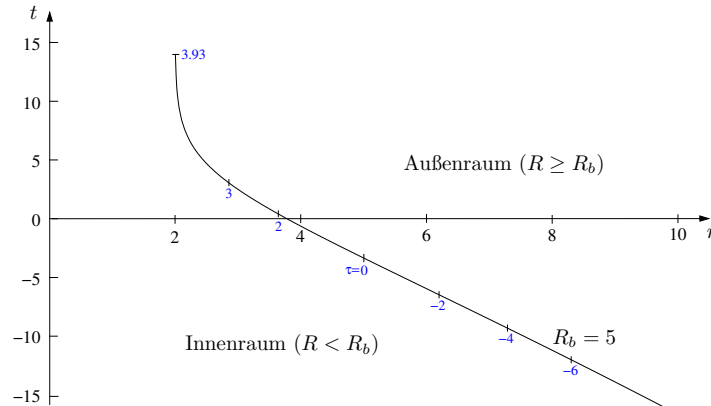


Abbildung 4.3: Der Staubrand $R_b = 5$ in Schwarzschild-Koordinaten trennt Innen- und Außenraum. Er überquert den Schwarzschildhorizont $r_s = 2$ nach seiner Eigenzeit $\tau_{\text{BH}} \approx 3.937$ und landet dann nach $\Delta\tau = \tau_{\text{fall}} = 4/3$ in der Singularität. In Schwarzschild-Koordinaten nähert der Staubrand sich jedoch nur asymptotisch dem Wert r_s .

Eine Zusammenfassung der Transformationen von Außen- bzw. Innenraum auf Schwarzschild-Koordinaten ist in der Abbildung 4.4 dargestellt. Im Außenraum laufen alle Radialwerte asymptotisch gegen den Horizont r_s . So schneiden sich zum Beispiel die Linien $R = R_b$ und $\tau = \tau_C$ für $t \rightarrow \infty$ bei $r = r_s$; dies entspricht dem oben schon erklärten Fall, wenn der Staubrand den Horizont überquert.

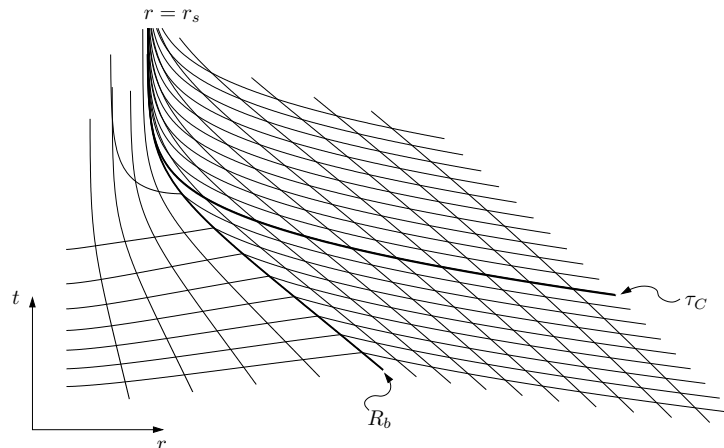


Abbildung 4.4: Zusammenhang zwischen Schwarzschild- und mitfallenden Koordinaten. „Vertikale“ Linien entsprechen konstantem R , „horizontale“ Linien entsprechen konstantem τ .

Aufgrund der beschränkten Gültigkeit der Schwarzschild-Koordinaten wollen wir im weiteren stets in mitfallenden Koordinaten rechnen. Lediglich Anfangsort und -richtung können außerhalb des Staubsterns auch in Schwarzschild-Koordinaten angegeben werden.

4.3 Lokale Tetraden

Da die Metriken für den Innen- und Außenraum sehr einfach sind, können wir auch direkt die lokalen Tetraden ablesen. So gilt für den Innenraum

$$\mathbf{e}_\tau = \partial_\tau, \quad \mathbf{e}_R = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau\right)^{2/3}} \partial_R, \quad (4.3.1a)$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau\right)^{2/3} R} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau\right)^{2/3} R \sin \vartheta} \partial_\varphi, \quad (4.3.1b)$$

und für den Außenraum

$$\mathbf{e}_\tau = \partial_\tau, \quad \mathbf{e}_R = \frac{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{1/3}}{\sqrt{R}} \partial_R, \quad (4.3.2a)$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{2/3}} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{2/3} \sin \vartheta} \partial_\varphi, \quad (4.3.2b)$$

Beschreiben wir die lokale Tetrade eines Beobachters oder die Bewegungsrichtung eines Objekts im Außenraum bezüglich Schwarzschild-Koordinaten, so müssen wir diese Vektoren auf mitfallende Koordinaten transformieren. Mit (4.3.2) und (4.2.14a, 4.2.14b) folgt

$$\begin{aligned} y &= y^t \partial_t + y^r \partial_r \\ &= \left(y^t + y^r \frac{\sqrt{r_s}}{r - r_s}\right) \partial_\tau + \left(y^t \sqrt{\frac{r_s}{R}} + y^r \frac{r^{3/2}}{\sqrt{R}(r - r_s)}\right) \partial_R \\ &= y^\tau \partial_\tau + y^R \partial_R. \end{aligned}$$

Im Außenraum können wir auch eine Transformation der lokalen Tetrade von Schwarzschild- auf mitbewegte Koordinaten geben:

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \left(\mathbf{e}_t - \sqrt{\frac{r_s}{r}} \mathbf{e}_r\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_R = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \left(-\sqrt{\frac{r_s}{r}} \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_r\right). \quad (4.3.3)$$

Für die Koordinaten in den jeweiligen Tetraden gilt dann mit $y = \tilde{y}^t \mathbf{e}_t + \tilde{y}^r \mathbf{e}_r = \tilde{y}^\tau \mathbf{e}_\tau + \tilde{y}^R \mathbf{e}_R$:

$$\tilde{y}^\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \left(\tilde{y}^t + \tilde{y}^r \sqrt{\frac{r_s}{r}}\right) \quad \text{und} \quad \tilde{y}^R = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \left(\tilde{y}^t \sqrt{\frac{r_s}{r}} + \tilde{y}^r\right). \quad (4.3.4)$$

4.4 Geschwindigkeiten im Außenraum

Ein Objekt, welches bezüglich der Außenraummetrik (4.2.2b) ruht ($R = R_o = \text{const}, \vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$), bewegt sich bezogen auf einen statischen Beobachter (vgl. Abs. §4.2.3) am momentanen Ort des Objekts mit der Geschwindigkeit v_{lok} in radialer Richtung. Aus den Gleichungen (4.2.10a) und (4.2.10b) erhalten wir den Ort r_o und die Zeit t_o für das mitfallende Objekt in Schwarzschild-Koordinaten. Bilden wir die Ableitungen der Schwarzschild-Koordinaten des Objekts nach dessen Eigenzeit τ , so folgt

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} \quad \text{und} \quad \dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1 - r_s/r}.$$

Mit der Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u} = \gamma(\mathbf{e}_t + v\mathbf{e}_r)$ des Objekts und der lokalen Tetrade $\{\mathbf{e}_\mu\}_{(t_o, r_o)}$ eines statischen Beobachters am Ort (t_o, r_o) folgt für die von diesem Beobachter gemessene lokale Geschwindigkeit

$$v_{\text{lok}} = -\sqrt{\frac{r_s}{r_o}} \quad \text{mit} \quad r_o = \left(R_o^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau_o\right)^{2/3} \quad (4.4.1)$$

bezogen auf die Eigenzeit τ_0 des mitfallenden Beobachters. Das negative Vorzeichen zeigt, daß die Geschwindigkeit radial nach innen weist. Nähert sich das mitfallende Objekt dem Horizont, so wird seine Geschwindigkeit immer größer, bis sie im Grenzfall $r_o \rightarrow r_s$ die Lichtgeschwindigkeit erreicht.

Ein weit entfernter Beobachter würde durch Messen jedoch feststellen, daß sich das Objekt immer langsamer auf den Schwarzschild-Horizont r_s zubewegt, diesen aber nie erreicht. Laut seiner Rechnung würde er die Geschwindigkeit durch

$$v_{\text{beob}} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = -\sqrt{\frac{r_s}{r_o}} \left(1 - \frac{r_s}{r_o}\right) \quad (4.4.2)$$

angeben. Im Grenzfall $r_o \rightarrow r_s$ verschwindet v_{beob} .

In Abbildung 4.5 sind beide Geschwindigkeiten bezogen auf die Eigenzeit τ des mitfallenden Beobachters bis zu dessen Überqueren des Horizonts zur Zeit $\tau_{\text{BH}} \approx 40.83$ eingetragen. Die jeweiligen lokalen Beobachter an den Orten (t_0, r_0) messen eine vom Betrag her ständig zunehmende Geschwindigkeit. Ein weit entfernter Beobachter hingegen stellt zunächst eine Geschwindigkeitszunahme fest, allerdings nimmt die Geschwindigkeit aus seiner Sicht wieder ab und endet bei $v_{\text{beob}} = 0$.⁴

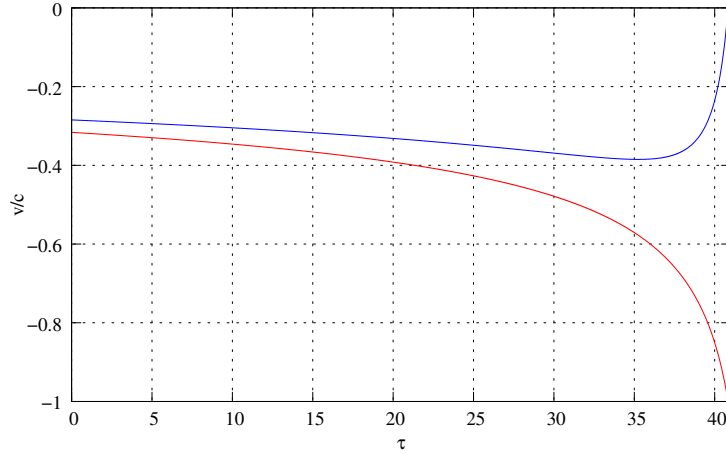


Abbildung 4.5: Geschwindigkeit eines mitfallenden Beobachters am Ort $R_{\text{com}} = 20$ aus verschiedenen Perspektiven bezogen auf die Eigenzeit des mitfallenden Beobachters. Dieser überquert zu seiner Eigenzeit $\tau \approx 40.83$ den Horizont. **Rot:** Geschwindigkeit v_{lok} bezogen auf den jeweiligen statischen Beobachter am momentanen Ort (t_0, r_0) . **Blau:** Geschwindigkeit v_{beob} , wie sie ein weit entfernter Beobachter beurteilen würde.

4.5 Nullgeodäten

Zur Berechnung der lichtartigen Geodäten im Außen- wie auch im Innenraum verwenden wir den Lagrange-Formalismus. Im Fall radialer Nullgeodäten gelingt es uns noch, eine analytische Darstellung zu geben, allgemeine Geodäten werden wir jedoch nur numerisch integrieren.

4.5.1 Radiale Nullgeodäten im Außenraum

Aus der Metrik (4.2.2b) folgt für die Lagrange-Funktion radialer Nullgeodäten ($\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$)

$$\mathcal{L}_{\text{out}} = -\dot{\tau}^2 + \frac{R}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{2/3}} \dot{R}^2 = 0, \quad \text{mit} \quad \dot{\tau} = \frac{d\tau}{d\lambda} \quad (4.5.1)$$

⁴Es soll hier jedoch nicht der Eindruck entstehen, der mitfallende Beobachter würde aus der Sicht des weit entfernten Beobachters den Horizont gerade noch so erreichen. Dies scheint nur aufgrund der Darstellung von v_{beob} bezüglich der Eigenzeit τ so zu sein. Bezieht sich der weit entfernte Beobachter auf seine eigene Zeit, so erreicht der mitfallende Beobachter aus seiner Sicht den Horizont nur asymptotisch.

und einem affinen Parameter λ . Ersetzen wir $\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dR} \dot{R}$ in \mathcal{L}_{out} , so folgt

$$\frac{d\tau}{dR} = \pm \frac{\sqrt{R}}{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)^{1/3}}. \quad (4.5.2)$$

Leider liefert diese Differentialgleichung nur eine implizite Funktion $g(R, \tau) = 0$ für $\tau > \tau_i$ mit

$$g(R, \tau) := \pm \frac{1}{\sqrt{r_s}} \left[f(r_s, R, \tau)^{1/3} - f(r_s, R_i, \tau_i)^{1/3} \right] + \frac{1}{2r_s} \left[f(r_s, R, \tau)^{2/3} - f(r_s, R_i, \tau_i)^{2/3} \right] \\ \mp \frac{\tau - \tau_i}{2r_s} + \ln \frac{f(r_s, R, \tau)^{1/3} \mp \sqrt{r_s}}{f(r_s, R_i, \tau_i)^{1/3} \mp \sqrt{r_s}}, \quad (4.5.3)$$

wobei wir der Übersicht halber $f(r_s, R, \tau) = R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau$ gesetzt haben. Das obere Vorzeichen entspricht auslaufenden, das untere Vorzeichen einlaufenden Nullgeodäten. Die Ableitung von $g(R, \tau)$ nach der Eigenzeit τ ergibt sich zu

$$\partial_\tau g = \mp \frac{f(r_s, R, \tau)^{1/3}}{2r_s [f(r_s, R, \tau)^{1/3} \mp \sqrt{r_s}]}. \quad (4.5.4)$$

Die implizite Funktion $g(R, \tau) = 0$ ist folglich nur dort nach τ auflösbar, wo $\partial_\tau g \neq 0$ ist. Kritische Stellen treten demnach auf, wenn $f(r_s, R, \tau)^{1/3} = 0$ oder $f(r_s, R, \tau)^{1/3} = \pm\sqrt{r_s}$ ist, also bei $\tau = \tau_c(R)$ oder $\tau = \tau_{\text{BH}}$.

Betrachten wir einlaufende Nullgeodäten, so müssen wir beachten, daß die Raumzeit immer mehr kollabiert. Ein Lichtstrahl kann unter Umständen nur solche Radialwerte erreichen, die noch nicht kollabiert sind (Abb. 4.6). Der Grenzfall tritt gerade dann ein, wenn $\tau = \tau_c(R)$, also bei $\partial_\tau g = 0$. Setzen wir $\tau_c(R)$ in Gleichung (4.5.3) ein und lösen nach R auf, dann erhalten wir für den gerade noch erreichbaren Radius R_-

$$R_- = \left[\frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau_i - 3r_s F_i^{1/3} + \frac{3}{2}\sqrt{r_s} F_i^{2/3} - \frac{3}{2}r_s^{3/2} \ln \frac{r_s}{F_i^{2/3} + 2\sqrt{r_s} F_i^{1/3} + r_s} \right]^{2/3} \quad (4.5.5)$$

mit $F_i = f(r_s, R_i, \tau_i)$, wobei $f(r_s, R_-, \tau_c(R_-)) = 0$. Diese Beziehung erlaubt zwar Werte $R_- < R_b$; jedoch spielen diese keine Rolle, da der Lichtstrahl sich dann bereits im Innenraum befindet.

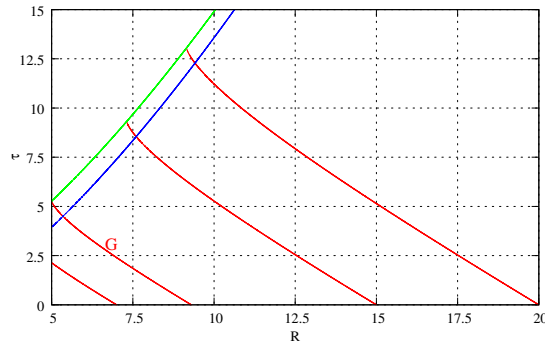


Abbildung 4.6: Radial einlaufende Nullgeodäten gelangen im Außenraum eines kollabierenden Staubsterns — hier mit den Parametern ($r_s = 2, R_b = 5$) — nur bis zum Radialwert R_- (grüne Linie). Dieser markiert gleichzeitig die Zeit, zu der die zugehörige Sphäre mit dem entsprechenden Radius kollabiert. Die blaue Linie stellt den Schwarzschild-Horizont dar. Startorte der Geodäten sind: $R = \{7, 9.3, 10, 15, 20\}$. Die Nullgeodäte G erreicht als letzte den Staubrand, bevor dieser kollabiert ist.

Ein Beobachter, der sich knapp unterhalb des Sternrandes befindet, kann nur solche Ereignisse des Außenraums sehen, welche sich „unterhalb“ der letzten Nullgeodäten G befinden.

Bei auslaufenden Geodäten müssen wir darauf achten, ob sie außerhalb oder innerhalb des Schwarzschild-Horizonts r_s starten. Diese Fallunterscheidung wird auch durch die Auflösungsbedingung $\nabla g \neq 0$ erzwungen. Im ersten Fall erreichen die Lichtstrahlen einen äußeren Beobachter, im zweiten Fall gelingt es ihnen nicht mehr.

In Abbildung 4.7 ist für die Parameter $r_s = 2$ und $R_b = 5$ die Beobachterzeit τ über den Beobachterort R aufgetragen. Weiterhin sind radial auslaufende Nullgeodäten mit den Startwerten (R_i, τ_i) und der Schwarzschildhorizont r_s eingezeichnet. Der Staubstern überquert den Horizont zur Zeit $\tau_{\text{BH}} \approx 3.937129$ und ist zur Zeit $\tau_C \approx 5.270463$ vollständig kollabiert. Ein äußerer Beobachter, der sich zum Beispiel am Ort $R = 30$ befindet, sieht zu seiner Zeit $\tau = 40$ einen Lichtstrahl, der vom Sternrand $R = R_b$ zur Zeit $\tau = 3.5$ gestartet ist. Selbst kurz bevor er den Horizont zur Zeit $\tau_{\text{BH}}(30) \approx 76.13$ überquert, sieht er nur Lichtstrahlen, die noch außerhalb des Horizonts gestartet sind. Lediglich in der kurzen Zeitspanne bis zur Zeit $\tau_C(30) \approx 77.46$, wenn der Beobachter in die Singularität stürzt, sieht er einen kurzen Ausschnitt, während dem sich die Oberfläche des Staubsterns unterhalb des Horizonts befindet.

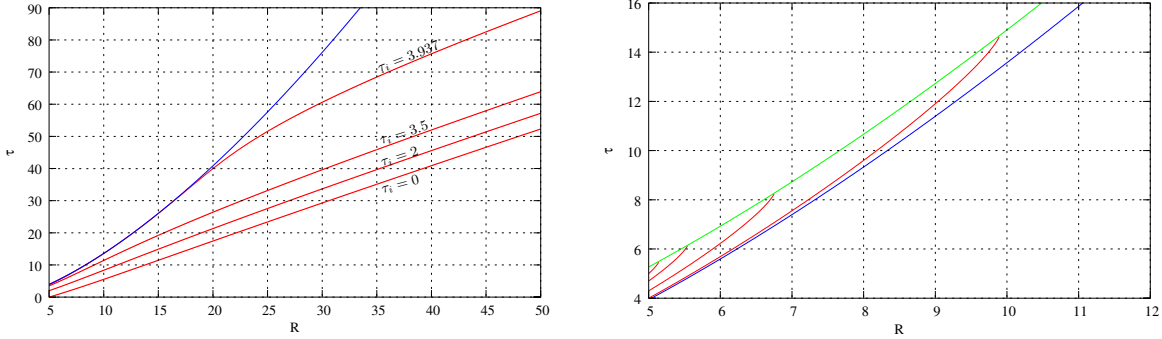


Abbildung 4.7: Radial auslaufende Nullgeodäten gelangen im Außenraum eines kollabierenden Staubsterns — hier mit den Parametern ($r_s = 2, R_b = 5$) — für Startwerte ($R_i = R_b, \tau_i$), die außerhalb des Horizonts (blaue Linie) liegen bis nach Unendlich (links). Radial auslaufende Nullgeodäten, die unterhalb des Horizonts starten, können diesen auch nicht mehr überwinden und erreichen nur bestimmte Radialwerte (grün), die den Kollaps der Sphäre mit diesem Radius markieren (rechts). Startwerte hier sind: $\tau = 4, \tau = 4.3, \tau = 4.7$ und $\tau = 5$.

4.5.2 Allgemeine Nullgeodäten im Außenraum

Betrachten wir den kollabierenden Staubstern zunächst als opakes Objekt, so genügt es, Nullgeodäten im Außenraum zu betrachten. Aufgrund der sphärischen Symmetrie können wir uns auf Nullgeodäten in der Äquatorebene ($\vartheta = \pi/2$) beschränken. Allerdings vereinfachen sich die Geodätengleichungen dadurch nur unwesentlich⁵,

$$0 = \ddot{r} + \frac{R\sqrt{r_s}}{2(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)^{5/3}} \dot{R}^2 - \sqrt{r_s} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau \right)^{1/3} \dot{\varphi}^2, \quad (4.5.6a)$$

$$0 = \ddot{R} + \frac{\sqrt{r_s}}{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)} \left(\dot{R}\dot{\tau} - \frac{4}{3} \frac{\tau}{R} \dot{R}^2 \right) - \frac{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)}{\sqrt{R}} \dot{\varphi}^2, \quad (4.5.6b)$$

$$0 = \ddot{\varphi} - \frac{2}{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)} \left(\sqrt{r_s} \dot{\varphi} \dot{\tau} - \sqrt{R} \dot{\varphi} \dot{R} \right), \quad (4.5.6c)$$

weshalb wir sie hier auch nur numerisch lösen werden. Wir können aber dennoch zwei qualitative Aussagen aus den Geodätengleichungen ableiten. Zum einen folgt aus Gleichung (4.5.6b) mit $\dot{R} = 0$, daß in diesem Fall $\ddot{R} > 0$ ist und R daher lokal zunimmt. Eine Geodäte, welche azimuthal⁶ startet, entfernt sich vom Sternrand R_b . Zum anderen folgt aus Gleichung (4.5.6c) mit $\dot{\varphi} = 0$, daß $\ddot{\varphi} = 0$ ist. Die Geodäte hat in diesem Fall einen Wendepunkt oder sie bewegt sich sogar rein radial. Startet eine Geodäte radial, so bleibt sie eine radiale Geodäte.

⁵Die vollständigen Geodätengleichungen stehen in §B.3 (Anhang).

⁶Unter azimuthaler Richtung wollen wir die reine e_φ -Richtung verstehen.

Anfangsbedingungen für mitfallenden Beobachter

Zur Lösung der Geodätengleichungen (4.5.6a-c) benötigen wir den Ort (τ_o, R_o, φ_o) des mitfallenden Beobachters und eine Anfangsrichtung \mathbf{y} , welche wir bezüglich des lokalen, mitfallenden Systems (4.3.2) des Beobachters angeben,

$$\mathbf{y} = y^\tau \mathbf{e}_\tau + \cos \xi \mathbf{e}_R + \sin \xi \mathbf{e}_\varphi = \tilde{y}^\tau \partial_\tau + \tilde{y}^R \partial_R + \tilde{y}^\varphi \partial_\varphi, \quad (4.5.7)$$

wobei \tilde{y}^μ die eigentlichen Startwerte für die Anfangsrichtung sind. Aus der Normierungsbedingung $\eta_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = 0$ ergibt sich die Zeit-Komponente $y^\tau = \pm 1$. Das Vorzeichen gibt darüber Auskunft, ob sich die Geodäte in die Zukunft (+) oder die Vergangenheit (-) bewegen soll. Da wir das Raytracing-Verfahren anwenden wollen, berechnen wir Nullgeodäten nur rückwärts in die Vergangenheit. Der Winkel $\xi = \pi$ entspricht dem Blick ins Zentrum des kollabierenden Sterns.

Anfangsbedingungen für statischen Beobachter

Wollen wir die Geodätengleichungen (4.5.6a-c) für einen statischen Beobachter am Ort (t_o, r_o, φ_o) lösen, so müssen wir auch die Anfangsrichtung \mathbf{y} bezüglich der statischen lokalen Tetrade — diese entspricht der lokalen Tetrade (5.1.2) in Schwarzschildkoordinaten — angeben,

$$\mathbf{y} = y^t \mathbf{e}_t + \cos \xi \mathbf{e}_r + \sin \xi \mathbf{e}_\varphi = \tilde{y}^t \partial_t + \tilde{y}^r \partial_r + \tilde{y}^\varphi \partial_\varphi. \quad (4.5.8)$$

Um die tatsächlichen Anfangswerte zu erhalten, müssen wir noch den Ort mittels (4.2.11a) und (4.2.11b) transformieren. In der Anfangsrichtung müssen wir die Koordinatenrichtungen ∂_t und ∂_r durch die Beziehungen (4.2.14b) und (4.2.14a) ersetzen.

4.5.3 Radiale Nullgeodäten im Innenraum

Analog zum Außenraum erhalten wir hier als Differentialgleichung

$$\frac{d\tau}{dR} = \pm \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau \right)^{3/2}. \quad (4.5.9)$$

Diese können wir nun aber explizit lösen. So gilt mit den Anfangswerten τ_i und R_i

$$\tau = \frac{2 R_b^{3/2}}{3 \sqrt{r_s}} \left(1 - \left[\mp \frac{1}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} (R - R_i) + \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau_i \right)^{1/3} \right]^3 \right), \quad (4.5.10)$$

wobei das obere Vorzeichen für auslaufende und das untere Vorzeichen für einlaufende Strahlen steht.

Wie müssen nun die Parameter R_b und r_s beschaffen sein, damit ein Lichtstrahl diametral von einer Seite der Staubwolke zur anderen gelangt, bevor der Staubrand den Schwarzschildhorizont überstreicht und es dem Lichtstrahl so unmöglich macht, zum Beobachter zu gelangen?

Zunächst betrachten wir den Strahlabschnitt vom Rand des Staubsterns zum Zentrum $R = 0$. Da es sich um einen einlaufenden Strahl handelt, ist das positive Vorzeichen zu wählen. Ein Lichtstrahl, der zur Eigenzeit $\tau_i = \tau_1$ bei $R_i = R_b$ startet, trifft im Zentrum zur Eigenzeit

$$\tau_{R_b \rightarrow 0} = \frac{2 R_b^{3/2}}{3 \sqrt{r_s}} \left(1 - \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_s}{R_b}} + \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau_1 \right)^{1/3} \right]^3 \right)$$

ein. Vom Zentrum $R = 0$ zum Zeitpunkt $\tau = \tau_{R_b \rightarrow 0}$ ausgehend erreicht er das andere Ende des Staubsterns zur Eigenzeit

$$\tau_{0 \rightarrow R_b} = \frac{2 R_b^{3/2}}{3 \sqrt{r_s}} \left(1 - \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_s}{R_b}} + \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau_{R_b \rightarrow 0} \right)^{1/3} \right]^3 \right).$$

Ein diametraler Lichtstrahl, der zur Eigenzeit $\tau = \tau_1$ bei $R = R_b$ startet, kann daher nur zu einem äußeren Beobachter vordringen, wenn die Gesamtzeit $\tau_{\text{ges}} = \tau_{R_b \rightarrow 0} + \tau_{0 \rightarrow R_b}$ kleiner ist als die Eigenzeit τ_{BH} zu der der Staubrand den Schwarzschild-Horizont überstrichen hat. Es muß daher folgende Beziehung gelten

$$\tau_{\text{ges}} = \frac{2 R_b^{3/2}}{3 \sqrt{r_s}} \left(1 - \left[-\sqrt{\frac{r_s}{R_b}} + \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau_1 \right)^{1/3} \right]^3 \right) > \tau_{\text{BH}}. \quad (4.5.11)$$

Konformes Diagramm

An Stelle der unübersichtlichen Gleichung (4.5.11) können wir uns den gleichen Sachverhalt auch an einem konformen Diagramm veranschaulichen. Hierzu definieren wir uns eine neue Zeitkoordinate T so, daß wir die Metrik (4.2.2a) im radialen Fall ($\vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$) auf die konforme Gestalt

$$ds^2 = -d\tau^2 + \psi(\tau)^2 dR^2 = \Psi(T)^2 (-dT^2 + dR^2) = \Psi(T)^2 d\tilde{s}^2$$

mit der konformen Metrik $d\tilde{s}^2$ bringen können. Der Vorteil des konformen Diagramms wird durch die Form der Metrik sofort deutlich. Lichtstrahlen werden nun durch Geraden mit der Steigung von 45° dargestellt. Die neue Zeitkoordinate erhalten wir mit $\psi(\tau) = \left(1 - \frac{3}{2\rho_b} \tau \right)^{2/3}$ und $\rho_b = R_b^{3/2} / \sqrt{r_s}$ durch

$$T = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\psi(\tau')} = 2\rho_b \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2\rho_b} \tau \right)^{1/3} \right]. \quad (4.5.12)$$

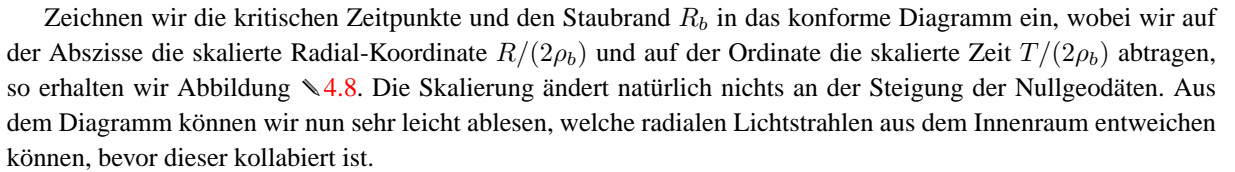
Rechnen wir die kritischen Zeitpunkte des Kollaps auf die neue Zeitkoordinate um, so erhalten wir für die Kollapseigenzeit τ_C und die Zeit τ_{BH} , zu der der Sternrand den Horizont r_s überquert,

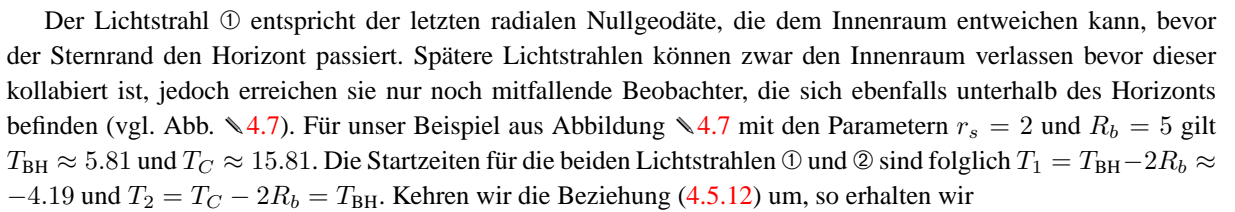
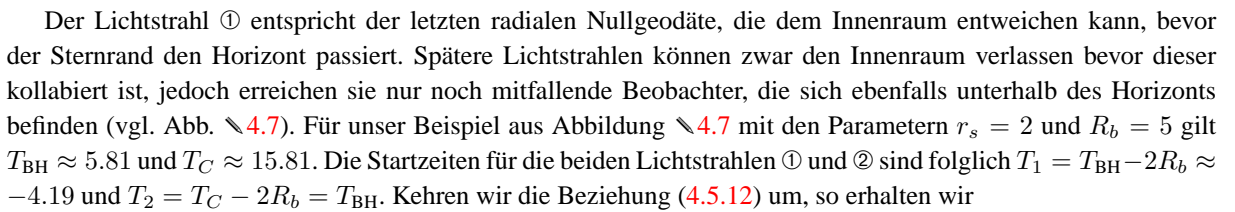
$$T_C = 2 \frac{R_b^{3/2}}{\sqrt{r_s}} = 2\rho_b \quad \text{und} \quad T_{\text{BH}} = 2 \frac{R_b^{3/2}}{\sqrt{r_s}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_s}{R_b}} \right) = 2\rho_b \left(1 - \sqrt{\frac{r_s}{R_b}} \right).$$

Ebenso können wir die Zeit $\Delta\tau = \tau_{\text{ges}} - \tau_1$, die ein Lichtstrahl zum Durchqueren des Staubsterns benötigt, auf die neue Zeitkoordinate umrechnen. So folgt zunächst

$$T_{R_b \rightarrow 0 \rightarrow R_b} = 2\rho_b \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2\rho_b} \tau_{\text{ges}} \right)^{1/3} \right] = 2\rho_b \left[1 - \left(1 - \frac{3}{2\rho_b} \tau_1 \right)^{1/3} \right] + 2\rho_b \sqrt{\frac{r_s}{R_b}} = T_1 + 2\rho_b \sqrt{\frac{r_s}{R_b}},$$

woraus sich sofort — wie zu erwarten — die Transversalzeit $\Delta T = T_{R_b \rightarrow 0 \rightarrow R_b} - T_1 = 2R_b$ ergibt.

Zeichnen wir die kritischen Zeitpunkte und den Staubrand R_b in das konforme Diagramm ein, wobei wir auf der Abszisse die skalierte Radial-Koordinate $R/(2\rho_b)$ und auf der Ordinate die skalierte Zeit $T/(2\rho_b)$ abtragen, so erhalten wir Abbildung  4.8. Die Skalierung ändert natürlich nichts an der Steigung der Nullgeodäten. Aus dem Diagramm können wir nun sehr leicht ablesen, welche radialen Lichtstrahlen aus dem Innenraum entweichen können, bevor dieser kollabiert ist.

Der Lichtstrahl ① entspricht der letzten radialen Nullgeodäte, die dem Innenraum entweichen kann, bevor der Sternrand den Horizont passiert. Spätere Lichtstrahlen können zwar den Innenraum verlassen bevor dieser kollabiert ist, jedoch erreichen sie nur noch mitfallende Beobachter, die sich ebenfalls unterhalb des Horizonts befinden (vgl. Abb.  4.7). Für unser Beispiel aus Abbildung  4.7 mit den Parametern $r_s = 2$ und $R_b = 5$ gilt $T_{\text{BH}} \approx 5.81$ und $T_C \approx 15.81$. Die Startzeiten für die beiden Lichtstrahlen ① und ② sind folglich $T_1 = T_{\text{BH}} - 2R_b \approx -4.19$ und $T_2 = T_C - 2R_b = T_{\text{BH}}$. Kehren wir die Beziehung (4.5.12) um, so erhalten wir

$$\tau = \frac{2\rho_b}{3} \left[1 - \left(1 - \frac{T}{2\rho_b} \right)^3 \right] \quad (4.5.13)$$

und damit die entsprechenden Zeiten $\tau_1 = -5.40$ und $\tau_2 = 5.27$.

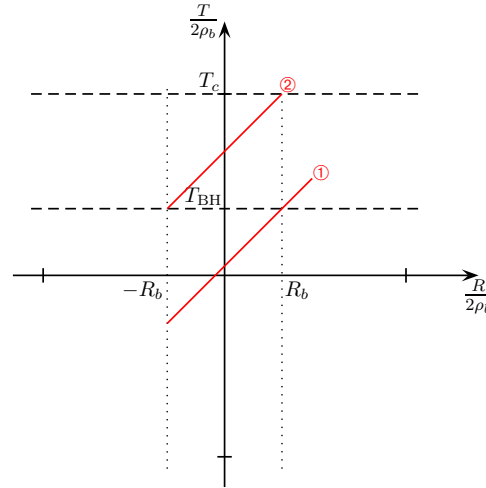


Abbildung 4.8: Konformes Diagramm für den Innenraum $R < R_b$ zu den Parametern ($r_s = 2, R_b = 5$). Die Stellen R_b und $-R_b$ markieren jeweils den Rand des Staubsterns. T_c ist die Kollapszeit und T_{BH} die Zeit, zu der der Sternrand den Schwarzschild-Horizont überquert. Der Lichtstrahl ① ist der letzte, der gerade noch den Innenraum verläßt und ins Unendliche entweichen kann. Alle Lichtstrahlen, die nach ② folgen, können nur noch im Innenraum gesehen werden.

4.5.4 Allgemeine Nullgeodäten im Innenraum

Auch für den Innenraum können wir die Geodätengleichungen angeben, können sie hier aber auch wieder nur numerisch lösen:

$$0 = \ddot{\tau} - \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{r_s}} R_b^{-3/2} \tau\right)^{1/3} \left[\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2\right], \quad (4.5.14a)$$

$$0 = \ddot{R} - \frac{2\sqrt{r_s}}{R_b^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)} \dot{R} \dot{\tau} - R \dot{\varphi}^2, \quad (4.5.14b)$$

$$0 = \ddot{\varphi} - \frac{2\sqrt{r_s}}{R_b^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)} \dot{\varphi} \dot{\tau} + \frac{2}{R} \dot{\varphi} \dot{R}. \quad (4.5.14c)$$

Setzen wir Gleichung (4.5.14c) in Gleichung (4.5.14b) ein, so erhalten wir für $\dot{\varphi} \neq 0$

$$0 = \ddot{R} - \frac{\dot{R}}{\dot{\varphi}} \left(\ddot{\varphi} + \frac{2}{R} \dot{R} \dot{\varphi}\right) - R \dot{\varphi}^2. \quad (4.5.15)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Geradengleichung in Polarkoordinaten (siehe Anhang §B.3.6) $0 = \ddot{R} - R \dot{\varphi}^2$ und $0 = 2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}$, so können wir vermuten, daß die Projektion einer allgemeinen Nullgeodäten im Innenraum auf den Hyperraum $t = \text{const}$ eine Gerade ist. Dies ist auch tatsächlich der Fall, da es sich beim Innenraum um einen konform flachen Raum handelt, für den der Weyl-Tensor verschwindet. Die Bahnen von Nullgeodäten bleiben bei einer konformen Transformation erhalten (siehe Anhang §A.6 oder [46]). Im flachen Raum sind die Bahnen der Nullgeodäten Geraden, woraus folgt, daß auch die Bahnen im Innenraum Geraden sind.

4.6 Visualisierung eines opaken Staubsterns

Gegeben sei ein kollabierender Staubstern mit Radius R_b . Der Kollaps werde einerseits von einem mitfallenden Beobachter am Ort R_{com} und andererseits von einem, bezüglich Schwarzschild-Koordinaten, statischen Beobachter

am Ort r_{stat} beobachtet. Der mitfallende Beobachter erreicht zu seiner Eigenzeit $\tau_{\text{com}} = 0$ den statischen Beobachter: $r_{\text{stat}}(\tau_{\text{com}} = 0) = R_{\text{com}}$. Mit der Gleichung (4.2.10b) erhalten wir aus der Eigenzeit τ_{com} die Schwarzschild-Koordinatenzeit t_{com} . Der statische Beobachter stellt daraufhin seine Eigenzeit t auf

$$t_{\text{stat}} = \sqrt{1 - r_s/r_{\text{stat}}} t_{\text{com}}. \quad (4.6.1)$$

Messen nun beide Beobachter den scheinbaren Winkeldurchmesser des Staubsterns während des Kollaps, so erhalten sie die Werte aus Abbildung 4.9.

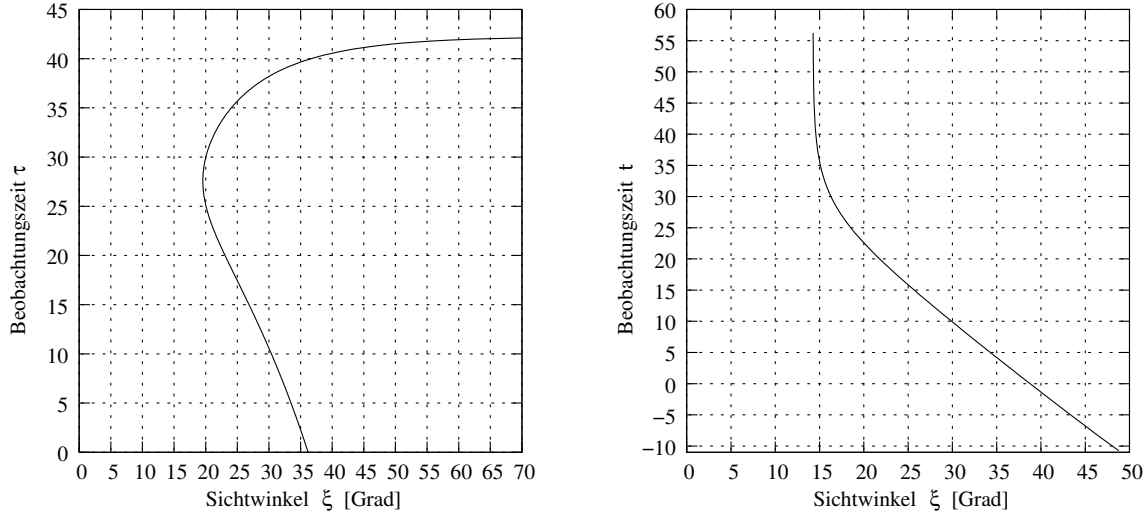


Abbildung 4.9: Links: Ein Staubstern mit dem Radius $R_b = 5$ nimmt für einen Beobachter am Ort $R_{\text{com}} = 20$ zur Eigenzeit τ einen Sichtwinkel von 2ξ ein. Zur Eigenzeit $\tau_h = 40.83$ überquert dieser Beobachter den Schwarzschild-Horizont und landet zur Eigenzeit $\tau_s = 42.16$ in der Singularität. Der Sternrand selbst hat bereits zur Zeit $\tau_{\text{BH}} = 3.94$ den Horizont und zur Zeit $\tau_C = 5.27$ die Singularität erreicht. **Rechts:** Der statische Beobachter am Ort $r_{\text{stat}} = 20$ sieht den Staubstern, bezogen auf seine Eigenzeit t , mit immer kleiner werdendem Winkeldurchmesser. Zu seiner Eigenzeit $t = -10.76$ mißt er, wie der mitfallende Beobachter zu diesem Zeitpunkt mit 31.62% der Lichtgeschwindigkeit an ihm vorbeirast. Der Sichtwinkel strebt im Grenzfall gegen $\xi_g \approx 14.269^\circ$.

Da sich der mitfallende Beobachter relativ zum statischen Beobachter auf den Staubstern zubewegt, sieht der mitfallende Beobachter den Stern aufgrund der Aberration unter einem kleineren Winkel

$$\theta_{\text{com}} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{1 - v_{\text{lok}}^2} \sin \theta_{\text{stat}}}{1 + v_{\text{lok}} \cos \theta_{\text{stat}}} \right). \quad (4.6.2)$$

Dabei ist $v_{\text{lok}} = \sqrt{r_s/r_{\text{stat}}}$ (vgl. Gl.(4.4.1)) die momentane Geschwindigkeit des mitfallenden Beobachters relativ zum statischen Beobachter.

Beim weiteren Vorschreiten des Kollaps sieht der statische Beobachter den Staubstern unter einem immer kleiner werdenden Sichtwinkel, da sich die Oberfläche immer weiter entfernt. Nach einer gewissen Zeit scheint der Staubstern jedoch bei einem Sichtwinkel $2\xi_g$ langsam „einzufrieren“. Dieser Winkel entspricht dem Photonradius $r = \frac{3}{2}r_s$, den wir aus der Schwarzschild-Raumzeit kennen.⁷

Im Gegensatz dazu sieht der mitfallende Beobachter den Sternrand, bis er selbst zur Eigenzeit τ_s in die Singularität stürzt. Auch bei ihm scheint der Staubstern zunächst kleiner zu werden, da dessen Oberfläche schneller kollabiert als der Beobachter mitfällt. Interessant hierbei ist, daß der Staubstern längst kollabiert ist und der Beobachter dennoch Licht von ihm sieht. Allerdings sieht er nur Licht, welches außerhalb des Horizonts gestartet ist.

⁷Den kritischen Winkel ξ_{krit} , unter dem Licht gerade noch einem Schwarzen Loch entweichen kann, erhalten wir aus Gl. (5.3.12). Dieser markiert damit den Photonradius.

Erst kurz bevor der Beobachter selbst in die Singularität stürzt, sieht er Licht vom Staubstern, welches unterhalb des Horizonts ausgesandt wurde (vgl. Abb. 4.7). Da der mitfallende Beobachter immer schneller fällt, holt er das bereits ausgestrahlte Licht des Staubsterns immer mehr ein, weshalb trotz Aberration der Sichtwinkel wieder zunimmt.

4.6.1 Phantombilder und tatsächliche Bilder des Staubsterns

Unter dem Phantombild eines Staubsterns wollen wir die Punkte verstehen, bei denen die Sternoberfläche Licht ausgesandt hat, welches beim Beobachter gleichzeitig ankommt. Da das Licht unterschiedlich lange Wege zurücklegen muß und von Punkten mit verschiedenem Gravitationspotential aus startet, ist es unterschiedlich lang unterwegs. Der Beobachter sieht daher die Sternoberfläche, je nach Blickrichtung, zu verschiedenen Zeitpunkten des Kollaps. In den Abbildungen 4.10 und 4.12 sind jeweils die Projektionen der Phantombilder (blau) und der Lichtstrahlen (rot) auf die Hyperfläche ($t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$) zu unterschiedlichen Beobachtungszeiten abgebildet.

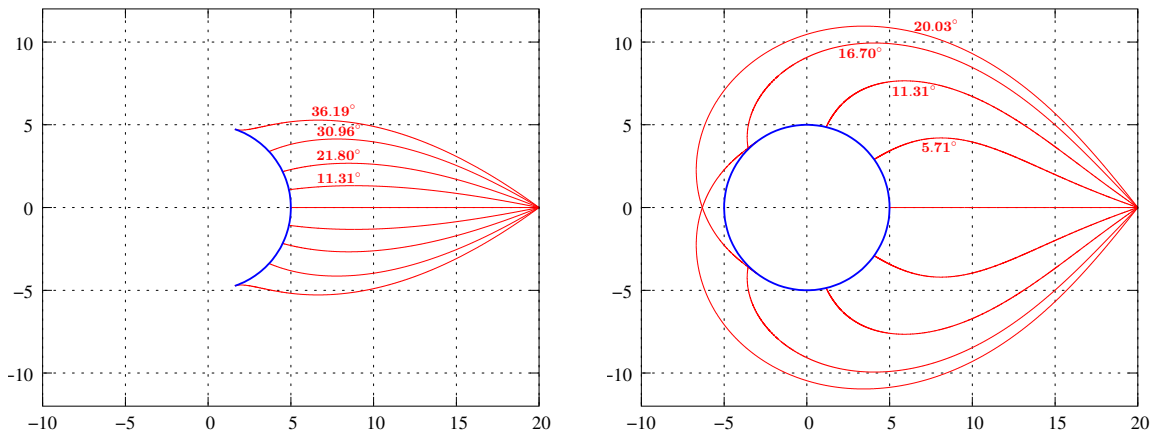


Abbildung 4.10: Phantombilder (blau) des Staubsterns mit Radius $R_b = 5$ für einen mitfallenden Beobachter am Ort $R_{\text{com}} = 20$ zu dessen Eigenzeiten $\tau = 0$ (links) und $\tau = 30$ (rechts). Im linken Bild sieht der Beobachter nur einen Teil des Staubsterns, wohingegen er im rechten Bild den Stern vollständig und Teile der Oberfläche sogar doppelt sieht. (Die Winkelangaben beziehen sich hier auf die Richtung zum Sternmittelpunkt.) *Film*

Beim mitfallenden Beobachter (Abb. 4.10) transformieren wir die mitfallende Radialkoordinate R auf pseudo-kartesische Koordinaten und projizieren anschließend auf die Hyperebene. Lichtstrahlen, die nach der Abbildung den gleichen Startwinkel zu haben scheinen, entsprechen aber bezüglich dem lokalen System des Beobachters anderen Richtungen. Obwohl ein Beobachter zur Zeit $\tau = 30$ mehr von der Oberfläche sieht als zur Zeit $\tau = 0$, erscheint sie ihm aufgrund der kleineren Startwinkel kleiner, was wir bereits aus Abbildung 4.9(links) erschließen konnten. Abbildung 4.10 läßt uns leider nicht erkennen, wo sich der Horizont genau befindet. Wir können zwar mit Hilfe der Gleichung (4.2.10a) angeben, wo sich der Horizont r_s zur Beobachtungszeit befindet — zur Zeit $\tau = 0$ hat er den Radius $R = r_s = 2$ und zur Zeit $\tau = 30$ den Radius $R \approx 16.41$ — jedoch ist er für jeden Punkt einer Geodäten anders, weshalb wir hier nicht so einfach darstellen können, wo ein Lichtstrahl bezogen auf den Horizont gestartet ist. Jedoch können wir mit Hilfe der Abbildung 4.7 erkennen, daß der radiale Strahl, der zur Beobachterzeit $\tau = 30$ beim Beobachter am Ort R_{com} ankommt, außerhalb des Horizonts gestartet ist. Da alle anderen Strahlen länger zum Beobachter unterwegs sind, müssen sie ebenfalls außerhalb des Horizonts gestartet sein.

Das tatsächliche Bild, welches ein mitfallender Beobachter von dem kollabierenden Stern sehen würde, ist in Abbildung 4.11 dargestellt, wobei nur die geometrischen Verzerrungen berücksichtigt sind. Wie bereits erläutert, scheint der Stern zunächst kleiner, dann aber wieder größer zu werden. Die einsehbare Oberfläche hingegen nimmt stetig zu.

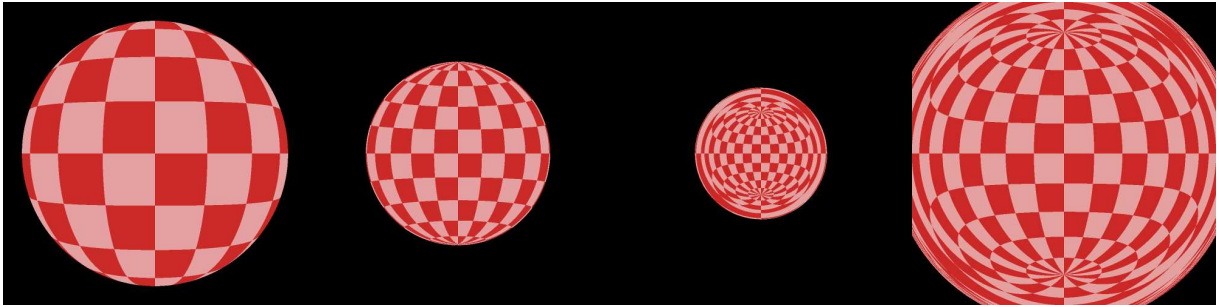


Abbildung 4.11: Der mitfallende Beobachter — mit einem Sichtbereich von $80^\circ \times 80^\circ$ — sieht den Stern zu seinen Eigenzeiten $\tau = \{0, 15, 30, 41\}$ (von links nach rechts) zunächst kleiner und dann wieder größer werden. Der Anteil der einsehbaren Oberfläche nimmt jedoch stetig zu. [Film](#)

Beim statischen Beobachter, der sich im Abstand r_{stat} vom Schwarzen Loch befindet, wird nun sehr deutlich, daß Licht zu unterschiedlichen Zeiten starten muß, um gleichzeitig beim Beobachter anzukommen (siehe Abb. [4.12](#)). Je nach Zeitpunkt der Lichtaussendung besitzt der Staubstern eine immer kleiner werdende Oberfläche, weshalb die Phantombilder auch deutlich verzerrt sind.

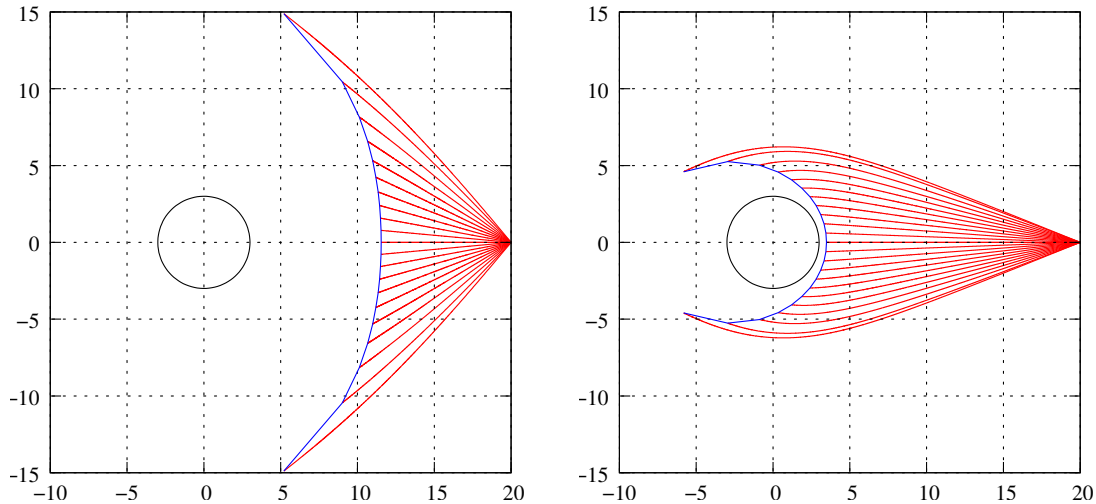


Abbildung 4.12: Phantombilder (blau) des Staubsterns mit Radius $R_b = 5$ für einen statischen Beobachter am Ort $r_{\text{stat}} = 20$ zu dessen Eigenzeiten $t = -10.757$ (links) und $t = 21.243$ (rechts). Der schwarze Kreis stellt den Photonradius bei $r = \frac{3}{2}r_s$ dar. Im linken Bild haben die Lichtstrahlen einen Winkelabstand von 5° , wohingegen im rechten Bild der Winkelabstand nur 2° beträgt.

Im Gegensatz zum bewegten Beobachter sieht der statische Beobachter den Stern immer kleiner werden — er selbst fällt ja nicht hinterher — bis er langsam beim Photonradius $r = \frac{3}{2}r_s$ einzufrieren scheint. Aufgrund der Krümmung der Raumzeit sieht der Beobachter immer mehr von der Oberfläche, bis er sie schließlich zunächst einmal vollständig, dann aber am Rand prinzipiell beliebig oft sieht. Im Grenzfall nimmt der kollabierende Stern einen scheinbaren Winkeldurchmesser von 2ξ ein, wobei sich ξ aus

$$\sin^2 \xi = \frac{27}{4} \frac{r_s^2}{r_{\text{stat}}^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_{\text{stat}}} \right) \quad (4.6.3)$$

ergibt. Gleichung (4.6.3) besprechen wir im Abschnitt [§5.3.2](#) noch genauer. Das tatsächliche Bild, welches ein statischer Beobachter von dem kollabierenden Stern sehen würde, ist in [Abbildung 4.13](#) gezeigt (siehe auch

Zahn [117]).

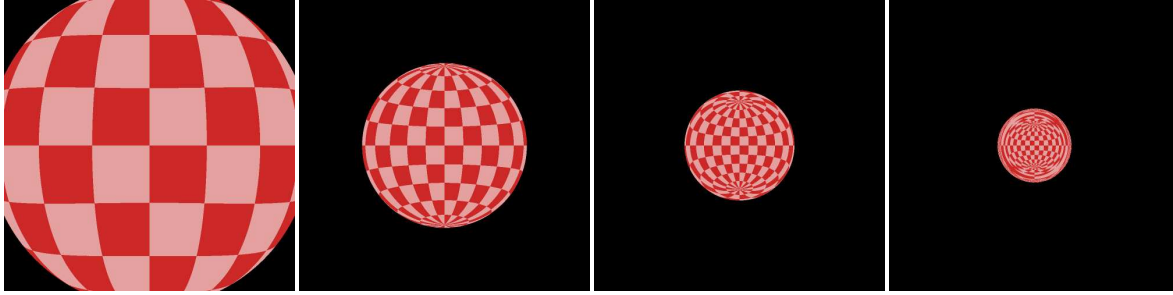


Abbildung 4.13: Der statische Beobachter — mit einem Sichtbereich von $90^\circ \times 90^\circ$ — sieht den Stern zu seinen Eigenzeiten $t = \{-10.75, 10.0, 21.25, 57.0\}$ (von links nach rechts) stets kleiner werden. Der Anteil der einsehbaren Oberfläche nimmt jedoch stetig zu. [Film](#)

4.6.2 Sichtbereich nach außen für mitfallenden Beobachter

Setzen wir uns als Beobachter auf den Rand des Staubsterns und schauen radial nach außen, so haben wir — bezogen auf unser Ruhesystem — einen Sichtbereich von $180^\circ \times 180^\circ$ oder $2\pi \text{ sr}$ ⁸. Lange vor dem Kollaps, solange die Raumzeit im Außenraum noch mehr oder weniger flach ist, sehen wir in unserem Sichtbereich die halbe Himmelssphäre ($\Omega = 2\pi \text{ sr}$). Aufgrund der zunehmend gekrümmten Raumzeit schränkt sich unser Sichtbereich der Himmelssphäre jedoch mit der Zeit deutlich ein (siehe Abb. [4.14](#)).

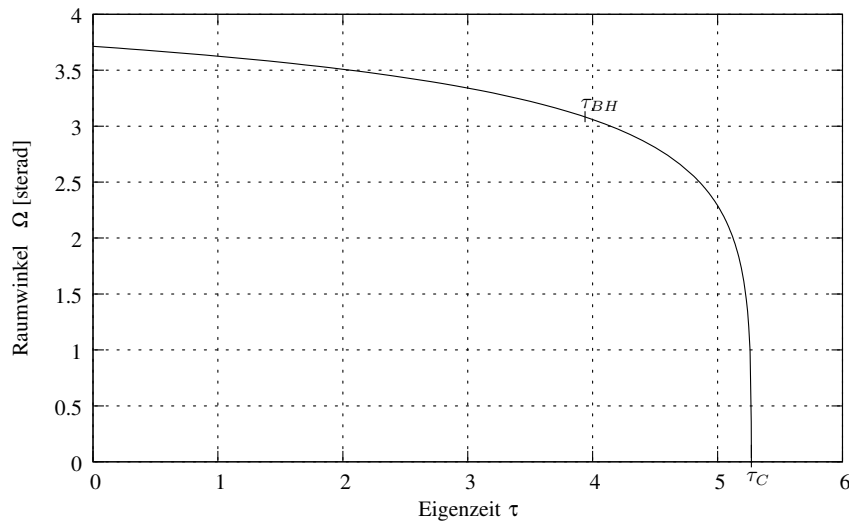


Abbildung 4.14: Ein Beobachter, der auf dem Sternrand R_b mitfällt, sieht in seinem radial nach außen zeigenden Blickfeld von $2\pi \text{ sr}$ zur Zeit τ einen Himmelsausschnitt von lediglich Ω . Die Parameter sind hier wieder $r_s = 2$ und $R_b = 5$.

Im Fall $r_s = 2$ und $R_b = 5$ sieht ein Beobachter beim Überschreiten des Horizonts zur Zeit $\tau = \tau_{\text{BH}}$ in seinem Sichtbereich von $2\pi \text{ sr}$ einen Himmelsausschnitt von lediglich $\Omega \approx 3.133 \text{ sr}$. Dies ist insofern erstaunlich, als nach Gleichung (4.4.1) die lokale Geschwindigkeit des Beobachters beim Überqueren des Horizonts Lichtgeschwindigkeit erreicht und damit aufgrund der Aberration (vgl. Spezielle Relativitätstheorie) $\Omega = 0$ sein müßte. Die

⁸Die Einheit „Steradian“ (sr) steht für einen Raumwinkel Ω , der sich aus dem halben Öffnungswinkel ω über $\Omega = 2\pi(1 - \cos \omega)$ ergibt.

Krümmung der Raumzeit, welche im Außenraum durch die Schwarzschild-Metrik beschrieben wird, wirkt der Aberration entgegen.⁹ Der Kollaps wirkt beim Blick nach außen also wie ein Vergrößerungsglas (siehe Abb. 4.15). Kurz bevor der Beobachter zur Zeit $\tau = \tau_C$ in die Singularität stürzt, steigt dieser Vergrößerungseffekt ins Unendliche, da sich dann der Winkelbereich $\Omega \rightarrow 0$ auf die 2π -Sphäre des Beobachters ausdehnt.

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Situation für einen Beobachter, der auf einem kollabierenden Stern in Richtung des galaktischen Zentrums schaut (siehe Abb. 4.15). Bis zur Eigenzeit $\tau = \tau_{BH}$, wenn der Beobachter den Horizont mit Lichtgeschwindigkeit überquert, ändert sich an der Sicht nicht viel. Erst sehr kurz vor dem Kollaps nimmt der Vergrößerungseffekt massiv zu.

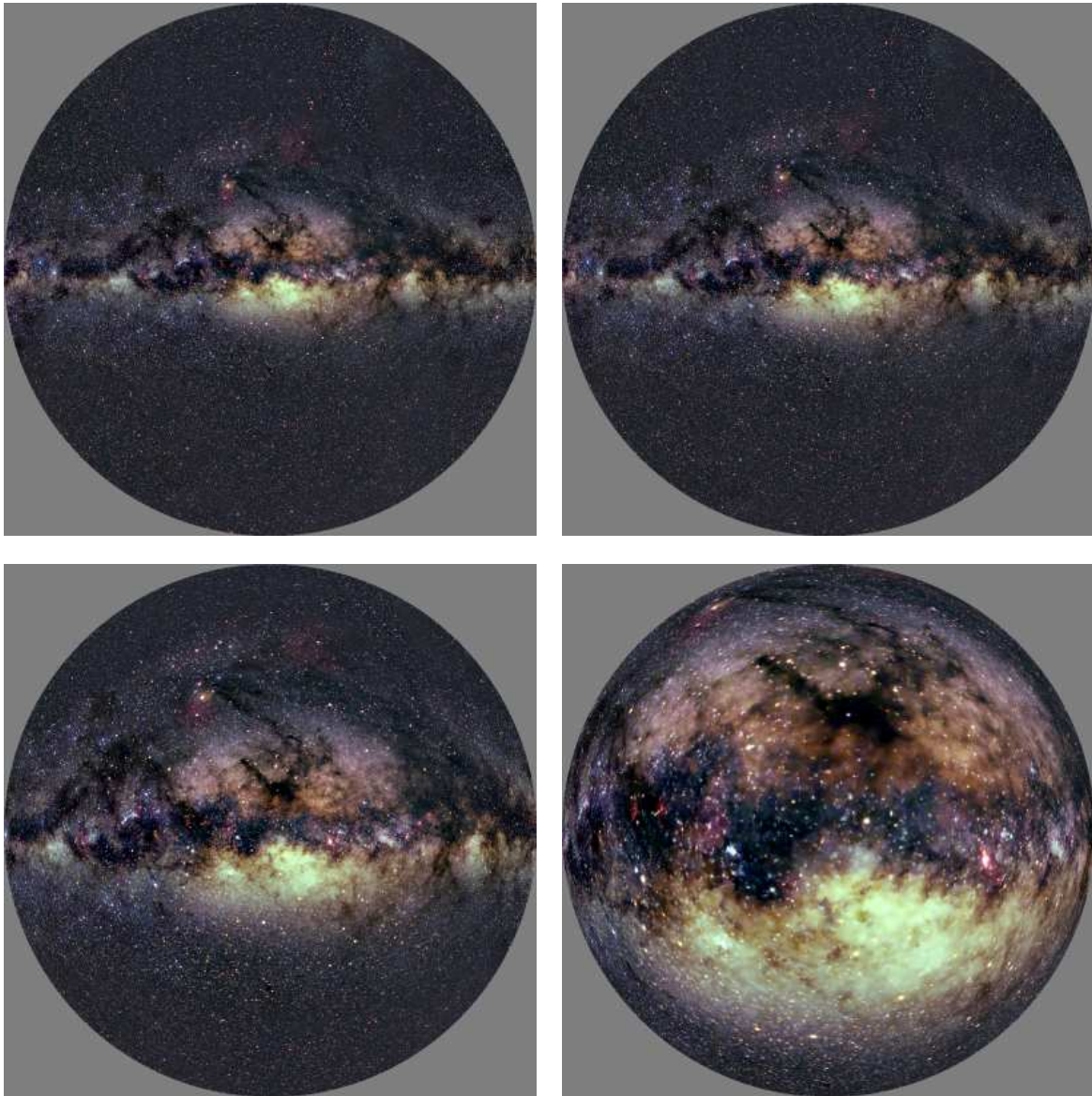


Abbildung 4.15: Tatsächliche Sicht eines Beobachters (in azimuthal-äquidistanter Projektion), der auf dem Sternrand R_b mitfällt und nach außen schaut. Die Parameter sind hier wieder $r_s = 2$ und $R_b = 5$ und die Beobachtungszeiten $\tau = 0$, $\tau = \tau_{BH} \approx 3.93$, $\tau = 5.16$ und $\tau = 5.27$ (links oben nach rechts unten). [Film](#)

⁹Den freien Fall in der Schwarzschild-Raumzeit behandeln wir im Anhang §D.3.2 ausführlich.

4.7 Visualisierung in Gegenwart eines transparenten Staubsterns

Nehmen wir an, daß Licht in keinerlei Wechselwirkung mit der Materie des Staubsterns tritt, sondern nur den Nullgeodäten in der gekrümmten Raumzeit folgt. Dann müssen wir nun die Nullgeodäten im gesamten Atlas berechnen.

4.7.1 Sicht eines mitfallenden Beobachters

Verfolgen wir die Nullgeodäten für einen mitfallenden Beobachter am Ort $R_{\text{com}} = 20$, so gelangen wir zur Abbildung 4.16, bei der wir wieder die mitfallenden in pseudokartesische Koordinaten transformiert haben.

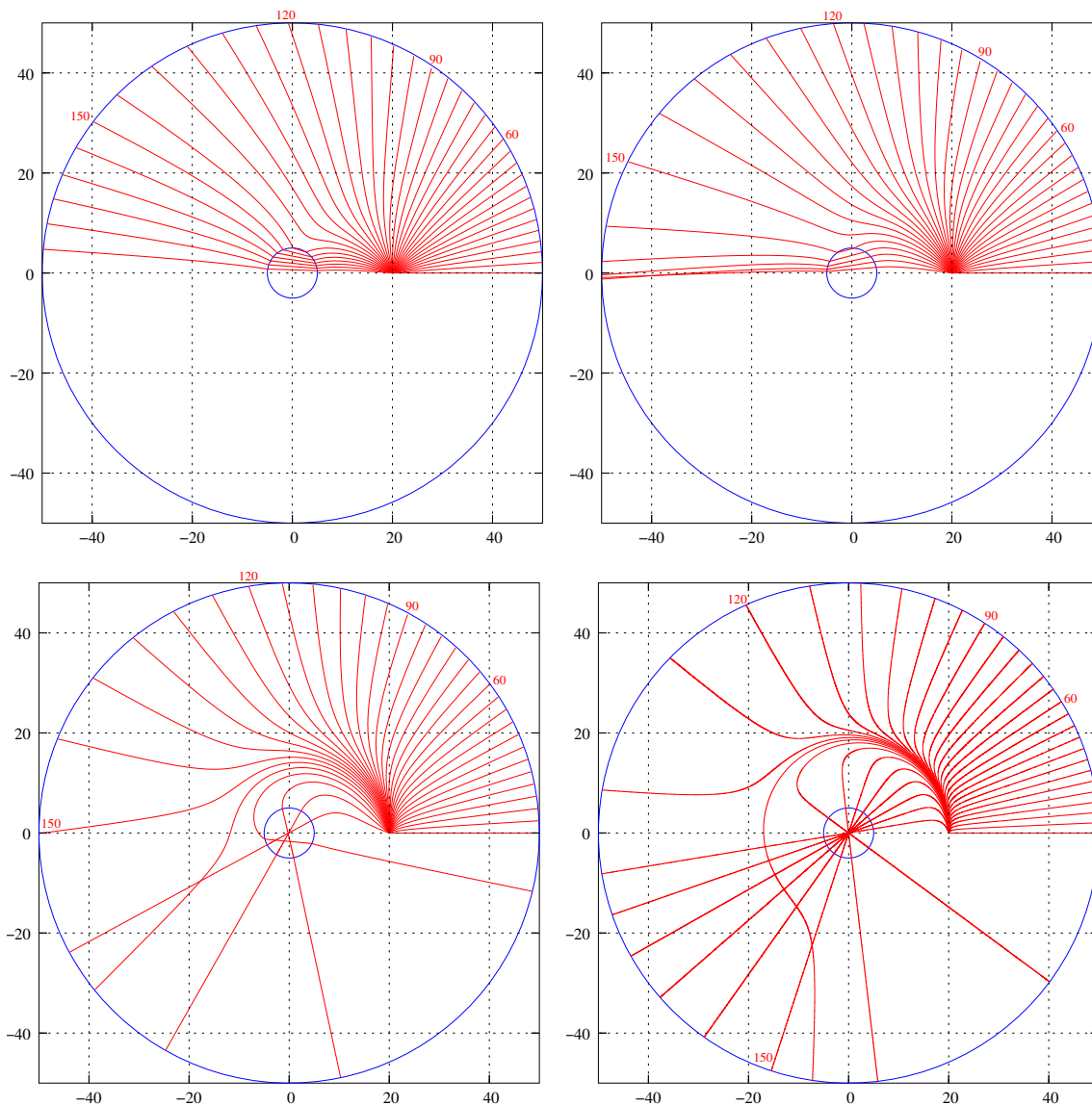


Abbildung 4.16: Ein mitfallender Beobachter am Ort $R_{\text{com}} = 20$ empfängt zur Eigenzeit $\tau = \{0, 16, 32, 41\}$ (links oben nach rechts unten) Lichtstrahlen aus verschiedenen Richtungen die bei ihm im Winkelabstand von 5° eintreffen. Der innere blaue Ring entspricht dem Rand des Staubsterns, wohingegen der äußere Ring den Ort der Hintergrundtextur darstellt. Das „Mitfallen“ der Hintergrundtextur hat keinen wesentlichen Einfluß auf die Ansicht. Zahlenangaben an den Geodäten entsprechen den Beobachtungswinkeln bzgl. des Beobachtersystems. *Film*

Da wir mitfallende Koordinaten verwenden, bleibt der mitfallende Beobachter natürlich am gleichen Ort R_{com} . Der Sichtbereich zwischen 0° und etwa 90° — Blick nach hinten — bleibt während dem größten Teil des Falls annähernd gleich. In Richtung des Staubsterns werden die Nullgeodäten jedoch nach und nach immer stärker abgelenkt. Innerhalb des Staubsterns hingegen verlaufen sie gerade. Verfolgen wir die Lichtstrahlen noch weiter zurück, so scheinen sie außerhalb des Sterns radial zu verlaufen.

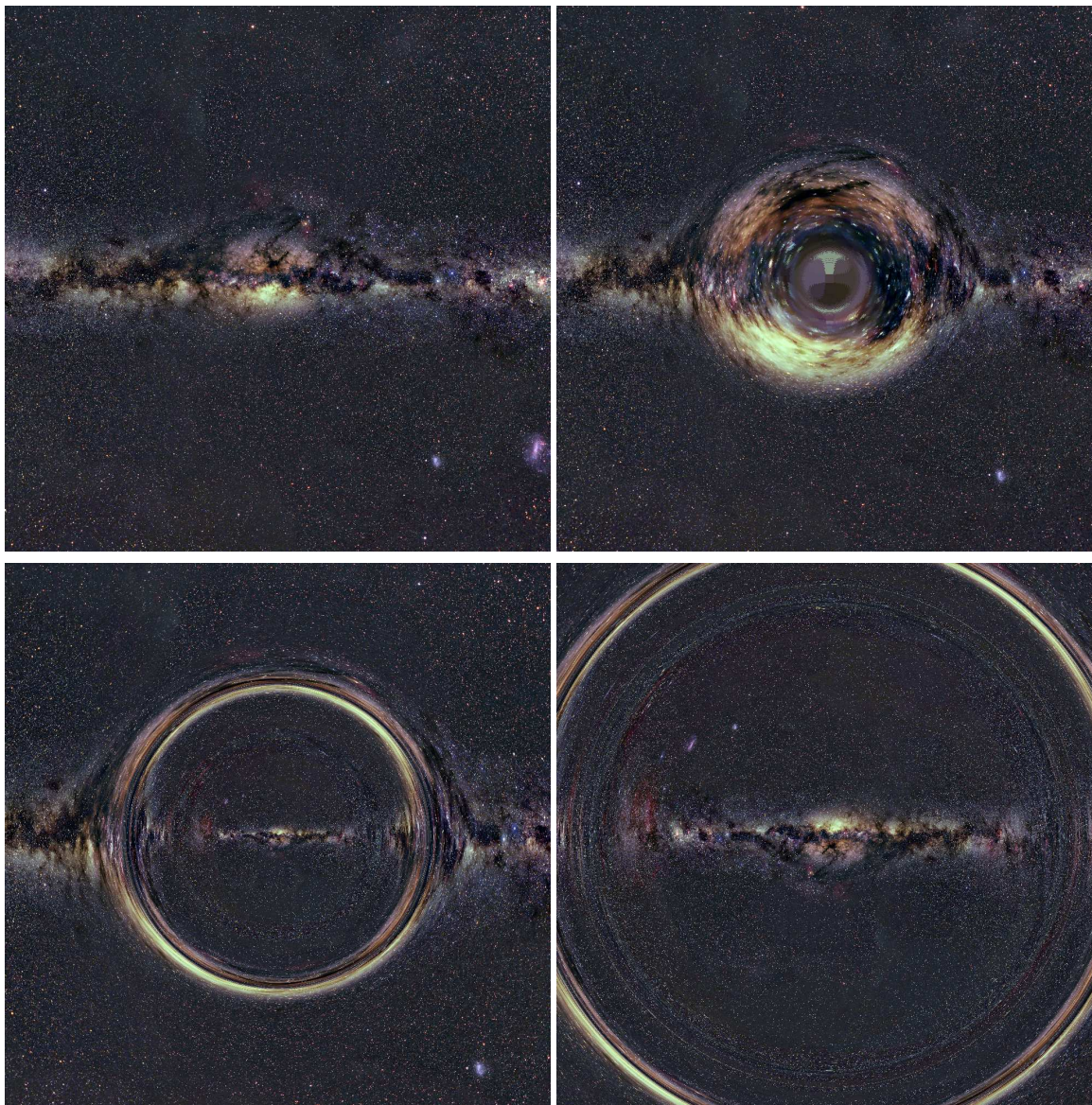


Abbildung 4.17: Tatsächliche Sicht eines mitfallenden Beobachters am Ort $R_{\text{com}} = 20$ mit Sichtfeld $90^\circ \times 90^\circ$ durch den kollabierenden Stern zu den Beobachtungszeitpunkten $\tau = \{0, 16, 32, 41\}$ (links oben nach rechts unten). [Film](#)

Zur Eigenzeit $\tau = 0$ scheint die Sicht noch ziemlich unverzerrt zu sein. Ein starker Vergrößerungseffekt tritt jedoch bei $\tau = 16$ auf. Licht, welches beim Beobachter in einem Winkelbereich zwischen etwa 160° und 180° ankommt¹⁰, zeigt einen Himmelsausschnitt von etwa $3^\circ \times 3^\circ$. Zur Beobachtungszeit $\tau = 32$ erscheint fast eine halbe Himmelssphäre im Bereich zwischen 150° und 160° ; zwischen 160° und 180° scheint die Gegend um das

¹⁰Die Winkelrichtung 180° entspricht dem radialen Blick (nach vorn) durch den kollabierenden Staubstern

galaktische Zentrum gespiegelt. In Richtung 150° sieht der Beobachter das galaktische Zentrum noch zusätzlich als Ring, da wir die Geodäten aus Abbildung [4.16](#) aufgrund der sphärischen Symmetrie der Raumzeit um die x -Achse drehen können.

4.7.2 Sicht eines statischen Beobachters

Verfolgen wir die Nullgeodäten für einen statischen Beobachter am Ort $r_{\text{stat}} = 20$, so gelangen wir zu der Abbildung [4.18](#), bei der wir die äußeren mitfallenden Koordinaten zunächst auf Schwarzschild- und anschließend auf pseudokartesische Koordinaten transformiert haben.

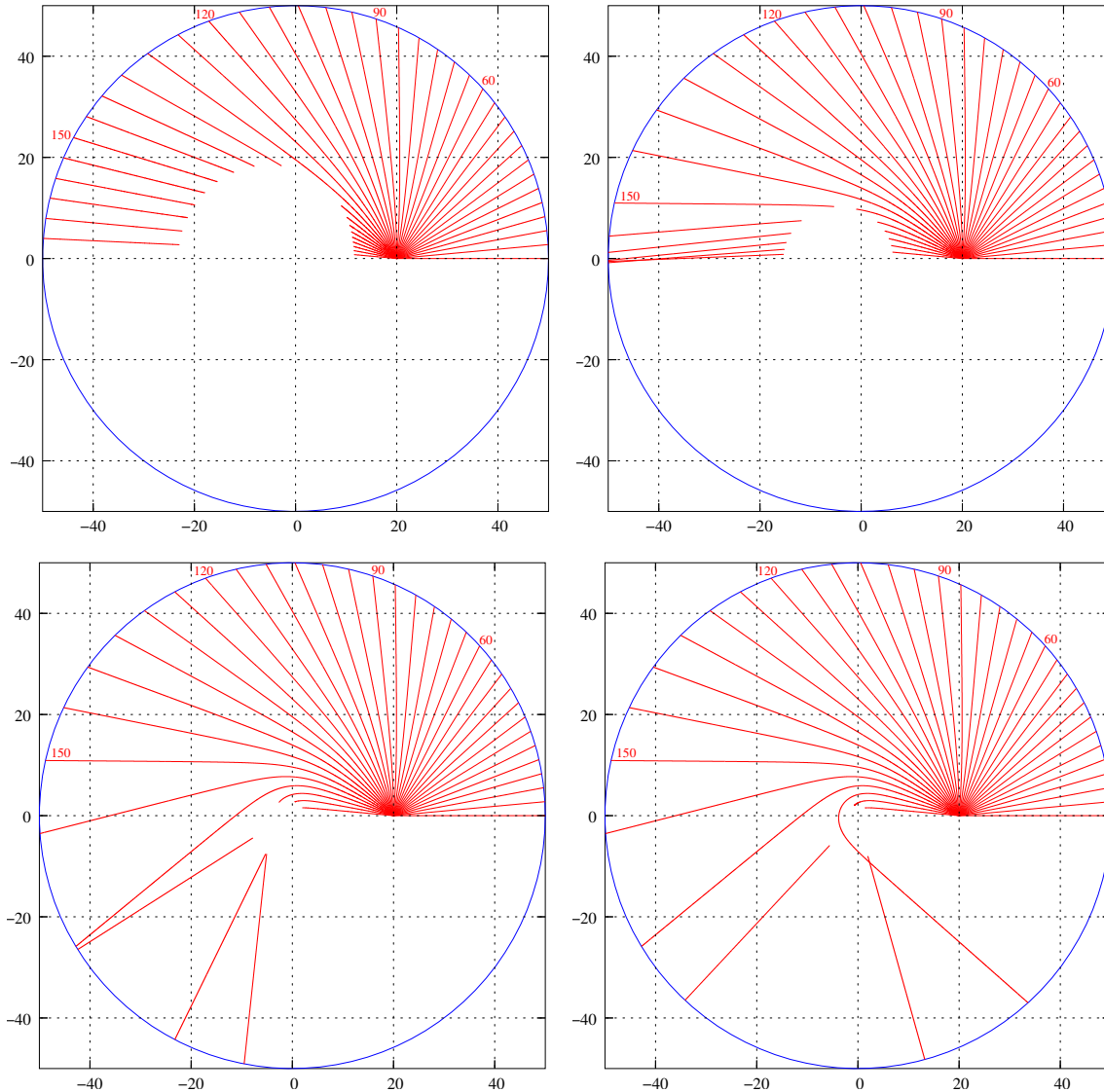


Abbildung 4.18: Ein statischer Beobachter am Ort $r_{\text{stat}} = 20$ empfängt zu seiner Eigenzeit $t = -10.76$, $t = 9.49$, $t = 28.46$ bzw. $t = 37.95$ (links oben nach rechts unten) Lichtstrahlen aus verschiedenen Richtungen die bei ihm im Winkelabstand von 5° eintreffen. Der blaue Ring entspricht dem Ort der Hintergrundtextur. [Film](#)

Prinzipiell könnten wir auch die Innenraum-Koordinaten auf Schwarzschild- und danach auf pseudokartesische Koordinaten transformieren, jedoch würden die Diagramme, aufgrund der unterschiedlichen radialen, mitfallenden Koordinate R im Innen- und Außenraum, zu unübersichtlich werden.

Die Dynamik der Raumzeit wird insbesondere zur Beobachterzeit $t = -10.76$ deutlich, wo die Bereiche der Geodäten, welche innerhalb des Sterns verlaufen, einen deutlich verzerrten „Leerraum“ lassen (Abb. 4.18 links oben). Die Form dieses „Leerraums“ kommt eben dadurch zustande, daß das Eintreten der einzelnen Lichtstrahlen in den Innenraum zu verschiedenen Phasen des Kollaps passiert. Mit zunehmender Zeit wird der „Leerraum“ immer kleiner bis die Nullgeodäten schließlich den Horizont nachzeichnen.

Die tatsächliche Sicht eines statischen Beobachters (siehe Abb. 4.19) entscheidet sich anfangs¹¹ noch nicht wesentlich von der des mitfallenden Beobachters, da sich der Verlauf der Geodäten in beiden Fällen ähnelt. Der wesentliche Unterschied zeigt sich erst gegen Ende des Kollaps, wenn deutlich wird, daß der Beobachter nicht mitfällt. Die Kugeln, welche den Rand des Staubsterns markieren, scheinen „einzufrieren“.

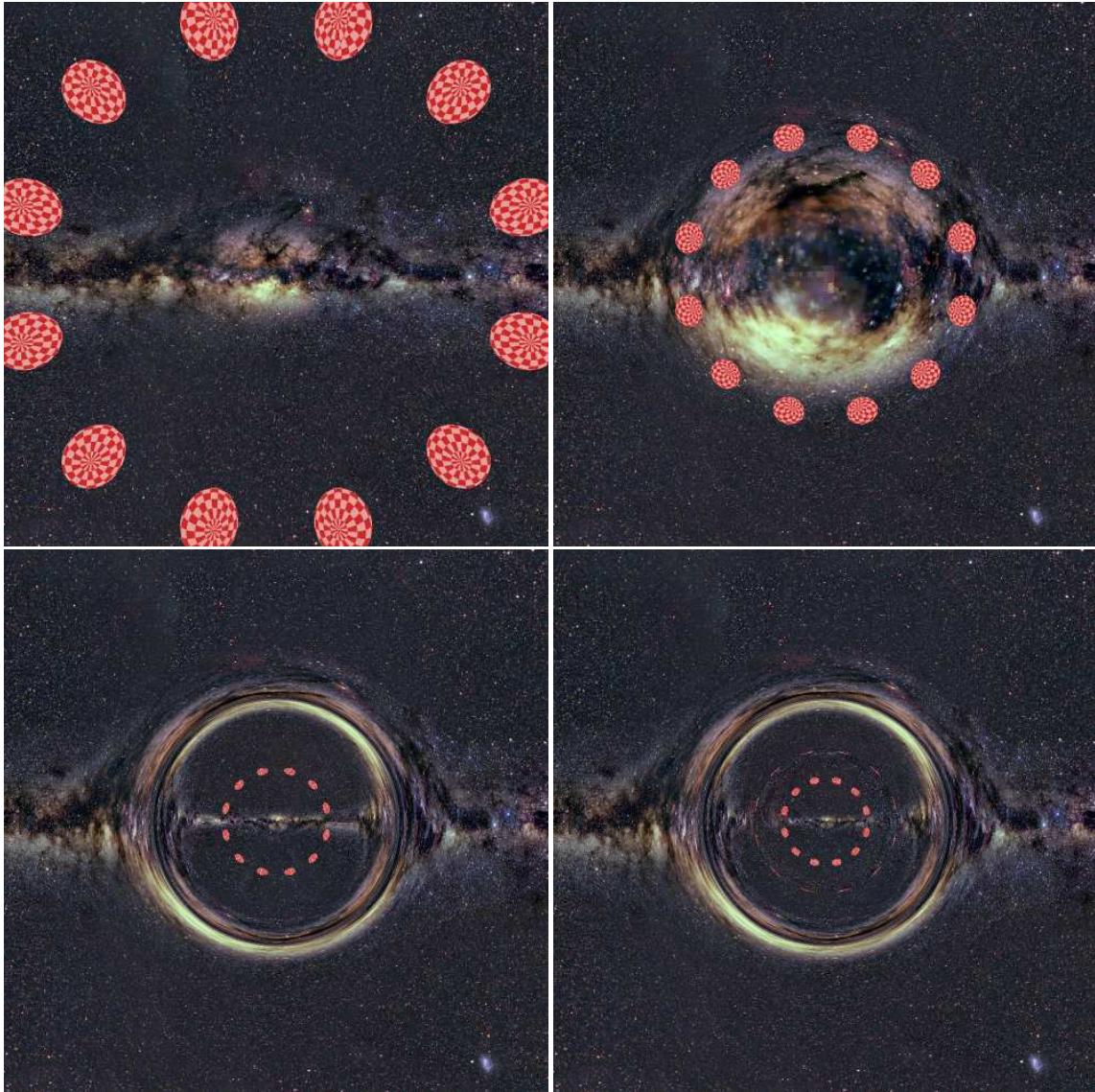


Abbildung 4.19: Tatsächliche Sicht eines statischen Beobachters am Ort $r_{\text{stat}} = 20$ mit Sichtfeld $90^\circ \times 90^\circ$ durch den kollabierenden Stern zu den Beobachtungszeitpunkten $t = \{-10.76, 9.49, 28.46, 37.95\}$ (links oben nach rechts unten). Innerhalb des Staubsterns befinden sich im Abstand $R = 4.49$ vom Zentrum 12 Kugeln mit Radius $R_K = 0.5$. Der Photonenorbit $r_{\text{po}} = \frac{3}{2}r_s$ (vgl. Abs. §5.2.4) liegt bei 165.73° . [Film](#)

¹¹ „Anfangs“ bedeutet hier ab dem Zeitpunkt, wo der mitfallende ($\tau = 0$) den statischen ($t = -10.76$) Beobachter passiert.

Der Grund für das scheinbare „Einfrieren“ ist folgender: Zu einer bestimmten Zeit konnte Licht, welches innerhalb oder hinter dem Staubstern gestartet ist, gerade noch den Staubstern passieren, bevor dieser den Horizont überquert hat. Nun liegt aber der Ort, bei dem das Licht gerade noch vom Innenraum in den Außenraum gelangen konnte, immer näher am Horizont. Für den statischen Beobachter braucht aber Licht umso länger, je näher es am Horizont startet.

Neben der starken Vergrößerung zur Zeit $t \approx 9.5$ und dem scheinbaren „Einfrieren“ gegen Ende des Kollaps ist die Phase interessant, bei der Mehrfachbilder der Kugeln zu sehen sind (Abb. \4.20, links). Ihr Zustandekommen können wir uns anhand der Nullgeodäten (Abb. \4.20, rechts) klarmachen. Der äußere Ring entsteht durch Nullgeodäten mit der Nummer ①, wobei wieder die Rotationssymmetrie zu beachten ist. Der mittlere Ring zeigt jeweils dieselbe Kugel wie der äußere Ring, da die Nullgeodäten ② von jeweils derselben Kugel starten. Die Nullgeodäten ③ verursachen den inneren Ring und zeigen die jeweils gegenüberliegende Kugel. Das „Alter“ der Ringe nimmt aufgrund der unterschiedlichen Lichtlaufzeiten von innen nach außen zu. Demnach war Licht, welches den äußeren Ring bildet, am längsten unterwegs.

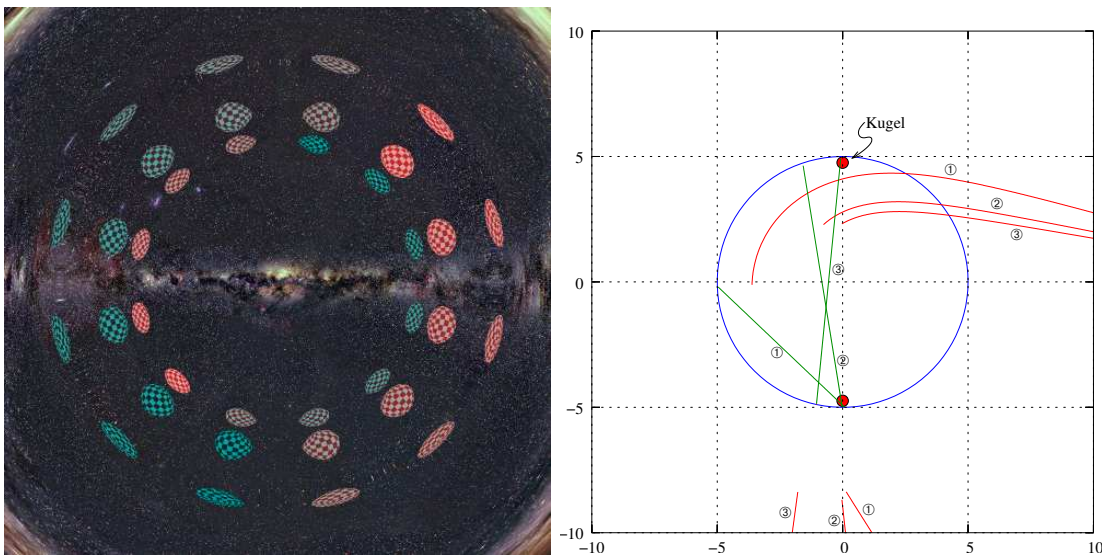


Abbildung 4.20: Mehrfachbilder von Objekten innerhalb des Staubsterns. **Links:** Tatsächliche Sicht für einen statischen Beobachter mit Sichtfeld $35^\circ \times 35^\circ$ am Ort $r_{\text{stat}} = 20$ zu seiner Eigenzeit $t = 32.94$. **Rechts:** Drei Geodäten mit den Beobachterwinkeln $\xi \approx \{14.8^\circ, 10.8^\circ, 9.4^\circ\}$ (zur einlaufenden Radialrichtung), welche die Mehrfachbilder mit verursacht. Die Teile der Geodäten, die im Außenraum verlaufen sind von Schwarzschild-, die im Innenraum verlaufen von mitfallenden Innenraum- auf pseudokartesische Koordinaten transformiert.

Die verzerrte Form der Kugeln kann verschiedene Gründe haben. Einerseits haben wir die Kugeln verhältnismäßig groß gewählt, weshalb sie eigentlich nur noch bedingt als lokale Objekte angesehen werden dürfen. Andererseits spielt die Genauigkeit der Geodätenintegration eine Rolle, welche zwar schon hoch, aufgrund der enormen Rechenzeit jedoch begrenzt ist. Die scheinbare Verdrehung der Kugeln haben zwei Gründe. Aufgrund der sehr hohen Geschwindigkeit scheinen Kugeln generell verdreht zu sein; siehe dazu auch Abschnitt §7.2. Außerdem können wir aufgrund der gekrümmten Lichtstrahlen auch andere Bereiche, wie etwa die Rückseite, der Kugel sehen; siehe zum Beispiel Strahl ① in Abbildung \4.20 (rechts).

4.8 Ausblick

Neben der rein geometrischen Betrachtung des „transparenten“ Kollaps sollte in einem weiteren Schritt auch die Gesamtrotschiebung berücksichtigt werden. Hier wird insbesondere die Doppler-Verschiebung eine große Rolle spielen. Aus Abbildung \4.20 (rechts) wird deutlich, daß für die Strahlen ① und ② eine Blauverschiebung, für den Strahl ③ jedoch eine Rotverschiebung auftreten sollte.

Kapitel 5

Visualisierung in der Schwarzschild-Raumzeit

In der gängigen Literatur zur Allgemeinen Relativitätstheorie finden sich in der Regel nur Näherungslösungen oder Spezialfälle von Geodäten in der Schwarzschild-Raumzeit. Eine ausführlichere Darstellung der exakten Lösung der Geodätengleichungen findet man in Chandrasekhar [18].

Wir wollen hier die analytische Darstellung mittels elliptischer Integrale von Chandrasekhar aufgreifen und für unsere Zwecke weiterentwickeln. Von den qualitativen Überlegungen des Abschnitts §5.2 geleitet, bestimmen wir in Abschnitt §5.3 die Bahngleichungen $r = r(\varphi)$, die wir mittels elliptischer Funktionen darstellen wollen. Besonderes Augenmerk liegt hierbei darauf, daß die Bahngleichungen und vor allem die Argumente und Module der elliptischen Funktionen reell werden und wir sie so durch gängige numerische Bibliotheken berechnen lassen können. Mit deren Hilfe wird es uns dann möglich sein, in Abschnitt §5.4 die bekannten Effekte wie Lichtablenkung und Shapiro-Zeitverzögerung genau anzugeben.

Der große Vorteil einer analytischen Lösung wird dann vor allem bei der Bestimmung einer Nullgeodäten zwischen zwei Punkten wie auch bei der Entfernungsbestimmung zum Schwarzen Loch deutlich. Hätten wir diese analytische Lösung nicht, so könnten wir die Nullgeodäten, wenn überhaupt, nur durch ein sehr teures Schießverfahren ermitteln, welches aufgrund der Mehrdeutigkeiten auch nur begrenzt Resultate liefern würde. Eine direkte Anwendung der Suche nach verbindenden Nullgeodäten ist die interaktive Visualisierung einfacher Geometrien in der Schwarzschild-Raumzeit in Abschnitt §5.5. Insbesondere ist nun die Variation aller Parameter möglich; eine mühsame Vorausberechnung sämtlicher Geodäten für jeweils nur einen einzigen Parametersatz wird hinfällig.

Die Schwarzschild-Raumzeit an sich, wie auch die Geodäten, sind bereits seit langem wohl verstanden und sind inzwischen zu einem wichtigen Instrument der modernen Astrophysik geworden. Obwohl die Schwarzschild-Metrik nur ein statisches Schwarzes Loch beschreibt, kann sie dennoch als erstes einfaches Modell herangezogen werden, um etwa ein supermassives Schwarzes Loch, wie es im Zentrum jeder Galaxie vermutet wird, zu beschreiben. Motiviert durch Beobachtungen von Strahlungsausbrüchen im galaktischen Zentrum [38], wollen wir im Abschnitt §5.6 zwei stark vereinfachte Modelle einer Strahlungsquelle um ein statisches Schwarzes Loch untersuchen. Zum einen betrachten wir einen „Blob“, hier als Stern angedeutet, der auf dem letzten stabilen Orbit um das Schwarze Loch kreist. Dabei interessiert uns sowohl die scheinbare Position des Blobs aufgrund der Lichtlaufzeit wie auch der Einfluß der geodätischen Präzession auf die Rotverschiebung. Zum anderen untersuchen wir eine Keplersche Akkretionsscheibe mit einer einheitlichen Temperatur bei verschiedenen Inklinationswinkeln. Schließlich wollen wir noch einen Ausblick auf das realistischere Kerr Schwarze Loch geben.

5.1 Einführung in die Schwarzschild-Raumzeit

Zur Übersicht wollen wir kurz die Metrik, die hier gewählte natürliche lokale Tetrade, das Einbettungsdiagramm einer Hyperfläche und die gravitative Rotverschiebung vorstellen.

5.1.1 Schwarzschild-Metrik

Ausgangspunkt unserer Rechnung ist die Schwarzschild-Metrik in Schwarzschild-Koordinaten:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2) \quad (5.1.1)$$

mit dem Schwarzschild-Radius $r_s = 2GM/c^2$. Für $r \rightarrow \infty$ geht die Schwarzschild-Metrik in die flache Minkowski-Metrik über. Die Koordinatensingularität bei $r = r_s$, dort befindet sich der Ereignishorizont, soll uns im weiteren nicht stören, da wir uns auf den Außenraum ($r_s < r < \infty$) beschränken. Die Koordinaten $\vartheta \in (0, \pi)$ und $\phi \in (0, 2\pi)$ beschreiben die Oberfläche einer Kugel mit Radius r . Die eigentliche Notwendigkeit zweier Karten umgehen wir wie in Abschnitt §2.1 beschrieben. Mit $t \in (-\infty, \infty)$ haben wir eine „globale“ Zeitkoordinate.

Die Metrik (5.1.1) besitzt Diagonalgestalt, so können wir die natürliche Tetrade, die in diesem Fall der sphärischen Symmetrie angepaßt ist, sofort hinschreiben:

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r}} \frac{1}{c} \partial_t, \quad \mathbf{e}_r = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \partial_r, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{r} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\phi. \quad (5.1.2)$$

Problematisch ist noch die Achse ($\vartheta = 0$), jedoch können wir das Koordinatensystem aufgrund der sphärischen Symmetrie stets so drehen, daß wir die Achse nicht tangieren.

5.1.2 Einbettungsdiagramm

Einen kleinen Einblick in die innere Geometrie der Schwarzschild-Raumzeit liefert das Einbettungsdiagramm einer zweidimensionalen Hyperfläche in den euklidischen Raum. Gesucht dabei ist eine Fläche, welche dieselbe innere Geometrie aufweist wie die Hyperfläche. Aufgrund der sphärischen Symmetrie wählen wir die Äquatorebene ($\vartheta = \pi/2$). Da die Schwarzschild-Metrik statisch ist, setzen wir zusätzlich $t = \text{const}$ und erhalten so die Metrik der Hyperfläche,

$$d\sigma_{\text{Hyperfläche}}^2 = \frac{1}{1 - r_s/r} dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

Beschreiben wir den euklidischen Raum durch Zylinderkoordinaten, also durch die Metrik

$$d\sigma_{\text{euklid}}^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2,$$

so erhalten wir durch die Identifizierung $d\sigma_{\text{Hyperfläche}}^2 = d\sigma_{\text{euklid}}^2$ für die Einbettungsfunktion $z = z(r)$

$$z = 2\sqrt{r_s} \sqrt{r - r_s}. \quad (5.1.3)$$

welche in der Abbildung §5.1 als Rotationsfläche dargestellt ist. Ludwig Flamm hatte als erster diese Hyperfläche in den euklidischen Raum eingebettet (siehe [33]), weshalb wir die Einbettung heute auch als Flammisches Paraboloid bezeichnen.

Die Einbettung der zweidimensionalen Hyperfläche ($t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$) der Schwarzschild-Raumzeit in den dreidimensionalen euklidischen Raum ergibt die Form eines Trichters. Zu beachten ist, daß diese Trichterform nur durch die Einbettung in einen höherdimensionalen Raum zustande kommt. Die Krümmung der eingebetteten Fläche entspricht dabei der inneren Krümmung der Hyperfläche (vgl. Anhang §D.1.4). Der umgebende Raum hat keinerlei physikalische Bedeutung. Der innerste Kreis, bei dem die Steigung dz/dr unendlich wird, entspricht dem Schwarzschild-Horizont.

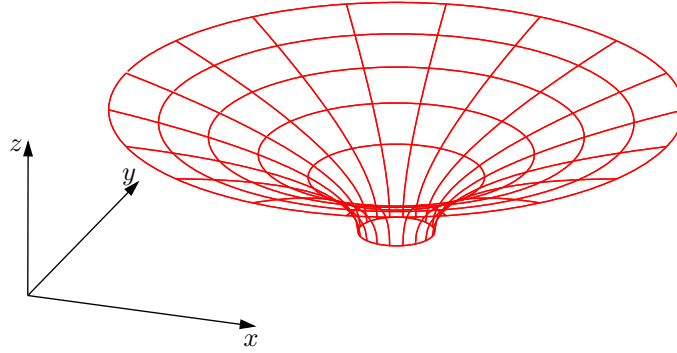


Abbildung 5.1: Einbettungsdiagramm für die Hyperebene ($t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$) der Schwarzschild-Raumzeit in den euklidischen Raum.

5.1.3 Gravitative Rotverschiebung

Da es sich bei der Schwarzschild-Raumzeit um eine statische Raumzeit mit dem Killing-Vektor $\xi^\mu = \partial_t$ handelt, vereinfacht sich die gravitative Rotverschiebung z_{grav} aus Gleichung (2.8.2) auf¹

$$z_{\text{grav}} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sqrt{g_{00}(\mathbf{x}_2)}}{\sqrt{g_{00}(\mathbf{x}_1)}} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r_2}}{\sqrt{1 - r_s/r_1}}. \quad (5.1.4)$$

Wie wir leicht sehen, ist z_{grav} wegunabhängig und bestimmt sich allein aus den jeweiligen Entfernungen r_i von Quelle und Beobachter zum Schwarzen Loch. Eine Quelle mit der Frequenz ν_2 im Abstand r_2 vom Schwarzen Loch erscheint für einen Beobachter am Ort $r_1 > r_2$ rotverschoben; er mißt also eine Frequenz $\nu_1 < \nu_2$. Natürlich gibt Gleichung (5.1.4) auch das Verhältnis der Eigenzeiten τ_1 und τ_2 für zwei Beobachter an den Orten r_1 und r_2 wieder; in diesem Fall gilt: $\tau_2/\tau_1 = z_{\text{grav}}$.

5.2 Qualitatives Verhalten von Geodäten

Anhand der Lagrange-Funktion können wir ein effektives Potential definieren, mit dessen Hilfe es uns möglich ist, ähnlich wie in der klassischen Mechanik, das qualitative Verhalten von Geodäten zu beschreiben.

5.2.1 Euler-Lagrange und effektives Potential

Zur Bestimmung des qualitativen Verhaltens von Geodäten gehen wir von der Lagrange-Funktion \mathcal{L} der Metrik (5.1.1) aus. Da eine sphärisch-symmetrische, statische Metrik vorliegt, genügt es, Geodäten zu betrachten, die in der $\vartheta = \pi/2$ -Ebene verlaufen. Alle anderen Geodäten lassen sich durch geeignete Wahl der Koordinaten stets auf diesen Fall zurückführen (siehe Anhang). In unserem Fall gilt dann

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - r_s/r} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \kappa c^2, \quad (5.2.1)$$

wobei ein Punkt für die Ableitung nach einem affinen Parameter λ steht ($\dot{t} = dt/d\lambda$) und der dimensionslose Parameter κ darüber entscheidet, ob wir lichtartige ($\kappa = 0$), zeitartige ($\kappa = -1$) oder raumartige ($\kappa = 1$) Geodäten betrachten.² Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad x^\mu = (t, r, \vartheta, \varphi) \quad (5.2.2)$$

¹Siehe auch z.B. Straumann[99] oder Wald[107] für eine Herleitung.

²Solange wir in physikalischen Einheiten rechnen, müssen wir berücksichtigen, daß der affine Parameter λ bei lichtartigen Geodäten die Dimension einer Länge besitzt. Zeitartige Geodäten hingegen sollen durch die Eigenzeit τ parametrisiert werden. Bei raumartigen Geodäten verwenden wir einen Parameter λ/c mit der Dimension einer Zeit.

erhalten wir folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t} = k, \quad (5.2.3a)$$

$$r^2 \dot{\phi} = h, \quad (5.2.3b)$$

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2}, \quad (5.2.3c)$$

mit dem effektiven Potential

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{h^2}{r^2} - \kappa c^2\right). \quad (5.2.4)$$

Hier haben wir schon berücksichtigt, daß t und φ zyklische Variablen sind und wir daher zwei Konstanten der Bewegung k und h erhalten. Diese entsprechen im Fall massebehafteter Teilchen deren Energie je Ruhemasse und deren Drehimpuls je Ruhemasse im asymptotisch flachen Raum. Bei masselosen Teilchen wie den Photonen ist nur deren Verhältnis $\epsilon = h/k$, auch scheinbarer Stoßparameter genannt, von Interesse. Für das effektive Potential gilt weiterhin

$$V_{\infty} = \lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}} = -\frac{\kappa}{2} c^2. \quad (5.2.5)$$

Eine lichtartige oder zeitartige Geodäte mit $k^2/c^2 > 2V_{\infty}$ kann also unter Umständen dem Schwarzen Loch entkommen und gegen Unendlich laufen. Aus der Energie-Bilanz-Gleichung (5.2.3c) können wir nun auf das qualitative Verhalten von Geodäten schließen (siehe auch [107]). Hierfür unterscheiden wir zwischen radialen und nicht-radialen Geodäten.

Im Fall radialer Geodäten ($h = 0$) vereinfacht sich das effektive Potential auf

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\kappa c^2}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right),$$

was für zeitartige Geodäten einem rein anziehenden Potential entspricht. Solange $k^2/c^2 < 2V_{\infty}$ ist, wird eine zeitartige Geodäte unausweichlich ins Schwarze Loch laufen. Andernfalls kann sie, wenn ihre Startrichtung vom Schwarzen Loch weg zeigt, dem Schwarzen Loch entkommen. Für lichtartige Geodäten verschwindet das effektive Potential ganz und ihr Verhalten hängt allein von ihrer Startrichtung ab.

Bei nicht-radialen Geodäten ($h \neq 0$) gibt es neben dem rein anziehenden Potential des Schwarzen Lochs zwei zusätzliche Terme aufgrund des Drehimpulses. Diese sind zum einen die Zentrifugalbarriere ($\sim h^2/r^2$) und zum anderen ein anziehendes Potential ($\sim h^2/r^3$), welches für kleine Entfernungen r überwiegt. Bestimmen wir die Extremalstellen des effektiven Potentials V_{eff} , so folgt aus $\partial_r V_{\text{eff}} = 0$ mit $\kappa = \pm 1$ für die Position der Extremalstellen

$$r_{1,2} = \frac{-h^2 \pm h \sqrt{h^2 + 3\kappa c^2 r_s^2}}{\kappa c^2 r_s}, \quad (5.2.6)$$

wobei

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2} \right|_{r_{1,2}} = \frac{\kappa^4 c^8 r_s^4 \left(h^2 \mp h \sqrt{h^2 + 3\kappa c^2 r_s^2} + 3\kappa c^2 r_s^2 \right)}{h^3 \left(h \mp \sqrt{h^2 + 3\kappa c^2 r_s^2} \right)^5}. \quad (5.2.7)$$

Für Null-Geodäten ($\kappa = 0$) im Speziellen gibt es nur eine Extremalstelle bei $r = \frac{3}{2} r_s$, was einem Maximum entspricht.

Wir wollen uns hier im wesentlichen auf nicht-radiale Geodäten konzentrieren und fordern dafür, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, daß h stets positiv ist. Die auftretenden Spezialfälle behandeln wir in den nächsten Abschnitten in Abhängigkeit des Typs der Geodäten.

5.2.2 Startbedingungen

Neben der Vorgabe der Energie und des Drehimpulses wollen wir, ausgehend von einem Beobachterort (t_i, r_i, φ_i) , die Startrichtung, wie sie in Abbildung 5.2 gezeigt wird, für eine Geodäte — bezogen auf die lokale Tetrade des ruhenden Beobachters — vorgeben.

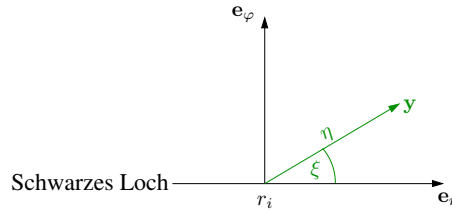


Abbildung 5.2: Ein Beobachter befindet sich am Ort (r_i, φ_i) und beschreibe die (Start-) Richtung $\mathbf{y} = y^n \mathbf{e}_n$ einer Geodäten bezüglich seines lokalen Systems $\{\mathbf{e}_n\}_{n=r,\varphi}$.

Die Richtung setzt sich wie folgt zusammen:

$$\mathbf{y} = y^n \mathbf{e}_n = y^t \mathbf{e}_t + y^r \mathbf{e}_r + y^\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (5.2.8)$$

$$= y^t \mathbf{e}_t + \eta \cos \xi \mathbf{e}_r + \eta \sin \xi \mathbf{e}_\varphi, \quad (5.2.9)$$

wobei sich die t -Komponente aus der Normierung $-(y^t)^2 + (y^r)^2 + (y^\varphi)^2 = \kappa c^2$ zu $y^t = \pm \sqrt{\eta^2 - \kappa c^2}$ ergibt. Das Vorzeichen entscheidet darüber, ob die Geodäte zukunfts- oder vergangenheitsgerichtet ist. Die Beschränkung auf positive h überträgt sich auf den Winkel ξ indem dieser auf das Intervall $0 < \xi < \pi$ beschränkt ist. Die beiden Konstanten k und h können dann durch

$$k = \pm c \sqrt{\eta^2 - \kappa c^2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_i}} \quad \text{und} \quad h = r_i \eta \sin \xi \quad (5.2.10)$$

ersetzt werden (siehe auch §2.1).

5.2.3 Zeitartige Geodäten

Zunächst betrachten wir zeitartige Geodäten ($\kappa = -1, \eta = c\beta\gamma$). Das effektive Potential V_{eff} erlaubt insgesamt drei verschiedene Formen (siehe Abb. 5.3): (a) keine Extremalstellen, (b) eine indifferente Extremalstelle, (c),(d) ein Maximum und ein Minimum.

Die Extremalstellen des effektiven Potentials befinden sich hier bei

$$r_{\pm} = \frac{h^2 \pm h \sqrt{h^2 - 3c^2 r_s^2}}{c^2 r_s}, \quad (5.2.11)$$

wobei r_+ ein Minimum und r_- ein Maximum ist. Die zugehörigen Werte $V_{\text{max}} = V_{\text{eff}}(r_-)$ und $V_{\text{min}} = V_{\text{eff}}(r_+)$ des effektiven Potentials sind

$$V_{\text{eff}}(r_{\pm}) = \frac{c^2 \left(h^2 \pm h \sqrt{h^2 - 3c^2 r_s^2} - c^2 r_s^2 \right)^2}{h \left(h \pm \sqrt{h^2 - 3c^2 r_s^2} \right)^3}. \quad (5.2.12)$$

Für $h^2 < 3c^2 r_s^2$ gibt es keine Extremalstelle; dies entspricht dem Fall (a). Gilt $h^2 = 3c^2 r_s^2$, so handelt es sich um eine indifferente Extremalstelle. Wie wir noch sehen werden, handelt es sich dabei um den letzten stabilen Orbit (b). Ein Maximum bzw. Minimum erhalten wir daher nur für $3c^2 r_s^2 < h^2 < \infty$, wenn also eine Drehimpulsbarriere vorhanden ist. Daraus folgt auch, daß r_+ und r_- nur in den Bereichen

$$r_+ \geq 3r_s \quad \text{und} \quad \frac{3}{2}r_s < r_- < 3r_s \quad (5.2.13)$$

vorkommen können.

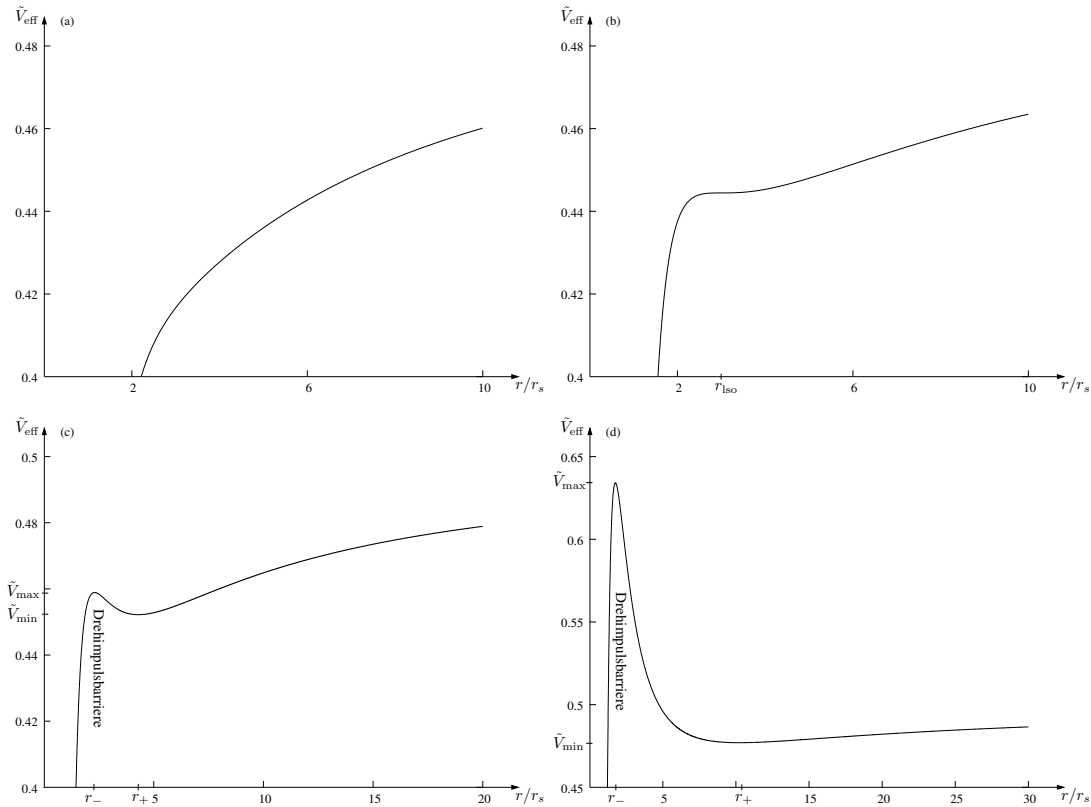


Abbildung 5.3: Effektives Potential $\tilde{V}_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}/c^2$ für eine zeitartige Geodäte mit dem Drehimpuls (a) $h = \frac{3}{2}cr_s$, (b) $h = \sqrt{3}cr_s$, (c) $h = \sqrt{3.3}cr_s$ und (d) $h = \sqrt{6}cr_s$ bei einem Schwarzschildradius $r_s = 2$. Die Extremalstellen befinden sich hier bei $r_{\text{iso}} = 3r_s$ und $r_{\pm} = (3.3 \pm 3\sqrt{0.11})cr_s$ bzw. $r_{\pm} = (6 \pm 3\sqrt{2})cr_s$.

Fall (a): Keine Extremalstelle

Das effektive Potential ist für wachsende r streng monoton steigend. Einem frei fallenden Teilchen mit dem Drehimpuls $h^2 < 3c^2r_s^2$, welches sich zu irgendeinem Zeitpunkt dem Schwarzen Loch nähert ($\dot{r} < 0$), ist es daher unmöglich, der Anziehungskraft des Schwarzen Lochs zu entkommen. Ist seine Energie groß genug ($k^2/c^2 > 2V_{\infty} = c^2$) und seine Bewegungsrichtung $\dot{r} > 0$, so kann es jedoch entkommen.

Fall (b): Letzter stabiler Orbit

Besitzt ein Teilchen den Drehimpuls $h^2 = 3c^2r_s^2$ und die Energie $k^2 = \frac{8}{9}c^4$, so bewegt es sich auf dem letzten stabilen Orbit, einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius $r_{\text{iso}} = 3r_s$.

Fall (c),(d): Zwei Extremalstellen

Ist der Drehimpuls eines Teilchens $h^2 > 3c^2r_s^2$, so gibt es eine Drehimpulsbarriere (siehe Abb. 5.3 c,d). Das weitere Verbleiben dieses Teilchens hängt nun von dessen Energie k ab.

Für einen Startort r mit $r > r_-$ gibt es verschiedene Möglichkeiten: Besitzt das Teilchen eine Energie $k^2/c^2 > 2V_{\text{max}}$ und ist die Startrichtung in Richtung des Schwarzen Lochs gerichtet ($\dot{r} < 0$), so überwindet es die Drehimpulsbarriere und fällt unausweichlich in das Schwarze Loch. Im Grenzfall $k^2/c^2 = 2V_{\text{max}}$ nähert sich das Teilchen asymptotisch der Kreisbahn $r = r_-$. Liegt die Energie k des Teilchens im Intervall $2V_{\text{max}} > k^2/c^2 > c^2$ und ist $2V_{\text{max}} > c^2$ (Abb. 5.3d), so wird es von dem Schwarzen Loch lediglich von seiner Bahn abgelenkt.

Für kleinere Energien bewegt es sich hingegen in einem gebundenen Orbit um das Schwarze Loch herum.³ Ist jedoch $2V_{\max} < c^2$, so läuft ein Teilchen mit $k^2/c^2 > 2V_{\max}$ auf jeden Fall ins Schwarze Loch, wohingegen es bei kleineren Energien einen stabilen Orbit besitzt.

Befindet sich der Startort r des Teilchens jedoch im Intervall $r_s < r < r_-$, so kann es dem Schwarzen Loch nur entweichen, wenn seine Startrichtung $\dot{r} > 0$ und seine Energie mindestens $k^2/c^2 > 2V_{\max}$ ist. Bei entsprechend geringem Drehimpuls (Abb. 5.3c) kann das Teilchen entweder in einen stabilen Orbit gelangen oder ins Schwarze Loch stürzen.

Stabile kreisförmige Orbits

Als Spezialfall der gebundenen Orbits wollen wir nun einen stabilen, kreisförmigen Orbit mit dem Radius r_+ betrachten. Aus der Bilanzgleichung (5.2.3c) mit $\dot{r} = 0$ und der Gleichung (5.2.11) folgt für den notwendigen Drehimpuls h und die Energie k :

$$k^2 = c^4 \left(1 - \frac{r_s}{r_+}\right)^2 \left(1 - \frac{3r_s}{2r_+}\right)^{-1} \quad \text{und} \quad h^2 = \frac{c^2 r_+^2 r_s}{2r_+ - 3r_s}. \quad (5.2.14)$$

Die Winkelgeschwindigkeit eines Objekts auf einer stabilen Kreisbahn können wir entweder bezüglich dessen Eigenzeit τ oder bezüglich eines entfernten Beobachters angeben. Im ersten Fall erhalten wir als Winkelgeschwindigkeit $\omega_\varphi = d\varphi/d\tau = \dot{\varphi}$, also

$$\omega_\varphi^2 = \frac{c^2 r_s}{2r_+^3 \left(1 - \frac{3r_s}{2r_+}\right)}. \quad (5.2.15)$$

Ein weit entfernter Beobachter hingegen mißt eine Winkelgeschwindigkeit $\Omega_\varphi = d\varphi/dt = \dot{\varphi}/\dot{t}$

$$\Omega_\varphi^2 = \frac{c^2 r_s}{2r_+^3}. \quad (5.2.16)$$

Die Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} des Objekts erhalten wir aus $\mathbf{u} = \dot{t}\partial_t + \dot{\varphi}\partial_\varphi = c\gamma(\mathbf{e}_t + \beta\mathbf{e}_\varphi)$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = v/c$; dabei ist v die Dreiergeschwindigkeit, die ein lokaler Beobachter in seiner lokalen Tetrade messen würde. Mit Gleichung (5.2.14) folgt für die Dreiergeschwindigkeit

$$v = c\sqrt{\frac{r_s}{2(r_+ - r_s)}}. \quad (5.2.17)$$

Kreist das Objekt auf dem letzten stabilen Orbit ($r_+ = 3r_s$), so bewegt es sich um das Schwarze Loch mit der halben Lichtgeschwindigkeit. Ein Umlauf um das Schwarze Loch auf dem letzten stabilen Orbit bräuchte, von einem weit entfernten Beobachter aus beurteilt, die Zeit

$$T_{2\pi} = \frac{2\pi}{\Omega_\varphi}. \quad (5.2.18)$$

Eine Uhr, die sich mit dem Objekt bewegt, würde jedoch die Eigenzeit

$$\tau_{2\pi} = \frac{2\pi}{\omega_\varphi} \quad (5.2.19)$$

als Umlaufdauer angeben, welche kleiner ist als die Beobachterzeit $T_{2\pi}$.

Radiale Bewegung

Wie bereits erläutert, kann eine radiale, zeitartige Geodäte dem Schwarzen Loch nur entkommen, wenn ihre Startrichtung nach außen gerichtet ist. Zudem muß ihre Startgeschwindigkeit $\beta = v/c$ ausreichend hoch sein. Aus der

³Im Gegensatz zum Grenzfall kleiner Massen (Newtonsche Gravitation) finden wir in der Schwarzschild-Raumzeit im allgemeinen keine geschlossenen Bahnkurven. Als Paradebeispiel dient hier die Periheldrehung des Merkur (siehe z.B.[82]).

Energie-Bilanz-Gleichung (5.2.3c) können wir die maximale Reichweite r_f berechnen, ab der eine radiale Geodäte umkehrt und doch noch ins Schwarze Loch läuft. Es gilt mit $\dot{r} = 0$ und der Konstanten $k = c^2\gamma\sqrt{1 - r_s/r_i}$ für die maximale Reichweite

$$r_f = r_s \frac{1 - \beta^2}{r_s/r_i - \beta^2}.$$

Soll die Geodäte dem Schwarzen Loch ganz entkommen ($r_f \rightarrow \infty$), so ist eine Mindestgeschwindigkeit, die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit

$$v_{\text{escape}} = c\sqrt{\frac{r_s}{r_i}}$$

erforderlich. Hier zeigt sich auch sehr deutlich, daß Geodäten, deren Startpunkt r_i beim Schwarzschild-Horizont r_s liegen, Lichtgeschwindigkeit brauchen, um dem Schwarzen Loch entfliehen zu können.

Betrachten wir den radialen freien Fall, so bewegt sich der Beobachter ebenfalls auf einer zeitartigen Geodäten. Die Lagrange-Funktion (5.2.1) vereinfacht sich dann zu

$$\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r_s/r} = -c^2 \quad (5.2.20)$$

und aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt

$$k = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t} \quad \text{und} \quad \dot{r}^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 + \frac{k^2}{c^2}. \quad (5.2.21)$$

Der Punkt bedeutet hier die Ableitung nach der Eigenzeit τ . Aus dem Zusammenhang der Vierer- mit der Dreier-Geschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \gamma(c\mathbf{e}_t + v\mathbf{e}_r) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - r_s/r}} \partial_t + \gamma v \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \partial_r = \dot{t} \partial_t + \dot{r} \partial_r \quad (5.2.22)$$

folgt mit (5.2.21)

$$\frac{vk}{c^2} = \dot{r} = \sqrt{\frac{k^2}{c^4} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{c^4}{k^2}}.$$

Fordern wir, daß der Beobachter aus der Ruhe ($v = 0$) am Ort $r = r_0 > r_s$ anfängt frei zu fallen, so folgt für die Integrationskonstante k

$$\frac{k}{c^2} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}}.$$

Seine Geschwindigkeit am Ort r , relativ zu einem dort ruhenden Beobachter, beträgt demnach

$$v = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right)^{-1}}, \quad (5.2.23)$$

woraus die interessante Tatsache erwächst, daß der frei aus der Ruhe fallende Beobachter, egal wo er startet, am Horizont stets Lichtgeschwindigkeit besitzt.

Neben der Geschwindigkeit können wir aus Gleichung (5.2.21) aber auch noch sowohl die Eigenzeit τ wie auch die Koordinatenzeit t in Abhängigkeit des momentanen Orts r angeben. Dabei gilt jeweils $t = 0$ beziehungsweise $\tau = 0$ bei $r = r_0$. Für die beiden Zeiten erhalten wir (vgl. [Maple \(bhRadialerFreierFall\)](#))

$$\tau = \frac{rr_0}{cr_s} \sqrt{\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_0}} + \frac{r_0^{3/2}}{c\sqrt{r_s}} \arctan \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}, \quad (5.2.24a)$$

$$t = \frac{r_s}{c} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}} \left[2\sqrt{\frac{r_0}{r_s}} \arctan \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1} + \frac{rr_0}{r_s^2} \sqrt{\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_0}} + \frac{\arctan \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}}{(r_s/r_0)^{3/2}} + 2 \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{r_s/r - r_s/r_0}{1 - r_s/r_0}}}{\sqrt{1 - r_s/r_0}} \right], \quad (5.2.24b)$$

wobei stets $r_s \leq r \leq r_0$. Die Eigenzeit τ bleibt für $r \rightarrow r_s$ endlich; die Koordinatenzeit t hingegen divergiert gegen Unendlich. Obwohl ein Objekt in endlicher Zeit den Ereignishorizont überquert, erreicht es ihn vom Standpunkt eines weit entfernten Beobachters nie.

5.2.4 Lichtartige Geodäten

Im Gegensatz zu zeitartigen Geodäten gibt es für lichtartige Geodäten ($\kappa = 0, \eta = 1$) keine stabilen Orbits. Der einzig ausgezeichnete kreisförmige Orbit liegt bei $r_{po} = \frac{3}{2}r_s$ (Photonenorbit), wie wir bereits zu Beginn dieses Abschnitts gesehen haben.

Die Konstanten k und h ändern ihren Charakter dahingehend, daß k nicht der Energie des Lichtstrahls entspricht, sondern lediglich eine Integrationskonstante darstellt, welche wir durch die willkürliche Normierung ($\eta = 1$) der Starttrichtung auf

$$k = \pm c \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_i}}, \quad h = r_i \sin \xi \quad (5.2.25)$$

festgelegt haben. h wollen wir weiterhin als „Drehimpuls“ bezeichnen, obwohl h schon von der Dimension her kein wirklicher Drehimpuls ist. Die Interpretation des effektiven Potentials lichtartiger Geodäten ($\kappa = 0$ in Gl. (5.2.4))

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{h^2}{r^2} \quad (5.2.26)$$

weicht nun ebenfalls von der für zeitartige Geodäten ab. Nach Vorgabe eines Startorts r_i ist die Konstante k festgelegt. Der Verlauf der Nullgeodäten hängt nun davon ab, wie groß h ist und wo sich die Nullgeodäte befindet (vgl. Abb. 5.4).

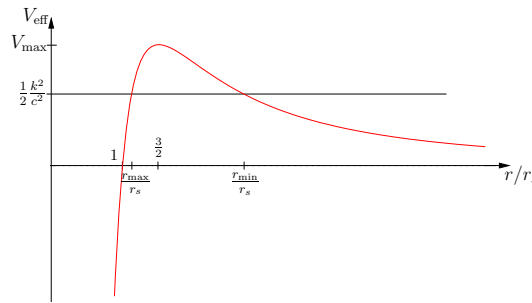


Abbildung 5.4: Effektives Potential eines Photons mit „Drehimpuls“ h . Der Maximalwert V_{max} des effektiven Potentials liegt bei $r = \frac{3}{2}r_s$. Das Photon kann von außen nur bis $r \geq r_{\text{min}}$ und von innen nur bis $r \leq r_{\text{max}}$ gelangen.

Ist h so gewählt, daß $V_{\text{max}} = 2h^2/(27r_s^2) > \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2}$ ist, so kann sich eine Nullgeodäte außerhalb $r = \frac{3}{2}r_s$ nur bis zu einem Radius r_{min} dem Ereignishorizont nähern und wird anschließend nach $r \rightarrow \infty$ laufen. Den minimalen Abstand r_{min} der Geodäten zum Schwarzen Loch können wir aus der Bedingung $\dot{r} = 0$ und der Bilanzgleichung (5.2.3c) bestimmen. So gilt mit $\epsilon = h/k$,

$$r_{\text{min}} = \frac{2c\epsilon}{\sqrt{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{3\sqrt{3}r_s}{2c\epsilon} \right) \right]. \quad (5.2.27)$$

Innerhalb von $r = \frac{3}{2}r_s$ kann die Geodäte dem Schwarzen Loch jedoch nicht entkommen; sie gelangt höchstens bis zum Radialwert r_{max} .

Für $V_{\text{max}} < \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2}$ gibt es keine Drehimpulsbarriere, sodaß eine Nullgeodäte unausweichlich ins Schwarze Loch läuft. Im kritischen Fall, wenn $V_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2}$ ist, nähert sich der Lichtstrahl asymptotisch der Kreisbahn $r = \frac{3}{2}r_s$.

5.2.5 Raumartige Geodäten

Wir wollen uns hier auf raumartige Geodäten beschränken, die sich in einer Hyperfläche konstanter Zeit befinden ($\dot{t} = 0$). Die Lagrange-Funktion (5.2.1) und der Parameter $\kappa = 1$ erfordern, daß der affine Parameter, mit dem wir die Geodäte parametrisieren wollen, die Dimension einer Zeit besitzt; wir wählen hier λ/c . Für unsere beiden

Integrationskonstanten k und h , denen wir keine anschauliche Bedeutung mehr geben wollen, erhalten wir mit $\eta = 1$ und dem hiesigen affinen Parameter

$$k = 0 \quad \text{und} \quad h = cr_i \sin \xi. \quad (5.2.28)$$

Den qualitativen Verlauf einer raumartigen Geodäten können wir uns nun ebenfalls mit dem effektiven Potential klarmachen; in diesem Fall lautet es

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{h^2}{r^2} - c^2\right) \quad (5.2.29)$$

und ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

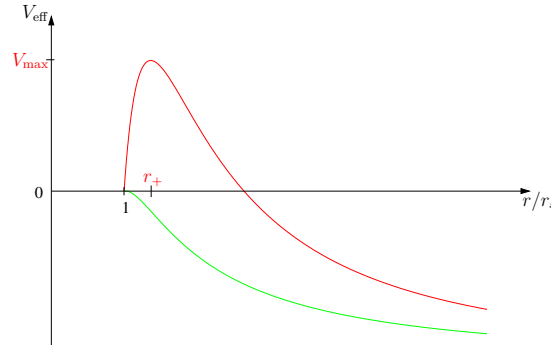


Abbildung 5.5: Effektives Potential für eine raumartige Geodäte bei verschiedenen Werten des Parameters h . Ist $V_{\text{max}} < 0$, so erstreckt sich die raumartige Geodäte bis zum Horizont ($r = r_s$).

Das Maximum V_{max} des effektiven Potentials liegt bei $r_+ = (-h + \sqrt{h^2 + 3r_s^2})/r_s$. Ist dieses Maximum einerseits größer Null, so befindet sich der zum Schwarzen Loch nächste Punkt der raumartigen Geodäten bei $r = r_{\text{min}} = r_i \sin \xi$. Andererseits erstreckt sich die raumartige Geodäte bis zum Ereignishorizont bei $r = r_s$, wenn das Maximum kleiner Null ist oder gar nicht im Intervall $[0, \infty)$ liegt. Der kritische Fall ist gerade dann erreicht, wenn die Geodäte den Horizont nur asymptotisch berührt. Am Beobachterort $r_i > r_s$ hat sie dann einen Winkel ξ_{krit} von

$$\sin \xi_{\text{krit}} = \frac{r_s}{r_i}.$$

5.3 Analytische Lösung der Geodätengleichung

Die analytische Lösung der Geodätengleichung führt uns zunächst auf ein elliptisches Integral, welches wir auf die sogenannte Standardform (siehe Anhang §C.2) bringen. Die dabei auftretende kubische Gleichung zwingt uns, eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Startwerte zu treffen. Der Übersicht halber führen wir diese Fallunterscheidung für licht- und zeitartige Geodäten getrennt durch; raumartige Geodäten wollen wir hier außen vor lassen.

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Bahngleichung $r = r(\varphi)$ aufzustellen und für jeden Fall so zu transformieren, daß wir es im wesentlichen mit reellen Argumenten und Modulen in den elliptischen Integralen und Funktionen zu tun haben.

5.3.1 Geodätengleichung

Anstelle der Radialkoordinate r verwenden wir deren reziproken Wert $u = 1/r$. Außerdem wollen wir eine Geodäte über ihre Bahngleichung $u = u(\varphi)$ darstellen. Mit $\dot{u} = -u^2 \dot{r}$, $\dot{u} = \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi}$ und den Gleichungen (5.2.3b) und (5.2.3c) erhalten wir

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{k^2}{c^2} + \kappa c^2 - (1 - r_s u)u^2 - r_s \frac{\kappa c^2}{h^2} u.$$

Führen wir noch die Transformation $x = r_s u$ durch, so gelangen wir zu unserer Ausgangsgleichung⁴

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = a^2 - bx - (1-x)x^2, \quad \text{mit } a^2 = r_s^2 \frac{k^2}{c^2} + \frac{\kappa c^2}{h^2} \quad \text{und } b = r_s^2 \frac{\kappa c^2}{h^2}. \quad (5.3.1)$$

Der Wertebereich der Variablen u folgt aus dem für r zu ($0 < u < \frac{1}{r_s}$) und damit ist ($0 < x < 1$). Die Information, ob die Geodäte nach außen oder innen läuft, ist hier nicht vorhanden und muß im folgenden noch berücksichtigt werden.

Nach Trennung der Variablen gelangen wir zu dem elliptischen Integral

$$\int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - bx - x^2 + x^3}} = \varphi, \quad (5.3.2)$$

welches wir im weiteren auf die Standardform eines elliptischen Integrals erster Art [60] bringen wollen.

Der kubische Term unter der Wurzel des Integrals (5.3.2) läßt sich aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra als Produkt $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ schreiben. Das in dieser Form geschriebene Integral bekommen wir auf Standardform, indem wir zunächst eine allgemeine Möbius-Transformation ansetzen:

$$x = \frac{\alpha t - \beta}{\gamma t - \delta} \quad \text{und} \quad dx = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma t - \delta)^2} dt. \quad (5.3.3)$$

Eingesetzt in (5.3.2) ergibt

$$-\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)dt}{\sqrt{[\alpha t - \beta - x_1(\gamma t - \delta)][\alpha t - \beta - x_2(\gamma t - \delta)][\alpha t - \beta - x_3(\gamma t - \delta)][\gamma t - \delta]}} \stackrel{!}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-m^2t)}}.$$

Ordnen wir nach Potenzen von t , so können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen, welcher allerdings zu keinem eindeutigen Ergebnis führt. Vielmehr lassen sich zwei Parameter frei wählen. Eine Wahl führt auf die Transformation

$$x = \frac{x_1 t - x_2}{t - 1} \quad (5.3.4)$$

und so ist

$$\int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{\sqrt{x_2 - x_3} \sqrt{t(1-t)(1-m^2t)}}, \quad \text{mit } m^2 = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}.$$

Die anschließende Substitution $t = \tau^2$ bringt uns zum gewünschten elliptischen Integral erster Art:

$$\int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d\tau}{\sqrt{x_2 - x_3} \sqrt{(1-\tau^2)(1-m^2\tau^2)}}.$$

Die Integrationsgrenzen haben sich unterdessen transformiert über

$$\tau_{i,f} = \sqrt{t_{i,f}} = \sqrt{\frac{x_{i,f} - x_2}{x_{i,f} - x_1}}.$$

Letztere Gleichheit folgt aus der Umkehrung der Möbius-Transformation (5.3.4). Nun können wir unser Ausgangsintegral (5.3.2) mittels elliptischem Integral schreiben,

$$\pm \frac{2}{\sqrt{x_2 - x_3}} \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}, m \right) \Bigg|_{x_i}^{x_f} = \varphi. \quad (5.3.5)$$

Lassen wir nun die obere Grenze variabel und ersetzen den Wert des elliptischen Integrals an der unteren Grenze durch φ_0 , so können wir die Umkehrfunktion bilden und erhalten als Bahngleichung $x = x(\varphi)$ der Geodäten

$$x = \frac{x_2 - x_1 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\sqrt{x_2 - x_3}}{2} (\varphi \pm \varphi_0), m \right)}{1 - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\sqrt{x_2 - x_3}}{2} (\varphi \pm \varphi_0), m \right)}, \quad (5.3.6)$$

⁴Der Vorteil dieser Notation ist u.a., daß die Variable x dimensionslos ist und mit r und M skaliert.

wobei sn die Jacobi-Elliptische- sn -Funktion ist. Die Wahl des Vorzeichens in Gleichung (5.3.5) und Gleichung (5.3.6) hängt sowohl von der Startrichtung als auch von der Aufteilung der Wurzeln ab.

Die eigentliche Bahngleichung $r = r(\varphi)$ erhalten wir ganz einfach durch die Umkehrung der Transformation zu Beginn des Abschnitts,

$$r(\varphi) = \frac{r_s}{x(\varphi)}. \quad (5.3.7)$$

5.3.2 Wurzeln der kubischen Gleichung und Anfangsbedingungen

Wir wollen uns nun um die Bestimmung der drei Wurzeln x_n der kubischen Gleichung $x^3 - x^2 - bx + a^2 = 0$ kümmern, wobei wir wieder eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Typs der Geodäten machen wollen. Zunächst aber bringen wir die kubische Gleichung durch die Substitution $x = y + \frac{1}{3}$ auf die reduzierte Form[13]

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad \text{mit} \quad p = -\frac{b}{3} - \frac{1}{9}, \quad q = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{27} - \frac{b}{6}. \quad (5.3.8)$$

Entscheidend für die Lösungsmannigfaltigkeit ist die Diskriminante D_1 ,

$$D_1 = q^2 + p^3 = a^2 \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{27} \right) - \left(\frac{a^2 b}{6} + \frac{b^2}{108} + \frac{b^3}{27} \right). \quad (5.3.9)$$

Die Parameter a und b werden ihrerseits durch die Anfangsbedingungen der Geodäten bestimmt (siehe Gleichung (5.3.1)), auf die wir nun im Näheren eingehen wollen.

Anfangsbedingungen und Parameter für lichtartige Geodäten

Für lichtartige Geodäten ($\kappa = 0, \eta = 1$) verschwindet der Parameter b identisch (siehe Gl.(5.3.1)). Der Parameter a setzt sich dann nur noch aus dem Verhältnis der Konstanten k und h sowie dem Schwarzschildradius r_s zusammen. Aus der Gleichung (5.2.10) folgt für einen Beobachter am Ort r_i bezüglich seiner natürlichen Tetrade (Abb. 5.2):

$$k = \pm c \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_i}} \quad \text{und} \quad h = r_i \sin \xi, \quad (5.3.10)$$

damit ist

$$a^2 = r_s^2 \frac{k^2}{c^2 h^2} = \frac{r_s^2}{r_i^2} \frac{1 - \frac{r_s}{r_i}}{\sin^2 \xi}. \quad (5.3.11)$$

Der weitere Verlauf der Nullgeodäten hängt nun vom bereits besprochenen kritischen Fall ab, für den $V_{\max} = 2h_{\text{krit}}^2 / (27r_s^2) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2}$ ist. So gilt

$$a_{\text{krit}}^2 = r_s^2 \frac{k^2}{c^2 h_{\text{krit}}^2} = \frac{r_s^2}{r_i^2} \frac{1 - \frac{r_s}{r_i}}{\sin^2 \xi_{\text{krit}}} = \frac{4}{27}. \quad (5.3.12)$$

Da wir $r_i = r_s$ ausschließen wollen, ist a^2 echt größer Null. Wir können nun eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Ausgangspunktes und der Richtung der Nullgeodäten durchführen. Tabelle 5.1 beschreibt den qualitativen Verlauf einer Nullgeodäten in Abhängigkeit des Parameters a und damit dem Verhältnis k/h .

Eine analoge Charakterisierung des Verlaufs einer Nullgeodäten ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Richtungen, die die Nullgeodäten ins Schwarze Loch laufen lassen sind schwarz markiert. Die hell markierten Bereiche kennzeichnen die Richtungen, für die eine Nullgeodäten im Unendlichen landet.

Den kritischen Winkel ξ_{krit} , der diese beiden Bereiche voneinander trennt (siehe dazu auch Abb. 5.2), können wir mittels Gleichung (5.3.12) bestimmen.⁵ Den minimalen Abstand r_{\min} aus Gleichung (5.2.27) können wir nun mit Hilfe des Winkels ξ angeben. So folgt für $x_{\min} = r_s / r_{\min}$

$$x_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x_i \sqrt{1 - x_i}}{\sin \xi} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{x_i \sqrt{1 - x_i}}{\sin \xi} \right) \right]. \quad (5.3.13)$$

⁵Im Anhang §D.3 ist der Blick auf ein Schwarzes Loch bei den Abständen aus Abbildung 5.6 sowohl für die quasi-statische Annäherung wie auch für den freien Fall visualisiert.

r_i	$\dot{r} > 0$	$\dot{r} < 0$
$r_i > \frac{3}{2}r_s$	Nullgeodäte $\rightarrow \infty$	$a^2 > a_{\text{krit}}^2$: Nullgeodäte läuft ins BH, $a^2 < a_{\text{krit}}^2$: Nullgeodäte $\rightarrow \infty$
$r_s < r_i < \frac{3}{2}r_s$	$a^2 > a_{\text{krit}}^2$: Nullgeodäte $\rightarrow \infty$ $a^2 < a_{\text{krit}}^2$: Nullgeodäte läuft ins BH	Nullgeodäte läuft ins BH

Tabelle 5.1: Qualitativer Verlauf einer Nullgeodäten — die am Ort r_i startet und eine Startrichtung \dot{r} besitzt — in Abhängigkeit des Parameters a . (Die Abkürzung ‚BH‘ steht für ‚black hole‘ = Schwarzes Loch.)

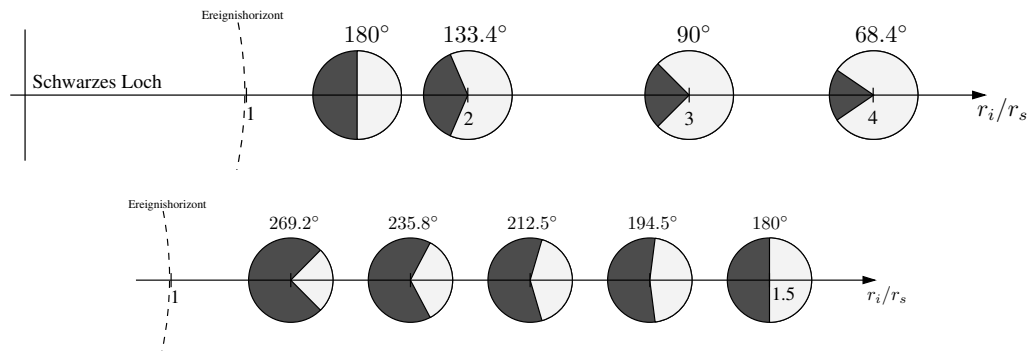


Abbildung 5.6: Qualitativer Verlauf einer Nullgeodäten in Abhängigkeit des Startortes r_i , wo der Beobachter ruht, und des Startwinkels ξ . Nullgeodäten, deren Richtung im schwarz markierten Bereich liegen, laufen ins Schwarze Loch. Je näher sich der Beobachter am Schwarzen Loch befindet, desto größer ist der Sichtbereich, der vom Schwarzen Loch eingenommen wird. Der „Außenbereich“ drängt sich in einem im kleiner werdenden Raumwinkel.

Zur Beschreibung einer Nullgeodäten mit der Bahngleichung (5.3.6) unterscheiden wir zwischen drei Fällen. Mit $a_{\text{krit}}^2 = 4/27$ und $q = a^2/2 - 1/27$ gilt

- (a) $a^2 < a_{\text{krit}}^2$, $-1/27 < q < 1/27$, $D_1 < 0$, $\xi_{\text{krit}} < \xi < \pi - \xi_{\text{krit}}$,
- (b) $a^2 = a_{\text{krit}}^2$, $q = 1/27$, $D_1 = 0$, $\xi = \xi_{\text{krit}}$ oder $\xi = \pi - \xi_{\text{krit}}$,
- (c) $a^2 > a_{\text{krit}}^2$, $q > 1/27$, $D_1 > 0$, $0 < \xi < \xi_{\text{krit}}$ oder $\pi - \xi_{\text{krit}} < \xi < \pi$.

Für alle drei Fälle gilt $p = -1/9$. Die Fallunterscheidung $q \leq 0$ (Abb. 5.7) benötigen wir im nächsten Abschnitt für die Definition der Hilfsvariablen ρ .

Anfangsbedingungen und Parameter für zeitartige Geodäten

Die Parameter a und b aus Gleichung (5.3.1) ergeben sich für zeitartige Geodäten ($\kappa = -1, \eta = c\beta\gamma$) mit $k = \pm c^2\gamma\sqrt{1 - r_s/r_i}$ und $h = c\beta\gamma r_i \sin \xi$ zu

$$a^2 = r_s^2 \frac{\frac{k^2}{c^2} - c^2}{h^2} = \frac{r_s^2}{r_i^2} \frac{\beta^2 - \frac{r_s}{r_i}}{\beta^2 \sin^2 \xi} \quad \text{und} \quad b = -r_s^2 \frac{c^2}{h^2} = -\frac{r_s^2}{r_i^2} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2 \sin^2 \xi}. \quad (5.3.14)$$

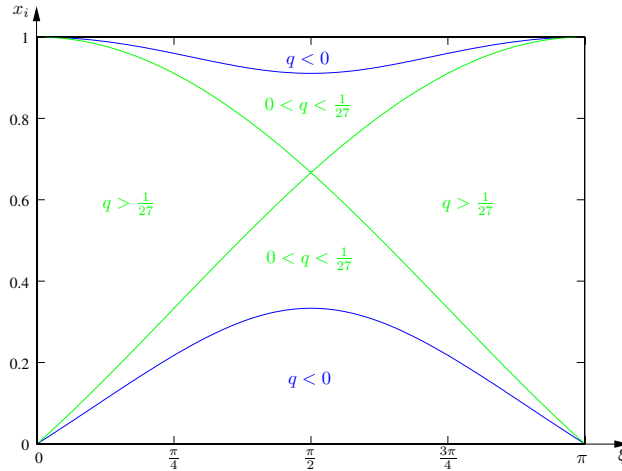


Abbildung 5.7: Abhängigkeit des Parameters q vom Startort $x_i = r_s/r_i$ und von der Startrichtung ξ . Die grüne Linie markiert $q = 1/27$ bzw. $\xi = \xi_{\text{krit}}(x_i)$. Der Schnittpunkt beider grüner Linien liegt bei $x_i = 2/3$, also dem Kreisorbit. Die blaue Linie kennzeichnet $q = 0$.

Entscheidend für die späteren Bahngleichungen sind die Parameter p und q sowie die Diskriminante D_1 aus Gleichung (5.3.9) und so gilt mit $x_i = r_s/r_i$

$$p = \frac{x_i^2}{3} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2 \sin^2 \xi} - \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad q = \frac{x_i^2}{6} \frac{2\beta^2 - 3x_i + 1}{\beta^2 \sin^2 \xi} - \frac{1}{27}. \quad (5.3.15)$$

Weiterhin ist für den Verlauf der Geodäten der Schwellenwert $k^2/c^4 = 1$, den wir auch über

$$\beta^2 = \frac{r_s}{r_i} = x_i \quad (5.3.16)$$

ausdrücken können, von Bedeutung. Im Fall $D_1 = 0$ folgt für das Maximum des effektiven Potentials $V_{\text{max}} = k^2/(2c^2)$.

Für die Fälle (a) und (b) aus Abschnitt §5.2.3 gilt $b < -1/3$ bzw. $b = -1/3$. Zusammen mit Gleichung (5.3.8) ist dann $p \geq 0$ und folglich $D_1 \geq 0$. Geodäten mit einem Startwinkel ξ im Intervall $[\pi/2, \pi]$ laufen unausweichlich ins Schwarze Loch, wohingegen solche im Intervall $[0, \pi/2)$ für den Fall $k^2/c^4 > 1$ nach Unendlich entweichen können, für $k^2/c^4 < 1$ jedoch wieder umkehren und auch ins Schwarze Loch fallen (vgl. Abb. 5.3). Im Fall $b = -1/3$ ($p = 0$) vereinfacht sich der Parameter q zu

$$q = \frac{1 - x_i}{6(1 - \beta^2)} - \frac{4}{27},$$

und wir haben, mit nur einer Ausnahme, die gleichen Verhältnisse wie im vorherigen Fall. Gilt jedoch $p = D_1 = 0$ und zusätzlich $x_i = 1/3$, so gibt es den letzten stabilen Orbit für einen Startwinkel $\xi = \pi/2$ und einer Startgeschwindigkeit $v = 0.5c$ (siehe Gl. (5.2.17)).

Für die Fälle (c) und (d), wenn also $b > -1/3$ und daher $p < 0$ ist, wollen wir uns anhand der Abbildung 5.8 klarmachen, wann die Diskriminante D_1 positiv oder negativ wird. In den blau nummerierten Gebieten I-IV und VI ist $D_1 > 0$, wohingegen in den Bereichen V, VII und VIII $D_1 < 0$ ist. Diese Gebiete sind in der Regel von der Bewegung her interessanter, wie schon aus den effektiven Potentialen (Abb. 5.3) klar wird.

In der Praxis verwenden wir Abbildung 5.8, um für einen bestimmten Startort x_i die zur Startgeschwindigkeit β und Startrichtung ξ gehörenden Parameter p, q und D_1 zu ermitteln. Den qualitativen Verlauf der Geodäten machen wir uns dann aber am effektiven Potential (Abb. 5.3) klar.

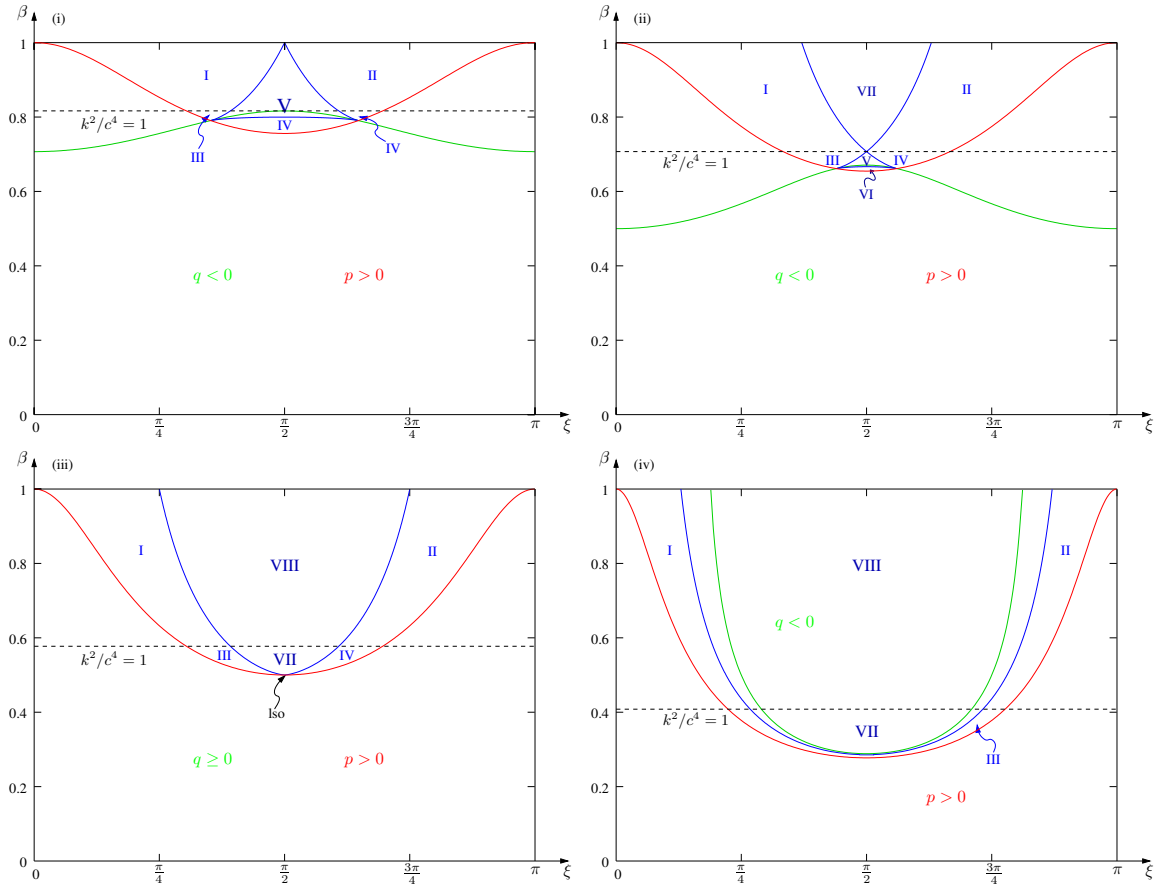


Abbildung 5.8: Verlauf der zeitartigen Geodäten in Abhängigkeit der Parameter β (Startgeschwindigkeit) und ξ (Startrichtung) für die Startentfernungen: (i) $x_i = 2/3$, (ii) $x_i = 1/2$, (iii) $x_i = 1/3$ und (iv) $x_i = 1/6$ bei einem Schwarzschildradius $r_s = 2$. Winkel $\xi > \pi/2$ entsprechen Richtungen hin zum Schwarzen Loch, Winkel $\xi < \pi/2$ zeigen von Schwarzen Loch weg. Die rote Linie grenzt den Bereich mit $b < -1/3$, $p > 0$, $D_1 > 0$ (unterhalb) von dem Bereich mit $b > -1/3$, $p < 0$ (oberhalb) ab. Die hellgrüne Linie entspricht $q = 0$. Auf der blauen Linie gilt $D_1 = 0$ bzw. $2V_{\max} = k^2/c^2$. Die schwarze gestrichelte Linie steht für $k^2/c^2 = 2V_{\infty}$. In den blau nummerierten Gebieten I-IV, VI ist $D_1 > 0$, in V, VII und VIII ist $D_1 < 0$. Der letzte stabile Orbit (Iso=last stable orbit) wird für $x_i = 1/3$, $\xi = \pi/2$, $\beta = 0.5$ angenommen.

5.3.3 Bahngleichungen

Zur Lösung der reduzierten kubischen Gleichung (5.3.8) führen wir in Abhängigkeit der Parameter p , q und der Diskriminanten D_1 zwei Hilfsgrößen ein[13]. Dies ist zum einen der Parameter

$$\rho = \pm \sqrt{|p|} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{|1 + 3b|} \quad (5.3.17)$$

mit dem Vorzeichen von q und zum anderen der Parameter ψ , der wie folgt definiert sein soll:

$$\cos \psi = \frac{q}{\rho^3} \quad \text{für } p < 0 \quad \wedge \quad D_1 \leq 0, \quad (5.3.18a)$$

$$\cosh \psi = \frac{q}{\rho^3} \quad \text{für } p < 0 \quad \wedge \quad D_1 > 0, \quad (5.3.18b)$$

$$\sinh \psi = \frac{q}{\rho^3} \quad \text{für } p > 0. \quad (5.3.18c)$$

Unter Verwendung dieser beiden Hilfsgrößen können wir nun die drei Wurzeln der eigentlichen kubischen Gleichung $x^3 - x^2 - bx + a^2 = 0$ angeben. So gilt im einzelnen:

$$x_{1,2} = 2\rho \cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{\psi}{3}\right) + \frac{1}{3}, \quad x_3 = -2\rho \cos\frac{\psi}{3} + \frac{1}{3}, \quad p < 0, D_1 \leq 0, \quad (5.3.19a)$$

$$x_{1,3} = \rho \left(\cosh\frac{\psi}{3} \pm i\sqrt{3} \sinh\frac{\psi}{3} \right) + \frac{1}{3} \quad x_2 = -2\rho \cosh\frac{\psi}{3} + \frac{1}{3}, \quad p < 0, D_1 > 0, \quad (5.3.19b)$$

$$x_{1,3} = \rho \left(\sinh\frac{\psi}{3} \pm i\sqrt{3} \cosh\frac{\psi}{3} \right) + \frac{1}{3} \quad x_2 = -2\rho \sinh\frac{\psi}{3} + \frac{1}{3}, \quad p > 0, \quad (5.3.19c)$$

$$x_{1,3} = -\frac{1}{2}(-2q)^{1/3} \left(1 \pm i\sqrt{3} \right) + \frac{1}{3}, \quad x_2 = (-2q)^{1/3} + \frac{1}{3}, \quad p = 0. \quad (5.3.19d)$$

Im Prinzip wären wir jetzt fertig. Allerdings treten hier noch komplexe Zahlen im Argument und im Modul der elliptischen Funktionen auf, die wir im folgenden noch beseitigen wollen.

Einfacher Fall ($p < 0, D_1 \leq 0$)

Zunächst prüfen wir, ob $\rho \leq 0$ ist. Wenn $\rho < 0$ ist, dann vertauschen wir die Wurzeln x_2 und x_3 aus Gleichung (5.3.19a). Anschließend setzen wir die Wurzeln in den Modul m ein

$$m^2 = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \quad \text{mit} \quad 0 < m < 1 \quad \forall \psi \in [0, \pi]. \quad (5.3.20)$$

Die zugehörige Bahngleichung (5.3.6) können wir dann wie folgt formulieren:

$$x = \frac{x_2 - x_1 \text{SN}^2}{1 - \text{SN}^2} \quad (5.3.21)$$

mit $\text{SN} = \text{sn}\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2} \sqrt{x_2 - x_3}, m\right)$ und dem Anfangswert φ_0 . Diesen erhalten wir direkt aus dem Anfangswert x_i und Gleichung (5.3.5):

$$\varphi_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{x_2 - x_3}} \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{x_i - x_2}{x_i - x_1}}, m\right). \quad (5.3.22)$$

Nun wollen wir aber φ_0 selbst nicht verwenden, sondern setzen es in die Bahngleichung (5.3.21) ein und formen anschließend den daraus gewonnenen Ausdruck mit Hilfe der Jacobi-Beziehungen (siehe Anhang §C.3.3) um. So gilt mit $u = \frac{1}{2}\sqrt{x_2 - x_3}\varphi$ und $v = \frac{1}{2}\sqrt{x_2 - x_3}\varphi_0$:

$$\begin{aligned} \text{SN} = \text{sn}(u \pm v) &= \frac{\text{sn}(u)\text{cn}(v)\text{dn}(v) \pm \text{sn}(v)\text{cn}(u)\text{dn}(u)}{1 - m^2 \text{sn}^2(u)\text{sn}^2(v)} \\ &= \frac{\text{sn}(u) \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2(x_i - x_3)}{(x_2 - x_3)(x_i - x_1)^2}} \pm \sqrt{\frac{x_i - x_2}{x_i - x_1}} \text{cn}(u)\text{dn}(u)}{1 - \frac{(x_1 - x_3)(x_i - x_2)}{(x_2 - x_3)(x_i - x_1)} \text{sn}^2(u)}, \end{aligned}$$

wobei das positive Vorzeichen für einlaufende ($\xi > \pi/2$) und das negative Vorzeichen für auslaufende ($\xi < \pi/2$) Geodäten zu verwenden ist (vgl. Abb. 5.2). Mit viel Mühe kann man zeigen, daß die Radikanten unter den beiden Wurzeln stets größer oder gleich Null sind. Im Fall $\xi = \frac{\pi}{2}$ ist $x_1 = x_i$ und φ_0 ist nicht mehr definiert. Es handelt sich hierbei aber um eine hebbare Singularität und die Bahngleichung (5.3.21) bleibt wohl definiert. Wir haben mit Gleichung (5.3.21) tatsächlich eine rein radiale Bahngleichung gefunden.

Läuft die Geodäte gegen Unendlich ($x = 0$), so erreicht sie einen maximalen Winkel φ_∞ . Dieser folgt direkt aus Gleichung (5.3.21):

$$\varphi_\infty = \frac{2}{\sqrt{x_2 - x_3}} \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, m\right) \pm \frac{2}{\sqrt{x_2 - x_3}} \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{x_i - x_2}{x_i - x_1}}, m\right), \quad (5.3.23)$$

wobei das positive Vorzeichen für $\xi > \frac{\pi}{2}$ und das negative Vorzeichen für $\xi < \frac{\pi}{2}$ zu verwenden ist. In beiden elliptischen Integralen ist das Argument größer als Eins, weshalb die Integrale vor der numerischen Berechnung mittels Gleichung (C.2.16) transformiert werden müssen. Dann stellt auch der Spezialfall $\xi = \pi/2$, für den $x_1 = x_i$ wird, kein Problem mehr da.

Aufwendiger Fall ($p < 0, D_1 > 0$)

Noch komplizierter wird es, wenn $p < 0$ und $D_1 > 0$ ist. Die Hilfsvariable ρ wird hier nur für zeitartige Geodäten negativ. Setzen wir die Wurzeln der kubischen Gleichung für diesen Fall in den Modul m ein, so folgt

$$m^2 = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{i2\sqrt{3} \sinh \frac{\psi}{3}}{-3 \cosh \frac{\psi}{3} + i\sqrt{3} \sinh \frac{\psi}{3}} \quad (5.3.24)$$

Um den Modul reell zu bekommen, betrachten wir zunächst den komplementären Modulus m'

$$m'^2 = 1 - m^2 = \frac{1 + i\chi}{1 - i\chi}, \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{\tanh \frac{\psi}{3}}{\sqrt{3}}, \quad (5.3.25)$$

und führen dann die absteigende Landen-Transformation für die drei elliptischen Funktionen

$$\operatorname{sn}(u, m) = \frac{(1 - im_2) \operatorname{sn}(v, im_2)}{1 - im_2 \operatorname{sn}^2(v, im_2)}, \quad (5.3.26a)$$

$$\operatorname{cn}(u, m) = \frac{\operatorname{cn}(v, im_2) \operatorname{dn}(v, im_2)}{1 - im_2 \operatorname{sn}^2(v, im_2)}, \quad (5.3.26b)$$

$$\operatorname{dn}(u, m) = \frac{1 + im_2 \operatorname{sn}^2(v, im_2)}{1 - im_2 \operatorname{sn}^2(v, im_2)}, \quad (5.3.26c)$$

mit

$$m_1 = \frac{1 - m'}{1 + m'} = -i \frac{\chi}{1 + \sqrt{1 + \chi^2}} =: -im_2, \quad v = \frac{u}{1 - im_2} \quad \text{und} \quad u = \frac{1}{2} \sqrt{x_2 - x_3} (\varphi + \varphi_0) \quad (5.3.27)$$

durch, wobei jetzt m_2 rein reell ist. Eine weitere Transformation führt schließlich zu einem reellen Modul:

$$\operatorname{sn}(v, im_2) = \frac{1}{\zeta} \operatorname{sd} \left(\zeta v, \frac{m_2}{\zeta} \right), \quad \operatorname{cn}(v, im_2) = \operatorname{cd} \left(\zeta v, \frac{m_2}{\zeta} \right), \quad \operatorname{dn}(v, im_2) = \operatorname{nd} \left(\zeta v, \frac{m_2}{\zeta} \right), \quad (5.3.28)$$

mit $\zeta = \sqrt{1 + m_2^2}$. Wie sich gleich zeigen wird, ist das Argument ζv für $\rho > 0$ rein imaginär, denn es gilt

$$\begin{aligned} \zeta v &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + m_2^2}}{1 - im_2} \sqrt{-3\rho \cosh \frac{\psi}{3} + i\sqrt{3} \sinh \frac{\psi}{3}} (\varphi + \varphi_0) = i \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \sqrt{\frac{1 + im_2}{1 - im_2}} \sqrt{1 - i\chi} \sqrt{3\rho \cosh \frac{\psi}{3}} \\ &= i \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \sqrt{3\rho \cosh \frac{\psi}{3}} \sqrt{\sqrt{\frac{1 + i\chi}{1 - i\chi}} \sqrt{1 - i\chi}} = i \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \sqrt{3\rho \cosh \frac{\psi}{3}} \sqrt[4]{1 + \chi^2} =: iw = i(z + z_0). \end{aligned}$$

Um auch das Argument in den elliptischen Funktionen reell zu bekommen, führen wir noch folgende Transformation durch:

$$\operatorname{sd}(iw, m_3) = i \operatorname{sd}(w, m'_3), \quad \text{mit} \quad m_3 = \frac{m_2}{\zeta}, \quad m'_3 = \sqrt{1 - m_3^2} = \frac{1}{\zeta}. \quad (5.3.29)$$

Ist $\rho < 0$, dann wird ζv rein reell und w daher komplex. Wir wollen aber dennoch die Transformation (5.3.29) ausführen und müssen später berücksichtigen, daß in diesem Fall z und z_0 komplex sind.

Bis hierher haben wir also folgende Transformation für die Jacobi-Funktionen in der ursprünglichen Bahngleichung (5.3.6) erreicht:

$$\operatorname{sn}(u, m) = \frac{(m_2 + i) \zeta^{-1} \operatorname{sd}(w, \zeta^{-1})}{1 + im_2 \zeta^{-2} \operatorname{sd}^2(w, \zeta^{-1})}, \quad (5.3.30a)$$

$$\operatorname{cn}(u, m) = \frac{\operatorname{cn}(w, \zeta^{-1})}{\operatorname{dn}^2(w, \zeta^{-1}) + im_2 \zeta^{-2} \operatorname{sn}^2(w, \zeta^{-1})}, \quad (5.3.30b)$$

$$\operatorname{dn}(u, m) = \frac{\operatorname{dn}^2(w, \zeta^{-1}) - im_2 \zeta^{-2} \operatorname{sn}^2(w, \zeta^{-1})}{\operatorname{dn}^2(w, \zeta^{-1}) + im_2 \zeta^{-2} \operatorname{sn}^2(w, \zeta^{-1})} \quad (5.3.30c)$$

Auch hier wollen wir wieder den Anfangswert φ_0 , der in z_0 beinhaltet ist, selbst nicht verwenden. Mittels Additionstheoremen schreiben wir die Jacobi-sd-Funktion um. Für $\rho > 0$ gilt dann

$$\text{sd}(w, \zeta^{-1}) = \text{sd}(z + z_0, \zeta^{-1}) = \frac{\text{sn}(z)\text{cn}(z_0)\text{dn}(z_0) \pm \text{sn}(z_0)\text{cn}(z)\text{dn}(z)}{\text{dn}(z)\text{dn}(z_0) \mp \zeta^{-2}\text{sn}(z)\text{sn}(z_0)\text{cn}(z)\text{cn}(z_0)}. \quad (5.3.31)$$

Ist jedoch $\rho < 0$ und daher $z = i\alpha$ rein imaginär, so verwenden wir die Transformationen (C.3.7) für die Jacobi-Funktionen mit rein imaginären Argumenten und erhalten so, anstelle von Gleichung (5.3.31),

$$\text{sd}(w, \zeta^{-1}) = \text{sd}(i\alpha + z_0, \zeta^{-1}) = \frac{i\text{sc}(\alpha, m_3)\text{cn}(z_0)\text{dn}(z_0) \pm \text{sn}(z_0)\text{nc}(\alpha, m_3)\text{dc}(\alpha, m_3)}{\text{dc}(\alpha, m_3)\text{dn}(z_0) \mp \zeta^{-2}i\text{sc}(\alpha, m_3)\text{sn}(z_0)\text{nc}(\alpha, m_3)\text{cn}(z_0)}. \quad (5.3.32)$$

Das jeweils obere Vorzeichen steht für einlaufende ($\xi > \pi/2$), das untere für auslaufende ($\xi < \pi/2$) Geodäten (vgl. Abb. 5.2). Transformieren wir die Jacobi-Funktionen $\text{sn}(z_0, \zeta^{-1})$, $\text{cn}(z_0, \zeta^{-1})$ und $\text{dn}(z_0, \zeta^{-1})$ wieder auf dem gleichen Weg zurück, so erhalten wir mit $v = \frac{1}{2}\sqrt{x_2 - x_3}\varphi_0/(1 - im_2)$ — nach einer langen Rechnung — folgende Relation:

$$\text{cn}(z_0, \zeta^{-1}) = m_1 \frac{\sqrt{\frac{x_2 - x_3}{x_i - x_1}} + \sqrt{\frac{x_i - x_3}{x_i - x_1}} + \left(1 + m' \sqrt{\frac{x_2 - x_3}{x_i - x_1}}\right)}{\sqrt{\frac{x_2 - x_3}{x_i - x_1}} + \sqrt{\frac{x_i - x_3}{x_i - x_1}} - \left(1 + m' \sqrt{\frac{x_2 - x_3}{x_i - x_1}}\right)}, \quad (5.3.33)$$

Die Relationen für die anderen beiden Jacobi-Funktionen folgen aus den Beziehungen zwischen diesen,

$$\text{sn}(z_0, \zeta^{-1}) = \sqrt{1 - \text{cn}^2(z_0, \zeta^{-1})} \quad \text{und} \quad \text{dn}(z_0, \zeta^{-1}) = \sqrt{1 - \zeta^{-2}\text{sn}^2(z_0, \zeta^{-1})}.$$

Damit haben wir die Argumente und Module aller Jacobi-Funktionen reell gemacht. Zwar müssen wir weiterhin mit komplexen Zahlen rechnen, jedoch ist das Ergebnis rein reell.

Aufwendiger Fall ($p > 0$)

Da die Wurzeln der kubischen Gleichung für $p > 0$ aus denen für $p < 0$, $D_1 > 0$ hervorgehen, indem lediglich die Funktionen ‘sinh’ und ‘cosh’ vertauscht werden — vgl. Gleichung (5.3.19b) und Gleichung (5.3.19c) — können wir die eben durchgeführte Rechnung sofort übertragen. Wir erhalten in diesem Fall

$$m^2 = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{i2\sqrt{3} \cosh \frac{\psi}{3}}{-3 \sinh \frac{\psi}{3} + i\sqrt{3} \cosh \frac{\psi}{3}}. \quad (5.3.34)$$

Der komplexe Modul lautet dann

$$m'^2 = 1 - m^2 = \frac{1 + i\chi}{1 - i\chi}, \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{\coth \frac{\psi}{3}}{\sqrt{3}}. \quad (5.3.35)$$

Die absteigende Landen-Transformation (5.3.26a) ist identisch. Die Variable w ändert sich entsprechend um in

$$w = \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \sqrt{3\rho \sinh \frac{\psi}{3}} \sqrt[4]{1 + \chi^2}. \quad (5.3.36)$$

Die Gleichungen (5.3.31) und (5.3.32) ändern sich nur durch vertauschen des Vorzeichens. So gilt hier das obere Vorzeichen steht für auslaufende ($\xi < \pi/2$), das untere für einlaufende ($\xi > \pi/2$) Geodäten. Ansonsten können wir die Rechnung von oben übernehmen.

Aufwendiger Fall ($p = 0$)

Im Fall $p = 0$ orientieren wir uns wieder am Vorgehen beim einfachen Fall ($p < 0$, $D_1 \leq 0$). Zunächst zerlegen wir die Jacobi-sn-Funktion aus Gleichung (5.3.6) mittels Additionstheoremen und führen dann die verschiedenen Transformationen durch. Die bisherige Variable u reduziert sich wieder auf $u = \frac{1}{2}\sqrt{x_2 - x_3}\varphi$ und mit Gleichung (5.3.21) gilt

$$\text{SN} = \frac{\text{sn}(u, m) \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2(x_i - x_3)}{(x_2 - x_3)(x_i - x_1)^2}} \pm \sqrt{\frac{x_i - x_2}{x_i - x_1}} \text{cn}(u, m) \text{dn}(u, m)}{1 - \frac{(x_1 - x_3)(x_i - x_2)}{(x_2 - x_3)(x_i - x_1)} \text{sn}^2(u, m)}. \quad (5.3.37)$$

Betrachten wir jetzt nur noch die Funktion $\text{sn}(u, m)$, so folgt für den Modul m , mit der gleichen Notation wie in den letzten beiden Fällen,

$$m^2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad m'^2 = \frac{1 + i\chi}{1 - i\chi} \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}. \quad (5.3.38)$$

Weiterhin ist mit $v = u/(1 - im_2)$ und $\zeta = \sqrt{1 + m_2^2} = 2/\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$$\zeta v = \zeta \frac{\sqrt{x_2 - x_3} \varphi}{2(1 - im_2)} = \frac{\varphi}{4\zeta} (-2q)^{1/6} \sqrt[4]{3} \left[\frac{2}{\zeta} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \frac{\zeta^2}{4} + i \left(-\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \frac{\zeta}{2} \right) \right] = \rho + i\sigma,$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß q sowohl positiv als auch negativ sein kann. Zusammen mit Gleichung (5.3.26a) und Gleichung (5.3.28) folgt

$$\text{sn}(u, m) = \frac{\zeta(1 - im_2) \text{sd}(\zeta v, m_3)}{\zeta^2 - im_2 \text{sd}^2(\zeta v, m_3)}. \quad (5.3.39)$$

Spalten wir ζv in Real- und Imaginärteil auf, so können wir die Jacobi-sd-Funktion mittels Additionstheoremen[1] durch

$$\text{sd}(\rho + i\sigma, m_3) = \frac{\text{sn}(\rho, m_3) \text{dn}(\sigma, m'_3) + i \text{cn}(\rho, m_3) \text{dn}(\rho, m_3) \text{sn}(\sigma, m'_3) \text{cn}(\sigma, m'_3)}{\text{dn}(\rho, m_3) \text{cn}(\sigma, m'_3) \text{dn}(\sigma, m'_3) - im_3^2 \text{sn}(\rho, m_3) \text{cn}(\rho, m_3) \text{sn}(\sigma, m'_3)}. \quad (5.3.40)$$

ersetzen, $m'_3 = 1/\zeta$.

5.3.4 Zeitverlauf

Neben der Bahngleichung können wir auch noch die Gleichung dt/dr für den Zeitverlauf integrieren. Wir wollen uns hier lediglich auf lichtartige Geodäten beschränken, welche nicht im Schwarzen Loch enden ($\xi_{\text{krit}} < \xi < \pi - \xi_{\text{krit}}$). Mit Gleichung (5.2.3a) und (5.2.3c) folgt sofort

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \frac{k}{c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{\frac{k^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{h^2}{r^2}}}$$

oder mit der schon oben verwendeten Transformation $x = r_s/r$,

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{r_s}{c x^2 (1-x) \sqrt{1 - (1-x) B^2 x^2}}, \quad B = \frac{hc}{kr_s} = \frac{r_i}{r_s} \frac{\sin \xi}{\sqrt{1 - r_s/r_i}}. \quad (5.3.41)$$

Die Möbius-Transformation

$$x = \frac{x_1 \zeta^2 - x_2}{\zeta^2 - 1} \quad \text{bzw.} \quad \zeta^2 = \frac{x - x_2}{x - x_1}$$

führt die Zeitverlaufsgleichung (5.3.41) über auf die Form

$$\frac{dt}{d\zeta} = \frac{2r_s(i)}{B\sqrt{x_2 - x_3}} \frac{R_4(\zeta)}{W(\zeta)} \quad (5.3.42)$$

mit

$$W(\zeta) = \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - m^2 \zeta^2)} \quad \text{und} \quad R_4(\zeta) = \frac{(\zeta^2 - 1)^3}{(x_1 \zeta^2 - x_2)^2 [(1 - x_1) \zeta^2 - (1 - x_2)]}.$$

Wir sind hier ähnlich wie bei der Bahngleichung (5.3.1) vorgegangen. Das kubische Polynom unter der Wurzel in Gleichung (5.3.41) führt wieder auf drei Wurzeln (5.3.19a) mit den Hilfsparametern

$$p = -\frac{1}{9}, \quad q = \frac{1}{2B^2} - \frac{1}{27} = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{27}, \quad \rho = \text{sign}(q) \frac{1}{9}, \quad \cos \psi = \frac{q}{\rho^3}.$$

Da wir uns auf lichtartige Geodäten mit einer Startrichtung ($\xi_{\text{krit}} < \xi < \pi - \xi_{\text{krit}}$) beschränken, ist $|q| \leq 1/27$ und daher $D_1 \leq 0$. Es genügt daher, die Wurzeln aus Gleichung (5.3.19a) zu verwenden. Das Modul m setzt sich dann genauso wie oben zusammen,

$$m^2 = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{3 \cos \frac{\psi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\psi}{3}}{3 \cos \frac{\psi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\psi}{3}}, \quad \text{mit} \quad 0 < m < 1. \quad (5.3.43)$$

Um auf Standardformen für elliptische Integrale zu kommen, führen wir eine Partialbruchzerlegung von $R_4(\zeta)$ durch:

$$R_4(\zeta) = C_1 + C_2 (\zeta^2 + \gamma_1)^{-1} + C_3 (\zeta^2 + \gamma_1)^{-1} + C_4 (\zeta^2 + \gamma_2)^{-1}, \quad (5.3.44)$$

wobei die Koeffizienten C_k und γ_l gegeben sind durch

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{(1-x_1)x_1^2}, & C_2 &= \frac{(x_1+2)(x_2-x_1)}{x_1^3}, \\ C_3 &= \frac{(x_2-x_1)^2}{x_1^4}, & C_4 &= \frac{x_1-x_2}{(x_1-1)^2}, \\ \gamma_1 &= -\frac{x_2}{x_1}, & \gamma_2 &= \frac{1-x_2}{x_1-1}. \end{aligned}$$

Das Integral der Zeitverlaufsgleichung (5.3.41) können wir damit sofort hinschreiben

$$\Delta t = \frac{2r_s(i)}{B\sqrt{x_2-x_3}} \left[C_1 I_0(\zeta) + C_2 J_1(\gamma_1, \zeta) + C_3 J_2(\gamma_1, \zeta) + C_4 J_1(\gamma_2, \zeta) \right] \Bigg|_{\zeta_i}^{\zeta_f}, \quad (5.3.45)$$

dabei steht $I_0(\zeta)$ für ein elliptisches Integral erster Art und $J_l(\gamma, \zeta)$ für ein elliptisches Integral dritter Art. Drücken wir diese durch die Standardintegrale (siehe Anhang §C.2) aus, so gilt

$$\begin{aligned} I_0(\zeta) &= \mathcal{F}(\zeta, m), \\ J_1(\gamma, \zeta) &= \frac{1}{\gamma} \Pi\left(\zeta, -\frac{1}{\gamma}, m\right), \\ J_2(\gamma, \zeta) &= \frac{1}{(1+\gamma)(1+m^2\gamma)} \left\{ \frac{\zeta \sqrt{(1-\zeta^2)(1-m^2\zeta^2)}}{2\gamma \zeta^2 + \gamma} - \frac{\mathcal{F}(\zeta, m)}{2} \left[m^2 + \frac{1}{\gamma} \right] + \frac{\mathcal{E}(\zeta, m)}{2\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \Pi\left(\zeta, -\frac{1}{\gamma}, m\right) \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{3m^2}{2} + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{m^2}{\gamma} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Allerdings ist ζ eine noch rein imaginäre Zahl. Mit $\zeta = i\sigma$, $y = \sin(\arctan(\sigma))$ und $\sigma = \sqrt{(x_2-x)/(x-x_1)}$ transformieren wir Gleichung (5.3.45) auf den, leider etwas unübersichtlichen, Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2r_s(i)}{B\sqrt{x_2-x_3}} \left\{ C_1 \mathcal{F}(y, m') - C_2 \frac{x_1}{x_2-x_1} \left[\mathcal{F}(y, m') - \frac{x_1}{x_2} \Pi\left(y, 1 - \frac{x_1}{x_2}, m'\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + C_4 \frac{x_1-1}{x_1-x_2} \left[\mathcal{F}(y, m') - \frac{1-x_1}{1-x_2} \Pi\left(y, \frac{x_1-x_2}{1-x_2}, m'\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_3}{\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)\left(1-m^2\frac{x_2}{x_1}\right)} \left[\frac{x_1\sigma \sqrt{(1+\sigma^2)(1+m^2\sigma^2)}}{2x_2 \sigma^2 + x_2/x_1} - \frac{m^2}{2} \mathcal{F}(y, m') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x_1}{2x_2} \left(\mathcal{E}(y, m') - \sigma \sqrt{1-m'^2 y^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x_2}{x_2-x_1} \left(\mathcal{F}(y, m') - \frac{x_1}{x_2} \Pi\left(y, 1 - \frac{x_1}{x_2}, m'\right) \right) \left(-\frac{x_1}{x_2} + \frac{3m^2}{2} + \frac{x_1^2}{2x_2^2} - \frac{m^2 x_1}{x_2} \right) \right] \right\} \Bigg|_{\zeta_i}^{\zeta_f} \\ &= \mathcal{Z}(r_s, r_i, \xi, \zeta) \Bigg|_{\zeta_i}^{\zeta_f} \end{aligned} \quad (5.3.46)$$

mit $\zeta_{i,f} = i\sigma_{i,f} = \sqrt{(x_2 - x_{i,f})/(x_{i,f} - x_1)}$. Falls $|(x_1 - x_2)/(1 - x_2)| > 1.0$ wird, müssen wir die Wurzeln x_2 und x_3 vertauschen, da sonst das elliptische Integral dritter Art nochmals transformiert werden müßte.

Durchläuft die Geodäte ihre minimale Annäherung $x_{\min} = r_s/r_{\min}$ (Gl.(5.2.27)), so müssen wir das Integral (5.3.46) aufspalten in

$$\Delta t = -\mathcal{Z}(r_s, r_i, \xi, \zeta) \Big|_0^{\zeta_i} + 2\mathcal{Z}(r_s, r_i, \xi, \zeta) \Big|_0^{\zeta_{\min}} - \mathcal{Z}(r_s, r_i, \xi, \zeta) \Big|_0^{\zeta_f}. \quad (5.3.47)$$

5.4 Anwendungen der analytischen Lösung

Mit der Lichtablenkung am Sonnenrand wurde Einstein im Jahr 1919 auf einen Schlag berühmt. Aus seiner Allgemeinen Relativitätstheorie leitete er einen Wert von etwa $1.75''$ ab, den zwei Expeditionen — eine in Sobral, die andere in Principe — auch verhältnismässig gut bestätigten (Will [114], Dyson et al [22]). Mit einem elliptischen Integral können wir die Lichtablenkung in Abschnitt §5.4.1 leicht herleiten.

Mit der analytischen Lösung der Geodätengleichung ist es uns jetzt möglich, zwei nahezu beliebige Punkte der Schwarzschild-Raumzeit mit einer Nullgeodäten zu verbinden. Dabei können wir auch die Anzahl Umläufe um ein Schwarzes Loch berücksichtigen. Dieses Hilfsmittel wollen wir in den nächsten beiden Unterabschnitten nutzen.

Shapiro schlug 1964 einen Test zur Überprüfung der Allgemeinen Relativitätstheorie vor[94]. Dieser sollte die Zeitverzögerung eines Lichtsignals zwischen Erde und einem Planeten messen, welcher in der Nähe der Sonne vorbeiläuft. Im Jahr 2002 konnte die Allgemeine Relativitätstheorie mit Hilfe des Shapiro-Effekts und der Raumsonde Cassini auf $\gamma = 1 + (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$ genau bestätigt werden [6].⁶ In Abschnitt §5.4.3 wollen wir uns diese Zeitverzögerung etwas genauer anschauen.

Schließlich stellen wir in Abschnitt §5.4.4 eine Möglichkeit vor, die Entfernung zu einem Schwarzen Loch mittels Radar oder einem Lichtsignal zu bestimmen.

5.4.1 Lichtablenkung

Betrachten wir die Ablenkung $\Delta\Phi$ eines Lichtstrahls, welcher aus dem Unendlichen ($x = 0$) kommt, am Ort $x = x_{\min}$ seine größte Annäherung an das Schwarze Loch hat, und anschließend beim Beobachter am Ort x_i eintrifft (siehe Abb. 5.9). Die größte Annäherung x_{\min} muß natürlich außerhalb des Photonenorbits $r = \frac{3}{2}r_s$ liegen. Daher gilt stets

$$x_{\min} < \frac{2}{3}.$$

Mit dem Parameter a aus Gleichung (5.3.11) können wir den Eintreffwinkel ξ beim Beobachter berechnen. Dazu bestimmen wir zunächst das Verhältnis $\epsilon = h/k$ für $x = x_{\min}$ aus dem effektiven Potential (Gl.(5.2.26)). So folgt für den Parameter a

$$a^2 = x_i^2 \frac{1 - x_i}{\sin^2 \xi} \stackrel{!}{=} x_{\min}^2 (1 - x_{\min}),$$

woraus wir den Eintreffwinkel ξ ermitteln können. Aus Gleichung (5.3.5) ergibt sich auch sogleich der zum Wert x_{\min} gehörige Winkel φ_{\min}

$$\varphi_{\min} = \frac{2}{\sqrt{x_2 - x_3}} \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}, m \right) \Big|_{x_i}^{x_{\min}}. \quad (5.4.1)$$

Die Ablenkung $\Delta\Phi$ ergibt sich nun aus

$$\Delta\Phi = \frac{2}{\sqrt{x_2 - x_3}} \mathcal{F} \left(\sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}, m \right) \Big|_0^{x_{\min}} + \varphi_{\min}. \quad (5.4.2)$$

Die tatsächliche Ablenkung $\delta\Phi$ ist dann

$$\delta\Phi = \Delta\Phi + \xi - \pi. \quad (5.4.3)$$

⁶Ein Wert von $\gamma = 1$ entspricht der Allgemeinen Relativitätstheorie, wohingegen in der Newtonschen Gravitationstheorie $\gamma = 0$ ist. Nähere Informationen zur Cassini-Huygens-Mission findet man auf <http://www.esa.int/SPECIALS/Cassini-Huygens/index.html>.

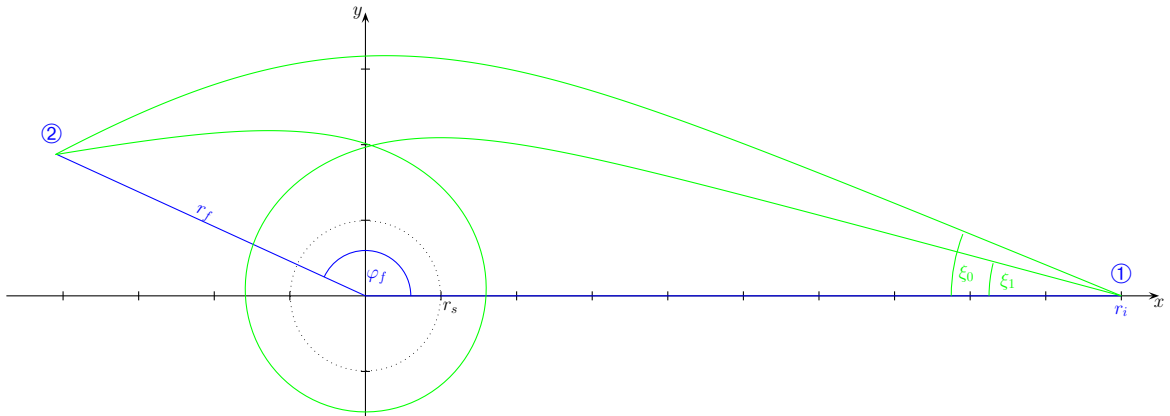


Abbildung 5.10: Nullgeodäten (grün) verbinden die beiden Punkte ① (r_i, φ_i) und ② (r_f, φ_f) . Die grünen Linien stellen jedoch nur die raumartigen Projektionen der Nullgeodäten dar. Der Winkel φ_f geht für die zweite Geodäte in den Winkel $\varphi_f + 2\pi$ über.

Für das Brent-Verfahren müssen wir die beiden Grenzen ξ_{\min} und ξ_{\max} des Suchintervalls angeben. Diese müssen so gesteckt sein, daß genau eine Nullstelle innerhalb des Intervalls liegt. Die untere Grenze ergibt sich aus der Überlegung, daß der Winkel φ_f gerade noch von der Geodäten erreicht werden kann. Der zugehörige Startwinkel ξ_∞ , für den $\varphi_f \stackrel{!}{=} \varphi_\infty$ gelten soll, ergibt sich aus Gleichung (5.3.23) ebenfalls mit dem Brent-Dekker-Verfahren. Da Gleichung (5.3.23) in Bezug auf ξ im Intervall $(\xi_{\text{krit}}, \pi - \xi_{\text{krit}})$ streng monoton ist, ist ξ_∞ eindeutig. Die obere Grenze erhalten wir durch den Startwinkel $\xi_{n2\pi}$, der so definiert ist, daß die Geodäte genau n -mal um das Schwarze Loch läuft und schließlich wieder am Ausgangsort (r_i, φ_i) ankommt.⁹

Nehmen wir Abbildung 5.10 als Beispiel zur Hand, so hat der Punkt ① die Koordinaten $(r_i = 10, \varphi_i = 0)$ und der Punkt ② die Koordinaten $(r_f = 9.0185, \varphi_f = 2.7143 + n \cdot 2\pi)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Grenzen der Suchintervalle für die obere ($n = 0$) und die untere ($n = 1$) Geodäte und der eigentliche Startwinkel ξ_n lauten dann

$$\begin{aligned} \xi_{\min}(0) = \xi_\infty(0) &\approx 2.17068, & \xi_{\max}(0) = \xi_{n2\pi}(0) &\approx 2.65301, & \xi_0 &\approx 2.47651, \\ \xi_{\min}(1) = \xi_\infty(1) &\approx 2.65764, & \xi_{\max}(1) = \xi_{n2\pi}(1) &\approx 2.65823, & \xi_1 &\approx 2.65791. \end{aligned}$$

Aus numerischer Sicht können wir auch noch die Nullgeodäte bestimmen, welche zweimal um das Schwarze Loch rumläuft und erst dann den Punkt ② erreicht; ihr Startwinkel beträgt $\xi_2 \approx 2.65823$. Allerdings ist hier das Suchintervall nur noch $\xi_{\max} - \xi_{\min} \approx 1.0939 \cdot 10^{-6}$ klein und die Ansprüche an die Genauigkeit der Rechnung steigen immens. Aus Beobachtersicht liegen die Bilder von Punkt ② $\xi_1 - \xi_0 \approx 10^\circ 23' 36''$ bzw. $\xi_2 - \xi_1 \approx 1' 6''$ auseinander. Die Bilder 3 und 4 trennen schließlich nur noch $\xi_3 - \xi_2 \approx 0.123''$.

5.4.3 Shapiro-Effekt

Wir wollen hier die genaue Zeitverzögerung eines Lichtsignals zwischen zwei statischen Punkten ① und ② an den Orten (r_i, φ_i) und (r_f, φ_f) in der Schwarzschild-Raumzeit bestimmen. Das Lichtsignal soll dabei in der Nähe der Zentralmasse — auf direktem Wege — vorbeilaufen (siehe Abb. 5.10, obere Geodäte). Vergleichen werden wir dann die Koordinatenzeit Δt , welche der Lichtstrahl tatsächlich zwischen den beiden Punkten benötigt, mit der Laufzeit, die wir aus der Entfernungsbestimmung erhalten. Die Entfernung zwischen den Punkten ① und ② beschreiben wir einerseits durch die Eigenlänge Δl einer raumartigen Kurve, welche der räumlichen Projektion der eigentlichen Nullgeodäten auf eine $t = \text{const}$ -Hyperfläche entspricht und andererseits durch den euklidischen Koordinatenabstand $\Delta \tilde{l}$. Die Koordinatenzeit Δt können wir unmittelbar aus Gleichung (5.3.46) bestimmen.

Zunächst müssen wir die Nullgeodäte zwischen den beiden Punkten bestimmen, wie wir es im vorherigen Abschnitt beschrieben haben. Allerdings beschränken wir uns hier auf die direkte Geodäte ($n = 0$).

⁹Im Abschnitt §5.4.4 wird der Winkel $\xi_{n2\pi}$ unter der Bezeichnung ξ_{ring} noch näher beleuchtet.

Zum Vergleich berechnen wir zunächst die Eigenlänge Δl zwischen den beiden Punkten. Aus der Metrik (5.1.1) lesen wir sofort das Differential dl für die Eigenlänge ab. Verwenden wir noch die Beziehungen (5.2.3b) und (5.2.3c) und ersetzen damit $dr = \dot{r}/\dot{\varphi} d\varphi$, dann erhalten wir

$$dl = \sqrt{\frac{dr^2}{1 - r_s/r} + r^2 d\varphi^2} = \frac{x_i^2 \sqrt{1 - x_i}}{\sin \xi} \frac{d\varphi}{x^2 \sqrt{1 - x}} \quad \text{mit} \quad x = \frac{r_s}{r}. \quad (5.4.5)$$

Den euklidischen Abstand $\Delta \tilde{l}$ beider Punkte können wir einfach aus dem Abstand zweier infinitesimal benachbarter Punkte in sphärischen Koordinaten, $d\tilde{l} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$, berechnen. So folgt für die Geodäte, wieder durch Ersetzen mit $dr = \dot{r}/\dot{\varphi} d\varphi$,

$$d\tilde{l} = r_s \sqrt{\frac{x_i^2 (1 - x_i)}{\sin^2 \xi} \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}} d\varphi. \quad (5.4.6)$$

In beiden Fällen wird die Geodäte durch ihre Bahngleichung (5.3.6), $x = x(\varphi)$, beschrieben. Die Integrale wollen wir jedoch nicht explizit ausführen sondern nur numerisch berechnen. Im Anschluß daran können wir die Zeitverzögerung bezüglich Eigenlänge (ΔT_{eigen}) beziehungsweise euklidischem Abstand (ΔT_{euklid}) sofort hinschreiben,

$$\Delta T_{\text{eigen}} = \Delta t - \frac{\Delta l}{c} \quad \text{und} \quad \Delta T_{\text{euklid}} = \Delta t - \frac{\Delta \tilde{l}}{c}. \quad (5.4.7)$$

Als Beispiel soll dieses Mal ein Schwarzes Loch der Masse $M = 30M_{\odot}$ und dem Schwarzschildradius $r_s = 8.86269 \cdot 10^4 \text{ m}$ erhalten. Die Lichtquelle liege bei ($r_f = 12.0 \text{ ls}$, $\varphi_f = 3.201$) und der Beobachter befinde sich am Ort ($r_i = 10.0 \text{ ls}$, $\varphi_i = 0$). Die dimensionslosen Größen lauten demnach

$$x_i = 2.95628 \cdot 10^{-5} \quad \text{und} \quad x_f = 2.46356 \cdot 10^{-5}.$$

In geometrischen Einheiten haben wir folgende Parameter

$$\bar{M} = 44313.5 \text{ m}, \quad \bar{r}_i = 2.997923 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad \bar{r}_f = 3.597517 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Die Nullgeodäte, welche diese beiden Punkte verbindet, hat einen Startwinkel $\xi \approx 3.1405679$ und eine geringste Distanz zum Schwarzen Loch von $r_{\text{min}} \approx 34.15r_s$. Für die Strecke zwischen beiden Punkten benötigt sie, in Koordinatenzeit gemessen, $\Delta t = 22.004892 \text{ s}$. Aus der Eigenlänge beziehungsweise dem euklidischen Abstand zwischen den beiden Punkten, errechnen wir die Zeitdifferenzen

$$\Delta T_{\text{eigen}} \approx 2.294 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad \text{und} \quad \Delta T_{\text{euklid}} \approx 4.273 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Der Shapiro-Effekt macht in diesem Fall nur eine Zeitdifferenz von wenigen Millisekunden aus. Am Sonnenrand ist der Unterschied sogar noch geringer. So maß man mit Hilfe der Viking-Raumsonde im Jahr 1979 eine Zeitdifferenz von lediglich 250 Mikrosekunden [81]. Bei massiven Schwarzen Löchern kann die Zeitverzögerung durchaus im Bereich von Stunden oder Tagen liegen[10].

5.4.4 Entfernungsbestimmung

Stellen wir uns vor, ein statisches Schwarzes Loch befände sich in unserer Umgebung. Wie könnten wir seine relative Position, seine Masse und seine Entfernung zu uns bestimmen?

Am sichersten wäre es, wir würden einen sphärisch symmetrischen Lichtblitz starten und abwarten, in welcher Richtung, nach welcher Eigenzeit $\Delta\tau$ und mit welchem Öffnungswinkel $2\xi_{\text{ring}}$ wir einen Einsteinring beobachten könnten. Legen wir die Richtung zum Zentrum des Einsteinrings entlang der negativen x -Richtung, so haben wir eine Situation wie in Abbildung \ 5.11 gezeigt.

Der Lichtblitz durchwandert nun die Raumzeit so, daß ein Lichtstrahl (grüne Linie in Abb. \ 5.11) genau nach einem Umlauf um das Schwarze Loch wieder beim Beobachter eintrifft¹⁰. Lichtstrahlen, die mehrfach um das

¹⁰Wir gehen hier davon aus, daß wir noch ausreichend weit ($r > \frac{3}{2}r_s$) vom Schwarzen Loch entfernt sind.

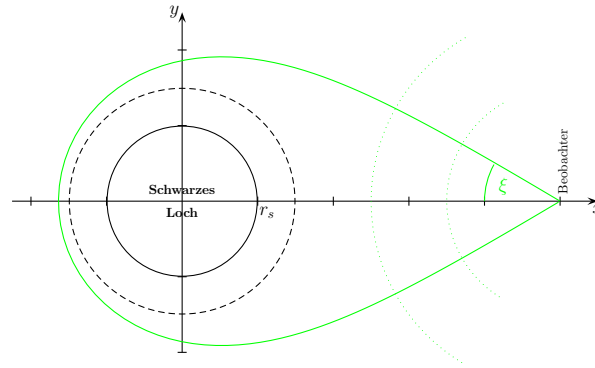


Abbildung 5.11: Ein Beobachter schicke einen Kugelblitz los, angedeutet durch die beiden gestrichelten Kreis-ausschnitte. Aus dem Winkel ξ_{ring} des Einsteinrings, den er nach einer gewissen Zeit aufblitzen sieht, kann er das Verhältnis Masse/Entfernung berechnen. Der gestrichelte Kreis entspricht dem Photonenorbit bei $r = \frac{3}{2}r_s$.

Schwarze Loch umlaufen, und daher auch länger brauchen bis sie wieder beim Beobachter ankommen, wollen wir hier nicht berücksichtigen.

In einem ersten Schritt können wir das Verhältnis „Masse des Schwarzen Lochs zur Entfernung“, $\mathcal{Y} = M/r_i$, bestimmen¹¹. Hierfür verwenden wir Gleichung (5.3.5) und die Wurzeln aus (5.3.19a), jedoch in anderer Reihenfolge,

$$x_1 = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\psi}{3}\right) + \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\psi}{3}\right) + \frac{1}{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\psi}{3}\right) + \frac{1}{3}.$$

Die Hilfsvariable ψ aus (5.3.18a) ist dann, wie auch die Wurzeln, eine Funktion von \mathcal{Y} ,

$$\psi(\mathcal{Y}) = \arccos\left(\frac{54\mathcal{Y}^2(1-2\mathcal{Y})}{\sin^2(\xi_{ring})} - 1.0\right).$$

Der Lichtstrahl in Abbildung 5.11 hat genau dann seine größte Annäherung r_{min} an das Schwarze Loch, wenn er sich genau diametral vom Beobachter aus befindet, also für $\varphi = \pi$. Gleichung (5.3.5) stellt nun eine implizite Gleichung für das Verhältnis \mathcal{Y} dar. Die Grenzen $x_{i,f}$ lauten dabei

$$x_i = \frac{r_s}{r_i} = \frac{2M}{r_i} = 2\mathcal{Y} \quad \text{und} \quad x_f = \frac{r_s}{r_{min}}.$$

Da $x_2 = x_f$ ist, vereinfacht sich die implizite Gleichung auf

$$\frac{2}{\sqrt{x_2(\mathcal{Y}) - x_3(\mathcal{Y})}} \mathcal{F}\left(\frac{2\mathcal{Y} - x_2(\mathcal{Y})}{2\mathcal{Y} - x_1(\mathcal{Y})}, m(\mathcal{Y})\right) = \pi. \quad (5.4.8)$$

Das Suchintervall für \mathcal{Y} wird durch folgende Überlegungen eingeschränkt. Da sich der Beobachter außerhalb von $r = \frac{3}{2}r_s = 3M$ befinden muß, kann \mathcal{Y} nur im Intervall $(0, 1/3)$ liegen. Weiterhin darf der Strahl nicht ins Schwarze Loch laufen. Der kritische Fall, für den der Strahl gerade noch nicht ins Schwarze Loch läuft, tritt ein, wenn wir $\xi_{ring} = \xi_{krit}$ in Gleichung (5.3.12) setzen. Die daraus resultierende kubische Gleichung liefert uns den Maximalwert \mathcal{Y}_{krit} für unseren gesuchten Wert \mathcal{Y} . Die einzig sinnvolle Wurzel der drei reellen Lösungen ist

$$\mathcal{Y}_{krit} = \frac{1}{3} \cos\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\arccos(2 \sin^2 \xi_{ring} - 1)}{3}\right] + \frac{1}{6}, \quad (5.4.9)$$

¹¹Für den Rest dieses Unterabschnitts verwenden wir geometrische Einheiten ($G = c = 1$).

wodurch sich das Suchintervall auf $(0, \mathcal{Y}_{\text{krit}})$ einschränkt.

Nachdem wir \mathcal{Y} bestimmt haben, können wir im zweiten Schritt die Koordinatenzeit Δt berechnen, die der gemessenen Eigenzeit $\Delta\tau$ entspricht, zu der wir den Einsteinring beobachten. So folgt aus der Metrik (5.1.1) für den Zusammenhang zwischen Koordinaten- und Eigenzeit,

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - 2\mathcal{Y}}}. \quad (5.4.10)$$

In der Zeitverlaufsgleichung (5.3.46) ersetzen wir nun die Masse M des Schwarzen Lochs durch $M = \mathcal{Y}r_i$ und erhalten so eine implizite Gleichung allein für den Abstand r_i . Aus diesem können wir im Anschluß auch die Masse M berechnen.

Um ein Gefühl für die Größenordnungen zu bekommen, die hier im Spiel sind, wollen wir uns folgendes Zahlenbeispiel vor Augen führen. Angenommen wir befänden uns in einem Abstand¹² von etwa $r_i = 132.4 \text{ ls}$ zum Galaktischen Zentrum mit der Masse $M \approx 3 \cdot 10^6 M_{\odot}$. Dann würden wir den Lichtblitz nach etwa 649.8s (Eigenzeit) unter einem Öffnungswinkel von $2\xi_{\text{ring}} = 62^\circ$ sehen.

5.5 Interaktive Visualisierung

Liegt eine einfache, symmetrische Szenerie (Abb. 5.12) vor, so können wir mittels der analytischen Lösung der Nullgeodäten aus Abschnitt 5.3 eine schnelle Bildberechnung vornehmen. Der Vorteil hierbei ist, daß wir interaktiv die verschiedenen Parameter einstellen können, was die bisherige Strategie — von im voraus berechneten Tabellen — nicht bewerkstelligt.

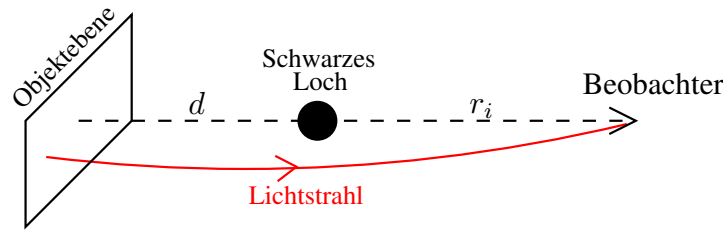


Abbildung 5.12: Ein Beobachter schaue senkrecht auf eine Objektebene. Zwischen ihm und dieser Ebene befindet sich ein Schwarzes Loch, welches einen Abstand d von der Ebene und einen Abstand r_i zum Beobachter hat. Die Verbindungsgerade Beobachter – Schwarzes Loch – Objektebene nennen wir Beobachtungsachse.

Das Ziel ist es nun, eine interaktive Software zu erstellen, die es ermöglicht, ein „Objekt“-Bild auf der Objektebene anzuheften und es durch das Schwarze Loch zu verzerren. Dabei sollen sowohl die Masse m des Schwarzen Lochs, wie auch die Entfernungen d der Objektebene zum Schwarzen Loch und die Entfernung r_i des Beobachters zum Schwarzen Loch variabel einstellbar sein. Das gleiche gilt auch für die Position und Größe des „Objekt“-Bildes auf der Objektebene, welches wiederum selbst kein statisches Bild zu sein braucht, sondern durchaus auch ein Videosignal sein kann.

Die Herausforderung besteht nun darin, die notwendigen Lichtstrahlen nach einer Änderung eines Parameters so schnell wie möglich zu berechnen. Aufgrund der sehr einfachen Szenerie und der Symmetrie der Schwarzschild-Raumzeit genügt es, Nullgeodäten in der Äquatorebene ($\vartheta = \pi/2$) zu berechnen und auf die anderen Richtungen zu projizieren. Im Detail berechnen wir die Auftreffpunkte aller Nullgeodäten, die einen Winkel $0 \leq \tau \leq \tau_{\text{max}}$ einnehmen, wobei τ_{max} sich aus dem halben Öffnungswinkel der Bilddiagonalen ergibt. Den Schnittpunkt einer Startrichtung, die aus der Äquatorebene herausführt, erhalten wir durch Drehung der zugehörigen Startrichtung innerhalb der Äquatorebene um die Beobachtungsachse mit dem Winkel ω (siehe Abb. 5.12 und 5.13).

¹²Der Abstand ist in Einheiten von 1 Lichtsekunde (ls), also der Strecke, die das Licht innerhalb einer Sekunde durchläuft, gegeben.

5.5.1 Vom Pixel zur Startrichtung

Sei zunächst eine Kamera mit dem Blickfeld (fov_x, fov_y) und einer Auflösung (res_x, res_y) gegeben. Aus den Pixelkoordinaten (x, y) können wir dann normierte Bildkoordinaten (s_x, s_y) bestimmen (siehe auch Abb. 5.13):

$$s_x = (x + 0.5)/res_x \quad \text{und} \quad s_y = (y + 0.5)/res_y. \quad (5.5.1)$$

Aus der Bildkoordinate (s_x, s_y) folgt die Startrichtung \vec{d} der Nullgeodäten, die bis zur Objektebene zurückverfolgt werden soll,

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ (2s_x - 1) \tan \frac{fov_x}{2} \\ (1 - 2s_y) \tan \frac{fov_y}{2} \end{pmatrix} \quad (5.5.2)$$

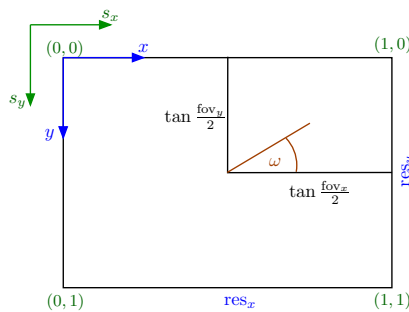


Abbildung 5.13: Die Kamera habe ein Blickfeld von (fov_x, fov_y) und eine Auflösung (res_x, res_y) . Ein Bildpunkt kann entweder durch seine Pixelkoordinaten (x, y) oder durch die normierten Koordinaten (s_x, s_y) angegeben werden. Liegt ein Pixel nicht in der Äquatorebene, so kann er jedoch durch Drehung um den Winkel ω dahin überführt werden.

Der Winkel τ zwischen der Startrichtung \vec{d} und der Radialrichtung $\vec{r} = (-1, 0, 0)^T$ zum Schwarzen Loch erhalten wir eindeutig aus dem Kosinus-Satz:

$$\cos \tau = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{\|\vec{d}\| \|\vec{r}\|} \Rightarrow \tau = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + (2s_x - 1)^2 \tan^2 \frac{fov_x}{2} + (1 - 2s_y)^2 \tan^2 \frac{fov_y}{2}}}. \quad (5.5.3)$$

Diesen Startwinkel τ verwenden wir im nächsten Abschnitt zur Berechnung des Auftreffpunkts P auf der Objektebene (siehe Abb. 5.14). Der wahre Auftreffpunkt Q für einen Bildpunkt (s_x, s_y) ergibt sich aus Drehung des Schnittpunkts P . Dabei ist $Q = (\xi_P \cos \omega, \xi_P \sin \omega)$ mit

$$\tan \omega = \frac{(1 - 2s_y) \tan \frac{fov_y}{2}}{(2s_x - 1) \tan \frac{fov_x}{2}}.$$

5.5.2 Von der Startrichtung zum Schnittpunkt

Den Schnittpunkt P der Nullgeodäten mit der Startrichtung τ aus Abbildung 5.14 können wir mittels Gleichung (5.3.21) bestimmen. Dabei gilt $x_P = r_s/r_P$ und $d/r_P = \cos(\pi - \Phi_P)$, was uns auf eine implizite Gleichung für Φ_P führt. Aus Φ_P können wir dann sofort ξ_P ermitteln (siehe Abb. 5.14).

Stellen wir die implizite Gleichung

$$\frac{x_2 - x_1 \text{SN}^2(\Phi_P)}{1 - \text{SN}^2(\Phi_P)} + \frac{r_s}{d} \cos \Phi_P = 0, \quad (5.5.4)$$

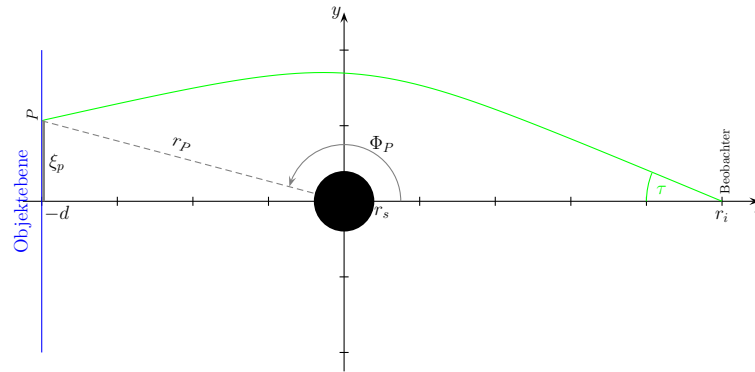


Abbildung 5.14: Ein Lichtstrahl, der beim Beobachter unter dem Winkel τ ankommt, hat die Objektebene im Punkt P verlassen. Andersrum betrachtet kann das Licht von P auch einen anderen Weg zum Beobachter nehmen.

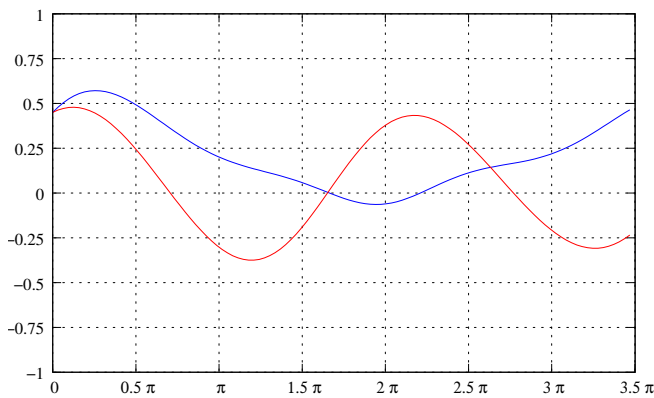


Abbildung 5.15: Gleichung (5.5.4) als Funktion des gesuchten Schnittwinkels Φ_P für die Parameter $m = 1$, $r_i = 10$ und $d = 8$. Die **blaue Kurve** entspricht dem Startwinkel $\tau = 28^\circ$, die **rote Kurve** dem Startwinkel $\tau = 50^\circ$. Nullstellen, die im Intervall $(0.5\pi, 1.5\pi)$ oder $(2.5\pi, 3.5\pi)$ auftreten, sind Schnittpunkte mit der Objektebene.

— wobei wir wieder SN als Stellvertreter wie in Gleichung (5.3.21) verwenden — als Graph dar (Abb. 5.15), so sehen wir sofort, daß es mehrere Nullstellen gibt. Im Intervall $(0.5\pi, 1.5\pi)$ entsprechen diesen Nullstellen Schnittpunkte der Nullgeodäten, welche auf direktestem Wege zur Objektebene gelangen. Umrunden die Nullgeodäten zunächst das Schwarze Loch und treffen dann auf die Objektebene, so liegen die Nullstellen im Intervall $(2.5\pi, 3.5\pi)$. Diese Nullgeodäten laufen sehr dicht am Photonorbit $r = \frac{3}{2}r_s$ vorbei; sie kennzeichnen damit den sichtbaren Rand des Schwarzen Lochs. Bei den Nullstellen ist nur die erste gültig, die in einem der Intervalle auftritt; die anderen Nullstellen sind irrelevant. Da jedoch teilweise zwei Nullstellen je Intervall auftreten — wie wir uns leicht an der Abbildung 5.14 veranschaulichen können —, müssen wir bei der Nullstellensuche die Intervalle halbieren. Dann läßt sich aber eine einfache Brent-Methode [11] zur Nullstellenbestimmung anwenden.

5.5.3 Bildentstehung

Aus den Schnittpunkten der Nullgeodäten mit der Objektebene innerhalb der Äquatorebene können wir nun sämtliche Schnittpunkte durch oben beschriebene Drehung um die Beobachtersache berechnen. Wir erhalten so schließlich eine Pixelzuordnungstabelle, die jedem Pixel der Bildebene ein Pixel auf der Objektebene zuordnet. Eine Verschiebung oder Verzerrung des Objektbildes innerhalb der Objektebene kann damit sofort auf die Bildebene übertragen werden. Ändern wir einen der Parameter m , d , r_i , $\text{fov}_{x,y}$ oder $\text{res}_{x,y}$, so müssen wir jedoch die Zuordnungstabelle neu berechnen. Die dafür benötigte Rechenzeit hängt aber allein von der Auflösung der

Bildebene ab.

Die hier beschriebene interaktive Visualisierung ist im Programm *BHFastView* umgesetzt, welches durch ein kleines GUI gesteuert werden kann. Die Steuerung und Implementierung ist im Abschnitt §D.4 (Anhang) näher erläutert.

5.6 Simulation einer Strahlungsquelle um Sagittarius A*

Das Zentrum unserer Milchstraße beinhaltet eine Massenkonzentration von etwa $3.6 \times 10^6 M_\odot$. Lange war unklar, ob die Masse durch einzelne Sterne oder durch ein supermassives Schwarzes Loch zustande kommt. Um dies entscheiden zu können, versucht man, die Umlaufbahnen von Sternen in der Nähe der Massenkonzentration zu bestimmen [39, 87, 40]. Je näher die Umlaufbahn ist, desto kleiner ist der Raumbereich, in dem sich die Masse konzentriert. Die heutige Beobachtungstechnik ermöglicht es, Sterne, welche sich sehr nahe um das galaktische Zentrum bewegen, zu untersuchen. Aus diesen Beobachtungen heraus konnte man bisher alle bekannten Formen von Sternen ausschließen. Es muß sich demnach mit hoher Sicherheit um ein Schwarzes Loch handeln. Dabei vermutet man, daß SgrA*, eine punktartige Quelle im Radio-, Röntgen- und nahen Infrarot-Bereich, womöglich dieses Schwarze Loch ist.

In diesem Abschnitt wollen wir zwei stark vereinfachte Modelle betrachten, die Rückschlüsse auf die beobachteten Strahlungsausbrüche im nahen Infrarot [38] ermöglichen sollen.

5.6.1 Einzelne kugelförmige Quelle der Strahlung

Wir wollen hier ein stark vereinfachtes Modell betrachten, bei dem lediglich ein strahlender, nicht-rotierender Stern auf dem letzten stabilen Orbit um ein statisches Schwarzes Loch der Masse M kreist. Gezeitenkräfte, welche vom Schwarzen Loch auf den Stern wirken, sowie die Rückwirkung der Sternmasse auf die Raumzeit wollen wir vernachlässigen.

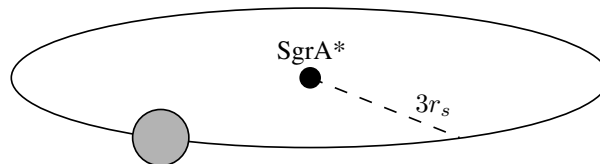


Abbildung 5.16: Strahlender Stern mit dem Radius r_{star} umkreist das galaktische Zentrum (SgrA*) — ein Schwarzes Loch der Masse M — auf dem letzten stabilen Orbit ($r_{\text{iso}} = 3r_s$).

Als Parameter dieses Modells nehmen wir die Werte aus Tabelle □5.2 an.

Masse des Schwarzen Lochs	M	$3.6 \cdot 10^6 M_\odot$
Schwarzschildradius	$r_s = \frac{2GM}{c^2}$	$1.064 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 0.071 \text{ AU} \approx 35.48 \text{ ls}$
Radius des Sterns	$r_{\text{star}} = 0.25r_s$	$2.66 \cdot 10^9 \text{ m}$
Letzter stabiler Orbit	$r_{\text{iso}} = 3r_s$	$3.19 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 106.4 \text{ ls}$
Umlaufdauer (Eigenzeit)	$\tau_{2\pi} = \frac{2\pi}{\omega_\varphi}$	$1158 \text{ s} \approx 19.3 \text{ min}$
Umlaufdauer (Koordinatenzeit)	$T_{2\pi} = \frac{2\pi}{\Omega_\varphi}$	$1638 \text{ s} \approx 27.3 \text{ min}$

Tabelle 5.2: Modell-Parameter

Der Radius des Sterns bezieht sich auf dessen lokale Ruhetetrade. Da sich der Stern auf dem letzten stabilen Orbit mit halber Lichtgeschwindigkeit bewegt, erwarten wir, daß ruhende Beobachter am jeweiligen momentanen Ort des Sterns eine Verzerrung des Sterns messen.

Bahn des Sterns

Zunächst betrachten wir die Bahn des Sterns, den wir in einer lokalen Tetrade $\{\mathbf{e}_i^* = e_i^{\mu} \partial_{\mu}\}$ fixieren. Diese Tetrade folge dem letzten stabilen Orbit mit dem Radius $r = 3r_s$, der Winkelgeschwindigkeit ω und der Vierergeschwindigkeit $\mathbf{u} = c\gamma(\mathbf{e}_t + \beta\mathbf{e}_{\varphi})$ (vgl. Abschnitt §5.2.3). Da sich die Tetrade auf einer zeitartigen Geodäten bewegt, wird sie parallel-transportiert. Ihre Komponenten e_i^{μ} müssen also der Gleichung (2.7.11) für den Parallel-Transport,

$$\mathbb{P}e_i^{\mu} = 0, \quad (5.6.1)$$

genügen. Integrieren wir dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen für jeden Basisvektor e_i^{μ} , so erhalten wir folgende Bewegungsgleichungen¹³,

$$e_i^0(\tau) = k_1 + k_2 \cos(\nu\tau) + k_3 \sin(\nu\tau) \quad (5.6.2a)$$

$$e_i^1(\tau) = \frac{2c^2}{9\omega r_s} \left[k_2 \sin(\nu\tau) - k_3 \cos(\nu\tau) \right], \quad (5.6.2b)$$

$$e_i^2(\tau) = k_4, \quad (5.6.2c)$$

$$e_i^3(\tau) = k_1 \frac{\omega}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{27} \frac{c^2}{\omega r_s^2} \left[k_2 \cos(\nu\tau) + k_3 \sin(\nu\tau) \right], \quad (5.6.2d)$$

mit $\nu = \omega/\sqrt{2}$ und $\omega^2 = c^2/(27r_s^2)$. Die Integrationskonstanten k_j erhalten wir aus den Startwerten $e_i^{\mu}(\tau = 0) = E_i^{\mu}$,

$$k_1 = \frac{4}{3}E_i^0 - \frac{9\sqrt{2}\omega r_s^2}{c^2}E_i^3, \quad k_2 = \frac{9\omega r_s^2}{c^2} \left(\sqrt{2}E_i^3 - \omega E_i^0 \right), \quad k_3 = -\frac{9\omega r_s}{2c^2}E_i^1, \quad k_4 = E_i^2. \quad (5.6.3)$$

Sei nun die lokale Tetrade $\{\mathbf{e}_i^*\}$ des Sterns zur Eigenzeit $\tau = 0$ an die natürliche lokale Tetrade am Ort P_{star} , ($t_{\text{star}} = 0, r_{\text{star}} = 3r_s, \vartheta_{\text{star}} = \pi/2, \varphi_{\text{star}} = 0$), angepaßt (siehe Abb. 5.17). Dabei müssen wir noch zusätzlich berücksichtigen, daß $\{\mathbf{e}_i^*\}$ keine Ruhetetrade ist, sondern sich mit halber Lichtgeschwindigkeit auf seiner Bahn bewegt. Es muß demnach $\mathbf{e}_t^*(\tau = 0) = \frac{1}{c}\mathbf{u}$ sein, woraus wir für die Startwerte (-tetrade) in Koordinatendarstellung mit $\mathbf{e}_r^*(\tau = 0) = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_{\vartheta}^*(\tau = 0) = \mathbf{e}_{\vartheta}$ und $\mathbf{e}_{\varphi}^*(\tau = 0) = \gamma(\beta\mathbf{e}_t + \mathbf{e}_{\varphi})$ folgendes ableiten können,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \left(\frac{\sqrt{2}}{c}, 0, 0, \frac{1}{3\sqrt{3}r_s} \right), & \mathbf{E}_r &= \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 0 \right), \\ \mathbf{E}_{\vartheta} &= \left(0, 0, \frac{1}{3r_s}, 0 \right), & \mathbf{E}_{\varphi} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}c}, 0, 0, \frac{2}{3\sqrt{3}r_s} \right). \end{aligned}$$

Damit lauten die Basisvektoren der lokalen Tetrade, bezogen auf die natürliche Tetrade am jeweiligen Ort,

$$\mathbf{e}_t^*(\tau) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_t + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_{\varphi}, \quad (5.6.4a)$$

$$\mathbf{e}_r^*(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\nu\tau)\mathbf{e}_t + \cos(\nu\tau)\mathbf{e}_r - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\nu\tau)\mathbf{e}_{\varphi}, \quad \mathbf{e}_{\vartheta}^*(\tau) = 1, \quad (5.6.4b)$$

$$\mathbf{e}_{\varphi}^*(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\nu\tau)\mathbf{e}_t + \sin(\nu\tau)\mathbf{e}_r + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\nu\tau)\mathbf{e}_{\varphi}. \quad (5.6.4c)$$

Die lokale Tetrade ändert sich dahingehend, daß sich die Basisvektoren verdrehen (Abb. 5.17), was man auch als *geodätische Präzession* bezeichnet (siehe auch Straumann[99]). Zu beachten ist, daß jeder einzelne Tetradenvektor \mathbf{e}_i^* für sich auf ± 1 normiert ist, allerdings gilt dies nicht für die Projektion auf die $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\varphi})$ - bzw. (x, y) -Ebene. In Abbildung 5.17 ist dies durch die Länge der grünen Pfeile angedeutet, wobei wir dieser Länge noch keine direkte Bedeutung zuordnen können.

Erinnern wir uns an Abschnitt (§2.3.4), so hat ein Vierervektor \mathbf{X} , der im Sternsystem $\{\mathbf{e}_{\alpha}^*\}$ gemessen die Darstellung

$$\mathbf{X} = \tilde{X}^{\alpha}(\tau)\mathbf{e}_{\alpha}^* = 0\mathbf{e}_t^*(\tau) + \tilde{\xi}(\tau)\cos\tilde{\phi}\mathbf{e}_r^*(\tau) + \tilde{\xi}(\tau)\sin\tilde{\phi}\mathbf{e}_{\varphi}^*(\tau) \quad (5.6.5)$$

¹³Den allgemeineren Fall eines beliebigen kreisförmigen Orbits behandeln wir im Anhang §D.2. Von dort übernehmen wir auch die Notation.

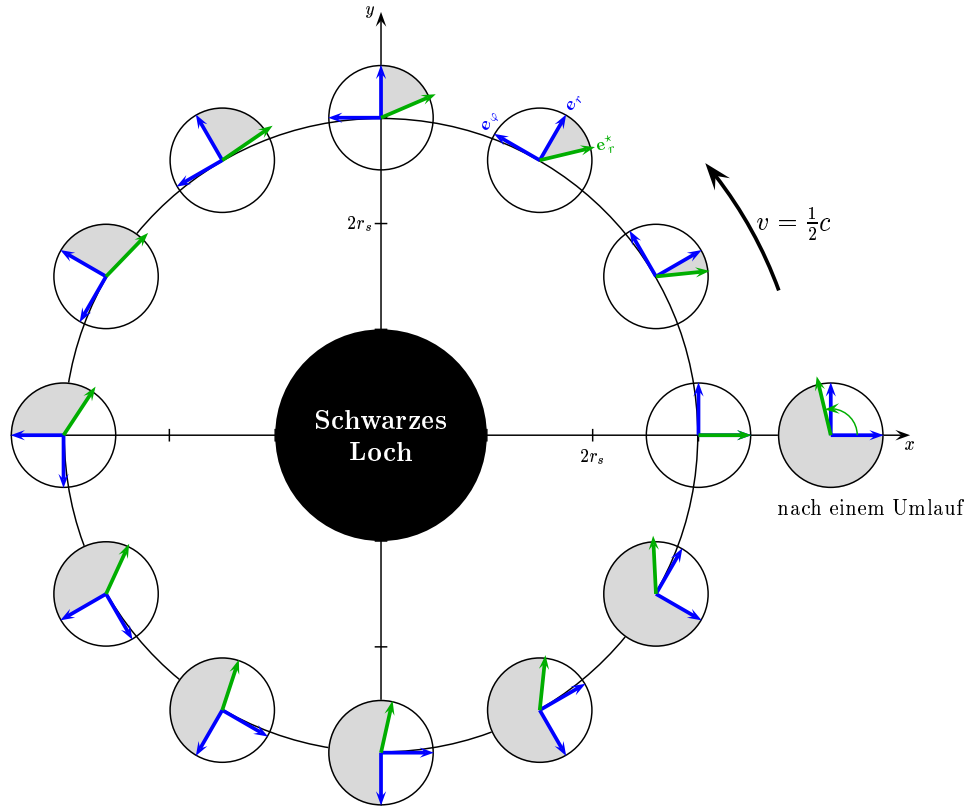


Abbildung 5.17: Ein Stern bewege sich mit halber Lichtgeschwindigkeit auf dem letzten stabilen Orbit ($r = 3r_s$) um ein Schwarzes Loch mit dem Ereignishorizont $r = r_s$. Bezogen auf die jeweilige natürliche Tetrade (blau) am momentanen Aufenthaltsort, präzidiert der Stern mit dem Winkel $\alpha(\tau)$ (hellgrau) um die Rotationsachse. Die projizierte Länge des \mathbf{e}_r^* -Vektors (grün) weicht von der Norm ab.

besitzt, bezogen auf das jeweilige Ruhssystem $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left[-\frac{\tilde{\xi}(\tau)}{\sqrt{3}} \cos \tilde{\phi}(\tau) + \frac{\tilde{\xi}(\tau)}{\sqrt{3}} \sin \tilde{\phi}(\tau) \right] \mathbf{e}_t + \tilde{\xi}(\tau) \left[\cos \tilde{\phi}(\tau) \cos(\nu\tau) + \sin \tilde{\phi}(\tau) \sin(\nu\tau) \right] \mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{2\tilde{\xi}(\tau)}{\sqrt{3}} \left[-\cos \tilde{\phi}(\tau) \sin(\nu\tau) + \sin \tilde{\phi}(\tau) \cos(\nu\tau) \right] \mathbf{e}_\varphi \\ &= X^t \mathbf{e}_t + \xi \cos \phi \mathbf{e}_r + \xi \sin \phi \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

Ein Vektor der Länge ξ und der Orientierung ϕ relativ zu \mathbf{e}_r im Ruhssystem $\{\mathbf{e}_\alpha\}_p$ am Ort p hat, gemessen vom Sternsystem $\{\mathbf{e}_\alpha^*\}_p$ am selben Ort und für zugehöriges τ , die Orientierung $\tilde{\phi}$ mit

$$\tan \tilde{\phi} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\nu\tau) + \tan \phi \cos(\nu\tau)}{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\nu\tau) - \tan \phi \sin(\nu\tau)} \quad (5.6.7)$$

und die Länge $\tilde{\xi}$ mit

$$\tilde{\xi}^2(\tau) = \frac{\xi^2}{\left(\cos \tilde{\phi}(\tau) \cos(\nu\tau) + \sin \tilde{\phi}(\tau) \sin(\nu\tau) \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\cos \tilde{\phi}(\tau) \sin(\nu\tau) + \sin \tilde{\phi}(\tau) \cos(\nu\tau) \right)^2}. \quad (5.6.8)$$

Der Vektor scheint also verdreht und verkürzt zu sein, so wie wir es von der Speziellen Relativitätstheorie her erwarten würden.

Kommen wir auf die Rotation des Sternsystems relativ zu den jeweiligen ruhenden, natürlichen Tetraden zurück, so rotiert zum Beispiel der e_r^* -Vektor laut Gleichung (5.6.4b) mit

$$\alpha(\tau) = \arctan\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \tan(\nu\tau)\right). \quad (5.6.9)$$

Nach einem Umlauf ($\tau = \tau_{2\pi}, \nu\tau_{2\pi} = \sqrt{2}\pi$) ist der e_r^* -Vektor um den Winkel $\alpha_{360^\circ} \approx 103.5^\circ$ verdreht (Abb. 5.18, oben und unten). Die Rotationsfrequenz ω_{prec} der geodätischen Präzession ergibt sich daher zu

$$\omega_{\text{prec}} = \frac{\alpha_{360^\circ}}{\tau_{2\pi}} = \frac{\arctan\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \tan(\sqrt{2}\pi)\right)}{2\pi} \frac{c}{3\sqrt{3}r_s}. \quad (5.6.10)$$

Mit dem Schwarzschildradius von SgrA* $r_s \approx 1.064 \cdot 10^{10} \text{ m}$ folgt $\omega_{\text{prec}} \approx 1.56 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Der Äquator rotiert so mit einer Geschwindigkeit von $v_{\text{equ}} \approx 1.38 \cdot 10^{-2} c$, also etwa einem Prozent der Lichtgeschwindigkeit.

Sichtbarkeit des Sterns

Visualisieren wir obige Bahn für einen Beobachter am Ort $P_{\text{obs}}(t = t_{\text{obs}}, r = 15r_s, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0)$ mittels Raytracing¹⁴ — der Beobachter schaut „edge-on“, also auf die Kante des Orbits —, so erhalten wir die Teilbilder aus Abbildung 5.18. Im oberen Bild haben wir den Beobachtungszeitpunkt t_{obs} gerade so gewählt, daß der Stern genau in der Sichtlinie zum Schwarzen Loch zu sein scheint. Wir sehen ihn daher an dem Ort, wo er zur Koordinatenzeit $t = 0$ war. Seine tatsächliche Position zur Koordinatenzeit t_{obs} ist jedoch woanders (siehe Abb. 5.19). Obwohl seine Orientierung — dargestellt durch die Pole der Textur — zur Koordinatenzeit $t = 0$ genau zum Beobachter zeigt, erscheint er um $\delta = \arctan(\gamma\beta) = 30^\circ$ verdreht. Dies resultiert aus seiner, zur Blickrichtung senkrechten, Bewegung mit halber Lichtgeschwindigkeit¹⁵.

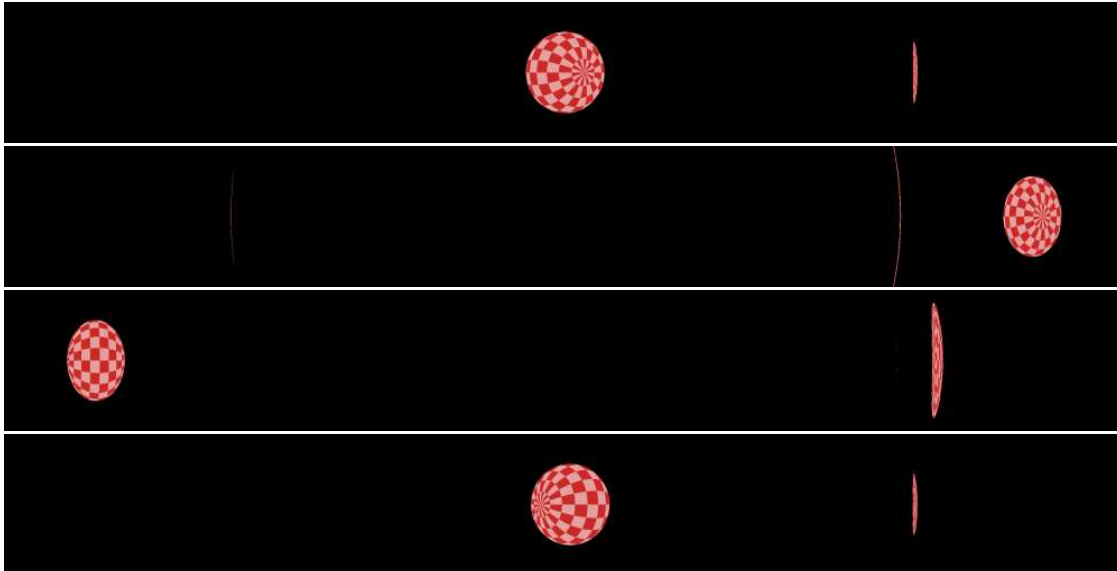


Abbildung 5.18: Bild des Beobachters zu den Zeitpunkten $t_{\text{obs}} = 27.89$ (ganz oben), $t_{\text{obs}} = 57.89$ (mitte oben, Stern entfernt sich), $t_{\text{obs}} = 104.39$ (mitte unten, Stern kommt auf Beobachter zu) und $t_{\text{obs}} = 120.40$ (unten) bei einem Öffnungswinkel der Kamera von $32^\circ \times 4^\circ$. Der Stern hat einen Radius von $r_{\text{star}} = 0.25r_s$.

¹⁴Die Bestimmung der minimalen Bildauflösung behandeln wir im Anhang §D.6.

¹⁵Eine Erklärung zur scheinbaren Verdrehungen findet man z.B. bei Kraus et al[56] oder Penrose[77]. Siehe auch Abb. 7.11.

Neben dem sonst unverzerrten Bild des Sterns sehen wir in Abbildung 5.18 auf der rechten Bildseite auch noch eine Art Spiegelung des Stern, deren Zustandekommen in Abbildung 5.19 veranschaulicht ist. Ein Lichtstrahl, der nahe am Schwarzen Loch vorbeiläuft (abgelenkter Strahl), benötigt mehr Zeit zum Beobachter zu gelangen als ein Lichtstrahl (direkter Strahl), der direkt zum Beobachter läuft.

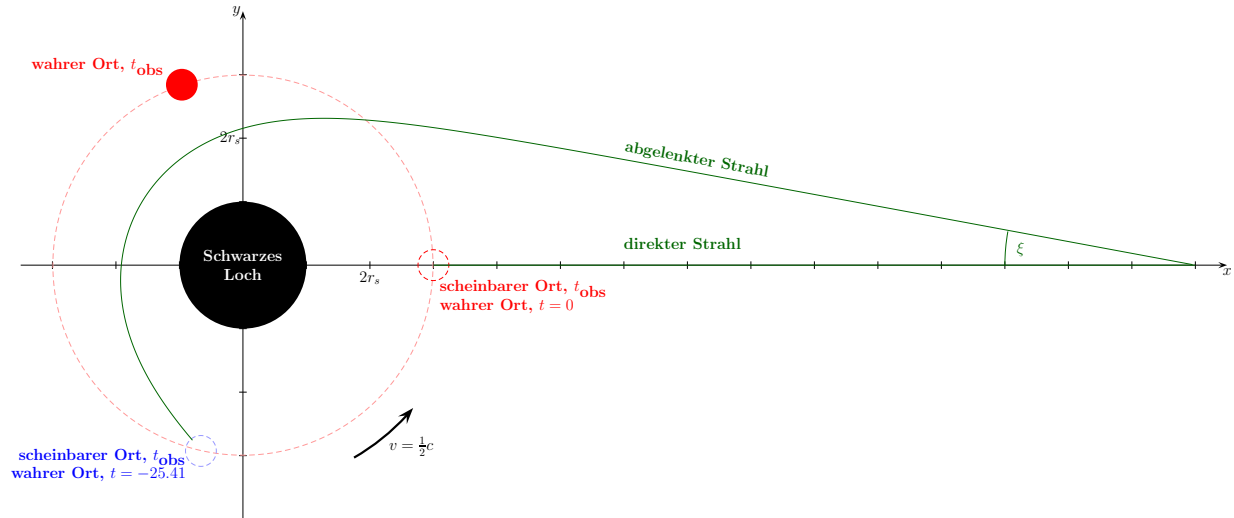


Abbildung 5.19: Wahrer Ort und scheinbare Orte des Sterns zur Beobachtungszeit $t_{\text{obs}} = 27.89$ am Beobachterort $r_{\text{obs}} = 30$. **Rot:** Blick in Richtung des Schwarzen Lochs. **Blau:** Unter dem Winkel $\xi = 10.18^\circ$ sieht der Beobachter den Stern, wo dieser zur Koordinatenzeit $t = -25.41$ war.

Lichtstrahlen, welche mehrfach um das Schwarze Loch umlaufen, erzeugen weitere Bilder des Sterns, die allerdings in Abbildung 5.18 nicht mehr aufgelöst werden können.¹⁶ Die Laufzeiten von Lichtstrahlen, die vom Stern abgestrahlt werden und den Beobachter am Ort r_{obs} erreichen, sind in Abbildung 5.20 abgetragen.

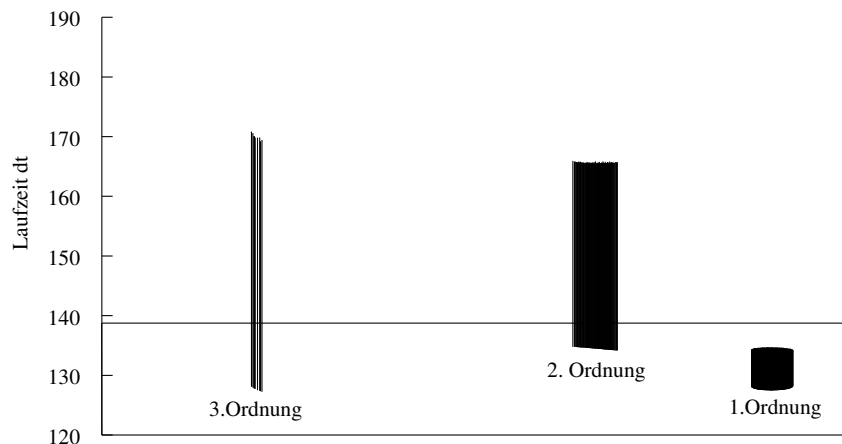


Abbildung 5.20: Laufzeiten für Lichtstrahlen vom Stern zum Beobachter am Ort $r_{\text{obs}} = 120m$ und zur Beobachtungszeit $t_{\text{obs}} \approx 145.77$ im Fall eines Schwarzen Lochs mit Masse $m = 1$.

Die Lichtstrahlen mit der kürzesten Laufzeit zeichnen ein Bild des Sterns, welches wir mit der Ordnung 1 beziffern wollen. Je höher die Ordnung ist, desto länger waren die Lichtstrahlen unterwegs.

¹⁶Zur notwendigen Bildauflösung beim Raytracing im Fall der Schwarzschild-Raumzeit siehe Anhang §D.6.

Rotverschiebung des Sterns

Nehmen wir an, der Stern strahle ideale Schwarzkörper-Strahlung bei der Temperatur T^* ab. Die beim Beobachter am Ort $r = r_{\text{obs}}$ empfangene Strahlung ist jedoch gravitativ- und doppler-rotverschoben. Der Beitrag zur gravitativen Rotverschiebung, z_{grav} , hängt lediglich vom relativen Abstand des Beobachters und des Bahnradius zum Schwarzen Loch ab (vgl. Abschnitt §5.1.3). Ist ν_1 die Emissionsfrequenz am Ort r_1 , dann beobachtet man am Ort r_2 die Frequenz ν_2 , wobei

$$z_{\text{grav}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sqrt{1 - r_s/r_1}}{\sqrt{1 - r_s/r_2}}. \quad (5.6.11)$$

Der Beobachter aus Abbildung §5.19 am Ort ($r_2 = 15r_s$) empfängt daher eine gravitative Rotverschiebung von dem letzten stabilen Orbit ($r_1 = 3r_s$) von

$$z_{\text{grav}} = \sqrt{\frac{5}{7}} \approx 0.845. \quad (5.6.12)$$

Das Licht des Sterns wird nun zusätzlich aufgrund seiner Bewegung doppler-verschoben. Dabei wollen wir drei Spezialfälle herausgreifen¹⁷. Dies ist zum einen die transversale Bewegung zur Blickrichtung des Beobachters, wodurch eine Verschiebung von

$$z_{\text{trans}} = \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{emit}}} = \sqrt{1 - \beta^2} \approx 0.866 \quad (5.6.13)$$

mit $\beta = \frac{1}{2}c$ auftaucht. Andererseits bewegt sich der Stern einmal von uns weg und einmal auf uns zu,

$$z_{\text{weg}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \approx 0.577 \quad \text{bzw.} \quad z_{\text{zu}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \approx 1.732. \quad (5.6.14)$$

Die Gesamtrötschiebung ergibt sich aus der Multiplikation der gravitativen mit der Doppler-Rötschiebung. Diese Werte der Rötschiebung gelten jedoch nur idealerweise im eigentlichen Ursprung des Sterns. Da dieser jedoch eine gewisse Ausdehnung besitzt (lokaler Sternradius $r_{\text{star}} = 0.25r_s$), müssen wir für jedes Oberflächenelement, welches wir sehen, den genauen radialen Ort, wie auch dessen momentane Geschwindigkeitsrichtung berücksichtigen. Zudem müssen wir natürlich auch die endliche Lichtlaufzeit einbeziehen, was uns zu der Schwierigkeit führt, das Phantomobjekt des Sterns zu bestimmen¹⁸ (siehe Abb. §5.21,links).

Aufgrund der Bewegung und dem damit einhergehenden Phantombild¹⁹ des Sterns ist die gravitative Rötschiebung z_{grav} nicht mehr symmetrisch, wie es für einen ruhenden Stern zu erwarten wäre. Vielmehr ist die, vom Beobachter gesehen, linke Seite des Sterns stärker rotverschoben als die rechte Seite. Die Rötschiebung z_{doppler} durch den Doppler-Effekt ändert sich sogar noch viel stärker als die gravitative Rötschiebung. Da das Licht zu unterschiedlichen Zeiten vom Stern aus startet, hatte dieser unterschiedliche Geschwindigkeitskomponenten. Die Doppler-Verschiebung im allgemeinen lautet dann

$$z_{\text{doppler}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \vartheta}. \quad (5.6.15)$$

Abhängig von der Beobachterentfernung und dem jeweiligen Oberflächenelement ändert sich der Winkel ϑ zwischen dem Lichtstrahl zum Beobachter und der momentanen Geschwindigkeit des Sterns. Die daraus resultierende Gesamtrötschiebung ist in Abbildung §5.22 für den Fall gezeigt, bei dem sich der Stern scheinbar bei der inneren Konjunktion (ic = *inferior conjunction*) (vgl. Abb. §5.19, scheinbarer Ort zur Zeit t_{obs}) befindet.

Entfernt sich der Beobachter immer weiter vom Stern, so strebt die gravitative Rötschiebung (5.6.11) den Wert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z_{\text{grav}} = \sqrt{1 - r_s/r_1} = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$$

¹⁷Formeln für den transversalen und den radialen Doppler-Effekt sind [21] entnommen

¹⁸Den Begriff des Phantomobjekts führen wir im Kapitel §7 über die stereoskopische Visualisierung ein. Die Bestimmung eines Phantomobjekts in der Allgemeinen Relativitätstheorie wird dahingehend erschwert, daß wir das bewegte Objekt hier mit gekrümmten Lichtstrahlen schneiden müssen.

¹⁹Eine nähere Erklärung zum Begriff „Phantombild“ findet man im Kapitel §7.

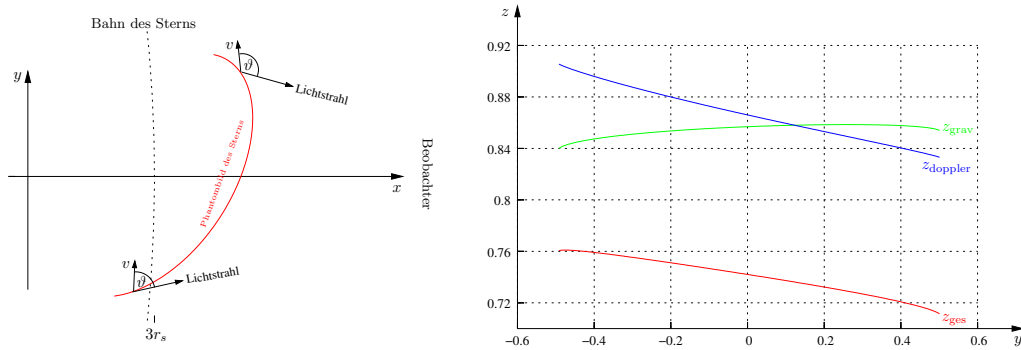


Abbildung 5.21: Ein Stern bewegt sich auf dem letzten stabilen Orbit ($r_{\text{lso}} = 3r_s$) mit halber Lichtgeschwindigkeit um ein Schwarzes Loch. **Links:** Die Orte des Sterns, deren Licht gleichzeitig beim Beobachter am Ort $r_{\text{obs}} = 15r_s$ eintrifft, bilden das Phantombild des Sterns. ϑ ist der Winkel zwischen dem momentanen Geschwindigkeitsvektor eines Oberflächenelements und dem Lichtstrahl zum Beobachter. **Rechts:** Rotverschiebung $z = \nu_{\text{obs}}/\nu_{\text{star}}$ aufgrund des Gravitationspotentials z_{grav} (grün) und des Doppler-Effekts z_{doppler} (blau). Die Gesamtrotverschiebung z_{ges} (rot) ergibt sich aus Multiplikation.

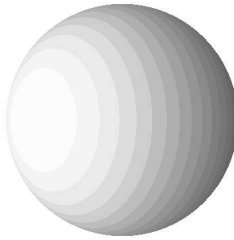


Abbildung 5.22: Gesamtrotverschiebung für einen Stern, der sich scheinbar bei der inneren Konjunktion befindet. Die Werte sind etwa linear skaliert. Der Beobachter befindet sich in einer Entfernung von $r_{\text{obs}} = 15r_s$ zum Schwarzen Loch.

an. Die Doppler-Verschiebung ist natürlich weiterhin vom Winkel zwischen Blickrichtung und Geschwindigkeitsvektor des Sterns abhängig, jedoch ändert sich der Winkel über die Oberfläche hin vernachlässigbar. So gilt zum Beispiel für den Fall der inneren Konjunktion $\vartheta = \pi/2$ und damit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z_{\text{doppler}}(ic) = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660.$$

Zusammen gilt für die innere Konjunktion und einen weit entfernten Beobachter eine konstante Rotverschiebung $z_{\text{ges}}(ic) = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$.

Beobachtung bei unterschiedlicher Inklination

Die eigentliche Beobachtung einer Strahlungsquelle um unser galaktisches Schwarzes Loch ermöglicht leider keine ortsaufgelöste Darstellung, da von der Erde aus der Durchmesser des letzten stabilen Orbits lediglich im Bereich von 10^{-5} Bogensekunden liegt. Es scheint aber unter Umständen möglich, aus der Schwankung der Intensität der Strahlungsquelle, Parameter wie zum Beispiel die Inklination zu bestimmen.

Die Raytracing-Methode stößt für solch immense Entfernungen natürlich an ihre Grenzen²⁰, weshalb wir für unsere Zwecke den Abstand zwischen Schwarzen Loch und Beobachter auf winzige 60 Schwarzschildradien verringern. Die genaue Orientierung des Sterns interessiert uns im folgenden nicht mehr, wir betrachten lediglich die

²⁰Die Rechenzeit steigt hier, trotz Schrittweitensteuerung des Integrators, explosiv an.

Rotverschiebung in Abhängigkeit seines scheinbaren Aufenthaltsortes und dem Inklinationwinkel des Beobachters.

Der Stern besitze ein homogenes, isotropes Strahlungsfeld, welches durch ein ideales Planck-Spektrum bei einer Temperatur von $T_{\text{star}} = 6000^\circ\text{K}$ dargestellt werden soll (Abb. 5.23, siehe auch Anhang §A.4). Dann gilt für die spezifische Intensität

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T_{\text{star}})} - 1}. \quad (5.6.16)$$

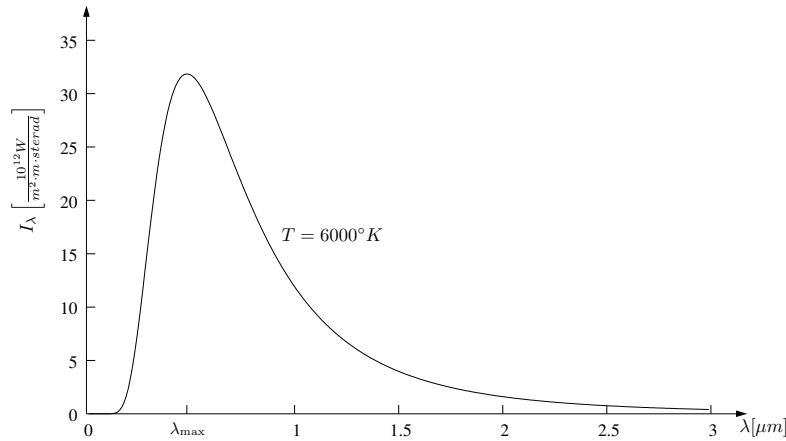


Abbildung 5.23: Ideales Planck-Spektrum bei einer Temperatur von $T = 6000^\circ\text{K}$. Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz befindet sich das Maximum der spektralen Intensität bei der Wellenlänge $\lambda_{\text{max}} \approx 0.483\mu\text{m}$.

Da die Größe I_ν/ν^3 entlang eines Lichtstrahls konstant bleibt (relativistische Form des Liouville-Theorems [61]), erfährt die Temperatur die gleiche Rotverschiebung wie die Frequenz:

$$\frac{T_{\text{beob}}}{T_{\text{star}}} = \frac{\nu_{\text{beob}}}{\nu_{\text{star}}} = z_{\text{ges}}. \quad (5.6.17)$$

Betrachten wir zunächst den umlaufenden Stern beim Blick auf die Kante der Umlaufbahn (edge-on, Inklination $\iota = 90^\circ$). Während des Umlaufs können wir mit der hier verwendeten Auflösung zwei Einstein-Ringe beobachten. In Abbildung 5.24 zeigt der linke Ring das sekundäre Bild (Bild zweiter Ordnung) — ein Umlauf um das Schwarze Loch — des Sterns, der sich zur Zeit der Lichtemission in der inneren Konjunktion (*inferior conjunction*) befand. Der deutlich hellere Ring entsteht durch Licht, welches den Stern verließ, als der sich in der äußeren Konjunktion (*superior conjunction*) befand. Dabei hat das Licht das Schwarze Loch nur halb umrundet, weshalb wir vom primären Bild (Bild erster Ordnung) sprechen wollen. Da ein rotverschobenes Planck-Spektrum wieder ein Planck-Spektrum — allerdings bei einer anderen Temperatur — ergibt, hat der Beobachter den Eindruck, als ob der Stern seine Temperatur bei einem Umlauf ständig ändert. Die Farbdarstellung aus Abbildung 5.24 ergibt sich durch Faltung des jeweiligen Planck-Spektrums mit den Empfindlichkeitskurven des menschlichen Auges, wobei die daraus resultierenden rgb-Werte noch so normiert werden, daß der größte Wert gleich Eins ist (siehe auch Anhang §A.5).

Im Fall des Einstein-Rings bewegt sich der Stern transversal zur Verbindungslinie Beobachter–Schwarzes Loch. Im Verhältnis zum Licht, welches beim Beobachter ankommt, scheint er sich einerseits auf den Beobachter zu (linke Hälfte des Rings) und andererseits vom Beobachter weg (rechte Hälfte des Rings) zu bewegen. Die mittlere Gesamrotverschiebung entlang des Rings ist für die Einstein-Ringe erster und zweiter Ordnung in Abbildung 5.25 dargestellt. Der leichte Unterschied in der Rotverschiebung beider Ordnungen kommt durch den jeweils etwas unterschiedlichen Winkel zwischen Bewegungsrichtung des Sterns und Emission des Lichtstrahls der zum Beobachter gelangt.

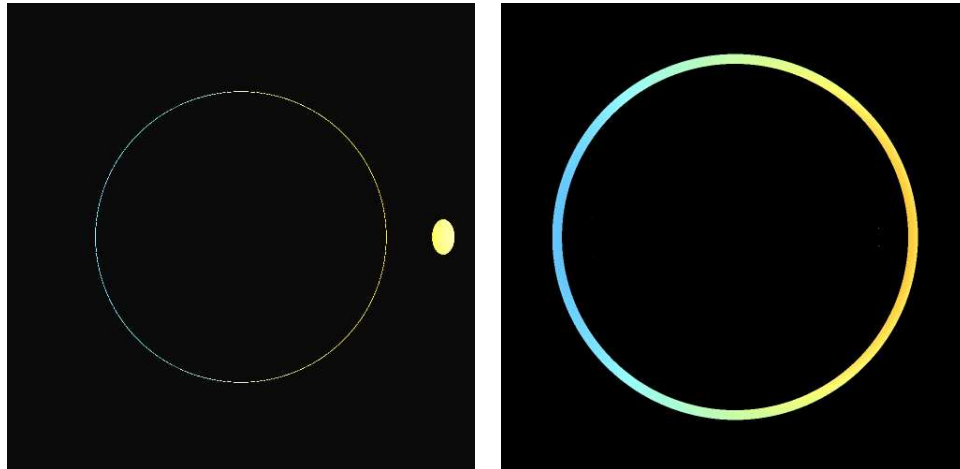


Abbildung 5.24: Ein Stern mit Radius $r^* = \frac{1}{4}r_s$ und homogen, isotroper Oberflächentemperatur $T_{\text{star}} = 6000^\circ K$ läuft mit halber Lichtgeschwindigkeit auf dem letzten stabilen Orbit $r_{\text{Iso}} = 3r_s$ um das galaktische Zentrum. Der Inklinationwinkel des Beobachters beträgt 90° . Beobachtungszeiten sind $t_{\text{obs}} \approx 156.5$ (links) und $t_{\text{obs}} \approx 184.5$ (rechts). [Film](#)

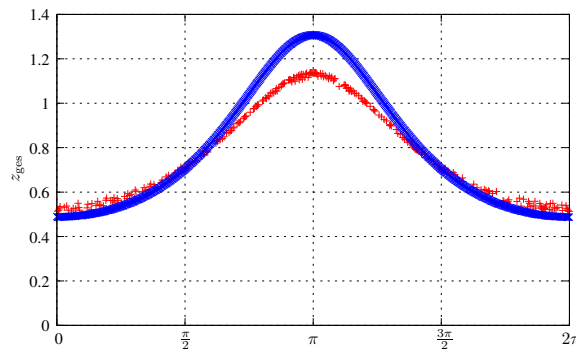


Abbildung 5.25: Rotverschiebung entlang des Einstein-Rings aus Abbildung [5.24](#) für sekundäres Bild (rot) und primäres Bild (blau).

Betrachten wir nun den umlaufenden Stern bei den beiden Inklinationen $\iota = 45^\circ$ bzw. $\iota = 70^\circ$, so erhalten wir die Bildfolgen aus den Abbildungen [5.26](#) und [5.27](#).

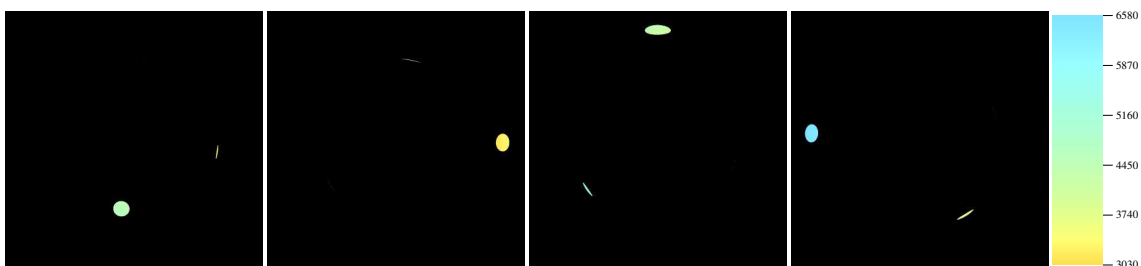


Abbildung 5.26: Ein Stern mit Radius $r^* = \frac{1}{4}r_s$ und homogen, isotroper Oberflächentemperatur $T_{\text{star}} = 6000^\circ K$ läuft mit halber Lichtgeschwindigkeit auf dem letzten stabilen Orbit $r_{\text{Iso}} = 3r_s$ um das galaktische Zentrum. Der Inklinationwinkel des Beobachters beträgt 45° . [Film](#)

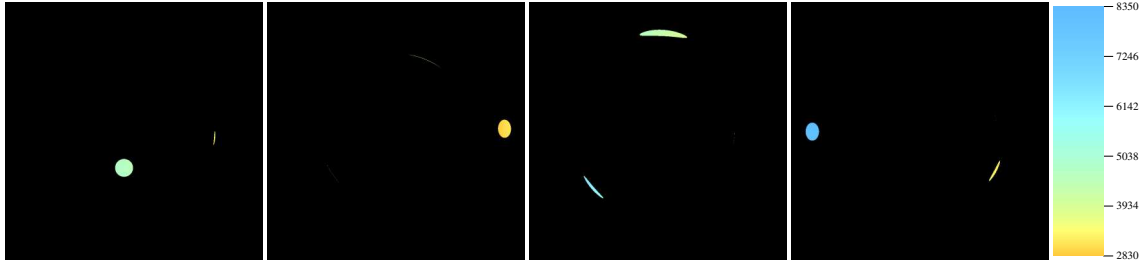


Abbildung 5.27: Ein Stern mit Radius $r^* = \frac{1}{4}r_s$ und homogen, isotroper Oberflächentemperatur $T_{\text{star}} = 6000^\circ K$ läuft mit halber Lichtgeschwindigkeit auf dem letzten stabilen Orbit $r_{\text{Iso}} = 3r_s$ um das galaktische Zentrum. Der Inklinationwinkel des Beobachters beträgt 70° . [Film](#)

Die zugehörigen Temperaturwerte können wir aus der Farbskala am rechten Rand jeder Abbildung ablesen. So fällt auf, daß bei größerer Inklination die Rotverschiebung — und damit die scheinbare Temperatur — stärker variiert als bei kleinerem Inklinationwinkel. Dies resultiert natürlich aus dem Doppler-Faktor, der bei größerer Inklination sich ebenso stärker verändert.

Zeichnen wir die Lichtkurven für beide Fälle auf, so gelangen wir zur Abbildung 5.28. Auf der Abszisse ist die Zeit T in Einheiten der Umlaufzeit, auf der Ordinate der Strahlungsfluß Φ abgetragen. Zur Zeit $T = 0$ befindet sich der Stern *scheinbar* zwischen Beobachter und Schwarzes Loch. Der maximale Strahlungsfluß wird gerade dann erreicht, wenn sich der Stern *scheinbar* auf den Beobachter zubewegt und damit die Doppler-Verschiebung am größten ist.

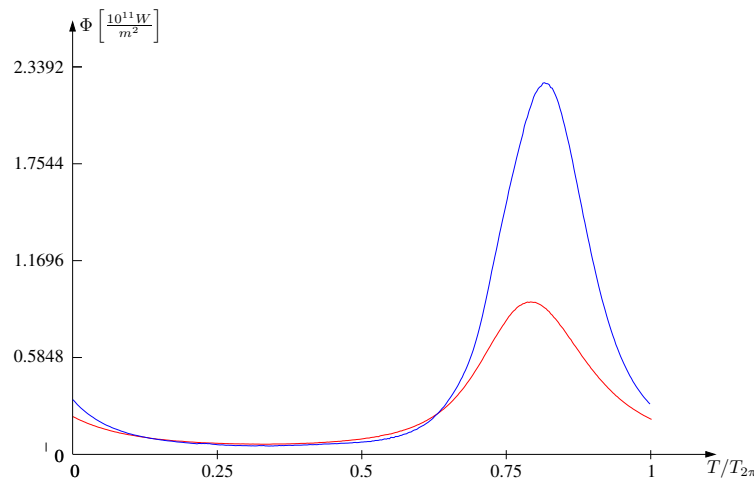


Abbildung 5.28: Lichtkurve für einen Stern mit Radius $r^* = \frac{1}{4}r_s$ und homogen, isotroper Oberflächentemperatur $T_{\text{star}} = 6000^\circ K$, der mit halber Lichtgeschwindigkeit auf dem letzten stabilen Orbit $r_{\text{Iso}} = 3r_s$ um das galaktische Zentrum umläuft. Der Inklinationwinkel des Beobachters beträgt 70° bzw. 45° .

Der Strahlungsfluß Φ ergibt sich durch Integration über das gesamte Spektrum und den vollen Raumwinkel mit Gleichung (5.6.17)

$$\Phi = \int \left(\int_0^\infty I_\nu d\nu \right) d\Omega = \int \alpha T_{\text{beob}}^4 d\Omega = \alpha T_{\text{star}}^4 \int z_{\text{ges}}^4 d\Omega, \quad (5.6.18)$$

wobei α die Proportionalitätskonstante zwischen der Gesamtintensität I und der Temperatur T ist (vgl. Anhang §A.4). Die Differenz zwischen Maximum und Minimum der Lichtkurve hängt also deutlich vom Inklinationwinkel

ab. Ebenso ist das Maximum vom Inklinationwinkel abhängig: je größer der Inklinationwinkel, desto stärker ist der Linseneffekt (Micro-lensing) und damit die Maximalintensität.

Beim vierdimensionalen Raytracing ist der Linseneffekt dadurch berücksichtigt, daß die gleiche Anzahl Lichtstrahlen bei Verstärkung in einem viel kleiner Raumwinkelbereich gebündelt sind als sonst. In den Abbildungen [5.26](#) und [5.27](#) ist der Linseneffekt nicht berücksichtigt. Wie bereits erwähnt, skalieren wir die Intensität so, daß der maximale rgb-Farbwert auf Eins normiert ist. Ob man aus der Lichtkurve die genaue Orientierung des Beobachters zur Bahnebene des Sterns bestimmen könnte, muß leider an anderer Stelle weiter untersucht werden.

5.6.2 Scheibe als Strahlungsquelle

Anstelle eines einfachen „Blobs“ wollen wir nun eine ganze Scheibe um das Schwarze Loch betrachten.²¹ Diese sei beliebig dünn und erstrecke sich vom letzten stabilen Orbit $r = 3r_s$ (vgl. Abschnitt [5.2.3](#)) bis hinaus zu einem Radius r_{out} . Der Einfachheit halber soll die Scheibe aus Staub bestehen, wobei sich jedes einzelne Staubeilchen auf einer Kreisbahn mit seiner Kepler-Geschwindigkeit²² v_{Kepler}

$$v_{\text{Kepler}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (5.6.19)$$

bewege (G ist die Gravitationskonstante und M ist die Masse des Schwarzen Lochs). Ein Beobachter befinde sich in der Entfernung r_i vom Schwarzen Loch und habe einen Inklinationwinkel ι bezüglich der Scheibennormalen (Abb. [5.29](#)).

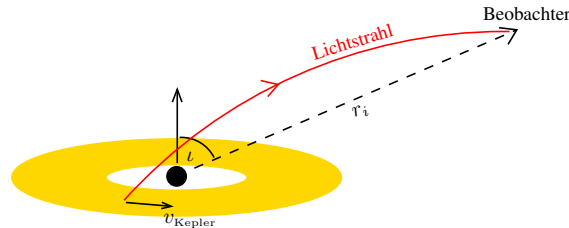


Abbildung 5.29: Eine Staubscheibe rotiere differentiell um ein Schwarzes Loch. Jedes Staubeilchen bewege sich, unabhängig von den anderen, mit seiner Kepler-Geschwindigkeit. Der Innenrand der Scheibe liegt beim letzten stabilen Orbit $r = r_{\text{ISO}}$. Ein Beobachter in der Entfernung r_i vom Schwarzen Loch hat einen Inklinationwinkel ι . Die Knotenlinie liegt senkrecht zur Normalen- und Beobachterrichtung.

Die Vereinfachung des Modells gilt nur für die Scheibe und die Geschwindigkeiten der Staubeilchen. Die Lichtablenkung hingegen wollen wir in der Schwarzschild-Raumzeit exakt berechnen. Der Verlauf einer Nullgeodäten ist zweitrangig, lediglich ihr Startpunkt und ihre Startrichtung bei der Scheibe sind relevant. Das Bild der Scheibe, welches der Beobachter an seinem Ort wahrnimmt, entsteht nun dadurch, daß er für jeden Bildpixel eine Startrichtung bestimmt und einen Lichtstrahl zurückverfolgt, bis dieser die Scheibe trifft. Aufgrund der Startrichtung beim Beobachter und der Geometrie der Szene können wir nun verhältnismäßig schnell mittels der analytischen Lösung der Geodäten (siehe Abschnitt [5.3.3](#)) den Auftreffort und den Auftreffwinkel ermitteln.

Geben wir nun der Scheibe in einem ersten Schritt eine einheitliche Temperatur T_{Scheibe} und betrachten die Scheibe als idealen schwarzen Körper, dann folgt für die spezifische Intensität, wie im obigen Fall, ein ideales Planck-Spektrum

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T_{\text{Scheibe}})} - 1}. \quad (5.6.20)$$

²¹Eine Akkretionsscheibe um ein Schwarzschild- oder Kerr- Schwarzes Loch wurde schon zahlreich visualisiert, siehe z.B. [\[79, 95, 69\]](#). Der Vorteil in der vorliegenden Methode ist die interaktive Visualisierung.

²²Die Kepler-Geschwindigkeit ergibt sich aus der Balance zwischen Zentrifugal- und Gravitationskraft.

Die Gesamtrötverschiebung z_{ges} setzt sich aus der gravitativen Rotverschiebung z_{grav} (siehe Gl.(5.6.11)) und der Doppler-Verschiebung z_{Doppler}

$$z_{\text{Doppler}} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (5.6.21)$$

zusammen, wobei θ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor v_{Kepler} und der Richtung der Nullgeodäten am gleichen Ort ist. Ändern wir den Inklinationswinkel ι zur Scheibenebene, so bleibt die gravitative Rotverschiebung gleich, wohingegen sich die Doppler-Verschiebung deutlich ändert. Je größer der Inklinationswinkel ist, desto größer ist der Unterschied in der Rotverschiebung.

In Abbildung [5.30](#) ist die Staubscheibe für die zwei Inklinationswinkel $\iota = 80^\circ$ und $\iota = 30^\circ$ dargestellt, wobei besonders deutlich die unterschiedliche Rotverschiebung zu sehen ist. Die Scheibe kommt auf der linken Seite auf uns zu, weshalb ihr Spektrum ins Blaue verschoben ist. Die rechte Seite läuft von uns weg und ist deshalb rotverschoben.

Obwohl das Schwarze Loch im linken Teilbild den hinteren Teil der Scheibe verdeckt, sehen wir aufgrund der Lichtablenkung die Oberseite der Scheibe vollständig. Zusätzlich ist auch ein Teil der hinteren Unterseite zu sehen. Neben diesen Lichtstrahlen, welche „direkt“ zum Beobachter laufen, gibt es auch Lichtstrahlen, welche ein oder sogar mehreremale um das Schwarze Loch laufen und erst dann zum Beobachter gelangen. Da der Scheibeninnenrand nur bis $r = 6m$ geht, die mehrfach umlaufenden Lichtstrahlen sich aber bei $r \approx 3m$ befinden, sind diese auch zu erkennen.

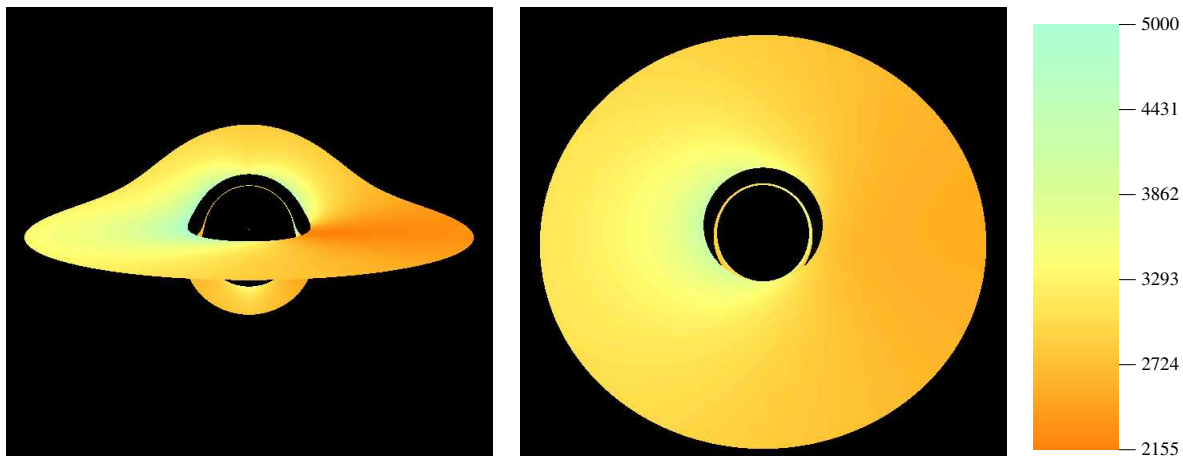


Abbildung 5.30: Eine Scheibe, mit der Ausdehnung $r_{\text{iso}} = 6m$ bis $r_{\text{out}} = 25m$, rotiere differentiell um ein Schwarzes Loch der Masse $m = 1$. Ihre Temperatur betrage 2700°C . Der Beobachter befinde sich in einer Entfernung $r_i = 115m$ und schaue — das Blickfeld betrage $45^\circ \times 45^\circ$ — unter einem Inklinationswinkel von $\iota = 80^\circ$ (links) beziehungsweise $\iota = 30^\circ$ (rechts) auf die Scheibe.

Die Visualisierung der einfachen Staubscheibe aus Abbildung [5.30](#) ist als eigenständiges, interaktives Programm (*BHDiskView*) umgesetzt. Eine kurze Einführung befindet sich im Anhang [§D.5](#).

Eine etwas realistischere Staubscheibe erhalten wir durch den Einsatz der SPH-Methode (SPH=Smoothed Particle Hydrodynamics).²³ Auch hier gehen wir noch von Staubteilchen aus, die mit der Kepler-Geschwindigkeit um das Schwarze Loch rotieren. Die SPH-Simulation startet von einer Ausgangssituation, die neben einer nahezu homogenen Dichteverteilung zusätzlich neun Blobs (sehr hohe Dichtekonzentrationen) in der Scheibe aufweist. Wenn wir von einer Dichte sprechen, dann meinen wir im folgenden stets eine Flächendichte, welche die in z -Richtung integrierte Volumendichte repräsentiert. Die Scheibe selbst betrachten wir dann in diesem Zusammenhang als unendlich dünn.

²³Eine Erklärung der SPH-Methode findet man z.B. in der Dissertation von Roland Speith [96]. Er hat auch die SPH-Rechnungen durchgeführt, deren Daten wir im folgenden verwenden. Die Abbildungen [5.31](#) (links) und [5.32](#) sind ebenfalls von R. Speith.

Läßt man nun diese Anfangskonfiguration in der Zeit entwickeln, so zerfließen die inneren Blobs bereits während zwei Umkreisungen. Dies entspricht einer Koordinatenzeit von $T \approx 54 \text{min}$. Die Temperatur der zerfließenden Blobs steigt dabei aufgrund viskoser Reibung sehr stark an, wodurch auch die nähere Umgebung deutlich aufgeheizt wird.

In Abbildung 5.31 sind zwei Momentaufnahmen gezeigt, wobei links die Flächendichteverteilung und rechts der zugehörige visuelle Eindruck für einen Beobachter dargestellt ist. Die Gesamtsimulation beinhaltet 2000 Zeitschritte mit je etwa 14.78s Zeitdifferenz und stellt daher eine Dauer von etwa $8 \text{h} 12 \text{min}$ dar. Im Gegensatz zur homogenen Scheibe, bei der die Lichtlaufzeit keine Rolle spielt, müßten wir hier eigentlich die Lichtlaufzeit mit berücksichtigen. Wir wollen aber — der Einfachheit halber und mit dem Ziel einer mehr qualitativen Darstellung — die Scheibe für jede Momentaufnahme als quasi-statisch betrachten. Prinzipiell könnte die Lichtlaufzeit natürlich mit einbezogen werden, jedoch müßte man dann noch zusätzlich für jeden Punkt der Scheibe die Emissionszeit bestimmen, aus der man im Anschluß aufwendig den richtigen Zeitschnitt interpolieren müßte.

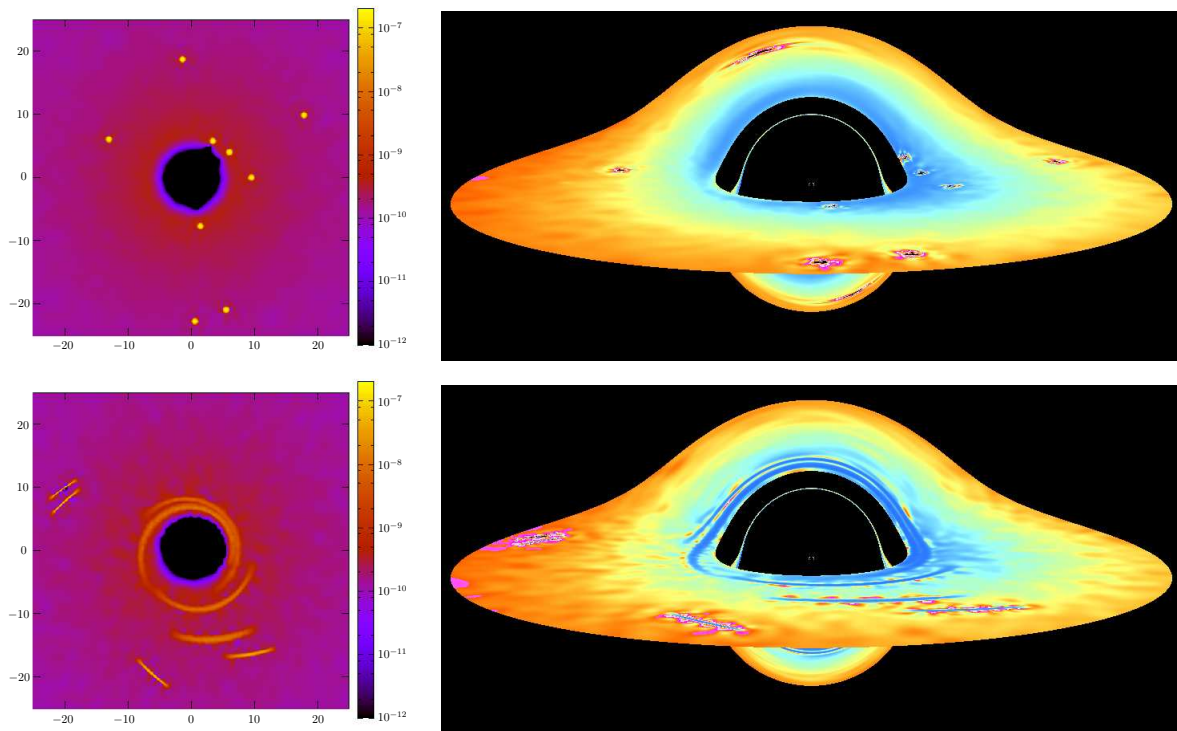


Abbildung 5.31: Eine SPH-Scheibe, mit der Ausdehnung $r_{\text{iso}} = 6 \text{m}$ bis $r_{\text{out}} = 25 \text{m}$, rotiere differentiell um ein Schwarzes Loch der Masse $\mathcal{M} = 3 \cdot 10^6 M_{\odot}$. Links ist die jeweilige Flächendichteverteilung in Einheiten von etwa $3 \cdot 10^{17} \text{kg/m}^2$, rechts die Sicht eines Beobachters im Abstand $r = 75 \text{m}$ vom Schwarzen Loch und der Inklination $\iota = 80^\circ$ aufgetragen. Die Zeitdifferenz zwischen den beiden Momentaufnahmen beträgt etwa $4 \text{h} 31 \text{min}$. Die minimale bzw. maximale Rotverschiebung beträgt $z_{\text{min}} = 0.799$ bzw. $z_{\text{max}} = 1.852$. [Film](#)

Die Temperaturverteilung innerhalb der Scheibe reicht von wenigen tausend Kelvin bis etwa $1.7 \cdot 10^7 \text{K}$ (siehe Abb. 5.32). Gehen wir von einer Schwarzkörperstrahlung aus, so entsprechen diesen Temperaturen Wellenlängen vom nahen Infrarot bis in den Röntgenbereich. Für die qualitative Darstellung in Abbildung 5.31 (rechts) haben wir die Temperaturen um den Faktor 10^3 verringert. Die beobachtete scheinbare Temperatur T_{obs} ergibt sich dann aus der Temperatur T_{emit} der emittierten Planck-Strahlung und der Gesamtrötverschiebung z zu

$$T_{\text{obs}} = z T_{\text{emit}}. \quad (5.6.22)$$

Die resultierende Planck-Strahlung falten wir im Anschluß mit den Spektralwertkurven (siehe Anhang §A.5) und erhalten so die rgb-Darstellung.

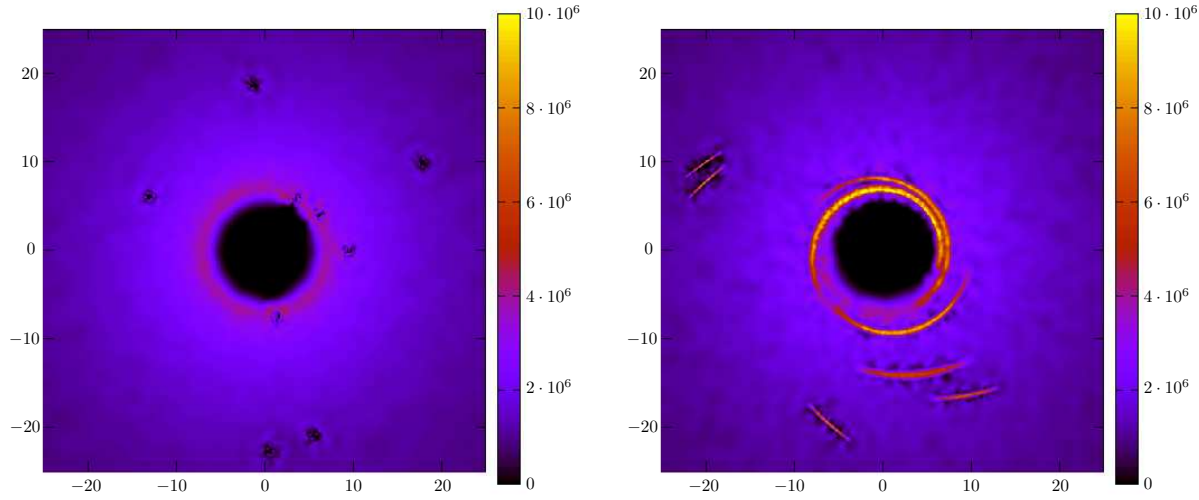


Abbildung 5.32: Temperaturverteilung (in Kelvin) der SPH-Scheibe zu Beginn und nach etwa 4h31min. Deutlich zu sehen ist der sehr starke, durch viskose Reibung verursachte, Temperaturanstieg der zerfließenden Blobs.

5.6.3 Ausblick

Wir haben hier zwei sehr stark vereinfachte Modelle für Strahlungsquellen um das galaktische Schwarze Loch, welches wir bisher als statisch betrachtet haben, untersucht. In einem nächsten Schritt sollte diese Betrachtung auf die Kerr-Raumzeit übertragen werden, was für die Blob-Simulation in `GeoVis` leicht möglich ist. Hierfür muß lediglich die Metrik ausgetauscht und der letzte stabile Orbit angepaßt werden.

Die Kerr-Metrik lautet in Boyer-Lindquist-Koordinaten in der Form von Carter[17]

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} (a dt - (r^2 + a^2)d\varphi)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\vartheta^2 \quad (5.6.23)$$

mit $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$ und $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$; wir verwenden hier nur geometrische Einheiten. Die innerste stabile Bahn (*isco=innermost stable circular orbit*) erhalten wir aus der Beziehung [4]

$$r_{\text{isco}} = \left(3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right) m, \quad (5.6.24)$$

$$Z_1 = 1 + \sqrt[3]{1 + \frac{a^2}{m^2}} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{a}{m}} + \sqrt[3]{1 - \frac{a}{m}} \right],$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{3a^2}{m^2} + Z_1^2}.$$

Betrachten wir eine analoge Situation wie in Abschnitt §5.6.1, aber dieses mal innerhalb der Kerr-Raumzeit, so folgt für den innersten stabilen Orbit r_{isco} (Korotation) und die lokale Geschwindigkeit v_{loc} mit dem Parameter $a = 0.52$ (vgl. Anhang §A.3.4)

$$r_{\text{isco}} \approx 4.15425 \quad \text{und} \quad v_{\text{loc}} \approx 0.56365. \quad (5.6.25)$$

Die Umlaufdauer des Sterns beträgt in diesem Fall lediglich $T_{2\pi} \approx 56.47$; im Vergleich dazu hat der Stern in der Schwarzschild-Raumzeit auf dem letzten stabilen Orbit $r_{\text{iso}} = 6m$ mit $v_{\text{loc}} = 0.5$ die Umlaufdauer $T_{2\pi} \approx 92.34$. Messen wir die Lichtkurve des Sterns, den wir wiederum als homogenen, isotropen schwarzen Strahler mit der Temperatur $T_{\text{star}} = 6000^\circ K$ betrachten, so gelangen wir zur Abbildung §5.33. Deutlich zu erkennen sind zwei kleinere Maxima und ein Hauptmaximum. Letzteres entsteht aufgrund der starken Dopplerverschiebung, wenn der Stern auf den Beobachter zufliegt. Für die beiden Nebenmaxima ist hauptsächlich das sekundäre bzw. tertiäre Bild des Sterns verantwortlich (siehe auch Abb. §5.34).

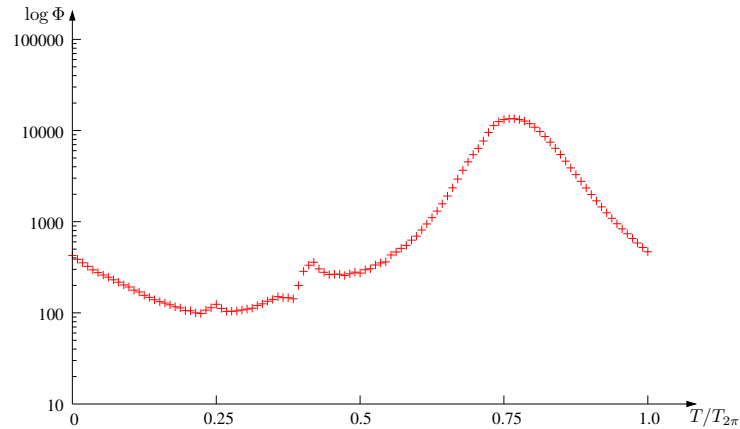


Abbildung 5.33: Lichtkurve für einen Stern, der auf dem innersten stabilen Orbit r_{isco} ein Kerr Schwarzes Loch mit den Parametern $a = 0.52$, $m = 1$ umkreist. Der Beobachter sitzt am Ort $r_{\text{obs}} = 120m$ und hat einen Inklinationwinkel von 80° zur Bahnebene des Sterns.

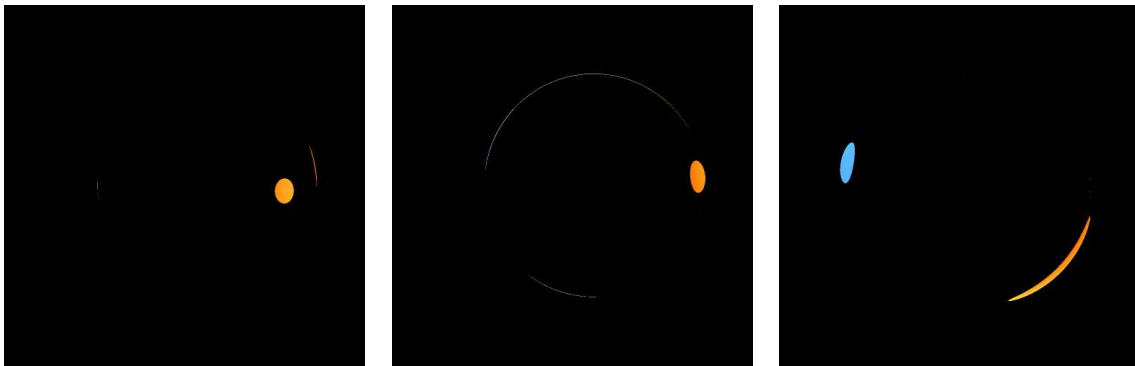


Abbildung 5.34: Ein Stern mit Radius $r^* = 0.5m$ und homogener, isotroper Oberflächentemperatur $T_{\text{star}} = 6000^\circ K$ läuft mit $v \approx 0.56365$ auf dem innersten stabilen Orbit $r_{\text{isco}} = 4.15425$ um ein Kerr Schwarzes Loch der Masse $m = 1$ und dem Parameter $a = 0.52$. Der Inklinationwinkel des Beobachters beträgt 80° . Beobachtungszeitpunkte (von links nach rechts): $T \approx \{0.25, 0.42, 0.77\} T_{2\pi}$. [Film](#)

Neben der Lichtkurve können wir auch das Zentroid des Gesamtflusses für einen Umlauf, welches sich aus der Relation

$$\Phi_{\text{Zentroid}} = \frac{\sum_{\text{alle Pixel}(x,y)} \Phi_{(x,y)} \vec{r}}{\sum_{\text{alle Pixel}(x,y)} \Phi_{(x,y)}} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.6.26)$$

ergibt, berechnen (siehe Abb. [5.35](#)).

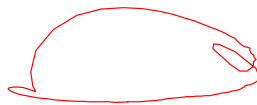


Abbildung 5.35: Zentroid Φ_{Zentroid} für einen Stern um ein Kerr Schwarzes Loch mit oben angeführten Parametern.

Neben der geometrischen und spektralen Darstellung fehlt schließlich noch die Polarisation des Lichts, welche noch nicht eingebaut ist, deren Einbau aber keine größeren Probleme mit sich bringen dürfte.

Kapitel 6

Visualisierung von Wurmlöchern

Der Begriff des Wurmlochs stammte ursprünglich von John Wheeler [113], der die Einstein-Rosen-Brücke [25] so uminterpretierte, daß sie eine Verbindung zwischen zwei weit entfernten Orten sei, welche in keiner Wechselwirkung miteinander stehen sollten.

Wir wollen unter einem Wurmloch sowohl eine Verbindung zwischen zwei Universen (inter-universales Wurmloch) als auch eine Abkürzung zwischen zwei weit entfernten Gebieten eines Universums (intra-universales Wurmloch) verstehen. Dabei wollen wir uns lediglich auf statische Wurmlöcher beschränken und erst am Schluß einen kleinen Ausblick auf rotierende Wurmlöcher geben.

Ein wichtiges Merkmal eines Wurmlochs ist seine Durchquerbarkeit (Traversierbarkeit). Darunter wollen wir nicht nur verstehen, daß gerade noch ein Lichtstrahl durch das Wurmloch kommt, sondern auch ein Mensch unbeschadet und in endlicher Zeit auf der anderen Seite ankommt. Daraus ergibt sich vor allem, daß die Gezeitenkräfte erträglich bleiben müssen. Es dürfen auch keine Horizonte vorhanden sein. Zudem sollte der Reisende auch für Außenstehende in einer vernünftigen Zeit das Wurmloch durchqueren.

David Hochberger und Matt Visser [47] definieren ein durchquerbares Wurmloch anhand der Form seines Halses, der lokal eine zweidimensionale Minimalfläche innerhalb der Raumzeit sein soll. Diese Definition erlaubt eine weitaus größere Auswahl an Geometrien als die von Morris und Thorne [67], welche die Geometrie eines Wurmlochs in der jüngeren Zeit wieder aufbrachten. In Abschnitt §6.1 wollen wir die Definition von Hochberg und Visser vorstellen.

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, mit der Allgemeinen Relativitätstheorie verträgliche Wurmlöcher zu entwickeln. Der eine, mehr physikalische Zugang, ist die Vorgabe eines Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$, aus dem mit den Einsteinschen Feldgleichungen die Geometrie $g_{\mu\nu}$ bestimmt werden kann. Allerdings ist es sehr schwierig, auf diese Weise tatsächlich eine Wurmloch-Raumzeit zu entwerfen. Die andere Möglichkeit, welche wohl eher als Ingenieurmethode bezeichnet werden müßte, ist die Vorgabe der Geometrie und die anschließende Berechnung des Energie-Impuls-Tensors, welcher diese Geometrie erzeugt. Das Problem hierbei ist, daß bisher kein physikalisch sinnvoller Energie-Impuls-Tensor, der eine Wurmloch-Raumzeit beschreibt, gefunden werden konnte. Der gängigere Weg, den auch Morris und Thorne wählten, ist die Vorgabe der Geometrie für ein Wurmloch, was sie zu der Form in Abschnitt §6.2 führte.

In Abschnitt §6.3 werden wir uns die einfachste Morris-Thorne-Metrik im Detail anschauen. Dabei gehen wir vor allem auf die Gezeitenkräfte und die Darstellung anhand des Einbettungsdiagramms ein. Für die Visualisierung benötigen wir zeit- und lichtartige Geodäten, die wir in diesem Fall sogar analytisch in Abschnitt §6.4 angeben können. Mit deren Hilfe wird es uns dann möglich sein, eine Geodäte zwischen zwei Punkten zu bestimmen. Als Spezialfall können wir dann auch Entfernung und Schlundradius durch Aussenden eines Lichtblitzes ermitteln.

Der Leitfaden dieser Arbeit ist die Visualisierung, weshalb wir in Abschnitt §6.5 einige Beispiel-Situationen für die einfachste Morris-Thorne-Raumzeit visualisieren und besprechen wollen. In Abschnitt §6.6 geben wir dann noch einen kurzen Ausblick auf mögliche weitere Wurmloch-Visualisierungen.

6.1 Definition eines statischen Wurmlochs

Hochberg und Visser legen als einzige Voraussetzung für ihre Definition eines Wurmlochs fest, daß die Raumzeit statisch, also in der Form

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + {}^{(3)}g_{ij} dx^i dx^j = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + dn^2 + {}^{(2)}g_{ab} dx^a dx^b \quad (6.1.1)$$

mit $\Phi = \Phi(x^i)$ darstellbar sein soll (siehe auch Wald [107]). Die hintere Form der Gleichung (6.1.1) ist in Gaußschen Normal-Koordinaten $x^i = (x^a; n)$ gegeben, wobei $n = 0$ die zweidimensionale Hyperfläche Σ bezeichnet.¹ Der Flächeninhalt A von Σ lautet

$$A(\Sigma) = \int \sqrt{{}^{(2)}g} d^2x. \quad (6.1.2)$$

Der Wurmlochhals ist damit eine zweidimensionale Hyperfläche Σ mit kleinstem Flächeninhalt A für einen räumlichen Schnitt konstanter Zeit. Es muß also die Variation der Fläche A nach der Richtung n verschwinden,

$$\delta A(\Sigma) = \int \frac{\partial \sqrt{{}^{(2)}g}}{\partial n} \delta n(x) d^2x \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.1.3)$$

Aus der notwendigen Bedingung, daß der Flächeninhalt A der Hyperfläche Σ extremal sein muß, folgt, daß die Spur $\text{tr}K$ der äußeren Krümmung K_{ab} von Σ , welche hier einfach durch

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \frac{\partial {}^{(2)}g_{ab}}{\partial n} \quad (6.1.4)$$


gegeben ist, verschwindet. Die hinreichende Bedingung — A ist minimal — erfordert zusätzlich, daß die Ableitung der Spur nach dem Normalenvektor ebenso verschwindet. Zusammen haben wir die sogenannte *flare-out* Bedingung

$$\text{tr}K = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \text{tr}K}{\partial n} = 0, \quad (6.1.5)$$

die eine Raumzeit lokal erfüllen muß, damit ein Wurmlochhals vorhanden ist. Hochberg und Visser unterscheiden eine einfache, eine starke und eine schwache flare-out-Bedingung, je nach Strenge der Ableitung in (6.1.5); darauf wollen wir hier aber nicht näher eingehen, da wir nur die einfache flare-out-Bedingung $\partial \text{tr}K / \partial n \leq 0$ verwenden.

6.2 Morris-Thorne-Raumzeit

Michael Morris und Kip Thorne betrachteten eine Wurmloch-Raumzeit [67] aus der Motivation heraus, für den Roman „Contact“ von Carl Sagan [85] eine möglichst realistische Basis für schnelle, interstellare Raumflüge zu schaffen. Voraussetzung dafür ist natürlich, daß solch ein Wurmloch auch durchquerbar ist, also in endlicher Zeit von einem Menschen ohne Schaden durchquert werden kann.

Morris und Thorne stellen in ihrem Artikel [67] einige Eigenschaften auf, welche ein durchquerbares Wurmloch ihrer Meinung nach besitzen sollte. Die grundlegendste Eigenschaft einer Wurmloch-Metrik ist das Vorhandensein eines „Halses“, der zwei asymptotisch flache Regionen miteinander verbindet. Das Einbettungsdiagramm sollte die Form der Abbildung  6.1 (Seite 116) besitzen. Weiterhin darf es keinen Horizont besitzen, damit eine Hin- und Rückreise möglich ist. Die Gezeitenkräfte müssen für einen Reisenden erträglich sein. Natürlich sollte eine Reise durch das Wurmloch sowohl für den Reisenden selbst als auch für einen äußeren Beobachter in einer vernünftigen Zeit möglich sein. Materie und Felder, die eine Wurmloch-Raumzeit erzeugen, sollten physikalisch sinnvoll sein². Da ein Reisender mit seinem Raumschiff Masse besitzt, wird diese Masse die Wurmloch-Raumzeit beeinflussen. Das Wurmloch sollte also auch gegen Störungen stabil sein. Aus praktischer Hinsicht verlangten Morris und Thorne noch zusätzlich, daß die Wurmloch-Metrik statisch und sphärisch-symmetrisch sein soll.

¹Indizes $i, j, \dots = \{1, 2, 3\}$ kennzeichnen Koordinaten auf der Hyperfläche $t = \text{const}$, wohingegen Indizes $a, b, \dots = \{1, 2\}$ für Koordinaten auf Σ stehen.

²Wie sich leider herausstellt, ist dies das größte und bis heute noch ungelöste Problem bei Wurmlochern.

6.2.1 Form der Metrik

Von diesen Forderungen geleitet, kann man folgenden Ansatz für eine Wurmloch-Metrik wählen:

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r)} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b_{\pm}(r)/r} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (6.2.1)$$

wobei $\Phi_{\pm}(r)$ die Rotverschiebungs- und $b_{\pm}(r)$ die Formfunktionen darstellen. Die Zeit-Koordinate t liegt im Intervall $(-\infty, \infty)$, für die Radial-Koordinate gilt $r_0 \leq r < \infty$. Der Definitionsbereich der sphärischen Koordinaten ist wie gewohnt $0 < \vartheta < \pi$ und $0 < \varphi < 2\pi$.

Wir haben hier den etwas allgemeineren Ansatz von Visser [106] gewählt, der für beide Seiten des Wurmlochs verschiedene Rotverschiebungs- und Formfunktionen zuläßt. Die Raumzeit muß hier durch zwei Karten beschrieben werden. Im folgenden wollen wir mit der Karte 1 das *obere Universum* (+) und mit Karte 2 das *untere Universum* (−) beschreiben (siehe auch Abb. 6.1). Beide Karten treffen sich im Wurmlochhals bei $r = r_0$. Dieser hat die Topologie einer 2-Sphäre und den Flächeninhalt $A_{\text{Hals}} = 4\pi r_0^2$. Wir wollen im weiteren auch verlangen, daß die Zeitkoordinate t am Wurmlochhals stetig ist, $\Phi_+(r_0) = \Phi_-(r_0)$.

Aus der Forderung der asymptotischen Flachheit folgt, daß sowohl $\Phi_{\pm}(r)$ wie auch $b_{\pm}(r)$ für $r \rightarrow \infty$ jeweils gegen einen endlichen Wert streben müssen:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{\pm}(r) &= \Phi_{\pm}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} b_{\pm}(r) &= b_{\pm}. \end{aligned}$$

Jedoch müssen die Grenzwerte nicht identisch sein, so kann etwa die Zeit auf beiden Seiten unterschiedlich schnell vergehen.

Damit die Metrik (6.2.1) tatsächlich ein Wurmloch darstellt, müssen wir noch eine weitere Bedingung an die Form-Funktion $b_{\pm}(r)$ stellen. Wir halten uns hier an die von Hochberg und Visser gegebene *einfache flare-out Bedingung* aus Abschnitt §6.1. Aus der Forderung, daß der Wurmlochhals eine zweidimensionale Hyperfläche Σ kleinsten Flächeninhalts $A(\Sigma) = \min$ ist, schließen sie, daß die Spur der äußeren Krümmung K_{ab} im Wurmlochhals verschwinden und die Ableitung dieser Spur nach dem Normalenfeld \mathbf{n} kleiner als Null sein muß:

$$\text{tr}(K) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \text{tr}(K)}{\partial n} \leq 0. \quad (6.2.2)$$

Zur Berechnung der äußeren Krümmung K_{ab} müssen wir zunächst auf dem Zeitschnitt $t = \text{const}$ Gaußsche Normalkoordinaten $x^i = (x^a; n)$ einführen. Der Ansatz

$$\frac{dr^2}{1 - b_{\pm}(r)/r} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = {}^{(2)}g_{ab} dx^a dx^b + dn^2 \quad (6.2.3)$$

legt es nahe, die Koordinaten $(x^1 = \vartheta, x^2 = \varphi, n = l)$ als Gaußsche Normalkoordinaten zu verwenden, wobei l die sogenannte Eigenradial-Koordinate mit

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - b_{\pm}(r')/r'}} \quad (6.2.4)$$

und

$${}^{(2)}g_{ab} = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (6.2.5)$$

ist. Aus der äußeren Krümmung

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \frac{\partial {}^{(2)}g_{ab}}{\partial l}$$

folgt für deren Spur

$$\text{tr}(K) = K_{ab} g^{ab} = \mp \frac{2}{r} \sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r}}. \quad (6.2.6)$$

Aus der einfachen flare-out Bedingung (6.2.2) folgt nun

$$b_{\pm}(r_0) = r_0 =: b_0. \quad (6.2.7)$$

Die Ableitung der Spur liefert als weitere Einschränkung

$$b'_{\pm}(r_0) \leq 1. \quad (6.2.8)$$

Fordern wir noch zusätzlich, daß der Wurmlochhals glatt ist, $\partial_t \text{tr}(K_+) = \partial_t \text{tr}(K_-)$, dann müssen die beiden Ableitungen der Form-Funktionen im Hals gleich sein:

$$b'_+(r_0) = b'_-(r_0).$$

Die Bedingungen (6.2.7) und (6.2.8) sind identisch mit denen, die Morris und Thorne anschaulich aus dem Einbettungsdiagramm bestimmt haben.

6.2.2 Abwesenheit eines Ereignis-Horizonts

Per Definition ist der Ereignis-Horizont \mathfrak{H} einer asymptotisch flachen Raumzeit der Rand $\partial\Omega$ des Gebiets Ω , welches kausal mit weit entfernten Beobachtern verknüpft ist [99]. Es gibt also für jeden Punkt $p \in \Omega$ eine zeit- oder lichtartige Geodäte, welche p mit dem asymptotisch flachen Raum verbindet. Sowohl die Rotverschiebungsfunktion $\Phi_{\pm}(r)$ als auch die Formfunktion $b_{\pm}(r)$ aus dem Ansatz (6.2.1) sind daraufhin zu prüfen.

6.2.3 Gezeitenkräfte

Die Durchquerbarkeit eines Wurmloches zeigt sich unter anderem an den Gezeitenkräften, die ein Beobachter oder ein Objekt aushalten muß. Wir betrachten der Einfachheit halber zwei freie Testteilchen, welche sich auf radialen zeitartigen Geodäten bewegen und bestimmen die Relativbeschleunigung mittels der Gleichung für die geodätische Abweichung in Tetraden-Darstellung (2.6.2):

$$a_{\text{rel}}^i = K^i_j \eta^j, \quad \text{mit} \quad K^i_j = R^\mu_{\nu\rho\sigma} \epsilon^i_\mu \epsilon_0^\nu \epsilon_0^\rho \epsilon_j^\sigma. \quad (6.2.9)$$

Die Tetraden-Komponenten ϵ_i^μ setzen sich hier aus der natürlichen lokalen Tetrade $\{\mathbf{e}_j\}$ am momentanen Ort des Teilchens und dessen momentaner Geschwindigkeit \mathbf{u} zusammen. Dabei gilt $\epsilon_0 = \mathbf{u}/c = \gamma(\mathbf{e}_t \mp \beta \mathbf{e}_r)$, $\epsilon_1 = \gamma\beta \mathbf{e}_t \mp \gamma \mathbf{e}_r$, $\epsilon_2 = \mathbf{e}_\vartheta$, $\epsilon_3 = \mathbf{e}_\varphi$ mit dem Betrag v der Dreiergeschwindigkeit \vec{v} , die sich auf die momentane Ruhetetrade bezieht. Die Vorzeichenwahl bestimmt die Richtung der Bewegung und sorgt dafür, daß die Tetrade $\{\epsilon_i\}$ ein Rechts-System bildet. Für die Relativbeschleunigung a_{rel}^i und einen raumartigen Verbindungsvektor $\vec{\eta} = (\eta^{\hat{1}}, \eta^{\hat{2}}, \eta^{\hat{3}})$ folgt dann

$$a_{\text{rel}}^{\hat{1}} = \left[-(\Phi'(r)^2 + \Phi''(r)) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^2} \Phi'(r) \right] \eta^{\hat{1}}, \quad (6.2.10a)$$

$$a_{\text{rel}}^{\hat{2}} = \gamma^2 \left[-\frac{\Phi'(r)}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \beta^2 \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^3} \right] \eta^{\hat{2}}, \quad (6.2.10b)$$

$$a_{\text{rel}}^{\hat{3}} = \gamma^2 \left[-\frac{\Phi'(r)}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \beta^2 \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^3} \right] \eta^{\hat{3}}. \quad (6.2.10c)$$

Diese Relativbeschleunigungen sollen nun nicht wesentlich größer als die Erdbeschleunigung ($g \approx 9.8m/s^2$) sein. Die Beschleunigung $a_{\text{rel}}^{\hat{1}}$ in Richtung Wurmloch ist unabhängig von der Geschwindigkeit und, falls die Rotverschiebungsfunktion $\Phi(r)$ konstant ist, verschwindet sie identisch für alle r . Für konstantes $\Phi(r)$ verschwinden im Grenzfall $\beta = 0$ auch die beiden anderen Komponenten der Relativbeschleunigung. Im Wurmlochhals ($r = r_0$) sind die beiden senkrechten Komponenten

$$a_{\text{rel}}^i = \gamma^2 \left[\frac{\beta^2}{2r_0^2} (1 - b'(r_0)) \right] \eta^i \geq 0, \quad (i = \{\hat{1}, \hat{2}\}) \quad (6.2.11)$$

aufgrund der flare-out Bedingung (6.2.8) stets größer Null, wohingegen die parallele Komponente $a_{\text{rel}}^{\hat{1}}$ von der Änderung der Rotverschiebungsfunktion abhängt.

6.2.4 Energiebedingungen

Das heikelste Thema bei Wurmlöchern sind die Energiebedingungen, da diese teilweise verletzt werden. Zunächst benötigen wir den Energie-Impuls-Tensor \mathbf{T} , der die Materieverteilung angibt (siehe z.B. [107],[46]). Ein Beobachter mit der Vierergeschwindigkeit u interpretiert den Ausdruck $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ als Energiedichte. Sei x^μ orthogonal zu u^μ , dann ist $-T_{\mu\nu}u^\mu x^\nu$ die Impulsdichte in x^ν -Richtung. Sei auch y^μ orthogonal zu u^μ , so entspricht $T_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ der $(x^\mu - y^\nu)$ -Komponente des Drucks. Im allgemeinen läßt sich eine lokale Tetrade finden, bei der \mathbf{T} Diagonalgestalt besitzt: $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$ mit der Energiedichte ρ und den Hauptdrücken p_i .

Die *schwache Energiebedingung* (WEC = *weak energy condition*) fordert nun für alle zeitartigen Vektoren ξ^μ , daß

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0. \quad (6.2.12)$$

Entspricht ξ^μ der Vierergeschwindigkeit u^μ eines lokalen Beobachters, so mißt dieser stets eine positive oder verschwindende Energiedichte ρ . Allgemein betrachtet ist die schwache Energiebedingung erfüllt, wenn $\rho \geq 0$ und $\rho + p_i \geq 0$ gilt. Die schwache Energiebedingung kann sogar noch weiter abgeschwächt werden, wenn anstelle von zeitartigen lichtartige Geodäten betrachtet werden. So folgt für lichtartige Vektoren k^μ aus $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$, daß lediglich $\rho + p_i \geq 0$ gelten muß, was als *Nullenergie Bedingung* (NEC = *null energy condition*) bezeichnet wird.

Die *dominante Energiebedingung* (DEC = *dominant energy condition*) fordert neben $T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0$ für alle zeitartigen Vektoren ξ^μ noch zusätzlich, daß der Vektor $T^\mu{}_\nu\xi^\nu$ nicht-raumartig ist. Mit anderen Worten soll die Geschwindigkeit des Energieflusses immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein. Für die Energiedichte bedeutet dies wiederum, daß $\rho \geq 0$ sein muß und die Drücke p_i im Intervall $[-\rho, \rho]$ liegen müssen.

Aus der Raychaudhuri-Gleichung, die eine Aussage über das Verhalten einer Kongruenz zeit- oder lichtartiger Geodäten macht, kann noch eine weitere, die *starke Energiebedingung* (SEC = *strong energy condition*) hergeleitet werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Expansion θ der Kongruenz nicht divergiert, was auf die Bedingung

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq -\frac{1}{2}T = -\frac{1}{2}T^\mu{}_\mu \quad (6.2.13)$$

für alle zeitartige Vektoren ξ^μ führt [46].

Im Fall der allgemeinen Morris-Thorne-Raumzeit mit der Metrik (6.2.1) können wir schnell nachrechnen, daß die NEC verletzt ist. Aus den Feldgleichungen (2.5.4) und dem Einstein-Tensor (E.1.22) erhalten wir im Wurmlochhals $r = r_0$

$$\rho + p_1 = \frac{1}{2r_0^2} (b'(r_0) - 1). \quad (6.2.14)$$

Da aber aus der einfachen flare-out Bedingung die Forderung (6.2.8) erwächst, folgt $\rho + p_1 \leq 0$ und damit ist die NEC nur im Spezialfall $b'(r_0) = 1$ gerade noch erfüllt.

Anstelle der lokalen Energiebedingungen kann man auch, über einen Weg Γ , gemittelte Energiebedingungen definieren (siehe Tipler [104]). So definieren Ford und Roman [35] die gemittelte schwache Energiebedingung (AWEC = *averaged weak energy condition*) über eine vollständige zeitartige Geodäte

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu d\tau \geq 0, \quad (6.2.15)$$

wobei τ die Eigenzeit und u^μ der Tangentenvektor entlang der zeitartigen Geodäten ist.

6.3 Einfachste Morris-Thorne-Metrik

Am Beispiel der einfachsten Morris-Thorne-Metrik wollen wir uns das generelle Aussehen eines Wurmlochs vor Augen führen. Die Durchquerbarkeit dieses Wurmlochs ist leicht zu sehen, weshalb wir auch nur auf die Gezeitenkräfte eingehen wollen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist hier das Einbettungsdiagramm einer zweidimensionalen Hyperfläche in den euklidischen Raum.

6.3.1 Metrik

Die einfachste Metrik, die ein Wurmloch beschreibt, ist die von Morris und Thorne in ihrem Artikel [67] erwähnte Raumzeit³

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2) (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (6.3.1)$$

Die Koordinatenzeit t entspricht der globalen Zeit in der gesamten Raumzeit. Die Morris-Thorne-Metrik (im folgenden als MT-Metrik abgekürzt) ist sphärisch-symmetrisch. Dies erkennt man an dem Oberflächenelement $(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$ einer 2-Sphäre mit der Fläche $A = 4\pi(b_0^2 + l^2)$ und der Unabhängigkeit der restlichen Metrik-Koeffizienten von ϑ und φ . Die minimale Fläche $A_{\min} = 4\pi b_0^2$ bei $l = 0$ kennzeichnet den Schlund des Wurmlochs. Der radiale Abstand wird in der Eigenradial-Koordinaten l ausgedrückt. Im Grenzfall $|l| \mapsto \infty$ erhält man zwei asymptotisch flache Gebiete. Die Region $l > 0$ soll fortan als oberes, die Region $l < 0$ als unteres Universum bezeichnet werden. Anstatt solch einer inter-universalen Brücke sind auch andere Topologien, wie etwa eine intra-universale Verbindung, denkbar (vergleiche MTW [65]).

6.3.2 Gezeitenkräfte

Zwei Testteilchen sollen sich mit der Vierergeschwindigkeit u^μ frei in der $(\vartheta = \pi/2)$ -Ebene bewegen; ihre Beschleunigung

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho \quad (6.3.2)$$

verschwindet dann identisch. Sind die beiden Teilchen durch einen raumartigen Vektor η^μ voneinander getrennt, so folgt aus der Gleichung der geodätischen Abweichung (2.6.1) für die relative Beschleunigung

$$a_{\text{rel}}^\mu = \frac{D^2 \eta^\mu}{D\lambda^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} u^\nu u^\rho \eta^\sigma. \quad (6.3.3)$$

Für zeitartige Geodäten erhalten wir mit den Anfangsbedingungen aus Gleichung (6.4.10)

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{l} \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v \sqrt{1 - \sin^2 \tau \frac{b_0^2 + l_i^2}{b_0^2 + l^2}} \\ 0 \\ v \sin \tau \frac{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}{b_0^2 + l^2} \end{pmatrix}. \quad (6.3.4)$$

Daher folgt für die Relativbeschleunigung a_{rel}^μ in Koordinatendarstellung

$$a_{\text{rel}}^0 = 0, \quad (6.3.5a)$$

$$a_{\text{rel}}^l = \gamma^2 v^2 \frac{b_0^2 \sin \tau}{(b_0^2 + l^2)^2} \left[\frac{b_0^2 + l_i^2}{b_0^2 + l^2} \sin \tau \eta^l - \sqrt{b_0^2 + l_i^2} \sqrt{1 - \sin^2 \tau \frac{b_0^2 + l_i^2}{b_0^2 + l^2}} \eta^\varphi \right], \quad (6.3.5b)$$

$$a_{\text{rel}}^\vartheta = \gamma^2 v^2 \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \left[1 - 2 \sin^2 \tau \frac{b_0^2 + l_i^2}{b_0^2 + l^2} \right] \eta^\vartheta, \quad (6.3.5c)$$

$$a_{\text{rel}}^\varphi = \gamma^2 v^2 \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2} \left[-\sin \tau \frac{\sqrt{b_0^2 + l_i^2} \sqrt{1 - \sin^2 \tau \frac{b_0^2 + l_i^2}{b_0^2 + l^2}}}{b_0^2 + l^2} \eta^l + \left(1 - \sin^2 \tau \frac{b_0^2 + l_i^2}{b_0^2 + l^2} \right) \eta^\varphi \right]. \quad (6.3.5d)$$

Ruhen beide Teilchen ($v = 0$), so verschwinden alle Beschleunigungskomponenten, da die Rotverschiebungsfunktion $\Phi(r) \equiv 0$ ist (vgl. Abschnitt §6.2.3). Betrachten wir die zwei Spezialfälle der rein radialen Bahn und der Kreisbahn im Wurmlochhals aus dem Abschnitt §6.4.2, so folgt für die radiale Bahn

$$a_{\text{rel,radial}}^l = 0, \quad a_{\text{rel,radial}}^\vartheta = \frac{\gamma^2 v^2 b_0^2}{(b_0^2 + (l_i \pm vt)^2)^2} \eta^\vartheta, \quad a_{\text{rel,radial}}^\varphi = \frac{\gamma^2 v^2 b_0^2}{(b_0^2 + (l_i \pm vt)^2)^2} \eta^\varphi$$

³Diese Metrik stammte ursprünglich von Ellis [27]. Er bezeichnete sie allerdings als Abflußloch (drainhole) und erkannte auch noch nicht deren Bedeutung als Wurmloch.

und für die Kreisbahn ($l = l_i = 0$)

$$a_{\text{rel,kreis}}^l = \frac{\gamma^2 v^2}{b_0^2} \eta^l, \quad a_{\text{rel,kreis}}^\vartheta = a_{\text{rel,kreis}}^\varphi = 0.$$

Bei der radialen Bahn spielt die Richtung der Geschwindigkeit keine Rolle, da nur der tatsächliche Ort $l = l_i \pm vt$ und das Betragsquadrat der Geschwindigkeit eingehen. Der Beobachter spürt daher in der einfachsten Morris-Thorne-Raumzeit auf radialen Bahnen stets eine abstoßende Gezeitenkraft. Soll die Beschleunigung für einen Körper mit der Ausdehnung $\eta = 1m$ nicht größer als $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ (Erdbeschleunigung) sein, so darf die Geschwindigkeit v im Schlund ($l = 0$) den Wert

$$v_{\text{max}}^2 = \frac{\alpha}{1 + \alpha/c^2} \approx \alpha, \quad \alpha = \frac{b_0^2 g}{\eta} \quad (6.3.6)$$

nicht überschreiten. Für ein Wurmloch mit dem Schlundradius $b_0 = 10 \text{ m}$ ist $v_{\text{max}} \approx 31.3 \text{ m/s}$.

6.3.3 Einbettungsdiagramm

Da die MT-Metrik statisch ist, genügt es, einen Zeitschnitt $t = \text{const}$ zu betrachten. Weiterhin kann man sich aufgrund der sphärischen Symmetrie auf einen Raumschnitt $\vartheta = \pi/2$ beschränken. Die Metrik der übrigbleibenden zweidimensionalen Hyperfläche lautet

$$d\sigma_{\text{Hyperfläche}}^2 = dl^2 + (b_0^2 + l^2) d\varphi^2 = \frac{1}{1 - b_0^2/r^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

mit der Transformation $r^2 = b_0^2 + l^2$. Diese Hyperfläche soll nun als Rotationsfläche in den dreidimensionalen euklidischen Raum, ausgedrückt in Zylinderkoordinaten,

$$d\sigma_{\text{euklid}}^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

eingebettet werden. Unter Einbettung verstehen wir hier das Aufsuchen einer Fläche im euklidischen Raum, dargestellt durch den Graphen $z = z(r, \varphi)$, welche die gleiche innere Geometrie besitzt wie die Hyperebene. Identifizieren wir die Koordinaten (r, φ) beider Flächen, so erhalten wir aus der Forderung $d\sigma_{\text{Hyperfläche}}^2 = d\sigma_{\text{euklid}}^2$ die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{1}{1 - b_0^2/r^2} - 1}.$$

Die Lösung $z(r)$ dieser Differentialgleichung stellt die Einbettung der Hyperfläche in den euklidischen Raum dar:

$$z(r) = \pm b_0 \ln \left[\frac{r}{b_0} + \sqrt{\left(\frac{r}{b_0} \right)^2 - 1} \right].$$

Das Vorzeichen kennzeichnet das obere (+) bzw. das untere (−) Universum (vgl. Abb. 6.1). Die Begriffe „oberes“ und „unteres“ Universum sind etwas irreführend, da sie keine physikalische Relevanz haben. Das obere Universum ist nicht etwa räumlich oberhalb des unteren; lediglich das Einbettungsdiagramm 6.1 scheint dies zu vermitteln.

Die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 sowie die Gaußsche Krümmung K und die mittlere Krümmung H der eingebetteten Hyperfläche können wir analog der Schwarzschild-Raumzeit (siehe Anhang §D.1.4) berechnen:

$$\kappa_1 = -\frac{b_0}{r^2}, \quad \kappa_2 = \frac{b_0}{r^2}, \quad K = \kappa_1 \kappa_2 = -\frac{b_0^2}{r^4}, \quad H = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) = 0. \quad (6.3.7)$$

Die mittlere Krümmung verschwindet im Wurmlochhals ($r = b_0$), was die Tatsache bestätigt, daß es sich beim Wurmlochhals um eine Minimalfläche handelt.

Wichtig ist, sich vor Augen zu führen, daß nur die Hyperfläche Teil der eigentlichen Raumzeit ist. Der scheinbare Tunnel, wie er stets in Science-Fiction-Filmen zu sehen ist, gehört nicht zur Wurmloch-Raumzeit!

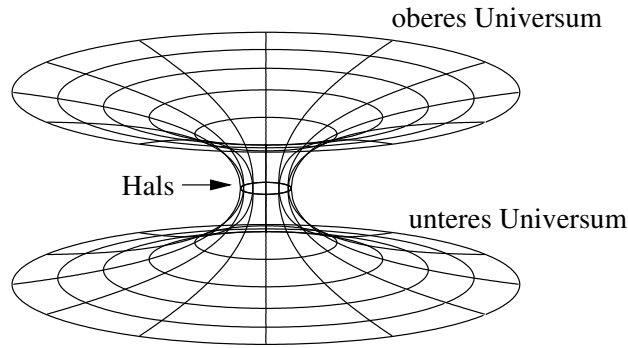


Abbildung 6.1: Einbettungsdiagramm der Hyperfläche ($t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$) in den euklidischen Raum. Bei der Koordinate $l = 0$ befindet sich der Schlund bzw. Hals des Wurmlochs. Der Bereich $l > 0$ wird als oberes, der Bereich $l < 0$ als unteres Universum bezeichnet.

6.4 Geodäten in der Morris-Thorne-Raumzeit

Der visuelle Eindruck, den man von einer Raumzeit erhält, entsteht ausschließlich über Nullgeodäten, die ins Auge des Betrachters fallen. Die Bewegung von einzelnen Test-Teilchen⁴ wird hingegen durch zeitartige Geodäten beschrieben. Wir wollen hier beliebige Geodäten betrachten und uns im Abschnitt §6.4.1 um die Anfangsbedingungen zur Integration der Geodätengleichung kümmern. In Abschnitt §6.4.2 werden wir uns um die Darstellung der Geodäten mit elliptischen Funktionen und Integralen bemühen, deren Nutzen wir in Abschnitt §6.4.3 erörtern wollen.

6.4.1 Geodätengleichung

Eine Geodäte in affiner Parametrisierung erfüllt die Geodätengleichung (2.4.4)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (6.4.1)$$

mit dem affinen Parameter λ . Für die MT-Metrik (6.3.1) ist $x^\mu = \{t, l, \vartheta, \varphi\}$. Die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung hängt sowohl vom Anfangsort als auch von der Anfangsrichtung ab. Den Anfangsort geben wir direkt in Koordinaten $(t_i, l_i, \vartheta_i, \varphi_i)$ an. Die Anfangsrichtung \vec{y} legen wir bezüglich eines lokalen Beobachters am Anfangsort fest (Abb. 6.2).

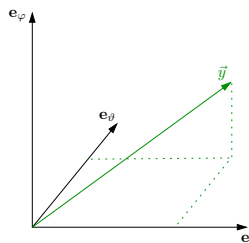


Abbildung 6.2: Die lokale Tetrade befindet sich am Ort $(t_i, l_i, \vartheta_i, \varphi_i)$. Die Anfangsrichtung \vec{y} ist bezogen auf die lokale Tetrade $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$ gegeben.

⁴Alle Objekte, die wir zur Visualisierung einer Raumzeit verwenden, sollen Test-Teilchen sein. Von ihnen nehmen wir an, daß sie keinerlei Rückwirkung auf die Raumzeit haben.

Das Bezugssystem eines ruhenden Beobachters beschreiben wir mit einer lokalen Tetrade

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{c} \partial_t, \quad \mathbf{e}_l = \partial_l, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + l^2}} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + l^2} \sin \vartheta} \partial_\varphi. \quad (6.4.2)$$

Die Anfangsrichtung $\mathbf{y} = (y^t, \vec{y})_{\mathbf{e}_a} = (\xi^t, \xi^l, \xi^\vartheta, \xi^\varphi)_{\partial_\mu}$ setzt sich zunächst aus drei Raumrichtungen zusammen (siehe Abb. 6.2):

$$\begin{aligned} \vec{y} &= y^l \mathbf{e}_l + y^\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + y^\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ &= y^l \partial_l + \frac{y^\vartheta}{\sqrt{b_0^2 + l^2}} \partial_\vartheta + \frac{y^\varphi}{\sqrt{b_0^2 + l^2} \sin \vartheta} \partial_\varphi \\ &= \xi^l \partial_l + \xi^\vartheta \partial_\vartheta + \xi^\varphi \partial_\varphi. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Basis-Vektoren \mathbf{e}_a durch die Koordinaten-Basis ∂_μ ersetzt, um die Anfangsrichtung ξ^μ für die Differentialgleichung (6.4.1) zu erhalten. Für die fehlende Null-Komponente ξ^t müssen wir eine Fallunterscheidung machen hinsichtlich des Typs der Geodäten, welche wir betrachten wollen. Hierfür ziehen wir den Tangentenvektor $\xi^\mu = dx^\mu/d\lambda$ der Geodäte zu Hilfe. Die Länge $|\xi|^2 = \xi^\mu \xi_\mu$ des Tangentialvektors ist eine invariante Größe. Aufgrund der Signatur der MT-Metrik gilt $|\xi|^2 < 0$ für zeitartige, $|\xi|^2 = 0$ für lichtartige und $|\xi|^2 > 0$ für raumartige Geodäten.

Mit dem Anfangsort $(t_i, l_i, \vartheta_i, \varphi_i)$ und der Anfangsrichtung $\xi^\mu = \dot{x}^\mu$ können wir nun die Differentialgleichung (6.4.1) eindeutig integrieren. Im allgemeinen ist die Integration der Geodätengleichung nur numerisch durchführbar. In einzelnen Fällen, wie etwa der MT-Metrik, findet man auch eine analytische Darstellung in Form von elliptischen Funktionen.

Anfangsbedingungen für lichtartige Geodäten

Lichtartige Geodäten heißen auch nullartig, da ihre Länge Null ist. Dem entsprechend ist

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = -(\xi^t)^2 + (\xi^l)^2 + (b_0^2 + l^2) (\xi^\vartheta)^2 + (b_0^2 + l^2) \sin^2 \vartheta (\xi^\varphi)^2 \\ &= -(\xi^t)^2 + (y^l)^2 + (y^\vartheta)^2 + (y^\varphi)^2. \end{aligned}$$

Die freie Wahl im Vorzeichen von ξ^t ermöglicht, die Null-Geodäte in die Vergangenheit ($\text{sign } \xi^t = -1$) oder in die Zukunft ($\text{sign } \xi^t = +1$) zu verfolgen.

Anfangsbedingungen für zeitartige Geodäten

Ein Teilchen habe, bezogen auf das System des lokalen Beobachters, die Dreiergeschwindigkeit $\vec{v} = (v^t, v^\vartheta, v^\varphi)_{\mathbf{e}_a}$. Der affine Parameter λ der Geodäten sei die Eigenzeit τ des Teilchens. Die Anfangsrichtung \mathbf{y} entspricht dann der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} des Teilchens

$$\mathbf{u} = u^t \partial_t + u^l \partial_l + u^\vartheta \partial_\vartheta + u^\varphi \partial_\varphi, \quad \text{mit } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Die Dreier- und Vierergeschwindigkeit hängen über

$$\mathbf{u} = \gamma (c \mathbf{e}_t + v^l \mathbf{e}_l + v^\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v^\varphi \mathbf{e}_\varphi)$$

bzw.

$$u^t = \gamma, \quad u^l = \gamma v^l, \quad u^\vartheta = \frac{\gamma v^\vartheta}{\sqrt{b_0^2 + l^2}}, \quad u^\varphi = \frac{\gamma v^\varphi}{\sqrt{b_0^2 + l^2} \sin \vartheta}$$

miteinander zusammen. Da $u_\mu u^\mu = -c^2$ folgt für die noch unbekannte (reelle) Größe γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^l/c)^2 - (v^\vartheta/c)^2 - (v^\varphi/c)^2}}.$$

Damit ist auch sichergestellt, daß die Dreiergeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muß.

Anfangsbedingungen für raumartige Geodäten

Die invariante Länge einer raumartigen Geodäte liefert folgende Bedingung für die Startrichtung:

$$c^2 = g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = c^2 \left[-(\xi^t)^2 + (y^l)^2 + (y^\vartheta)^2 + (y^\varphi)^2 \right].$$

Betrachtet man raumartige Geodäten auf der Hyperfläche ($t = \text{const}$), so folgt mit $\xi^t = 0$, daß die restlichen Richtungen auf Eins normiert sein müssen. Der zusätzliche Faktor c^2 auf der rechten Seite der obigen Gleichung kommt von der Umskalierung des affinen Parameters $\lambda \rightarrow \lambda/c$ damit die Dimensionen stimmen.

6.4.2 Analytische Darstellung der Geodäten

Euler-Lagrange-Gleichung und effektives Potential

Betrachten wir das Variationsproblem [82]

$$\delta \int \mathcal{L} ds = 0, \quad (6.4.3)$$

mit der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. Ein Punkt steht für die Ableitung nach einem affinen Parameter λ . Die Morris-Thorne-Metrik ist statisch und sphärisch-symmetrisch; daher genügt es, Geodäten in der ($\vartheta = \pi/2$)-Ebene zu betrachten. Die Lagrange-Funktion für die MT-Metrik lautet demnach:

$$\mathcal{L} = -c^2\dot{t}^2 + \dot{l}^2 + (b_0^2 + l^2)\dot{\varphi}^2. \quad (6.4.4)$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad x^\mu = \{t, r, \varphi\} \quad (6.4.5)$$

folgen zwei Konstanten der Bewegung $c^2\dot{t} = k$ und $(b_0^2 + l^2)\dot{\varphi} = h$. Setzen wir diese in die Lagrange-Funktion (6.4.4) ein und nützen aus, daß für Geodäten die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = \kappa c^2 = \text{const}$ ist, so folgt eine Art Energie-Bilanz-Gleichung

$$\dot{l}^2 = \frac{k^2}{c^2} + \kappa c^2 - \frac{h^2}{b_0^2 + l^2} = \frac{k^2}{c^2} - V_{\text{eff}} \quad (6.4.6)$$

mit dem effektiven Potential $V_{\text{eff}} = -\kappa c^2 + h^2/(b_0^2 + l^2)$. Dieses Potential beschreibt die Drehimpulsbarriere der Geodäten. Der Parameter κ entscheidet darüber, welchen Typ von Geodäte man betrachten will. Besitzt die Metrik die Signatur $(-+++)$, so gilt

$$\kappa = \begin{cases} -1 & : \text{zeitartig} \\ 0 & : \text{lichtartig} \\ 1 & : \text{raumartig} \end{cases}.$$

Anhand des effektiven Potentials (Abb. 6.3) können wir nun zwei Fälle für das Verhalten einer Geodäte unterscheiden. Entweder kann die Geodäte die Drehimpulsbarriere überwinden und gelangt so in das andere Universum, oder sie bleibt in dem Universum, in welchem sie auch gestartet ist.

Je nach Typ der Geodäten sind die Konstanten der Bewegung k und h , sowie das effektive Potential zu interpretieren. Zeitartige Geodäten beschreiben Teilchen mit Geschwindigkeiten $v < c$; k spielt dann die Rolle der kinetischen Energie und h die Rolle des Drehimpulses. In diesem Fall können wir Abbildung 6.3 wie aus der klassischen Mechanik bekannt interpretieren. Besitzt ein Teilchen genügend kinetische Energie, so kann es den Potentialwall überwinden. Im Fall von lichtartigen Geodäten hat nur der Quotient $h/k = b$ eine Bedeutung als effektiver Stoßparameter. Für eine raumartige Geodäte mit $t = \text{const}$ ist $k = 0$; sie kann nur durch das Wurmloch ins andere Universum gelangen, wenn $V_{\text{eff}}(l = 0) \leq 0$.

bleibt eine Geodäte im gleichen Universum, so gibt es einen geringsten radialen (minimalen) Abstand l_{min} der Geodäte zum Wurmloch-Schlund ($l = 0$). Diesen Umkehrpunkt erhalten wir aus (6.4.6) mit der Forderung $\dot{l} = 0$:

$$l_{\text{min}}^2 = \frac{h^2}{k^2/c^2 + \kappa c^2} - b_0^2. \quad (6.4.7)$$

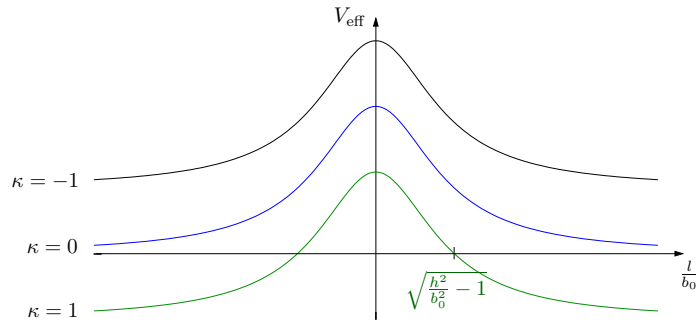


Abbildung 6.3: Effektives Potential V_{eff} mit bestimmtem h für eine zeitartige ($\kappa = -1$), eine lichtartige ($\kappa = 0$) und eine raumartige ($\kappa = 1$) Geodäte.

Daraus können wir das kritische Verhältnis zwischen h und k bestimmen, das darüber entscheidet, ob die Geodäte im gleichen Universum bleibt oder durch das Wurmloch ins andere Universum gelangt. Im kritischen Fall ist der Umkehrpunkt genau im Wurmlochschlund:

$$l_{\min} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h_{\text{krit}}^2}{k_{\text{krit}}^2/c^2 + \kappa c^2} = b_0^2. \quad (6.4.8)$$

Konstanten der Bewegung und Anfangsbedingungen

Aufgrund der sphärischen Symmetrie können wir das Koordinatensystem stets so drehen, daß eine Geodäte vollständig in der ($\vartheta = \pi/2$)-Ebene zu liegen kommt. Die Anfangsbedingungen aus dem Abschnitt §6.4.1 reduzieren sich deshalb auf die e_t - und e_φ -Richtung (Abb. 6.4).

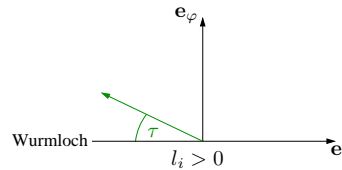


Abbildung 6.4: Das Koordinatensystem ist so gedreht, daß eine Geodäte vollständig in der $\vartheta = \pi/2$ -Ebene zu liegen kommt. Die Startrichtung kann dann durch den Winkel τ ($0 \leq \tau \leq \pi$) ausgedrückt werden, der stets bezogen auf die Richtung zum Wurmlochschlund ausgerichtet sein soll.

Aufgrund der hohen Symmetrie können wir die Koordinaten stets so wählen, daß wir uns auf einen Startort mit $l_i > 0$ und eine Startrichtung τ ($0 \leq \tau \leq \pi$) beschränken können.

Die Anfangsrichtung $\mathbf{y} = \mathbf{u} = \gamma (c\mathbf{e}_t + v^i \mathbf{e}_i)$ einer zeitartigen Geodäten setzt sich dann zusammen aus

$$\vec{v} = -v \cos \tau \mathbf{e}_t + v \sin \tau \mathbf{e}_\varphi = -v \cos \tau \partial_t + \frac{v \sin \tau}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}} \partial_\varphi \quad (6.4.9)$$

und der Null-Komponenten $u^t = \pm 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \pm \gamma$ mit $v < c$. Daher gilt für die Konstanten der Bewegung:

$$k = c^2 \dot{t}|_{\lambda=0} = c^2 u^t = \pm c^2 \gamma \quad \text{und} \quad (6.4.10a)$$

$$h = (b_0^2 + l_i^2) \dot{\varphi}|_{\lambda=0} = (b_0^2 + l_i^2) u^\varphi = \gamma v \sin \tau \sqrt{b_0^2 + l_i^2}. \quad (6.4.10b)$$

Das Vorzeichen entscheidet wieder darüber, ob sich die Geodäte vorwärts oder rückwärts in der Zeit bewegt. Bei einer *lichtartigen* Geodäten hat nur der Quotient $b = h/k$ der beiden Konstanten eine Bedeutung als scheinbarer Stoßparameter (vgl. Schwarzschild-Metrik [107]). Normieren wir die Richtung \vec{y} auf Eins, so folgt aus

$$\vec{y} = -\cos \tau \mathbf{e}_l + \sin \tau \mathbf{e}_\varphi \quad (6.4.11)$$

für die Konstanten der Bewegung

$$k = c^2 \dot{t}|_{\lambda=0} = \pm c^2 \quad \text{und} \quad (6.4.12a)$$

$$h = (b_0^2 + l_i^2) \dot{\varphi}|_{\lambda=0} = c \sin \tau \sqrt{b_0^2 + l_i^2}. \quad (6.4.12b)$$

Die Anfangsrichtung einer *raumartigen* Geodäte setzt sich aus der Raumrichtung

$$\vec{y} = -\zeta \cos \tau \mathbf{e}_l + \zeta \sin \tau \mathbf{e}_\varphi \quad (6.4.13)$$

und der zugehörigen Zeitkomponente $y^t = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ zusammen. Die Konstanten der Bewegung lauten daher

$$k = c^2 \dot{t}|_{\lambda=0} = c^2 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{und} \quad (6.4.14a)$$

$$h = (b_0^2 + l_i^2) \dot{\varphi}|_{\lambda=0} = c \zeta \sin \tau \sqrt{b_0^2 + l_i^2}. \quad (6.4.14b)$$

Den Umkehrpunkt aus Gleichung (6.4.7) können wir nun auch mit der Startrichtung τ formulieren:

$$l_{\min}^2 = l_i^2 \sin^2 \tau - b_0^2 \cos^2 \tau. \quad (6.4.15)$$

Anstelle der kritischen Werte h_{krit} und k_{krit} , die darüber entscheiden, ob eine Geodäte im gleichen Universum bleibt oder nicht, kann man auch einen kritischen Wert für den Winkel τ angeben. Aus den Gleichungen (6.4.10), (6.4.12) und (6.4.14) folgt mit (6.4.8), daß unabhängig vom Typ der Geodäten der kritische Wert τ_{krit} für einen Beobachter am Ort l_i stets

$$\tau_{\text{krit}} = \arcsin \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}} \quad (6.4.16)$$

ist. Für Startwinkel $\tau < \tau_{\text{krit}}$ gelangen Geodäten in das andere Universum; gilt $\tau > \tau_{\text{krit}}$, so bleiben sie im Ausgangsuniversum. Mit $\tau = \tau_{\text{krit}}$ nähert sich eine Geodäte asymptotisch dem Wurmlochhals.

Radiale Bahnbewegung

Für Geodäten, die radial verlaufen, vereinfacht sich die Lagrange-Funktion (6.4.4) noch weiter auf

$$\mathcal{L} = -c^2 \dot{t}^2 + \dot{l}^2 = \kappa c^2.$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen und den Anfangswerten aus Abschnitt §6.4.2 können wir sofort die Bahnen $l = l(t)$ der Geodäten angeben. Mit $dl/dt = \pm c^2 \sqrt{(\kappa c^2 + k^2/c^2)/k^2}$ gilt:

$$l = \pm ct + l_i \quad \text{für} \quad \kappa = 0, \quad (6.4.17a)$$

$$l = \pm vt + l_i \quad \text{für} \quad \kappa = -1, \quad (6.4.17b)$$

$$l = \frac{c\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} t + l_i \quad \text{für} \quad \kappa = 1. \quad (6.4.17c)$$

Es handelt sich dabei um rein lineare Bewegungen. Für die zeitartige Geodäte bedeutet dies, daß sie für $v = 0$ an ihrem Ort verweilen kann und nicht etwa ins Wurmloch gezogen wird.

Nichtradiale Bahnbewegung

Wir wollen nun eine analytische Darstellung für Geodäten in der MT-Raumzeit bestimmen, die sich nicht auf einer radialen Bahn bewegen. Dazu betrachten wir die Differentialgleichung für die Bahnbewegung $l = l(\varphi)$. Aus Gleichung (6.4.6) folgt mit $\dot{l} = (dl/d\varphi) \dot{\varphi}$:

$$\left(\frac{dl}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\dot{l}^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{\kappa c^2 + k^2/c^2}{h^2} (b_0^2 + l^2)^2 - (b_0^2 + l^2). \quad (6.4.18)$$

Die Substitution $r = \sqrt{b_0^2 + l^2}$ führt uns auf die Darstellung

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = (r^2 - b_0^2) \left(\frac{\kappa c^2 + k^2/c^2}{h^2} r^2 - 1\right). \quad (6.4.19)$$

Für die Radialkoordinate r haben wir bewußt nur das positive Vorzeichen vor der Wurzel gewählt, damit r zur gewohnten „Schwarzschild“-Radialkoordinate wird. Um aber immer noch die gesamte Raumzeit überdecken zu können, müssen wir eine weitere Karte einführen. Die erste Karte überdeckt den Bereich $l \geq 0$, die zweite Karte hingegen deckt $l < 0$ ab. Bei der Rücksubstitution $l = \pm\sqrt{r^2 - b_0^2}$ ist dann je nach Karte das entsprechende Vorzeichen zu wählen. Aus r allein können wir die Karte nicht ableiten; wir benötigen daher ein zusätzliches Entscheidungskriterium, welches die Karte festlegt. Dieses Kriterium ist durch den Startort l_i und die Startrichtung τ gegeben, worauf wir nachher noch einmal eingehen werden.

Führen wir zunächst noch eine Normierung $\rho = r/b_0$ der Radial-Koordinaten durch, so folgt für die Bahngleichung

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = (\rho^2 - 1) (a^2 \rho^2 - 1), \quad (6.4.20)$$

wobei $a^2 = b_0^2(\kappa c^2 + k^2/c^2)/h^2$. Um auf die Standardform eines elliptischen Integrals zu kommen, müssen wir noch die Substitution $t = 1/(a\rho)$ durchführen (nicht zu verwechseln mit der Koordinatenzeit t):

$$\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = (1 - a^2 t^2) (1 - t^2). \quad (6.4.21)$$

Ein besonderes Augenmerk gilt nun den Definitionsbereichen der substituierten Variablen. Wie bereits erörtert ist $r \geq b_0$. In jedem Fall ist dann $\rho \geq 1$, da der Schlundradius $b_0 > 0$ sein soll.

Aus der Energie-Bilanz-Gleichung (6.4.6) folgt aufgrund $\dot{l}^2 \geq 0$, daß $\kappa c^2 + k^2/c^2 \geq h^2/(b_0^2 + l^2)$. Damit können wir t^2 nach oben hin abschätzen:

$$t^2 = \frac{1}{a^2 \rho^2} = \frac{h^2}{(\kappa c^2 + k^2/c^2)(b_0^2 + l^2)} \leq 1. \quad (6.4.22)$$

Der Wertebereich von a hängt zunächst vom Schlundradius b_0 , dem Typ der Geodäten κ und von den Konstanten der Bewegung (h, k) bzw. der Startrichtung τ ab. Verwenden wir die Werte aus Abschnitt §6.4.2 für h und k , so gelangen wir zu der Einsicht, daß a unabhängig vom Typ der Geodäten ist:

$$a = \frac{b_0}{\sin \tau \sqrt{b_0^2 + l_i^2}}. \quad (6.4.23)$$

Zusammen mit der Gleichung (6.4.21) folgt dann, daß sowohl zeit-, wie auch licht- und raumartige Geodäten bei gleichen Anfangswerten alle dieselbe Bahnkurve durchlaufen⁵.

Da der Schlundradius $b_0 > 0$ ist und der Startwinkel τ im Intervall $(0, \pi)$ liegt, ist $a > 0$. Mit dem kritischen Winkel τ_{krit} aus Gleichung (6.4.16) folgt

$$a \begin{cases} < 1 & \text{für } \tau_{\text{krit}} < \tau < \pi - \tau_{\text{krit}} \\ = 1 & \text{für } \tau = \tau_{\text{krit}} \\ > 1 & \text{für } \tau < \tau_{\text{krit}} \text{ oder } \tau > \pi - \tau_{\text{krit}} \end{cases}. \quad (6.4.24)$$

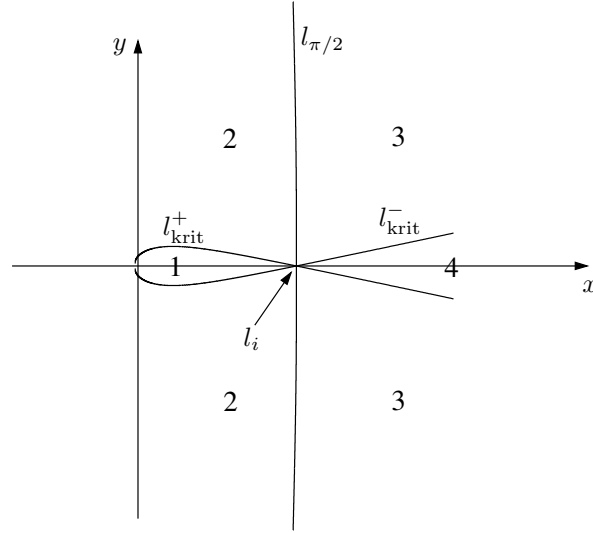


Abbildung 6.5: Die Raumzeit unterteilt sich, abhängig vom Startort l_i und dem Winkel τ , in vier Bereiche. Die kritische Geodäte l_{krit}^+ ist die Geodäte, die sich asymptotisch dem Wurmlochschlund nähert. Die Geodäte l_{krit}^- hat keine tiefere Bedeutung. $l_{\pi/2}$ ist die Geodäte mit $\tau = \pi/2$. Geodäten, die im Bereich 2 starten, können unter Umständen die anderen Bereiche durchqueren. Eine genauere Unterteilung folgt in Abbildung 6.8.

Die eine Hälfte der Raumzeit wird daher zunächst in drei Bereiche unterteilt. Allerdings müssen wir, wie sich noch herausstellen wird, für $a < 1$ noch zusätzlich berücksichtigen, ob τ größer oder kleiner als $\pi/2$ ist. Daher haben wir vier Bereiche (siehe Abb. 6.5).

Fall 1: Betrachten wir zunächst $a < 1$ — also Geodäten die im gleichen Universum bleiben — so führt Gleichung (6.4.21) sofort auf ein elliptisches Integral erster Art

$$\pm \int_{t_i}^{t_{\triangleleft}} \frac{dt'}{\sqrt{(1-a^2 t'^2)(1-t'^2)}} = \varphi, \quad (6.4.25)$$

wobei die linke Seite durch die elliptische Funktion \mathcal{F} dargestellt werden kann⁶:

$$\mathcal{F}(t_{\triangleleft}, a) = \pm \varphi + \mathcal{F}_i \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}_i \equiv \mathcal{F}(t_i, a) = \mathcal{F}(\sin \tau, a). \quad (6.4.26)$$

Das Vorzeichen von Gleichung (6.4.25) bzw. Gleichung (6.4.26) ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen den Koordinaten t und l :

$$t = \frac{b_0}{a\sqrt{b_0^2 + l^2}} = \frac{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}{\sqrt{b_0^2 + l^2}} \sin \tau \quad \text{und} \quad dt = -\frac{b_0 l}{a(b_0^2 + l^2)^{3/2}} dl = -\frac{l\sqrt{b_0^2 + l_i^2} \sin \tau}{(b_0^2 + l^2)^{3/2}} dl.$$

Nun kennen wir zwar noch nicht die Bahnkurve selbst, können aber mit Hilfe des effektiven Potentials aus Abschnitt 6.4.2 deren qualitatives Verhalten bestimmen. Gilt ($dl > 0, l > 0$), so folgt $dt < 0$ und die Geodäte läuft gegen Unendlich, dabei ist $t(\leq t_i)$ monoton fallend. Ist jedoch ($dl < 0, l > 0$), so folgt $dt > 0$ und die Geodäte erreicht ihre minimale Annäherung $l = l_{\min}(t_{\min} = 1)$ (vgl. Gl.(6.4.15)) an den Wurmlochhals, kehrt um ($dl > 0$) und läuft gegen Unendlich. Der Umkehrpunkt l_{\min} liegt bei

$$\varphi_{\min} = \mathcal{F}(1, a) - \mathcal{F}_i = \mathcal{K}(a) - \mathcal{F}_i. \quad (6.4.27)$$

⁵Siehe auch Anhang §A.7 für beliebige statische, sphärisch-symmetrische Raumzeiten.

⁶Eine Übersicht über elliptische Funktionen/Integrale befindet sich im Anhang §C.

Der Winkel φ erreicht seinen maximalen Wert bei

$$\varphi_{\triangleleft, \max} = \begin{cases} 2\mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(t_i, a) & \text{für } \tau \leq \frac{\pi}{2} \\ \mathcal{F}(t_i, a) & \text{für } \tau > \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (6.4.28)$$

Sowohl im Intervall $[0, \mathcal{F}(t_i, a))$ für $l \rightarrow \infty$, wie auch im Intervall $[0, \mathcal{K}(a) - \mathcal{F}_i]$, in dem die Geodäte bis zum Umkehrpunkt läuft, ist t monoton und wir können für diese Intervalle von Gleichung (6.4.26) die Umkehrfunktion bilden:

$$t_{\triangleleft} = \operatorname{sn}(\pm\varphi + \mathcal{F}_i, a). \quad (6.4.29)$$

Die Umkehrfunktion sn heißt JACOBI-sn-Funktion. Sie ist eine doppelperiodische Funktion auf \mathbb{C} . Wir benötigen sie aber nur im Reellen, wo sie auch nur eine Periode $4\mathcal{K}(a)$ besitzt⁷. Formen wir die Umkehrfunktion mittels Additionstheoremen um, so folgt

$$\begin{aligned} t_{\triangleleft} &= \frac{\operatorname{sn}(\pm\varphi, a) \operatorname{cn}(\mathcal{F}_i, a) \operatorname{dn}(\mathcal{F}_i, a) + \operatorname{sn}(\mathcal{F}_i, a) \operatorname{cn}(\pm\varphi, a) \operatorname{dn}(\pm\varphi, a)}{1 - a^2 \operatorname{sn}^2(\pm\varphi, a) \operatorname{sn}^2(\mathcal{F}_i, a)} \\ &= \frac{\pm \operatorname{sn}(\varphi, a) (\pm) \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(\mathcal{F}_i, a)} \sqrt{1 - a^2 \operatorname{sn}^2(\mathcal{F}_i, a)} + \operatorname{sn}(\mathcal{F}_i, a) \operatorname{cn}(\varphi, a) \operatorname{dn}(\varphi, a)}{1 - a^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, a) \operatorname{sn}^2(\mathcal{F}_i, a)}, \end{aligned}$$

wobei zunächst für die Jacobi-cn-Funktion zwei unabhängige Vorzeichen auftauchen, die aber nach obigen Überlegungen wegfallen können. Schließlich erhalten wir

$$t_{\triangleleft} = \frac{\operatorname{sn}(\varphi, a) \cos \tau \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}} + \sin \tau \operatorname{cn}(\varphi, a) \operatorname{dn}(\varphi, a)}{1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2} \operatorname{sn}^2(\varphi, a)}. \quad (6.4.30)$$

Betrachten wir die einlaufende Geodäte nicht nur bis zu ihrem Umkehrpunkt, so müssen wir das Integral in Gleichung (6.4.25) aufteilen. Mit $\varepsilon(a, t') = (1 - a^2 t'^2)(1 - t'^2)$ gilt

$$\int_{t_i}^{t_{\triangleleft}} \frac{dt'}{\sqrt{\varepsilon(a, t')}} = \int_{t_i}^{t_{\min}} \frac{dt'}{\sqrt{\varepsilon(a, t')}} + \int_{t_{\min}}^{t_{\triangleleft}} -\frac{dt'}{\sqrt{\varepsilon(a, t')}} = 2\mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(t_{\triangleleft}, a) - \mathcal{F}_i = \varphi. \quad (6.4.31)$$

Da nun $t_{\triangleleft} \rightarrow 0$ für $l \rightarrow \infty$, folgt als maximaler Winkel $\varphi_{\triangleleft, \max}^*$ bei vorgegebenem Startwinkel τ für die Geodäte, die das Wurmloch umrundet hat,

$$\varphi_{\triangleleft, \max}^* = 2\mathcal{K}(a) - \mathcal{F}_i. \quad (6.4.32)$$

Das Bahnstück vom Umkehrpunkt bis $l \rightarrow \infty$ wird nun auch durch die Gleichung (6.4.30) beschrieben. Die Rücksubstitution auf die Eigenradial-Koordinate l führt uns auf die Bahnbewegung $l = l(\varphi)$

$$l_{\triangleleft} = \operatorname{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 t_{\triangleleft}^2} - 1}. \quad (6.4.33)$$

Da für $a < 1$ die Geodäte stets im gleichen Universum bleibt, bestimmt der Anfangsort l_i eindeutig das Vorzeichen von l . In Abbildung 6.6 sind die Bahnen von Geodäten für verschiedene Startwinkel aufgezeichnet.

Ein Spezialfall, den wir noch später benötigen werden, ist $\tau = \pi/2$, wobei sich Gleichung (6.4.30) auf

$$t_{\pi/2} = \operatorname{cd}(\varphi, a_{\pi/2}), \quad \text{mit } a_{\pi/2} = \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}, \quad (6.4.34)$$

reduziert. Für $\varphi = 0$ ist $t_{\pi/2} = 1$ und $l = l_i$. Die erste Nullstelle von $t_{\pi/2}$ liegt bei $\varphi = \mathcal{K}(a_{\pi/2}) = \mathcal{K}_{\pi/2}$ und gibt den maximalen Winkel für $l \rightarrow \infty$ an.

⁷ \mathcal{K} ist das vollständige elliptische Integral erster Art zum Modul a .

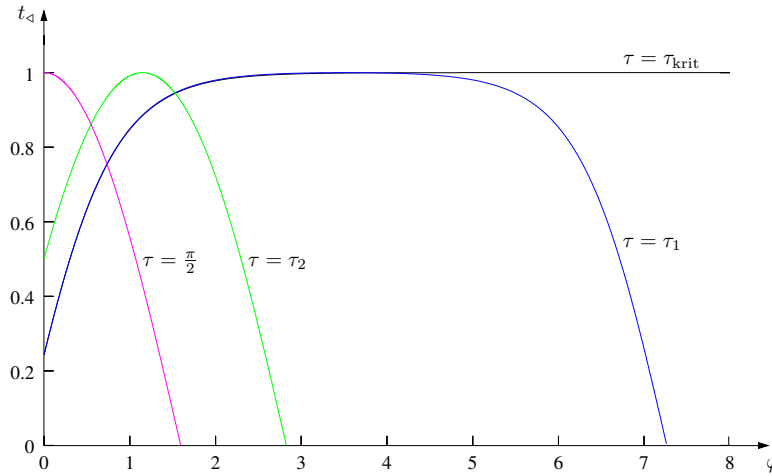


Abbildung 6.6: Bahnen $t_{\triangleleft} = t_{\triangleleft}(\varphi)$ für den Startort $l_i = 8$ und die Startwinkel $\tau_{krit} = 14.036^\circ$, $\tau_1 = 14.1^\circ$, $\tau_2 = 30^\circ$ und $\tau = \pi/2$. Für die Koordinate t gilt am Startort: $t_i = t_{\triangleleft}(\varphi = 0) = \sin \tau$.

Fall 2: Im Fall $a > 1$, wenn Geodäten das Wurmloch passieren oder sich entgegengesetzt entfernen, verwenden wir den Kehrwert $\alpha = 1/a$. Aus Gleichung (6.4.25) folgt mit $t'' = t'/\alpha$ das Integral

$$\pm \int_{t_i/\alpha}^{t_{\triangleleft}/\alpha} \frac{dt''}{\sqrt{(1-t''^2)(1-\alpha^2 t''^2)}} = \frac{\varphi}{\alpha}, \quad (6.4.35)$$

und daraus

$$\mathcal{F}\left(\frac{t_{\triangleright}}{\alpha}, \alpha\right) - \mathcal{F}\left(\frac{t_i}{\alpha}, \alpha\right) = \pm \frac{\varphi}{\alpha}. \quad (6.4.36)$$

Auch hier müssen wir wieder das qualitative Verhalten der Geodäten betrachten. Geodäten, die sich vom Wurmloch entfernen ($dl > 0, l > 0$), erreichen einen maximalen Winkel $\varphi_{\triangleright, \max} = \mathcal{F}(\sin \tau/\alpha, \alpha)$. Für Geodäten, die das Wurmloch passieren, müssen wir das Integral (6.4.35) wie in Fall 1 aufteilen. Nach kurzer Rechnung stellen wir fest, daß sowohl auslaufende wie auch durchlaufende Geodäten durch die Bahngleichung

$$t_{\triangleright} = \frac{\operatorname{sn}(a\varphi, \alpha) \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2} \cos \tau} + \sqrt{\frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}} \operatorname{cn}(a\varphi, \alpha) \operatorname{dn}(a\varphi, \alpha)}{a(1 - \sin^2 \tau \operatorname{sn}^2(a\varphi, \alpha))} \quad (6.4.37)$$

vollständig beschrieben werden. Die erste Nullstelle von Gleichung (6.4.37) gibt den maximalen Winkel $\varphi_{\triangleright, \max}^* = 2\alpha\mathcal{K}(\alpha) - \mathcal{F}(\sin \tau/\alpha, \alpha)$ an für den $l \rightarrow -\infty$. Bei der Rücksubstitution auf die Koordinate l müssen wir beachten, daß l beim Durchqueren des Wurmlochs die Karte und damit das Vorzeichen ändert. Dies ist genau dann der Fall, wenn $l = l(\varphi_b) = 0$ bzw. $at(\varphi_b) = 1$. Aus Gleichung (6.4.36) folgt für φ_b , dem Winkel des Kartenwechsels,

$$\varphi_b = \alpha\mathcal{K}(\alpha) - \mathcal{F}(\sin \tau/\alpha, \alpha) \quad (6.4.38)$$

und so folgt für die Koordinate l

$$l_{\triangleright} = \operatorname{sign}(\varphi_b - \varphi) \operatorname{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 t_{\triangleright}^2} - 1} \quad (6.4.39)$$

Mit den Gleichungen (6.4.33) und (6.4.39) können wir nun die Bahnen aller Geodäten in der MT-Raumzeit beschreiben.

Fall 3: Der Grenzfall $a = 1$ kennzeichnet einerseits die kritische Geodäte, welche sich asymptotisch dem Wurmloch-Schlund nähert. Aus Gleichung (6.4.30) bzw. Gleichung (6.4.37) erhalten wir für $\tau = \tau_{\text{krit}}$, unter Berücksichtigung der Grenzfälle der elliptischen Funktionen,

$$t_{\text{krit}} = \frac{\sinh \varphi \cosh \varphi \left(1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}\right) + \sqrt{\frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}}}{\cosh^2 \varphi - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2} \sinh^2 \varphi} \quad (6.4.40)$$

und damit

$$l_{\text{krit}} = b_0 \sqrt{\frac{1}{t_{\text{krit}}^2} - 1}. \quad (6.4.41)$$

Andererseits grenzt $a = 1$ auch die Beschreibung einer sich vom Wurmloch entfernenden Geodäten durch t_{\triangleleft} (Gl. 6.4.30) bzw. t_{\triangleright} (Gl. 6.4.37) ab. Mit $\tau = \pi - \tau_{\text{krit}}$ gilt dann

$$t_{\text{krit}} = \frac{-\sinh \varphi \cosh \varphi \left(1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}\right) + \sqrt{\frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}}}{\cosh^2 \varphi - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2} \sinh^2 \varphi}. \quad (6.4.42)$$

Während für $\tau = \tau_{\text{krit}}$ der Winkel φ beliebig groß werden kann, ist für $\tau = \pi - \tau_{\text{krit}}$ der erlaubte Bereich beschränkt auf $[0, \varphi_{\text{max}}^h)$, wobei

$$\varphi_{\text{max}}^h = \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2b_0}{l_i^2} \sqrt{b_0^2 + l_i^2} \right) \quad (6.4.43)$$

aus Gleichung (6.4.42) mit $t_{\text{krit}} = 0$ folgt.

Kreisförmige Bahnbewegung

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch den Spezialfall, bei dem sich eine Geodäte auf einer Kreisbahn bewegt. Aus dem effektiven Potential (Abschnitt §6.4.2) liest man sofort ab, daß Kreisbahnen nur bei $l = 0$, also direkt im Wurmlochschlund, möglich sind; diese sind jedoch instabil. Aus der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = -c^2 \dot{t}^2 + b_0^2 \dot{\varphi}^2 = \kappa c^2, \quad (6.4.44)$$

den Euler-Lagrange-Gleichungen und den Anfangsbedingungen (6.4.10), (6.4.12) und (6.4.14) folgt mit $d\varphi/dt = \dot{\varphi}/\dot{t} = c^2 h/(b_0^2 k)$ für die Bahnen $\varphi = \varphi(t)$

$$\varphi = \frac{ct}{b_0} + \varphi_i \quad \text{für} \quad \kappa = 0, \quad (6.4.45a)$$

$$\varphi = \frac{vt}{b_0} + \varphi_i \quad \text{für} \quad \kappa = -1, \quad (6.4.45b)$$

$$\varphi = \frac{c\zeta t}{b_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \varphi_i \quad \text{für} \quad \kappa = 1. \quad (6.4.45c)$$

6.4.3 Geodäte zwischen zwei Punkten

Möchte man zwei Punkte, oder allgemeiner zwei Ereignisse, in einer gekrümmten Raumzeit durch eine Geodäte verbinden, so scheidet man in der Regel daran, daß keine analytische Lösung der Geodätengleichung existiert. Die numerische Suche ist ebenso wenig erfolgversprechend. Ein Schießverfahren ist sehr teuer und führt nicht immer zum gewünschten Ergebnis. In unserem Fall kennen wir die analytische Lösung aus Abschnitt §6.4.2 und können so auf schnellem Weg die richtige Geodäte bestimmen.

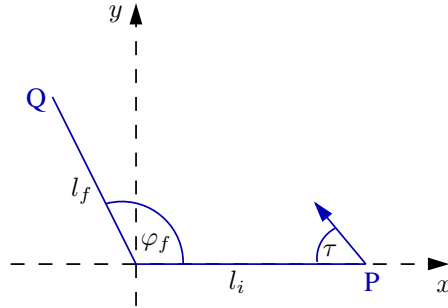


Abbildung 6.7: Gegeben seien zwei Punkte P und Q , die durch eine Geodäte verbunden werden sollen, welche n -mal um den Wurmlochhals laufen soll. Zu bestimmen ist der Startwinkel τ dieser Geodäten. Mehrdeutigkeiten vermeiden wir, indem wir den Winkel φ_f durch $\varphi_f = \tilde{\varphi}_f + n \cdot 2\pi$ mit $\tilde{\varphi}_f \in [0, 2\pi)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ fixieren.

Startwinkel bestimmen

Gegeben seien zwei Punkte P und Q . Aufgrund der Symmetrie der MT-Raumzeit können wir ein Koordinatensystem stets so legen, daß die beiden Punkte wie in Abbildung 6.7 gezeigt zu liegen kommen (siehe Anhang §A.7.3). Den Startwinkel τ wollen wir, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, stets positiv wählen. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden — eine Geodäte könnte zunächst mehrmals um das Wurmloch laufen und erst dann in Q eintreffen —, legen wir den Winkel φ_f , den eine Geodäte tatsächlich überstreichen soll, fest.

Wir wollen uns zunächst auf solche Punkte P und Q beschränken, die im selben Universum liegen. Da wir in diesem Fall zwei Bestimmungsgleichungen (6.4.33) und (6.4.39) für die Bahnbewegung haben, müssen wir ein Kriterium finden, welches für gegebene Startbedingungen angibt, welche dieser Bestimmungsgleichungen wir verwenden müssen. Die Wahl der Gleichung hängt vom Startwinkel τ ab, der aber noch bestimmt werden muß. Jedoch können wir anhand der kritischen Geodäten, Gleichung (6.4.40) und Gleichung (6.4.42), entscheiden, in welchem Bereich τ liegen muß und welche Gleichung wir daher verwenden müssen.

Der Graph der kritischen Kurven l_{krit} (Abb. 6.8) kann auf zwei Arten interpretiert werden: Ein Punkt Q mit der Koordinate $l = l_Q = 2$ wird für $\varphi = \varphi_Q > 0.634$ durch einen Startwinkel $\tau_{\text{krit}} < \tau < \pi - \tau_{\text{krit}}$ erreicht; oder wir können nach Vorgabe eines bestimmten Winkels φ bestimmen, welche Position zum Beispiel mit $\tau < \tau_{\text{krit}}$ erreicht werden kann.

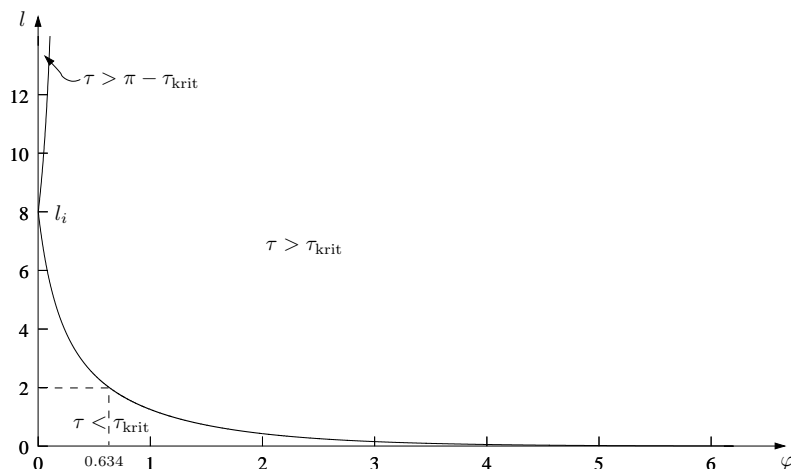


Abbildung 6.8: Die kritische Geodäte mit $\tau = \tau_{\text{krit}}$ zum Startwert l_i ist die Kurve, die sich asymptotisch dem Wurmlochhals nähert. Die kritische Geodäte mit $\tau = \pi - \tau_{\text{krit}}$ dagegen hat keine tiefere Bedeutung.

Die Umkehrfunktion von Gleichung (6.4.41) lautet

$$\varphi_{\text{krit}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{l_i^2}{b_0^2}}\right) \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{l_{\text{krit}}^2}{b_0^2}}\right)}{\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{l_i^2}{b_0^2}}\right) \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{l_{\text{krit}}^2}{b_0^2}}\right)}, \quad (6.4.46)$$

wobei das obere Vorzeichen für die kritische Geodäte in Richtung des Wurmlochs und das untere Vorzeichen für die entgegengesetzte Geodäte verwendet werden muß.

Mit den Gleichungen (6.4.41) und (6.4.46) haben wir nun ein Kriterium, welches zu gegebenem Start- und Zielort die richtige Bahnkurve auswählt:

Liegt der Zielort (l_f, φ_f) zwischen den beiden kritischen Kurven l_{krit} (Abb. 6.8), so ist $\tau_{\text{krit}} < \tau < \pi - \tau_{\text{krit}}$ und es gilt die Bahngleichung (6.4.33); andernfalls ist $\tau < \tau_{\text{krit}}$ bzw. $\tau > \pi - \tau_{\text{krit}}$ und Bahngleichung (6.4.39) ist zu verwenden.

Sei nun zunächst $\tau_{\text{krit}} \leq \tau \leq \pi - \tau_{\text{krit}}$ ($a < 1$), dann gilt mit $t = t_f = \sqrt{b_0^2 + l_i^2} \sin \tau / \sqrt{b_0^2 + l_f^2}$ und Gleichung (6.4.30):

$$W_{\triangleleft}(\tau) := \frac{\sqrt{b_0^2 + l_i^2} \sin \tau}{\sqrt{b_0^2 + l_f^2}} \left[1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2} \operatorname{sn}(\varphi_f, a(\tau))^2 \right] - \operatorname{sn}(\varphi_f, a(\tau)) \cos \tau \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}} - \sin \tau \operatorname{cn}(\varphi_f, a(\tau)) \operatorname{dn}(\varphi_f, a(\tau)) \quad (6.4.47)$$

und die Forderung $W_{\triangleleft}(\tau) \stackrel{!}{=} 0$. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, müssen wir die Perioden der elliptischen Funktionen⁸ berücksichtigen. Diese hängen jedoch vom gesuchten Wert τ ab. Wie bereits im vorherigen Abschnitt schränken wir der Eindeutigkeit halber die elliptischen Funktionen auf das Intervall $[0; 2\mathcal{K}(a)]$ ein. Nun muß aber der Zielwinkel φ_f innerhalb dieses Intervalls liegen. Genauer gesagt, ist

$$2\pi n \leq \varphi_f \leq 2\pi(n+1), \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0,$$

dann liegt der Parameter a im Intervall

$$a_n < a < 1,$$

wobei a_n für $n \geq 1$ aus der Gleichung $2\mathcal{K}(a_n) = 2\pi n$ folgt und a nach oben durch $a(\tau_{\text{krit}}) = 1$ begrenzt wird. Die kleinste erlaubte Periode erhalten wir mit $a_0 = b_0 \sqrt{b_0^2 + l_i^2}$. Da wir aus a_n mittels Gleichung (6.4.23) den Winkel τ_n nicht eindeutig bestimmen können, müssen wir noch berücksichtigen, ob der Zielort mit einem Winkel $\tau \leq \pi/2$ erreicht wird. Dies ermitteln wir mit Hilfe der Gleichung (6.4.34). Zunächst halten wir fest, daß Winkel $\varphi > \mathcal{K}_{\pi/2}$ nur durch einen Startwinkel $\tau < \pi/2$ erreicht werden können. Bei Winkeln $\varphi < \mathcal{K}_{\pi/2}$ hingegen müssen wir die Fallunterscheidung $t \leq t_{\pi/2} \Rightarrow \tau \geq \pi/2$ machen. Nun können wir das Suchintervall für τ vorgeben:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{low}} &= \tau_{\text{krit}}, & \tau_{\text{upp}} &= \arcsin \frac{b_0}{a_n \sqrt{b_0^2 + l_i^2}} & \text{für } & \tau < \pi/2, \\ \tau_{\text{low}} &= \arcsin \frac{b_0}{a_n \sqrt{b_0^2 + l_i^2}}, & \tau_{\text{upp}} &= \pi - \tau_{\text{krit}} & \text{für } & \tau > \pi/2. \end{aligned}$$

Aus numerischen Gründen sollte ein Wert $n = 2$ nicht überschritten werden.

Für $\tau < \tau_{\text{krit}}$ bzw. $\tau > \pi - \tau_{\text{krit}}$ und $l > 0$ formen wir Gleichung (6.4.36) um, indem wir wieder zur Darstellung mittels elliptischem Integral übergehen. Anstelle einer impliziten Gleichung zur Bestimmung von τ formulieren wir eine Gleichung für α und bestimmen erst im Anschluß den zugehörigen Winkel τ . So gilt

$$W_{\triangleright}(\alpha) := \mathcal{F} \left(\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_f^2}}, \alpha \right) - \operatorname{sign}(t_f - t_i) \frac{\varphi_f}{\alpha} - \mathcal{F} \left(\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}, \alpha \right). \quad (6.4.48)$$

⁸Die Eigenschaften der elliptischen Funktionen sind im Anhang §C.3.3 erläutert.

Hier haben wir durch $\text{sign}(t_f - t_i)$ berücksichtigt, daß in Gleichung (6.4.25) der Winkel φ stets positiv gerechnet wird. Nun ist $W_{\triangleright}(\alpha)$ im Intervall $(0; 1)$ streng monoton und besitzt deshalb maximal eine Nullstelle. Aus dem numerisch ermittelten Wert α erhalten wir dann den gesuchten Winkel τ_i :

$$\tau = \arcsin\left(\frac{\alpha b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}\right). \quad (6.4.49)$$

Für eine Geodäte im Bereich 1 liefert der ‚arcsin‘ bereits den richtigen Wert ($\tau_i = \tau$). Andernfalls, im Bereich 4, gilt $\tau_i = \pi - \tau$.

Mit Gleichung (6.4.48) erreichen wir nur Punkte, die im gleichen Universum liegen. Soll die Geodäte durch das Wurmloch laufen, so müssen wir Gleichung (6.4.37) verwenden. Wir erhalten dann entsprechend

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\triangleright} := & \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_f^2}} \left[1 - \sin^2 \tau \operatorname{sn}\left(\frac{\varphi_f}{\alpha}, \alpha\right)^2 \right] - \operatorname{sn}\left(\frac{\varphi_f}{\alpha}, \alpha\right) \cos \tau \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}} \\ & - \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}} \operatorname{cn}\left(\frac{\varphi_f}{\alpha}, \alpha\right) \operatorname{dn}\left(\frac{\varphi_f}{\alpha}, \alpha\right). \end{aligned} \quad (6.4.50)$$

Hier haben wir aber das Problem der Mehrdeutigkeit der Jacobi-Funktionen. Um ein eindeutiges Suchintervall für den Winkel τ bzw. den Wert α festzulegen, bestimmen wir zunächst aus $\varphi_{\triangleright, \max}^*$ denjenigen Wert α_{\max} , bei dem φ_f im Unendlichen liegen würde. Anschließend können wir den gesuchten Wert α im Intervall $(\alpha_{\max}, \alpha^*)$ finden, wobei $\alpha^* = 2\alpha_{\max}$ mit der Einschränkung $\alpha^* \leq 1$ ist.

Länge einer Geodäten

Die auf eine Hyperfläche ($t = \text{const}, \vartheta = \pi/2$) projizierte Länge Δl einer Geodäten berechnet sich aus dem Integral über die Bahnkurve

$$\Delta l = \int d\tilde{s} \quad (6.4.51)$$

mit $d\tilde{s}^2 = dl^2 + (b_0^2 + l^2) d\varphi^2$. Verwenden wir φ als Bahnparameter, so lautet das Integral

$$\Delta l = \int \sqrt{\left(\frac{dl}{d\varphi}\right)^2 + (b_0^2 + l^2)} d\varphi, \quad l(\varphi) = b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 t^2(\varphi)} - 1}. \quad (6.4.52)$$

Anstelle der Integration über φ führen wir eine Integration über t — nicht zu verwechseln mit der Zeitkoordinate — aus, wobei wir das Integral gegebenenfalls wieder aufspalten müssen

$$\Delta l = \pm \int \frac{b_0}{at^2 \sqrt{(1-t^2)(1-a^2 t^2)}} dt. \quad (6.4.53)$$

Berechnen wir zunächst die Stammfunktion $L(t)$ für $a < 1$

$$L_{\triangleleft}(t) = \frac{b_0}{a} \left[-\frac{\sqrt{(1-t^2)(1-a^2 t^2)}}{t} + \mathcal{F}(t, a) - \mathcal{D}(t, a) \right], \quad (6.4.54)$$

mit $L_{\triangleleft}(1) = b_0/a [\mathcal{K}(a) - \mathcal{D}(1, a)]$. Die Länge einer Geodäten mit $\tau > \pi/2$ beträgt, wenn man wieder die Vorzeichen richtig berücksichtigt,

$$\Delta l = L_{\triangleleft}(t(\varphi_f)) - L_{\triangleleft}(t_i) \quad (6.4.55)$$

und für $\tau < \pi/2$ gilt:

$$\Delta l = L_{\triangleleft}(t(\varphi_f)) - L_{\triangleleft}(t_i), \quad \text{für } \varphi_f < \varphi_{\min}, \quad (6.4.56a)$$

$$\Delta l = 2L_{\triangleleft}(1) - L_{\triangleleft}(t_i) - L_{\triangleleft}(t(\varphi_f)) \quad \text{für } \varphi_f \geq \varphi_{\min}. \quad (6.4.56b)$$

Auf gleichem Weg erhält man auch die Länge einer Geodäten mit $a > 1$. So folgt für die Stammfunktion wie oben

$$L_{\triangleright}(t) = b_0 \left[-\alpha \frac{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{t^2}{\alpha^2})}}{t} + \mathcal{F}\left(\frac{t}{\alpha}, \alpha\right) - \mathcal{D}\left(\frac{t}{\alpha}, \alpha\right) \right]. \quad (6.4.57)$$

Geodäten mit einem Startwinkel $\tau > \pi - \tau_{\text{krit}}$ haben eine Länge

$$\Delta l = L_{\triangleright}(t_i) - L_{\triangleright}(t(\varphi_f)) \quad (6.4.58)$$

und für Geodäten, welche durchs Wurmloch laufen, gilt

$$\Delta l = L_{\triangleright}(t(\varphi_f)) - L_{\triangleright}(t_i), \quad \text{für } \varphi_f < \varphi_b, \quad (6.4.59a)$$

$$\Delta l = 2L_{\triangleright}(t(\varphi_b)) - L_{\triangleright}(t_i) - L_{\triangleleft}(t(\varphi_f)) \quad \text{für } \varphi_f \geq \varphi_b, \quad (6.4.59b)$$

wobei φ_b wieder der Winkel ist, bei dem die Geodäte den Wurmlochhals ($l = 0$) erreicht.

Die hier entwickelte analytische Lösung der Geodätengleichung für zwei Punkte kann nun insbesondere für die interaktive Visualisierung verwendet werden. So ist eine Umsetzung ähnlich wie in der Schwarzschild-Raumzeit möglich (vgl. Abs. §5.5), wobei anstelle der Objektebene auch ein 4π -Panoramabild einsetzbar wäre. In der Arbeit von Zahn [118] wird ein anderer Ansatz für die interaktive Visualisierung auf der Basis des Regge-Wheeler-Calculus [65], bei dem die Raumzeit in Dreiecke unterteilt wird, umgesetzt. Eine hinreichende Genauigkeit kann erreicht werden, indem die Kantenlängen durch die analytische Lösung berechnet werden.

6.4.4 Entfernung und Schlundradius bestimmen

Angenommen, wir befinden uns in einer Raumzeit in der ein Morris-Thorne-Wurmloch enthalten ist. Wie können wir unsere Entfernung zum Wurmloch und dessen Halsradius bestimmen?

Lassen wir von unserer Position einen Lichtblitz in alle Richtungen loslaufen. Nach einer Zeit Δt sehen wir aus einer bestimmten Richtung einen Ring mit Öffnungsradius $2\tau_{\text{cone}}$ aufblitzen. Dieser Lichtring entsteht genau durch die Lichtstrahlen, welche einmal um das Wurmloch gelaufen sind und wieder bei uns ankommen. Etwas später treten noch weitere Lichtringe auf, die uns hier aber nicht weiter interessieren. Aufgrund der sphärischen Symmetrie können wir uns diese Situation an der Abbildung 6.9 klarmachen.

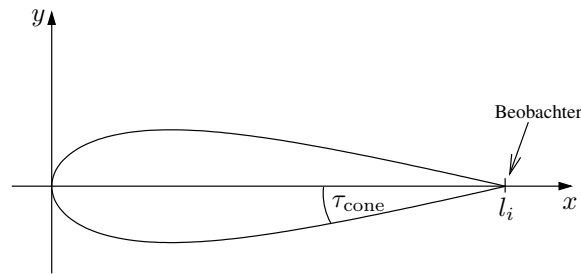


Abbildung 6.9: Ein Beobachter sendet einen Lichtblitz in alle Richtungen aus und empfängt nach einer Zeit Δt einen Lichtring mit Öffnungswinkel $2\tau_{\text{cone}}$. Den Ort l_i kennt der Beobachter jedoch noch nicht. Die x -Achse legt er in Richtung des Mittelpunkts des Lichtrings. Dargestellt ist die Nullgeodäte, welche den Beobachter nach einem Umlauf um das Wurmloch erreicht; dabei haben wir die Eigenradialkoordinate l direkt in pseudo-kartesische Koordinaten (siehe Abs. §2.9) transformiert.

Aus der Zeitdifferenz Δt und dem halben Öffnungswinkel τ_{cone} können wir nun sowohl den Abstand l_i , den wir hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv wählen, wie auch den Halsradius b_0 bestimmen. Hierfür benötigen wir Gleichung (6.4.27), welche den Winkel φ_{min} des Umkehrpunktes angibt, sowie Gleichung (6.4.56),

die uns die Weglänge der Nullgeodäten und damit auch die benötigte Zeit für einen Umlauf liefert. So haben wir folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\pi = \mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(\sin \tau_{\text{cone}}, a), \quad (6.4.60a)$$

$$\begin{aligned} \frac{c\Delta t}{2} &= \frac{\Delta l}{2} = L_{\triangleleft}(1) - L_{\triangleleft}(\sin \tau_{\text{cone}}) \\ &= \frac{b_0}{a} \left[\pi - \mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(\sin \tau_{\text{cone}}, a) + \cot \tau_{\text{cone}} \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}} \right], \end{aligned} \quad (6.4.60b)$$

mit $a = a(\tau_{\text{cone}}, b_0, l_i)$ und den Unbekannten b_0 und l_i . Allerdings stellt sich heraus, daß es günstiger ist, zunächst aus Gleichung (6.4.60a) durch eindimensionale Nullstellensuche den Wert $a = a_{\text{cone}}$ zu berechnen⁹ und anschließend mit einem zweidimensionalen Nullstellensucher das Gleichungssystem

$$a_{\text{cone}} = \frac{b_0}{\sin \tau_{\text{cone}} \sqrt{b_0^2 + l_i^2}}, \quad (6.4.61a)$$

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{b_0}{a_{\text{cone}}} \left[\pi - \mathcal{D}(a_{\text{cone}}) + \mathcal{D}(\sin \tau_{\text{cone}}, a_{\text{cone}}) + \cot \tau_{\text{cone}} \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{b_0^2 + l_i^2}} \right] \quad (6.4.61b)$$

zu lösen.¹⁰

6.5 Visualisierung der einfachen Morris-Thorne-Raumzeit

Das einfache Morris-Thorne-Wurmloch aus Abschnitt §6.3 besitzt zwar eine nichttriviale Topologie, jedoch kann es auch ohne komplizierten Atlas dargestellt werden. Die Metrik (6.3.1) überdeckt mit der Eigenradialkoordinaten l die komplette Raumzeit.

Um sich nun ein Bild von diesem Wurmloch machen zu können, müssen wir Objekte in der Raumzeit platzieren. Dabei haben wir die Möglichkeit, sowohl Koordinatenobjekte als auch lokale Objekte zu verwenden (siehe Abs. §3.6.7). Bei Koordinatenobjekten taucht nun folgende Schwierigkeit auf. Der Wurmlochhals hat die Eigenradialkoordinate $l = 0$ und die Topologie einer 2-Sphäre. Würden wir nun direkt die Eigenradialkoordinaten in pseudo-kartesische Koordinaten transformieren, dann hätte der Hals einen verschwindenden Radius und würde daher beim Raytracing garnicht auftauchen. Eine zweite Schwierigkeit liegt bei der negativen radialen Koordinate, mit der die Schnittmethoden der einzelnen Objekte nichts anfangen können. Wir können daher die Nullgeodäten in Eigenradialkoordinaten berechnen, müssen sie danach aber erst in gewöhnliche Radialkoordinaten umrechnen bevor wir sie mit den Szeneobjekten schneiden können. Um die hiesige Zweideutigkeit der Radialkoordinate r zu berücksichtigen, müssen wir sowohl der Geodäten als auch den Szeneobjekten Kartennummern mitgeben, die entscheiden, auf welcher Seite des Wurmlochs man sich gerade befindet. Insofern sprechen wir auch hier von einem Atlas (vgl. Abschnitt §3.6.3). Bei lokalen Objekten treten diese Schwierigkeiten nicht auf, da die Position bezüglich der jeweiligen Koordinaten angegeben werden kann. Der Lichtstrahl wird bei der Schnittberechnung in die lokale Tetrade transformiert und damit automatisch auf euklidische Koordinaten umgerechnet.

6.5.1 Statisches Gitter

Als erstes einfaches Beispiel bauen wir ein gleichmäßiges, dreidimensionales Gitter um das einfache Morris-Thorne-Wurmloch, um zu verstehen, was wir eigentlich sehen. Abbildung \ 6.10 zeigt auf der linken Seite eine Übersicht der Szenerie. Das Wurmloch wird sich im Anschluß genau in der Mitte des Gitters öffnen. Die Himmelsrichtungen sind zur besseren Orientierung aufgestellt. Auf der anderen Seite des Wurmlochs befindet sich das gleiche Gitter — in etwas anderen Farben — in der gleichen Konstellation. Auf der rechten Seite von Abbildung \ 6.10 ist das Einbettungsdiagramm der vollständigen Szene dargestellt. Die Himmelsrichtungen im oberen

⁹Es gibt zu jedem τ_{cone} genau eine Nullstelle a_{cone} . Beweis siehe Anhang §E.2.1.

¹⁰Die Entfernungsbestimmung mittels Öffnungswinkel und Zeitmessung ist in `Maple (mtEntfernungRadius.mws)` implementiert.

Universum sind wie gewohnt angeordnet; in mathematisch positiver Richtung des Azimuth folgen NORD–WEST–SÜD–OST. Die Richtungen im unteren Universum sind aufgrund folgender Überlegung gewählt: ein Beobachter, der sich im „oberen Süden“ befindet und in Richtung „oberem Norden“ schaut, halte ein Schild mit der Aufschrift „NORD“ vor sich. Läuft er nun durch das Wurmloch, so transportiert er dieses Schild parallel. Auf der anderen Seite angekommen, stellt er dieses Schild hin und kennzeichnet so die Nordrichtung des unteren Universums. Wiederholt er dies auch für die anderen drei Richtungen, so gelangt er zur dargestellten Szene.

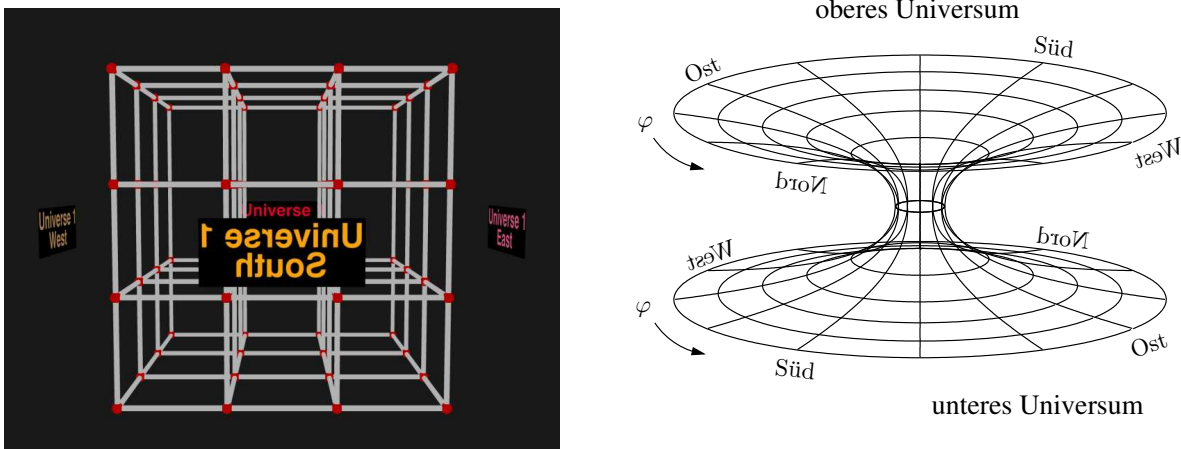


Abbildung 6.10: Ein Wurmloch (hier noch mit $b_0 = 0$) ist von einem regelmäßigen, dreidimensionalen Gitter umgeben, wobei außerhalb des Gitters noch Schilder mit Himmelsrichtungen angebracht sind. **Links:** Blick von außen. **Rechts:** Einbettungsdiagramm der vollständigen Szene.

Ein Beobachter sitze am Ort $l = 13, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$ (das Schild „Universe 1 South“ im Rücken) und schaue in Richtung Norden. Solange das Wurmloch noch geschlossen ist (Schlundradius $b_0 = 0$) sieht er das Schild „Universe 1 North“ sowie das Gitter unverzerrt (siehe Abb. 6.11, links). Öffnet sich das Wurmloch (Abb. 6.11, rechts), so sieht er in der Mitte des Bildes bereits das Gitter des anderen Universums. Das „Universe 1 North“ Schild, welches sich ja hinter der Wurmlochöffnung befindet, zeigt deutliche Verzerrungen und es tritt sogar eine Spiegelung des Schildes auf.

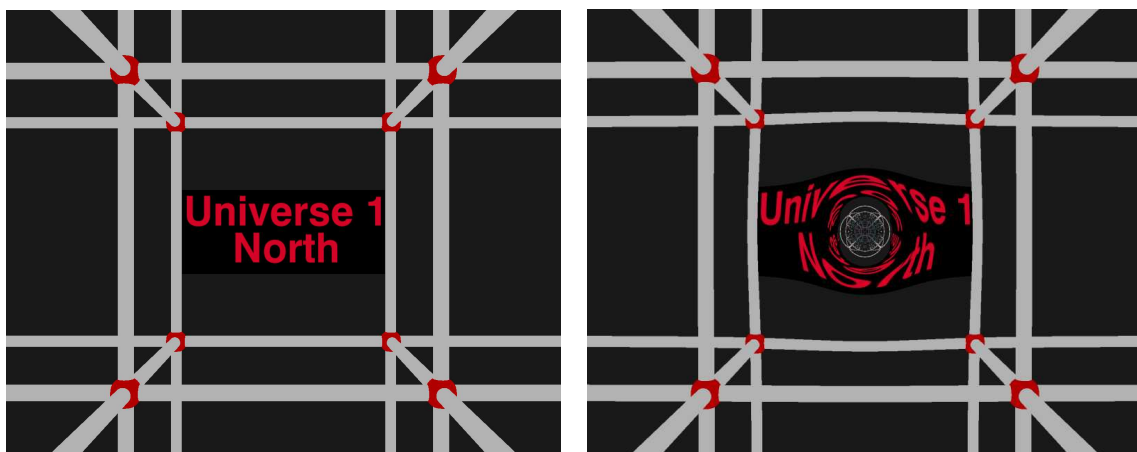


Abbildung 6.11: Ein Beobachter befindet sich am Ort $l = 13, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$ und schaut in Richtung Norden; das Sichtfeld seiner Kamera beträgt $45^\circ \times 36^\circ$. **Links:** Schlundradius $b_0 = 0$. **Rechts:** Schlundradius $b_0 = 0.3$.

Um einen besseren Blick auf die Verzerrungen zu bekommen, vergrößern wir den Bereich um die Wurmlochöffnung (siehe Abb. 6.12). Mit etwas Mühe ist der Schriftzug des „Universe 1 North“ Schildes ein zweites Mal um die Wurmlochöffnung herum gespiegelt lesbar. Die Verzerrung des Schildes tritt natürlich aus dem Grund auf, da die Nullgeodäten am Wurmloch, ähnlich wie beim Schwarzen Loch, abgelenkt werden. Die Spiegelung des Schriftzuges kommt nun dadurch zustande, daß ein zweiter Lichtstrahl — zum Beispiel vom Buchstaben ‚U‘ — auf anderem Wege zum Beobachter gelangt. Dieser Lichtstrahl läuft nun ‚tiefer‘ ins Wurmloch als der andere, woraus sich eine stärkere Verzerrung ergibt. Neben diesen beiden Strahlen gibt es aber noch unendlich viele, die vom gleichen Punkt aus starten, ein oder mehrere Male um das Wurmloch herumlaufen und erst dann zum Beobachter gelangen. All diese Mehrfachbilder approximieren den Wurmlochhals (siehe auch Abb. 6.13, rechts).

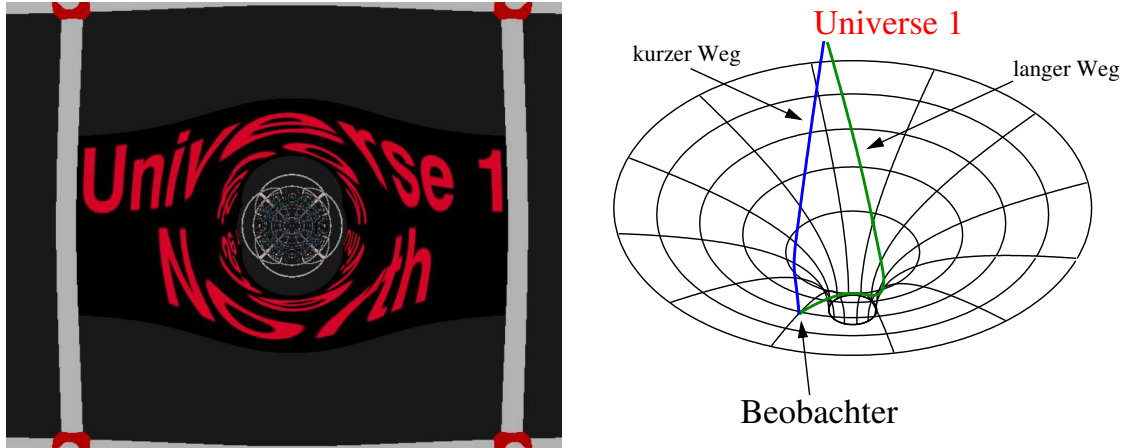


Abbildung 6.12: Links: Der Beobachter befindet sich weiterhin am Ort $l = 13, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$; das Sichtfeld seiner Kamera beträgt nun $22.5^\circ \times 18^\circ$. Rechts: Nullgeodäten im oberen Einbettungsdiagramm. Grund für die Verzerrung ist die Lichtablenkung am Wurmloch (kurzer Weg). Die Spiegelung ergibt sich aufgrund eines zweiten Lichtstrahls, der ‚tiefer‘ in das Wurmloch eindringt (langer Weg).

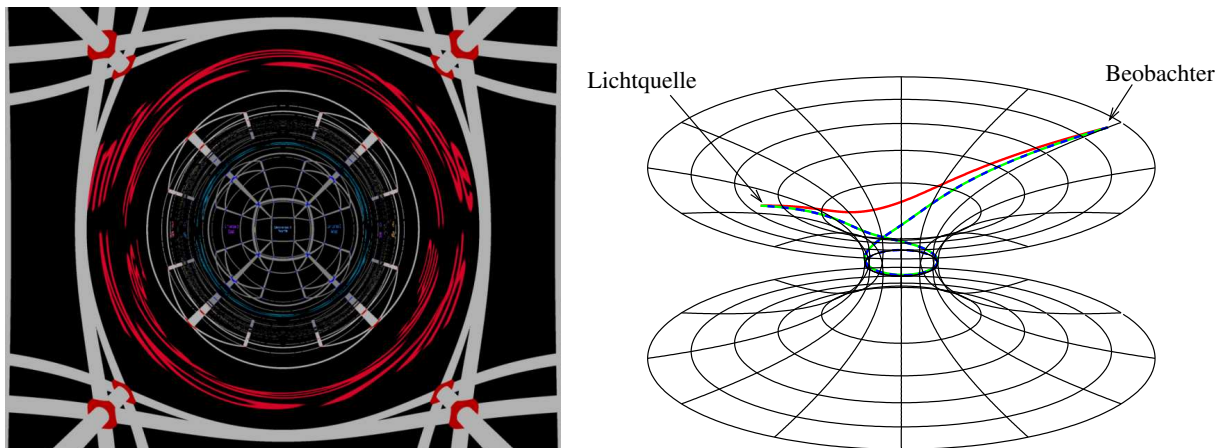


Abbildung 6.13: Der Wurmlochhals hat nun einen Radius von $b_0 = 2$. Links: Der Beobachter befindet sich weiterhin am Ort $l = 13, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$; das Sichtfeld seiner Kamera beträgt wieder $45^\circ \times 36^\circ$. Rechts: Drei Nullgeodäten, welche von der gleichen Quelle kommen ($l_f = 8, \varphi_f = 170^\circ$), treffen den Beobachter unter den Winkeln $\tau_1 \approx 13.503^\circ$ (rot), $\tau_2 \approx 8.75071^\circ$ (grün) bzw. $\tau_3 \approx 8.7461707^\circ$ (blau gestrichelt) zur Radialrichtung (Mehrfachbilder).

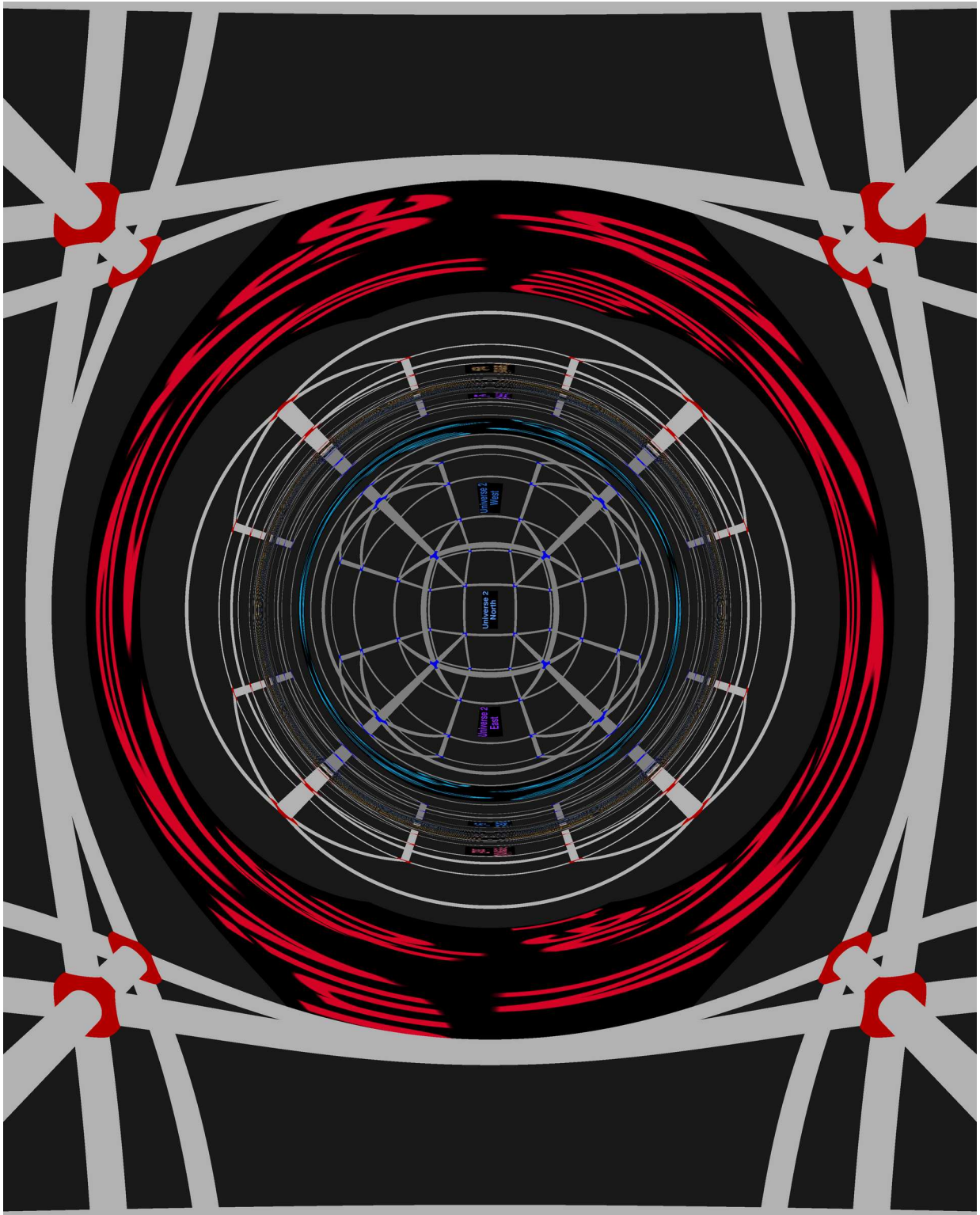


Abbildung 6.14: Der Wurmlochhals hat einen Radius von $b_0 = 2$. Der Beobachter befindet sich am Ort $l = 13, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$; das Sichtfeld seiner Kamera beträgt wieder $45^\circ \times 36^\circ$. [Film](#)

Öffnen wir den Wurmlochhals noch weiter auf einen Radius von $b_0 = 2$, so gelangen wir zu der Abbildung [6.13](#)(links). Hier ist deutlich die erste Spiegelung des, im gleichen Universum befindlichen, 3D-Gitters zu sehen. Verfolgen wir die Nullgeodäten zurück zu ihrem Ursprung, so ist zu erkennen, daß die Spiegelung das *gesamte* Gitter zeigt. Diesen Sachverhalt können wir an Abbildung [6.15](#) nochmals sehr deutlich sehen, wo das Gitter orthogonal auf die $\vartheta = \pi/2$ -Ebene projiziert ist.

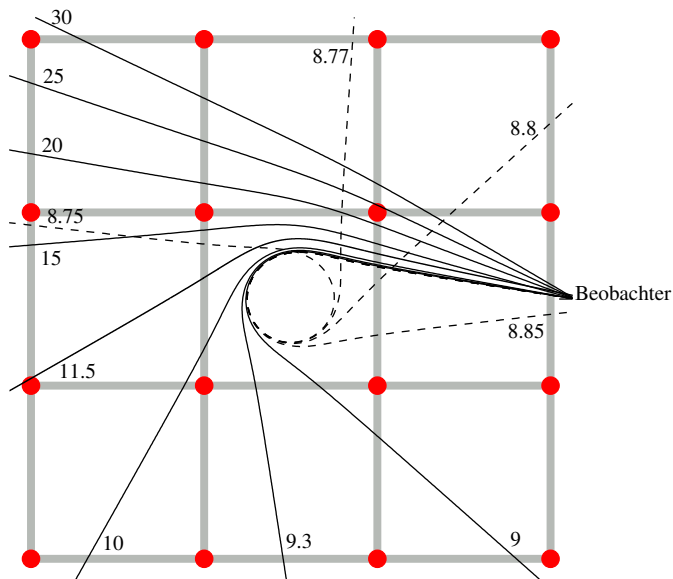


Abbildung 6.15: 3D-Gitter mit einigen Nullgeodäten in pseudo-kartesischer Darstellung. Die Zahlen entsprechen den Winkeln (im Gradmaß) der Nullgeodäten beim Beobachter ($l = 13, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$) bezüglich der Radialrichtung zum Wurmloch. Die Geodäte mit dem Winkel $\tau = 8.75^\circ$ läuft zunächst einmal um den Wurmlochhals herum und gelangt erst dann zum Beobachter.

In einem Winkelbereich von $\tau \approx 8.75^\circ$ bis etwa $\tau \approx 11.5^\circ$ sieht der Beobachter das Gitter in seinem Universum vollständig. Der Wurmlochhals, den der Beobachter als Ring mit dem halben Öffnungswinkel $\tau_{\text{krit}} \approx 8.746^\circ$ — folgt aus Gleichung (6.4.16) für den kritischen Winkel — sieht, ist die „Sichtgrenze“ zwischen oberem und unterem Universum. Außerhalb dieses Rings sieht der Beobachter nur sein eigenes, innerhalb das andere Universum. Kurz innerhalb des Rings sieht er eine Spiegelung des anderen Gitters; blickt er radial durch das Wurmloch, so sieht er nochmals das *vollständige* Gitter. Dies ist vor allem auch daran zu erkennen, daß der Beobachter alle vier Schilder für die Himmelsrichtungen sieht, welche im unteren Universum bläulich gefärbt sind. Das „Universe 2 South“ Schild ist dabei scheinbar zu einem Ring verformt; dessen halber Öffnungswinkel ergibt sich mit Hilfe der Rechnungen aus Abschnitt §6.4.3 zu $\tau \approx 7.17^\circ$ (siehe Abb. [6.16](#)).

6.5.2 Statische Szene

Anhand des einfachen dreidimensionalen Gitters aus dem vorherigen Abschnitt konnten wir uns ein Bild davon machen, wie die Geodäten innerhalb der Morris-Thorne-Raumzeit verlaufen. Als zweites Beispiel dient uns ein Wurmloch zwischen zwei baugleichen Räumen aber mit etwas unterschiedlicher Texturierung (Abb. [6.17](#)). Im „oberen“ Raum hängt ein Bild an der gemauerten Wand und es befindet sich eine Tür links vom Beobachter. Im „unteren“ Raum blickt der Beobachter auf eine Sonnenuhr und hat ein Bild hinter sich. Links von ihm befindet sich eine Tür, rechts von ihm gibt es ein Fenster.

Bewegt sich ein Beobachter, bei offenem Wurmloch, entlang einer radialen Geodäten von $l = 4.0$ nach $l = -1.8$, so kann er mit seiner Panoramakamera die Bilder aus Abbildung [6.18](#) aufnehmen¹¹. Im oberen Universum

¹¹Der Beobachter selbst ist in den Szenen natürlich nicht eingebaut.

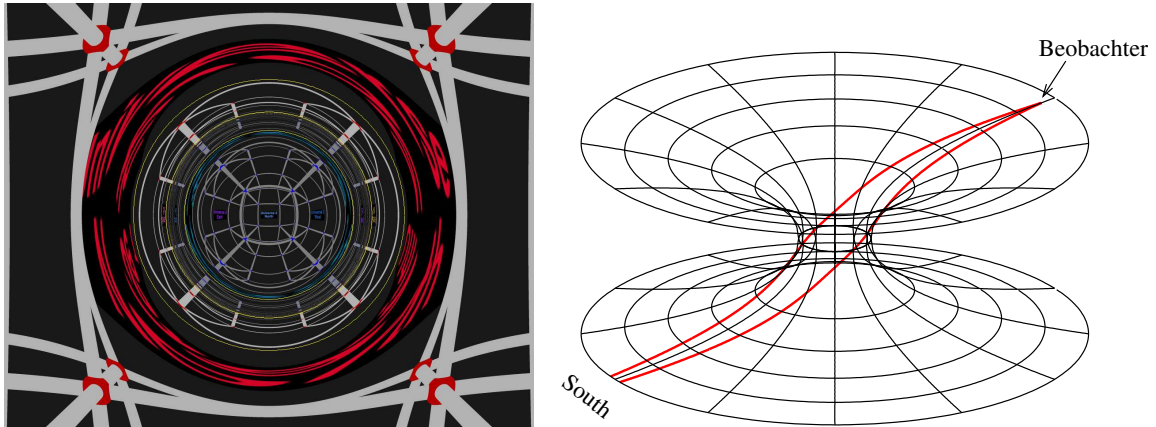


Abbildung 6.16: Der Wurmlochhals hat einen Radius von $b_0 = 2$. **Links:** Der Beobachter befindet sich weiterhin am Ort $l = 13, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$; das Sichtfeld seiner Kamera beträgt wieder $45^\circ \times 36^\circ$. Die gelben Kreise entsprechen den Winkeln $\tau = 11.5^\circ, \tau = 8.746^\circ$ und $\tau = 7.17^\circ$ (von außen nach innen). **Rechts:** Nullgeodäten mit den Winkeln $\tau \approx \pm 7.17^\circ$ markieren den Ring des „Universe 2 South“ Schildes.

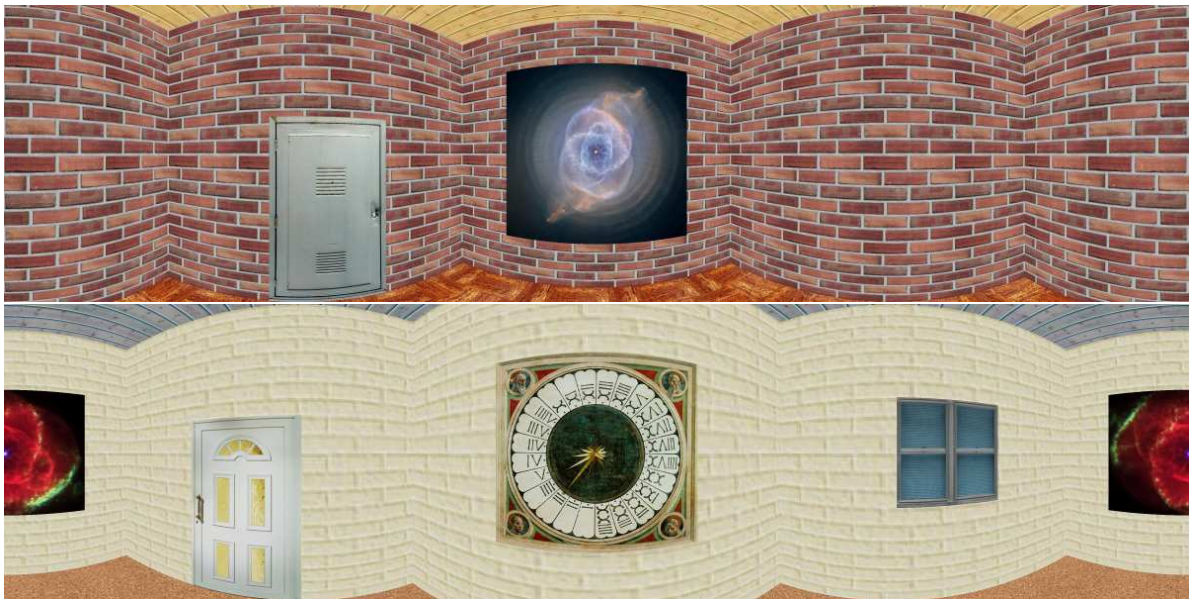


Abbildung 6.17: Gegeben seien zwei kubische Räume mit Kantenlänge $\Delta r = 50$ und mit leicht unterschiedlicher Texturierung, die mit einem Wurmloch verbunden werden sollen. Der Beobachter mache an den Orten mit Eigenradialkoordinate $l = 4.0$ (oben) bzw. $l = -8$ (unten) ohne Wurmloch ($b_0 = 0$) mit einer Panoramakamera (Sichtfeld: $360^\circ \times 90^\circ$) je ein Bild in negativer l -Richtung.

bei $l = 4.0$ erhält er mit seiner Panoramakamera, zunächst noch ohne Wurmloch, natürlich einen Rundumblick vom oberen Zimmer. Bei offenem Wurmloch scheint sich das Bild hinter dem Wurmloch, ähnlich dem „Universe 1 North“ Schild aus dem vorherigen Abschnitt, zu verzerren. Der Einflußbereich des Wurmlochs ist jedoch auf die nähere Umgebung beschränkt. Beim Blick zur Seite oder nach hinten ändert sich die Sicht praktisch nicht.

In [Abbildung 6.18](#) (mitte oben) ist deutlich zu erkennen, daß der Beobachter den vollständigen Raum des unteren Universums sehen kann. Das Wurmloch agiert als eine Projektion einer 4π -Sphäre auf die Sichtebene. Bei genauem Hinschauen erkennt der Beobachter auch die ringförmigen Reflexionen des unteren und oberen

Zimmers im Wurmlochhals. Direkt im Wurmloch ($l = 0$) trennt der Hals die Sicht zwischen oberem und unterem Universum; prinzipiell könnte man jedoch den Raum in einem immer schmäler werdenden Streifen immer und immer wieder sehen. Bewegt sich der Beobachter weiter durch das Wurmloch, so sieht er am Ort $l = -1.8$ (Abb. 6.18, mitte unten) den unteren Raum nahezu normal. Dreht sich der Beobachter am Ort $l = -4.0$ um und blickt zurück durch das Wurmloch in den oberen Raum, so liegt die gleiche Situation wie am Anfang vor.

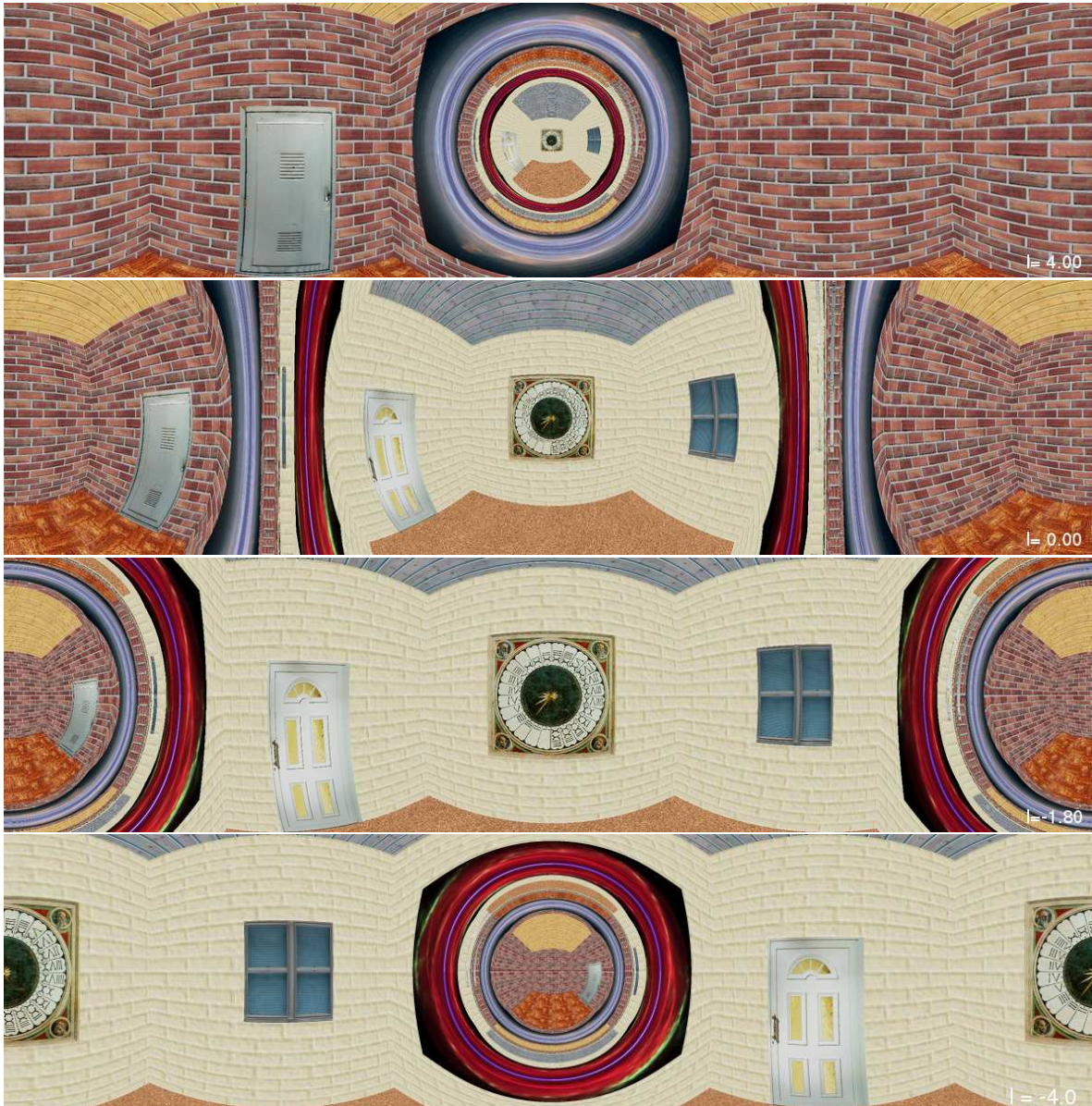


Abbildung 6.18: Gegeben seien zwei kubische Räume mit Kantenlänge $\Delta r = 50$ und mit leicht unterschiedlicher Texturierung, die mit einem Wurmloch ($b_0 = 2.0$) verbunden sind. Beide Wurmlochöffnungen befinden sich jeweils in der Mitte des jeweiligen Raumes. Der Beobachter mache an den Orten mit Eigenradialkoordinate $l = 4.0$, $l = 0.0$ (genau im Hals), $l = -1.8$ und $l = -4.0$ (Blick zurück) eine Aufnahme mit einer Panoramakamera (Sichtfeld: $360^\circ \times 90^\circ$).

Sitzt der Beobachter direkt im Wurmlochhals ($l = 0$) und schaut entlang der positiven φ -Achse, so erhält er die Abbildung 6.19. Die vertikale Linie in der Mitte entspricht hier dem Wurmlochhals. Würde sich der Beobachter tatsächlich im Wurmlochhals befinden, so sähe er beim Geradeausschauen seinen eigenen Hinterkopf. Bewegt er

sich entlang der φ -Achse, so scheinen sich beide Räume zu drehen.

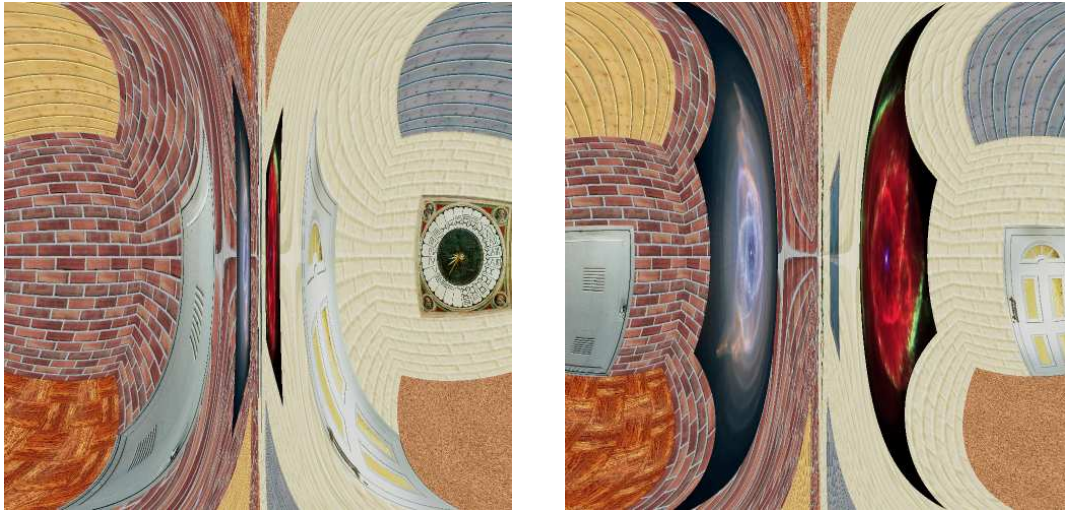


Abbildung 6.19: Gegeben seien die zwei Räume aus Abbildung [\ 6.18](#). Der Beobachter fliege nun entlang des Wurmlochhalses ($l = 0$) und mache je ein Panoramabild (Sichtfeld: $130^\circ \times 130^\circ$) bei $\varphi = 30^\circ$ (links) und $\varphi = 130^\circ$ (rechts). [☞ Film](#)

6.5.3 Relativistischer Flug durch statische Szene

Bleiben wir noch beim Wurmloch, welches zwei baugleiche Räume miteinander verbindet, und fliegen nun mit sehr hoher Geschwindigkeit durch das Wurmloch hindurch. Nähern wir uns der Lichtgeschwindigkeit, so verzerrt sich scheinbar der Raum zusätzlich aufgrund speziell-relativistischer Effekte (siehe Abb. [\ 6.20](#)).

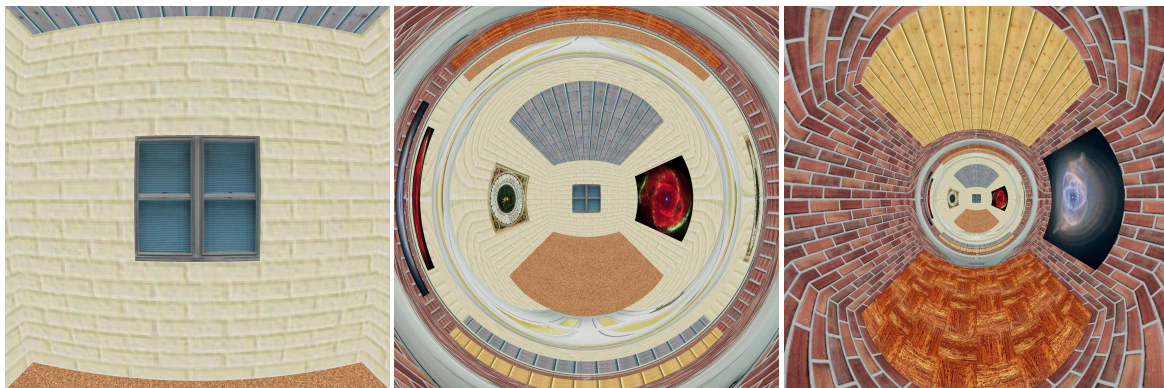


Abbildung 6.20: Gegeben seien die zwei Räume aus Abbildung [\ 6.18](#). Der Beobachter fliege mit unterschiedlicher Geschwindigkeit (von links nach rechts: $v \ll c$, $v = 0.9c$, $v = 0.99c$) radial durch das Wurmloch und mache jeweils am Ort $l = -0.5$ ein Bild mit seiner Lochkamera (Sichtfeld: $70^\circ \times 70^\circ$). [☞ Film](#)

Betrachten wir die Situation am Ort $l = -0.5$, so ist der Beobachter bereits auf der anderen Seite des Wurmlochs. Bewegt er sich sehr langsam im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit, dann sieht er lediglich das Fenster des unteren Raums (Abb. [\ 6.20](#), links). Bei 90 Prozent der Lichtgeschwindigkeit scheint er sich kurz vor dem Wurmloch zu befinden (Abb. [\ 6.20](#), mitte) und hat eine gute Sicht auf die Spiegelungen im Wurmlochhals. Bewegt der Beobachter sich jedoch mit 99 Prozent der Lichtgeschwindigkeit, so hat er den Eindruck, er befände sich noch

im oberen Raum, weit vom Wurmloch entfernt. Aufgrund der hohen Aberration sieht er sogar fast den gesamten oberen Raum, obwohl er ein Sichtfeld von lediglich $70^\circ \times 70^\circ$ besitzt (Abb. \ 6.20, rechts).

6.5.4 Bewegte Objekte

Betrachten wir wieder eine statische Szene, in der ein Wurmloch mit Halsradius b_0 den Tübinger Marktplatz¹² mit einer fiktiven Marsstation¹³ verbindet. Ein Beobachter sitzt am Ort ($l = 25, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0$) mit seiner Lochkamera, deren Sichtfeld $70^\circ \times 70^\circ$ beträgt. Wird nun ein Ball seitlich in das Wurmloch geworfen, so erhält der Beobachter die Bildsequenz aus Abbildung \ 6.21. Der Ball bewegt sich dabei auf einer radialen Geodäten ($\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$) mit einer Geschwindigkeit $v \ll c$. Ist die Topologie des Wurmlochs von der statischen Position des Beobachters noch nicht deutlich, so erhalten wir von ihr beim Verfolgen des Balls zumindest einen gewissen Eindruck. Der Ball scheint sich ähnlich wie auf dem Rand eines Doppeltrichters vom Marktplatz hin zum Mars zu bewegen. Dabei mag sich der Vergleich mit dem Einbettungsdiagramm (Abb. \ 6.1) aufdrängen. Jedoch müssen wir berücksichtigen, daß wir diese Ansicht aus jeder Perspektive hätten, da das Wurmloch sphärisch-symmetrisch ist. Die Fehlinterpretation folgt lediglich aus der zweidimensionalen Betrachtungsweise.

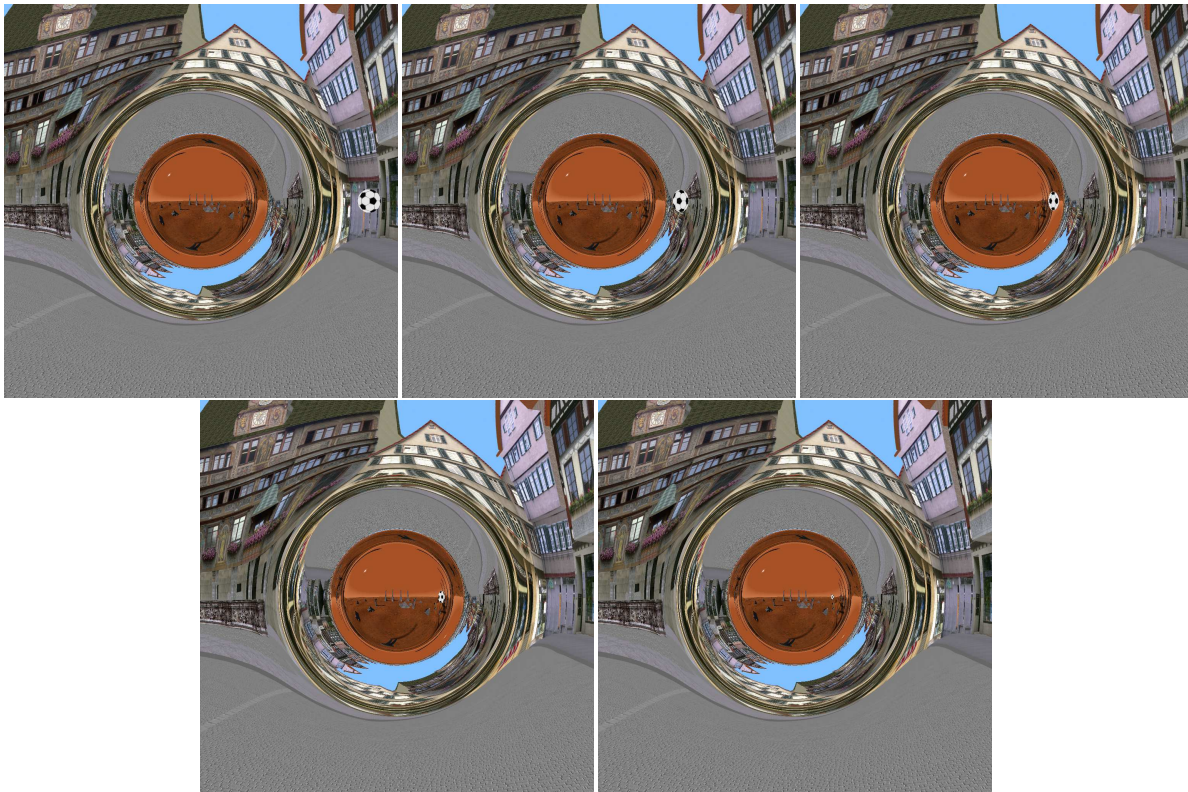


Abbildung 6.21: Gegeben sei ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 6$ zwischen dem Tübinger Marktplatz und einer fiktiven Marsstation. Ein Beobachter am Ort ($l = 25, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0$) beobachtet mit einer Lochkamera mit Sichtbereich ($70^\circ \times 70^\circ$). Ein Ball bewegt sich entlang einer radialen Geodäten ($\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$) durch das Wurmloch. (Tübingen sowie der Mars sind als 4π -Panoramabilder, der Ball als echtes 3D-Objekt eingebunden.)

🎬 *Film*

Da sich der Ball beim Durchfliegen des Wurmlochs vom Beobachter entfernt, wird er zunehmend kleiner, außerdem scheint er sich um 90° im Uhrzeigersinn zu drehen. In der Bildsequenz schlecht zu erkennen ist die Spiegelung

¹²Quelle des 3D-Modells von Tübingen: MPI für biologische Kybernetik Tübingen, 4π -Panoramabild erstellt von Marc Borchers.

¹³Quelle: Marc Borchers (Theoret. Astrophysik Tübingen)

des Balls im Wurmlochhals. Wirft der Beobachter den Ball selbst radial ins Wurmloch, so sieht er den Ball lediglich immer kleiner werden.

Bewegt sich der Ball nicht auf einer radialen Geodäten, sondern umkreist das Wurmloch in einem Abstand l_{Ball} , so erhalten wir die Bildsequenz [6.22](#). Befindet sich der Ball vom Beobachter aus gesehen direkt hinter dem Wurmloch, so entsteht, ähnlich wie in der Schwarzschild-Raumzeit, ein Ring.

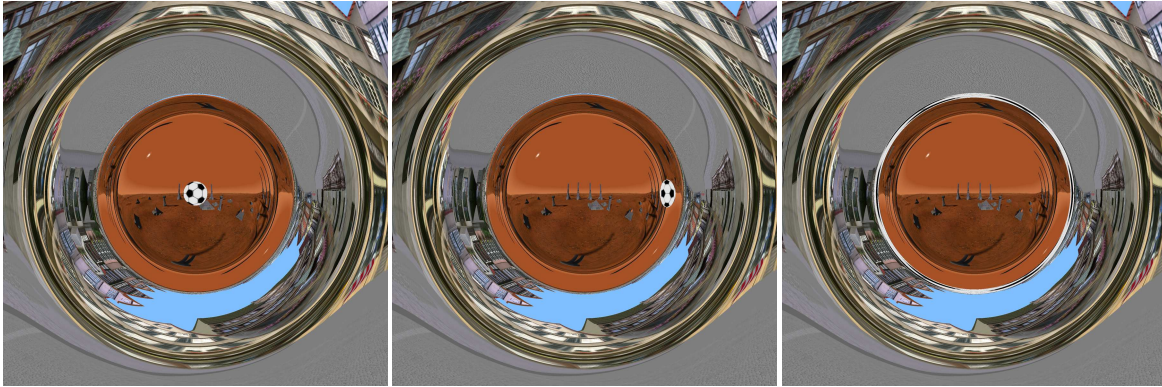


Abbildung 6.22: Gegeben sei ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 6$ zwischen dem Tübinger Marktplatz und einer fiktiven Marsstation. Ein Ball bewege sich auf einer Kreisbahn mit Eigenradial-Radius $l_{\text{Ball}} = 2.0$ um das Wurmloch herum. Ballpositionen (von links nach rechts): $\varphi = \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$. [Film](#)

Wieder hilft die rein zweidimensionale Darstellung nur wenig, um die Topologie des Wurmlochs wirklich anschaulich zu verstehen. In Abschnitt [7.3.2](#) werden wir daher die stereoskopische Visualisierung eines Wurmlochs untersuchen.

6.5.5 Problem mit der texturbasierten Darstellung

Im Gegensatz zu der Visualisierung des hier vorgestellten Wurmlochs mit Hilfe des modellierten Gitters oder der beiden Räume ist die Verwendung des 4π -Panoramabildes vom Tübinger Marktplatz und der fiktiven Marsstation eigentlich nur bedingt richtig. Gehen wir davon aus, daß das Wurmloch sehr klein im Verhältnis zum Marktplatz ist, so liegen die Gebäude bereits im flachen Bereich der Metrik. Ist das Wurmloch jedoch so groß, wie es auf den im vorherigen Abschnitt gezeigten Abbildungen der Fall ist, so werden die verschiedenen Entfernungen zwischen Wurmloch und den einzelnen Gebäuden oder der Straße nicht berücksichtigt. Diese Ungenauigkeit ist hier jedoch nicht gravierend und mindert auch nicht die qualitative Aussagekraft der Abbildungen.

6.6 Ausblick

Statische Wurm Löcher, wie hier das einfache Morris-Thorne-Wurmloch, verletzen unausweichlich die schwache Energiebedingung [\[106\]](#). Wir müssen daher etwas komplexere Formen von Wurm Löchern betrachten, die eine Verletzung, wenn sie auch nicht ganz vermeidbar ist, zumindest auf einen beschränkten Raumbereich oder ein beschränktes Zeitintervall reduzieren. Der vielleicht einfachste Ansatz ist die Multiplikation der statischen Metrik mit einem zeitabhängigen Konformfaktor [\[52\]](#). Die Metrik lautet dann in normalen Radial-Koordinaten

$$ds^2 = \Omega(t)^2 \left[-dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right]$$

oder in Eigenradial-Koordinaten

$$ds^2 = \Omega(t)^2 \left[-dt^2 + dl^2 + r(l)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right],$$

wobei $\Omega(t)^2$ der konforme Faktor ist, welcher natürlich endlich und positiv definit sein muß. Wie wir leicht nachrechnen können, werden Nullgeodäten in diesem Fall durch die konforme Transformation nicht beeinflusst¹⁴. Würden wir, wie beim einfachen Morris-Thorne-Wurmloch, (r, ϑ, φ) in pseudo-kartesische Koordinaten transformieren und den in Abschnitt §6.5.2 beschriebenen Raum bezüglich dieser Koordinaten formulieren, so ergäbe sich, aufgrund der Invarianz der Nullgeodäten gegenüber der konformen Transformation, der gleiche visuelle Eindruck. Diese Darstellung des Raumes ist aber wenig sinnvoll, da der Raum mit Ω gestreckt oder gestaucht würde.

Eine interessantere Form eines Wurmlochs entsteht durch Einfügen eines Rotationstermes ähnlich der Kerr-Metrik [9]. Teo [101] betrachtet ein stationäres, axialsymmetrisches, durchquerbares Wurmloch mit der Metrik

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b/r} + r^2 K^2 \left[d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi - \omega dt)^2 \right],$$

wobei N, b, K und ω Funktionen von r und ϑ sein können. In der Diplomarbeit von Fechtig [30] wird die hier entwickelte Visualisierungstechnik an einem Spezialfall solch eines rotierenden Wurmlochs angewendet.

In diesem Kapitel haben wir uns auf die rein geometrische Sicht innerhalb einer Wurmloch-Raumzeit beschränkt. Dies war insofern ausreichend, da wir uns auf die einfachste Morris-Thorne-Raumzeit beschränkt haben, bei der die Rotverschiebungsfunktion identisch Eins war. Die interessantere Raumzeit wäre natürlich die, bei der auf beiden Seiten des Wurmloches die Zeit unterschiedlich schnell vergeht. Dann müßte auch die Rotverschiebung berücksichtigt werden. Spinnen wir den Gedanken weiter, so könnten wir aus einem Wurmloch auch eine Zeitmaschine konstruieren (vgl. dazu auch [68]). Die Herausforderung bei dessen Visualisierung wäre die Platzierung geeigneter Objekte, die eine zeitliche Veränderung besäßen, um so die Bewegung eines Beobachters auf einer geschlossenen zeitartigen Kurve deutlich zu machen.

Doch zunächst könnte man die hier gewonnene analytische Lösung dafür verwenden, einzelne Punktlichtquellen in der Raumzeit zu plazieren. So wäre eine realistischere Beleuchtung und damit einhergehend die Berechnung von Schatten möglich.

¹⁴Allgemein gilt, daß bei einer konformen Transformation Nullgeodäten wieder in Nullgeodäten übergehen; siehe Anhang §A.6.

Kapitel 7

Stereoskopische Visualisierung in der Relativitätstheorie

In den bisherigen Kapiteln haben wir uns ausführlich mit der Visualisierung in der Relativitätstheorie beschäftigt, wie wir sie prinzipiell mit einer Kamera oder einem Teleskop machen könnten. Wenn es aber vielleicht irgendwann einmal möglich sein sollte, mit nahezu Lichtgeschwindigkeit durch ein Wurmloch in die Nähe eines kollabierenden Sterns zu reisen, so könnten wir all dies mit unseren beiden Augen beobachten. Diesem Aspekt der binokularen Wahrnehmung in der Relativitätstheorie wollen wir in diesem Kapitel näher kommen.

Unter dem Begriff *Beobachten* verstehen wir prinzipiell zwei Gesichtspunkte. Wir beobachten einen Vorgang, etwa die Bewegung eines Objekts, und meinen einerseits, daß wir eine Messung an diesem Objekt durchführen. Andererseits verstehen wir unter Beobachten den tatsächlichen Sinneseindruck, nämlich dem Sehen eines Vorgangs. Im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch müssen wir aus physikalischer Sicht zwischen Messen und Sehen unterscheiden. Denn, wenn wir einen Meterstab messen, dann müssen wir zur gleichen Zeit den Anfang und das Ende des Stabes bestimmen. Was wir jedoch von dem Meterstab sehen, ist das Licht, welches gleichzeitig in unser Auge gelangt. Dabei wird das Licht von den beiden Enden des Stabes in der Regel zu unterschiedlichen Zeiten starten müssen. In unserer Alltagswelt machen wir keine strikte Trennung dieser beiden Gesichtspunkte. Dies ist auch gar nicht erforderlich, da wir es stets mit verhältnismäßig kleinen Geschwindigkeiten zu tun haben.

Nähern wir uns immer mehr der Lichtgeschwindigkeit, so erkennen wir die Diskrepanz zwischen Sehen und Messen, da aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit die Objekte an einem anderen Ort zu sein scheinen, als sie tatsächlich sind. Ohne die Spezielle Relativitätstheorie müßten sich Objekte, welche sich auf den Beobachter zubewegten, in die Länge gezogen sein [84]; eine Kugel würde zur Zigarre verzerrt. Berücksichtigen wir die Spezielle Relativitätstheorie, so sind Objekte in Bewegungsrichtung, gemessen von einem ruhenden Beobachter, verkürzt. Objekte erscheinen nun vielmehr verdreht oder geschert, wobei eine Kugel stets den Umriß einer Kugel zu behalten scheint [77].

Diese Verzerrungen gelten nun für beide Augen getrennt. Aufgrund der leicht unterschiedlichen Positionen der Augen ergeben sich auch leicht unterschiedlich verzerrte Bilder. Sofern unser Sehapparat im Stande ist, diese beiden Bilder zu einem zu fusionieren, erscheint ein Objekt nicht nur verdreht oder geschert sondern bewegt sich scheinbar auch auf einer anderen Bahn.

Nachdem wir uns im folgenden Abschnitt zunächst einmal die Wahrnehmung von räumlicher Tiefe und Größe verdeutlichen wollen, werden wir im darauffolgenden Abschnitt die binokulare Sicht der Speziellen Relativitätstheorie vor Augen führen. Im Anschluß daran wagen wir noch einen kleinen Blick in die Allgemeine Relativitätstheorie.

7.1 Wahrnehmung von räumlicher Tiefe und Größe

Wir stützen uns hier auf die Darstellung von Goldstein [42], welche den Zusammenhang zwischen der Reizinformation auf den Netzhäuten und der wahrgenommenen Tiefe eines Objekts herstellt. Die Tiefenwahrnehmung ist jedoch keine kognitive Interpretation von Daten, sondern „ein Kernbereich der visuellen Wahrnehmung“ [42].

7.1.1 Informationsquellen

Die Informationsquellen für die Tiefenwahrnehmung gruppieren sich in vier Bereiche: okulomotorische, monokulare und bewegungsinduzierte Information sowie Querdisparation. Zur Erklärung der stereoskopischen Wahrnehmung in der Relativitätstheorie werden wir später im wesentlichen nur die Querdisparation verwenden. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir aber kurz alle Quellen.

Okulomotorische Informationen

Um Objekte in der unmittelbaren Umgebung zu fixieren, müssen sich die Augen verdrehen (*Konvergenz*). Weiterhin geht eine Formänderung der Linse im Auge einher (*Akkommodation*). Beide motorischen Reize der Augen werden im Gehirn zu einer Tiefeninformation verarbeitet. Allerdings gilt dieses Kriterium nur in einem Abstand zwischen 50cm und 3m .

Monokulare Informationen

Bei der Betrachtung einer Szenerie mit lediglich einem Auge vermitteln monokulare Tiefenkriterien den Eindruck räumlicher Tiefe. Diese gelten auch bei der Betrachtung eines ebenen Bildes mit beiden Augen. Im einzelnen sind dies: das Verdecken von Objekten, die relative Größe im Blickfeld, die relative Höhe im Blickfeld (in Abhängigkeit der Lage zum Horizont), die atmosphärische Perspektive, die gewohnte Größe, der Texturgradient und die, insbesondere in der Malerei bekannte, lineare Perspektive. Bei der monokularen Abbildung in der Speziellen Relativitätstheorie ist vor allem der Texturgradient wichtig, worauf wir in Abschnitt §7.2.1 noch genauer eingehen wollen.

Bewegungsinduzierte Tiefenkriterien

Räumliche Tiefe entsteht, wenn sich der Beobachter relativ zu einer ruhenden Szene bewegt. Objekte, die weiter entfernt sind, scheinen sich langsamer zu bewegen als solche, die nahe beim Beobachter vorbeihuschen. Ein anderer Effekt ist das fortschreitende Zu- und Aufdecken von Flächen. Die hintere Fläche wird von der vorderen zunächst verdeckt und dann wieder freigegeben.

Querdisparation

Betrachtet man eine Szene mit zwei Augen, so entstehen auf den beiden Netzhäuten zwei unterschiedliche Bilder aufgrund der verschiedenen Blickwinkel der Augen. Diese, als *Querdisparation* oder auch *binokulare Disparation* genannte Tiefeninformation benutzte Charles Wheatstone im 19. Jahrhundert zum Bau eines Stereoskops. Der Blick durch ein Stereoskop zeigt, daß wir einen Tiefeneindruck erleben, wenn unseren Augen zwei leicht unterschiedliche Bilder einer Szene dargeboten werden.

Zur Erklärung des Tiefeneindrucks benötigen wir den Begriff der *korrespondierenden Netzhautpunkte*. Legt man beide Augen so übereinander, daß die beiden Linsen und Fovae (Sehgruben, siehe Abb. 7.1) zusammenfallen, so sind zwei Punkte zueinander korrespondierend, wenn sie aufeinander liegen. Fixiert ein Beobachter nun ein Objekt (ein Punkt) F , so fällt dessen Bild auf die Fovae F' und F'' . Alle Punkte, die durch den Schnitt zweier Geraden, welche von korrespondierenden Netzhautpunkten starten, gebildet werden, liegen auf dem *Horopter* (Abb. 7.2)¹.

¹Die interaktiven geometrischen Figuren sind mit dem frei verfügbaren Programm „Z.u.L. Zirkel und Lineal“ (Version 3.38) von R. Grothmann <http://ww.z-u-l.de> erstellt.

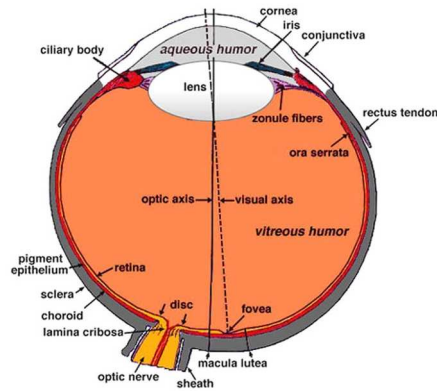


Abbildung 7.1: Querschnitt durch ein menschliches Auge (Bildquelle: <http://webvision.med.utah.edu>). Für unsere Zwecke verwenden wir als vereinfachtes Modell einen kugelförmigen Glaskörper mit einer punktförmigen Linse und Sehgrube (fovea).

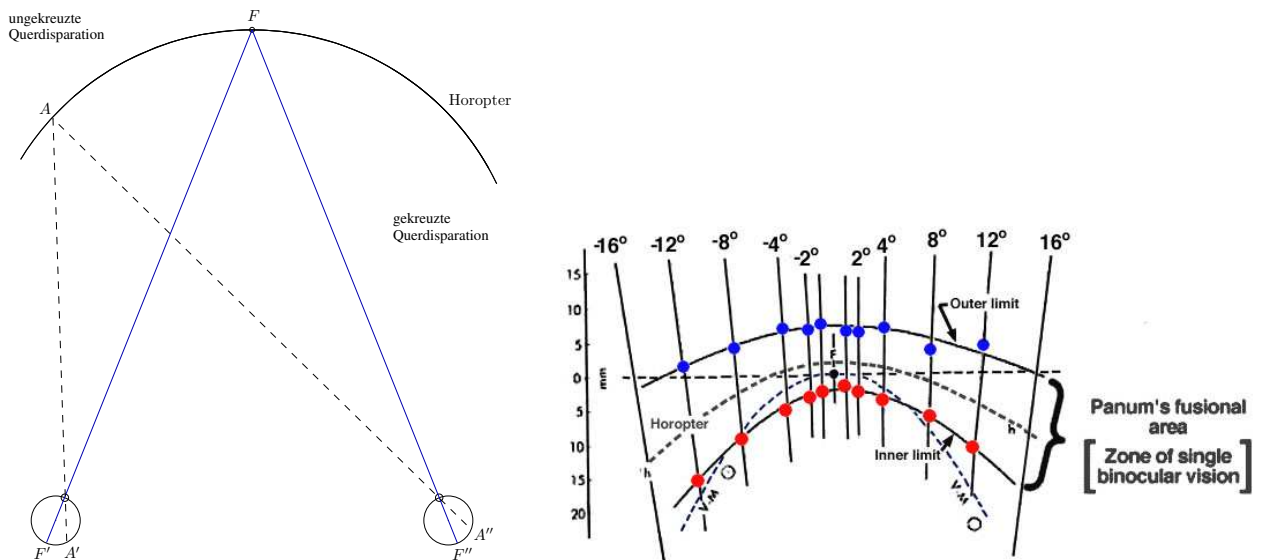


Abbildung 7.2: Links: Ein Beobachter fixiert den Punkt F . Das Bild von F trifft die beiden Netzhäute in den Fovae F' und F'' . Ein auf dem Horopter liegender Punkt A trifft korrespondierende Netzhautpunkte A' und A'' . Bei Punkten diesseits des Horopters spricht man von gekreuzter, jenseits des Horopters von ungekreuzter Querdisparation. ☞ [ZuL \(horopter.zir\)](http://www.zul.de) **Rechts:** Experimentell gemessener Horopter und zugehöriges Panumsches Fusionsgebiet (Panum's fusional area, Bildquelle: <http://webvision.med.utah.edu/KallDepth.html>, Stand: September 2005). Nur in diesem Bereich fusionieren die beiden Netzhautbilder zu einem räumlichen Eindruck.

Objekte, welche sich vor oder hinter dem Horopter befinden, treffen auf nichtkorrespondierende (disparate) Netzhautpunkte. Der Winkel zwischen zwei solchen Netzhautpunkten heißt *Querdisparationswinkel*. Im Auge gibt es nun bestimmte Neuronen, die auf diese Querdisparation empfindlich sind; werden sie gereizt, so entsteht der Eindruck räumlicher Tiefe. Allerdings ist die Möglichkeit, die beiden unterschiedlichen Netzhautbilder zu einem Objekt zu verschmelzen, begrenzt. Lediglich in einem kleinen Bereich, dem *Panumschen Fusionsgebiet*, sehen wir ein Objekt. Außerhalb dieses Bereichs sehen wir zwei Objekte (Diplopia), was jedoch von unserer Wahrnehmung in der Regel „ausgeblendet“ wird.

7.1.2 Tiefenwahrnehmung bei der Stereoprojektion

Die Darstellung in diesem Unterabschnitt beruht auf dem Artikel von Gerhard P. Herbig: *Tiefenwahrnehmung bei der Stereoprojektion*, Email: gph@herbig-3d.de (Stand: 2004).

Wahrnehmung der Größe und Tiefe eines Objekts

Ein räumliches Objekt werde durch seine Größe g und seine Tiefe t bestimmt. Es befinde sich in einem Abstand a vor unserem Auge. Dann ist die Bildhöhe h_0 auf der Retina durch den Strahlensatz

$$h_0 = \frac{f_0}{a} g \quad (7.1.1)$$

gegeben (Abb. 7.3). Zur Vereinfachung der nachfolgenden Rechnungen nehmen wir an, daß unsere beiden Augen eine Netzhautebene im Abstand f_0 , der Brennweite der Augen, besitzen. Auf diese Brennebene wird dann ein Objekt projiziert.

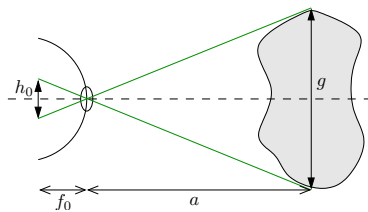


Abbildung 7.3: Die Höhe des Netzhautbildes h_0 ergibt sich direkt aus dem Strahlensatz. Die Netzhaut ist als Ebene vereinfacht.

Beide Augen fixieren dabei einen Punkt auf der Mittelachse im Unendlichen. Es gibt daher keinen Horopter. Die Tiefeninformation eines Objekts wird durch die Differenz (*Deviation*) des maximalen und minimalen Bildpunktversatzes vermittelt (Abb. 7.4).

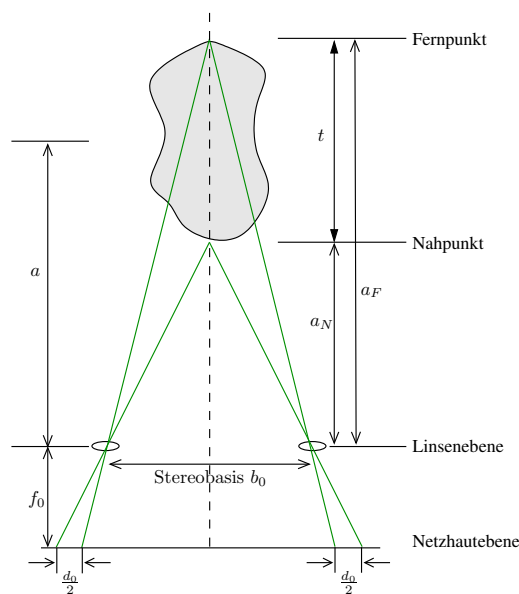


Abbildung 7.4: Die Tiefenwahrnehmung entsteht durch die Deviation $d_0/2$ auf der Netzhautebene.

Die Deviation d_0 können wir wieder leicht ermitteln, indem wir den Strahlensatz sowohl auf den hinteren (Abstand a_F) als auch den vorderen (Abstand a_N) Punkt anwenden. So folgt

$$\frac{d_0}{2} = \frac{f_0}{a_N} \frac{b_0}{2} = \frac{f_0}{a_F} \frac{b_0}{2}. \quad (7.1.2)$$

Definieren wir noch das geometrische Mittel a des Abstandes über $a = \sqrt{a_F a_N}$ und verwenden die Tiefe des Objekts $t = a_F - a_N$, so gilt für die Deviation

$$d_0 = \frac{b_0 f_0}{a^2} t. \quad (7.1.3)$$

Da der Augenabstand b_0 sowie die Brennweite f_0 der Augen unveränderlich sind, hängt die Deviation von der mittleren Entfernung a sowie der eigentlichen Tiefe t des Objekts ab.

Abbildung im Auge bei der Stereoprojektion

Verfolgen wir die Aufnahme des Stereobildes, dessen Projektion auf eine Leinwand und die anschließende Wahrnehmung im Auge, so gelangen wir zur Abbildung 7.5. Dabei setzen wir voraus, daß die Stereobasen der Kamera und des Projektors identisch sind.

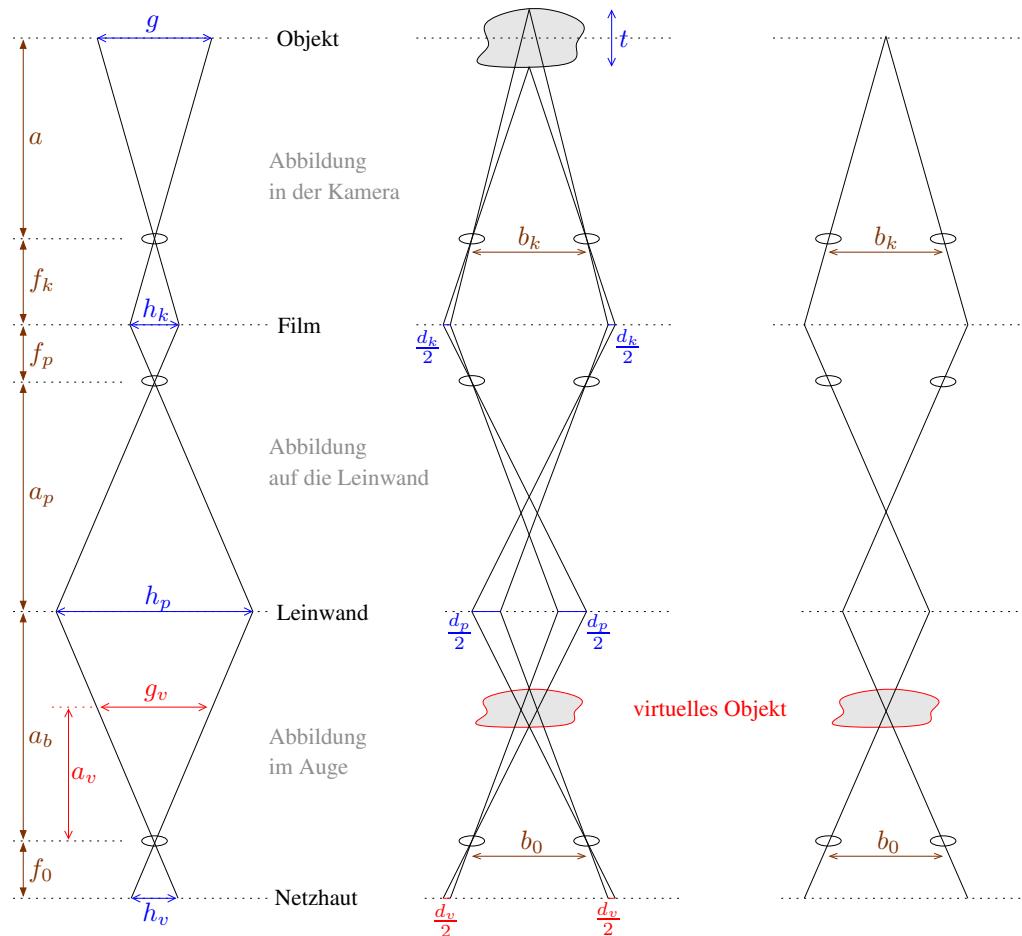


Abbildung 7.5: Aufnahme, Projektion und Wahrnehmung eines räumlichen Objekts als Kettenabbildung. Der Tiefenfaktor ist hier $T = 2/3$ und es gilt $b_0 = b_k$.

Die virtuelle Größe g_v und Tiefe t_v des Objekts, sowie den virtuellen Abstand a_v erhalten wir aus der tatsächlichen Größe g , Tiefe t und dem wahren Abstand a über die drei Beziehungen

$$g_v = \frac{b_0}{b_k} \cdot g, \quad t_v = \frac{b_0}{b_k} \cdot T \cdot t, \quad a_v = \frac{b_0}{b_k} \cdot T \cdot a, \quad T = \frac{f_p \cdot a_b}{f_k \cdot a_p}, \quad (7.1.4)$$

wobei wir T als Tiefenfaktor bezeichnen. Eine formtreue (orthostereoskopische) Abbildung erhalten wir genau dann, wenn der Tiefenfaktor $T = 1$ ist. Gilt zusätzlich noch $b_0 = b_k$, so sprechen wir von einer form- und größentreuen (tautostereoskopischen) Abbildung.

7.2 Stereoskopie in der Speziellen Relativitätstheorie

Wie bereits 1959 von Penrose [77] und Terrell [102] erkannt, kann ein Beobachter die Längenkontraktion eines sich nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegenden Objektes nicht *sehen*. Statt dessen erscheint ihm das Objekt gedreht und verzerrt. Genaue Rechnungen, wie sie bereits u.a. von Hollenbach [48] und erst kürzlich von Deissler [20] durchgeführt wurden, zeigen, wie ein schnell bewegtes Objekt tatsächlich — ohne Interpretation unseres Gehirns — aussehen würde. In einem ersten Schritt wollen wir solch eine Rechnung nachvollziehen. Diese gilt allerdings nur für ein Auge. In einem zweiten Schritt wollen wir uns dann überlegen, welchen binokularen Eindruck wir von solch einer Szene erwarten würden. Die bereits 1971 von Boas, Calhoun und Horan [7] durchgeführten Berechnungen zur binokularen Beobachtung bewegter Objekte wollen wir hier eigenständig selbst entwickeln, da wir sie später auf den allgemein-relativistischen Fall umsetzen wollen.

7.2.1 Monokulare Visualisierung in der SRT

Wir wollen uns zunächst auf die geometrischen Effekte konzentrieren, die bei Beobachtung relativistischer Bewegungen mittels *eines* Auges oder *einer* Kamera auftreten. Dafür besprechen wir kurz die gängigsten Objekte: Punkt, Stab, Quadrat und Kreis anhand ihrer Phantombilder.

Da wir alle weiteren Objekte aus Punkte zusammensetzen können, betrachten wir zuerst das Phantombild eines Punktes². Dabei wollen wir unter dem Phantombild eines Punktes seinen *scheinbaren* Ort, wo wir ihn tatsächlich sehen, verstehen. Das Phantombild eines ausgedehnten Objekts setzt sich dann aus *allen* Punkten der Oberfläche zusammen, deren Licht zur gleichen Zeit beim Beobachter eintrifft. Hierfür nehmen wir zunächst an, daß das Objekt vollkommen transparent ist. Für das eigentliche Bild müssen wir natürlich Verdeckung und Opazität der Objekte berücksichtigen.

Im Anschluß daran wollen wir uns überlegen, was wir mit beiden Augen sehen würden. Wichtig hierbei ist, daß wir binokulares Sehen so verstehen wollen, daß Licht in beiden Augen zur gleichen Zeit ankommen muß. Die innere Ausdehnung des Auges und die damit verbundene Lichtlaufzeit vernachlässigen wir. Entscheidend ist der Zeitpunkt, wenn das Licht die Linse erreicht. Dafür erlauben wir einen beliebigen Augenabstand, den wir ja durch zwei getrennte Kameras realisieren könnten.

Ausgangssituation und Poincaré-Transformation

Ein Beobachter sitze am Ort (x_o, y_o, z_o) im System S und beobachte zum Zeitpunkt $t = t_o$ ein sich schnell³ bewegendes Objekt, welches im System S' ruht (siehe Abb. 7.6). Mit Beobachten meinen wir hier ausdrücklich die visuelle Wahrnehmung und nicht eine Messung.

Die Systeme S und S' sind über die *Poincaré-Transformation*

$$\mathbf{x}' = L_{\bar{v}} \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (7.2.1)$$

²Im streng mathematischen Sinn ist ein Punkt natürlich nicht zu sehen.

³Schnell heißt hier immer nahe der Lichtgeschwindigkeit.

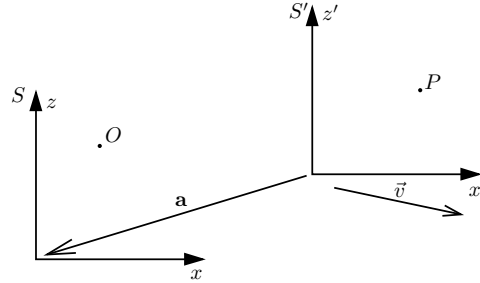


Abbildung 7.6: Das System S' sei zu einem beliebigen Zeitpunkt t relativ zu S um den Vektor \mathbf{a} translatiert und bewege sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit \vec{v} . Der Punkt P ruhe bzgl. S' .

welche sich aus der Lorentz-Transformation $L_{\vec{v}}$ und einer Translation $\mathbf{a} = (a_t, a_x, a_y, a_z)$ zusammensetzt, miteinander verknüpft.⁴ Die Lorentz-Transformation lautet in allgemeiner Form [92]:

$$L_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{v}^T \\ -\gamma \vec{v} & \mathbb{1} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v} \vec{v}^T \end{pmatrix}, \quad (7.2.2)$$

wobei \vec{v}^T der zu \vec{v} transponierte Vektor ist. Ein Punkt, oder allgemeiner ein Ereignis, P , welches bezüglich dem System S' ruht, hat in S' die Koordinatendarstellung $\mathbf{x}'_p = (t'_p, x'_p, y'_p, z'_p)$. Mittels Poincaré-Transformation (7.2.1) können wir nun die Koordinaten von P bezogen auf das System S des Beobachters berechnen. Dafür benötigen wir die inverse Lorentz-Transformation $L_{\vec{v}}^{-1}$, die sich einfach aus der ursprünglichen ergibt, indem wir lediglich \vec{v} durch $-\vec{v}$ ersetzen:

$$L_{\vec{v}}^{-1} = L_{-\vec{v}}.$$

So erhalten wir die Koordinaten $\mathbf{x}_p = (t_p, x_p, y_p, z_p)$ von P aus

$$\mathbf{x}_p = L_{\vec{v}}^{-1} (\mathbf{x}'_p - \mathbf{a}). \quad (7.2.3)$$

Als kleines Beispiel betrachten wir den Spezialfall für $\mathbf{a} = 0$ und $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Der Beobachter messe zur Zeit t eine, bezüglich dem System S' ruhende, konstante Strecke $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Dann folgt mit Gleichung (7.2.3) und $t = t_1 = t_2$ die erwartete Längenkontraktion

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Da stets $\gamma \geq 1$, ist die in S gemessene Strecke kürzer oder gleich der in S' gemessenen.

Phantombild eines Punktes

Bei der Beobachtung eines Punktes P müssen wir nun die endliche Lichtlaufzeit berücksichtigen. Wir sehen ein bewegtes Objekt im allgemeinen nicht dort, wo es sich zum Beobachtungszeitpunkt t_o befindet. Um nun die Position (x_p, y_p, z_p) — den scheinbaren Ort von P — und den Zeitpunkt t_p zu bestimmen, bei dem der Punkt Licht ausgesendet hat, welches zum Zeitpunkt t_o beim Beobachter am Ort (x_o, y_o, z_o) eintrifft, müssen wir den Rückwärts- oder Vergangenheitslichtkegel des Beobachters mit der Weltlinie des Punktes P schneiden (Abb. 7.7).

Der Schnitt führt auf die quadratische Gleichung

$$(t_o - t_p)^2 - (x_o - x_p)^2 - (y_o - y_p)^2 - (z_o - z_p)^2 = 0. \quad (7.2.4)$$

Die Koordinaten (t_p, x_p, y_p, z_p) hängen über die Poincaré-Transformation (7.2.3) mit den Koordinaten (t'_p, x'_p, y'_p, z'_p) zusammen. Da der Punkt P bezogen auf das System S' ruht, bleibt als einzig Unbekannte die Zeit t'_p .

⁴Hier und im weiteren verwenden wir fettgedruckte Buchstaben für Vierervektoren und Vektorpfeile für Dreiervektoren. Außerdem setzen wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

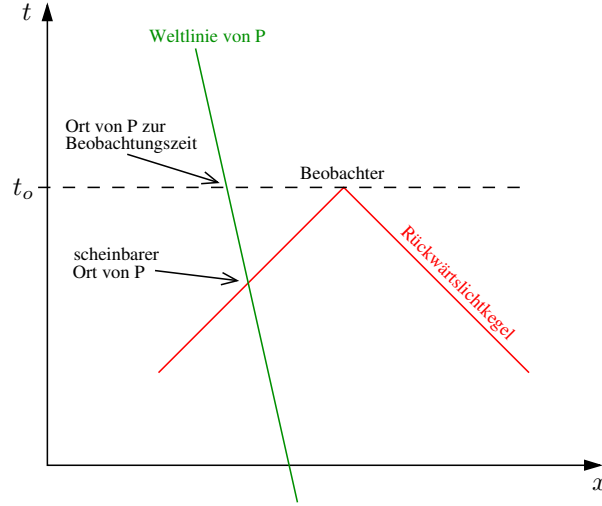


Abbildung 7.7: Der scheinbare Ort eines bewegten Punktes P stimmt in der Regel nicht mit dem wahren Ort zur Beobachtungszeit überein, sondern befindet sich im Schnittpunkt der Weltlinie von P mit dem Rückwärtslichtkegel des Beobachters.

Aus der Schnittgleichung (7.2.4) erhalten wir, mit der Vereinfachung $(L_{tt}^{-1})^2 - (L_{xt}^{-1})^2 - (L_{yt}^{-1})^2 - (L_{zt}^{-1})^2 = 1$, die quadratische Gleichung für t'_p :

$$t_p'^2 - 2(a_t - \rho)t_p' + (a_t^2 - 2\rho + \sigma) = 0, \quad (7.2.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho &= -L_{tt}^{-1}(t_o - L_{tk}^{-1}\xi_k) + L_{xt}^{-1}(x_o - L_{xk}^{-1}\xi_k) + L_{yt}^{-1}(y_o - L_{yk}^{-1}\xi_k) + L_{zt}^{-1}(z_o - L_{zk}^{-1}\xi_k), \\ \sigma &= (t_o - L_{tk}^{-1}\xi_k)^2 - (x_o - L_{xk}^{-1}\xi_k)^2 - (y_o - L_{yk}^{-1}\xi_k)^2 - (z_o - L_{zk}^{-1}\xi_k)^2 \end{aligned}$$

und $\xi_k = x'_k - a_k$, ($k = 0, 1, 2, 3$). Dabei interessiert uns nur der Minimalwert; der Maximalwert entspräche dem Schnitt mit dem Zukunftslichtkegel. Nach kurzer Rechnung erhalten wir

$$t'_{p,\min} = a_t - \rho - \sqrt{\rho^2 - \sigma} \quad (7.2.6)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho &= \gamma(-t_o + \vec{v} \cdot \vec{x}_o), \\ \rho^2 - \sigma &= \left[(x' - a_x) - (x_o - \gamma v_x t_o) - \frac{\gamma^2 v_x}{\gamma + 1} \vec{v} \cdot \vec{x}_o \right]^2 \\ &\quad + \left[(y' - a_y) - (y_o - \gamma v_y t_o) - \frac{\gamma^2 v_y}{\gamma + 1} \vec{v} \cdot \vec{x}_o \right]^2 \\ &\quad + \left[(z' - a_z) - (z_o - \gamma v_z t_o) - \frac{\gamma^2 v_z}{\gamma + 1} \vec{v} \cdot \vec{x}_o \right]^2 \end{aligned}$$

und $\vec{v} \cdot \vec{x}_o = v_x x_o + v_y y_o + v_z z_o$. Wie zu erwarten ist die Diskriminante $\rho^2 - \sigma \geq 0$, da der Rückwärtslichtkegel des Beobachters auf jeden Fall die zeitartige Weltlinie von P schneidet. Der scheinbare Ort von P hat folglich die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} t_p \\ x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = L_{\vec{v}}^{-1} \begin{pmatrix} t'_{p,\min} - a_t \\ x'_p - a_x \\ y'_p - a_y \\ z'_p - a_z \end{pmatrix} = L_{\vec{v}}^{-1} \begin{pmatrix} -\rho - \sqrt{\rho^2 - \sigma} \\ x'_p - a_x \\ y'_p - a_y \\ z'_p - a_z \end{pmatrix}. \quad (7.2.7)$$

Der Punkt P ist strukturlos, wir sehen daher auch wieder nur einen Punkt. Der Parameter a_t , der die Synchronizität der beiden Uhren von S und S' kennzeichnet, spielt keine Rolle, da eine konstante Zeitdifferenz zwischen beiden Systemen nichts am scheinbaren Ort von P ändert. Der wahre Ort stimmt nur für $|\vec{v}| = 0$ mit dem scheinbaren Ort überein.

Phantombild eines Stabes

Setzen wir einen Stab aus einer Reihe einzelner Punkte zusammen, so können wir anhand der Gleichung (7.2.7) sein scheinbares Aussehen berechnen. Der Einfachheit halber legen wir den Stab der Länge r auf die x' -Achse,

$$x'_p = r \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right), \quad \text{mit} \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Lassen wir den Stab sich entlang seiner Ausrichtung, $\vec{v} = (v_x, 0, 0)^T$, oder senkrecht dazu, $\vec{v} = (0, v_y, 0)^T$ bewegen, so gelangen wir zu dem wohlbekanntem Ergebnis (siehe z.B. [108]), daß sich der Stab entweder dehnt oder streckt oder sich hyperbolisch verformt. Im einzelnen folgt mit $\mathbf{a} = 0$ für die scheinbare Länge r_{app} ,

$$r_{\text{app}} = \sqrt{\frac{1+v_x}{1-v_x}} r.$$

Bewegt sich der Stab auf den Beobachter zu ($v_x < 0$), so erscheint er tiefer; bewegt er sich von ihm weg ($v_x > 0$), dann erscheint er kürzer. Der genaue Beobachtungszeitpunkt — sehen wir vom Moment des direkten Vorbeiflugs ab ($v_x \rightarrow -v_x$) — spielt dabei keine Rolle.

Ist die Bewegung senkrecht zur Stabausrichtung, so können wir seine Form parametrisch wie folgt beschreiben,

$$x_p = r \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right), \quad (7.2.8a)$$

$$y_p = \gamma^2 v_y t_o - \gamma v_y \sqrt{r^2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2 + (\gamma v_y t_o)^2}, \quad (7.2.8b)$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-v_y^2}$ und $\varepsilon \in [0, 1]$. Das Phantombild eines Stabes für einen ruhenden Beobachter im Koordinatenursprung ist für verschiedene Zeitpunkte der Beobachtung in Abbildung 7.8 dargestellt.

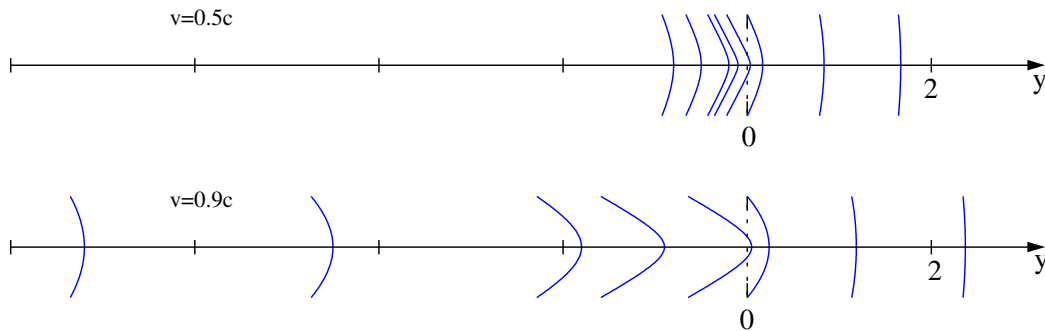


Abbildung 7.8: Ein Stab der Länge 1 bewege sich, senkrecht zu seiner Ausdehnung, entlang der y -Achse mit der Geschwindigkeit $v = 0.5c$ (oben) bzw. $v = 0.9c$ (unten). Der Beobachter sitze im Koordinatenursprung und beobachte zu den Zeiten $t = \{-0.8, -0.5, -0.2, -0.1, 0.1, 0.5, 2.5, 5.0\}$ (von links nach rechts).

Die Parametrisierung (7.2.8) des Stabes stellt eine Hyperbel der Form

$$\frac{(y - y_O)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad y_O = \gamma^2 v_y t, \quad a^2 = \gamma^4 v_y^4 t^2, \quad b^2 = \gamma^2 v_y^2 t^2 \quad (7.2.9)$$

dar, wobei deren Mittelpunkt $(0, y_O)$ mit der Beobachtungszeit t wandert. Im Scheitel der Hyperbel können wir einen Schmiegekreis anpassen, dessen Mittelpunkt (m_x, m_y) sich bei

$$m_x = 0, \quad m_y = -(1 - \text{sign}(t)v_y) \gamma^2 |t|$$

befindet und dessen Radius $R = b^2/a = |t|$ ist. Im Spezialfall $t = 0$, wenn der Stab den Beobachter passiert, entartet die Hyperbel zu einem Eck mit Öffnungswinkel $\alpha = \pi - 2 \arctan(\gamma\beta)$.

Phantombild eines Quadrats

Vereinfachen wir wieder die Ausgangssituation auf eine relative Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, 0, 0)^T$ von S' bezüglich S . Der Verschiebungsvektor \mathbf{a} habe die Komponenten $(a_t = 0, a_x = 0, a_y = a, a_z = 0)$. Der Beobachter befinde sich am Koordinatenursprung von S und beobachte zum Zeitpunkt t_o . Die inverse Poincaré-Transformation lautet dann für einen Punkt P

$$\begin{pmatrix} t_p \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' - a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma t' + \gamma v x' \\ \gamma t' v + \gamma x' \\ y' - a \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.2.10}$$

Aus dem Schnitt mit dem Rückwärtslichtkegel erhalten wir für t'_p aus Gleichung (7.2.6)

$$t'_p = \gamma t_o - \sqrt{(x' + \gamma v t_o)^2 + (y' - a)^2}.$$

Diesen Wert setzen wir in (7.2.10) ein und erhalten daraus die Koordinaten (x, y) von P bzgl. S , wo dieser zur S -Zeit t_p ein Lichtsignal ausgesendet hat, welches dann zur Zeit t_o beim Beobachter eintrifft. Führen wir diese Rechnung für alle vier Kanten eines Quadrats

$$\begin{aligned} x' = \frac{r}{2}, \quad y' = -\frac{r}{2} + \varepsilon r, \quad x' = -\frac{r}{2}, \quad y' = \frac{r}{2} - \varepsilon r, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \\ x' = \frac{r}{2} - \varepsilon r, \quad y' = \frac{r}{2}, \quad x' = -\frac{r}{2} + \varepsilon r, \quad y' = -\frac{r}{2} \end{aligned}$$

aus, dann erhalten wir für die Geschwindigkeit $v_x = 0.5c$ die Phantombilder aus Abbildung 7.9 (rechts).

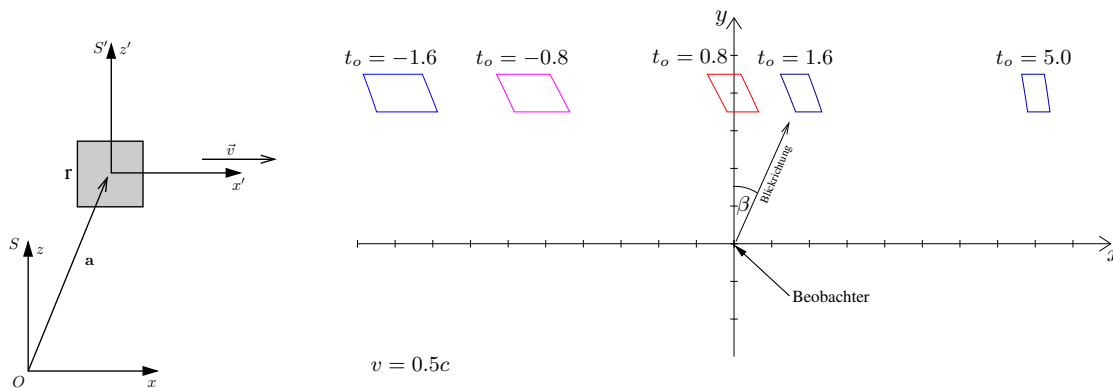


Abbildung 7.9: Links: Ein Quadrat/Würfel befindet sich in Ruhe bzgl. des Systems S' , welches sich selbst bzgl. des Systems S mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt (Längenkontraktion nicht berücksichtigt). Rechts: Scheinbare Orte und Kanten des Quadrats/Würfels zu verschiedenen Beobachtungszeitpunkten t_o für einen Beobachter, der mit einem Auge/einer Kamera dem Würfel folgt.

Die Blickrichtung β des Beobachters in Richtung Mittelpunkt des Quadrats ($x' = y' = z' = 0$) ergibt sich aus der Poincaré-Transformation

$$t_m = \gamma \left(\gamma t_o - \sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + a^2} \right), \quad x_m = \gamma v \left(\gamma t_o - \sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + a^2} \right), \quad y_m = -a.$$

So folgt für den Winkel β

$$\tan \beta = \frac{x_m}{y_m} = \frac{\gamma v}{a} \left(-\gamma t_o + \sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + a^2} \right). \tag{7.2.11}$$

Die Kanten des Quadrats/Würfels entsprechen nun dem, was ein Beobachter *tatsächlich sehen* würde. Die Längenkontraktion ist also in der Tat nicht zu sehen. Der reale Blick auf den Würfel (vgl. Abb. 7.10) erweckt jedoch den Anschein, als ob der Würfel gar nicht so verzerrt wie in Abbildung 7.9, sondern lediglich verdreht ist.

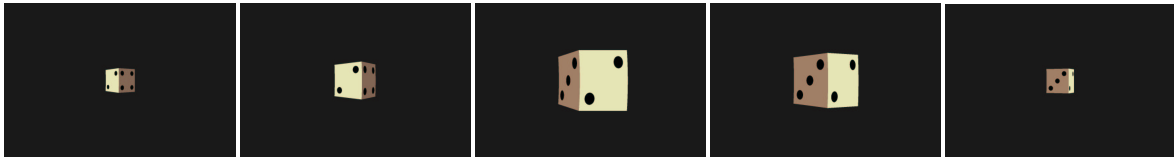


Abbildung 7.10: Ein Würfel bewegt sich mit $v = 0.5c$ an einem Beobachter vorbei. Dieser folgt mit seiner Kamera dem Würfel und beobachtet zu den Zeitpunkten $t_o = \{-1.6, -0.8, 0.8, 1.6, 5.0\}$ (von links nach rechts).

Bei der Bildsequenz 7.10 fällt nun auf, daß der Würfel nicht nur aufgrund des unterschiedlichen Blickwinkels verdreht erscheint, sondern auch dann, wenn er scheinbar am Beobachter vorbeizieht (mittlere Abbildung). Diesen Sachverhalt können wir uns nochmals vereinfacht an Abbildung 7.11 klarmachen (siehe auch [56]).

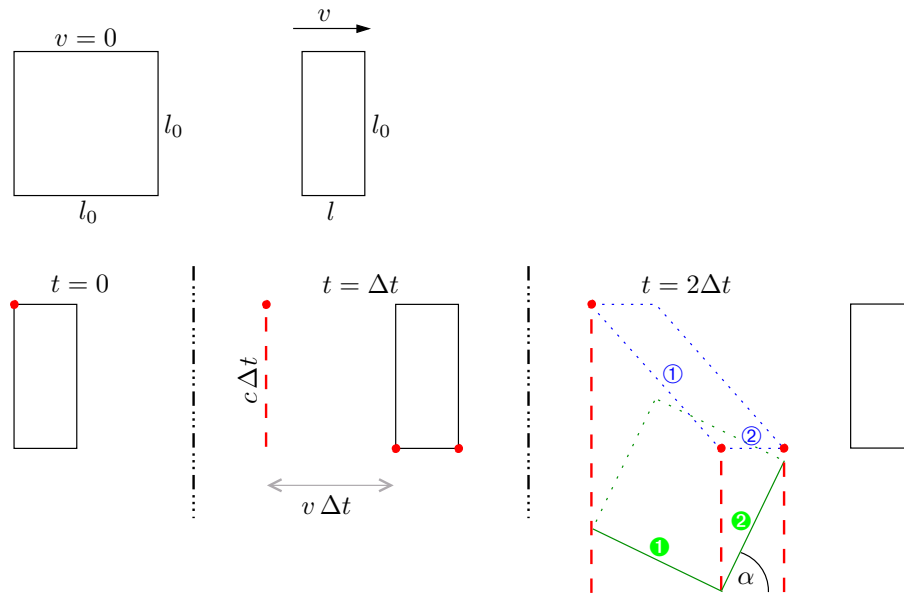


Abbildung 7.11: Ein Würfel mit Kantenlänge l_0 bewege sich mit der Geschwindigkeit v . Dann hat er vom Ruh-system aus gemessen in Bewegungsrichtung die Kantenlänge $l = l_0/\gamma$. Licht, welches zu unterschiedlichen Zeit-punkten ausgesandt wird, erreicht den Beobachter gleichzeitig. blau: Phantombild, grün: interpretiertes Bild.

Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge l_0 , der sich mit der Geschwindigkeit v bewege. Vom Ruhsystem aus betrachtet, ist die Kante in Bewegungsrichtung auf $l = l_0/\gamma = l_0\sqrt{1-v^2}$ verkürzt. Wenn wir uns überlegen, wann Licht von dem Würfel loslaufen muß, damit es den Beobachter gleichzeitig erreicht, dann stellen wir fest,

daß zunächst das hintere linke Eck zu einer Zeit $t = 0$ Licht aussenden muß. Nach einer Zeit $\Delta t = l_0/c$ erreicht dieses Licht die Höhe der Vorderkante des Würfels, der selbst inzwischen die Strecke $v \Delta t$ zurück gelegt hat. Startet nun Licht von der Vorderkante des Würfels, so erreicht dieses, zusammen mit dem Licht der hinteren Kante, den Beobachter (im Unendlichen) gleichzeitig. Da der Beobachter das Licht nur geradlinig zurückverfolgen kann, aber nicht weiß, wann das Licht ausgesandt wurde, schließt er auf einen gedrehten Würfel. Den Drehwinkel α erhalten wir schnell zu

$$\tan \alpha = \gamma v. \quad (7.2.12)$$

Nun kommt aber ein wesentlicher Punkt ins Spiel. Da unser Gehirn fortlaufend versucht, Daten zu organisieren und nach Objekten zu suchen, erkennt es gerade aufgrund der Textur einen Würfel. Prinzipiell kann das Bild auf unserer Netzhaut aber durch eine nahezu beliebige Anzahl von Objektgrößen, -formen und -entfernungen hervorgerufen werden. Aus unserer Erfahrung schließt unser Gehirn jedoch auf lediglich ein Objekt. Ohne Textur würden wir in Abbildung [7.10](#) nur eine einheitliche Fläche an uns vorbeiziehen sehen. Die Dominanz der Interpretation des Netzhautbildes läßt uns anstelle der Kanten ① und ② eben die Kanten ① und ② *sehen*. Allerdings schwindet diese Dominanz, wenn man anstelle der Spielwürfeltextur ein Gitternetz als Textur verwendet und eventuell den Würfel auch noch leicht transparent macht (siehe Abb. [7.12](#)). Hier spielen vor allem die Gitterlinien eine entscheidende Rolle.

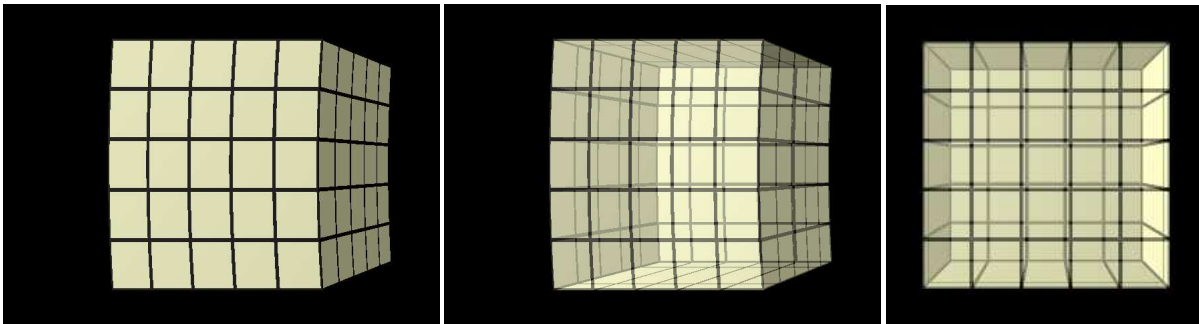


Abbildung 7.12: Ein opaker bzw. transparenter Würfel mit Gitternetztextur bewege sich mit $v = 0.5c$ von rechts nach links an einem Beobachter vorbei. Die horizontalen Gitterlinien auf der Vorderseite vermitteln den Eindruck, daß die Vorderseite genau parallel zur Bewegungsrichtung und nicht wie beim Spielwürfel leicht nach hinten zeigt. Zum Vergleich der ruhende Würfel (ganz rechts). Die Frontfläche ist beim bewegten Würfel um den Faktor $\sqrt{1-v^2} = \sqrt{3}/2$ verkürzt.

Die horizontalen Gitterlinien ändern sich nicht, lediglich die vertikalen Linien verbiegen sich hin zur Bewegungsrichtung. Die Frontfläche und die hintere, beim opaken Würfel verdeckte, Fläche scheinen trotz Bewegung planparallel zu bleiben. Aus der Abbildung wird deutlich, daß die Frontfläche beim bewegten Würfel tatsächlich um den Faktor $\sqrt{1-v^2}$ gegenüber dem ruhenden Würfel verkürzt erscheint. Ein direkter Vergleich zeigt auch, daß sich die Tiefe nicht ändert. Beim sich schnell bewegenden transparenten Würfel mit Gittertextur sehen wir also eindeutig eine Scherung und keine Drehung!

Phantombild eines Kreises/einer Kugel

Nun sei eine Kugel im Ruhssystem S' durch die gewöhnlichen sphärischen Koordinaten $(r', \vartheta', \varphi')$ gegeben

$$\mathbf{x}'_k = \begin{pmatrix} t'_p \\ r' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ r' \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ r' \cos \vartheta' \end{pmatrix}.$$

Führen wir die Poincaré-Transformation aus und schneiden anschließend mit dem Rückwärtslichtkegel des Beobachters, der sich im Koordinatenursprung von S befindet, so erhalten wir folgende scheinbare Koordinaten \mathbf{s}_k der

gesehenen Kugel

$$s_k = \begin{pmatrix} \gamma^2 t_o - \gamma \sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + 2\gamma v t_o r' \sin \vartheta' \cos \varphi' - 2ar' \sin \vartheta' \sin \varphi' + r'^2 + a^2} + \gamma v r' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \gamma^2 v t_o - \gamma v \sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + 2\gamma v t_o r' \sin \vartheta' \cos \varphi' - 2ar' \sin \vartheta' \sin \varphi' + r'^2 + a^2} + \gamma r' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ r' \sin \vartheta' \sin \varphi' - a \\ r' \cos \vartheta' \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nur die xy -Ebene, eine Kugel mit dem Radius $r' = 1$ und der Geschwindigkeit $\vec{v} = (0.9, 0, 0)^T$ und verwenden den Verschiebungsvektor $\mathbf{a} = (0, 0, -0.8, 0)$, so *sieht* der Beobachter in S die Einzelbildaufnahmen aus Abbildung 7.13 (siehe auch [90]).

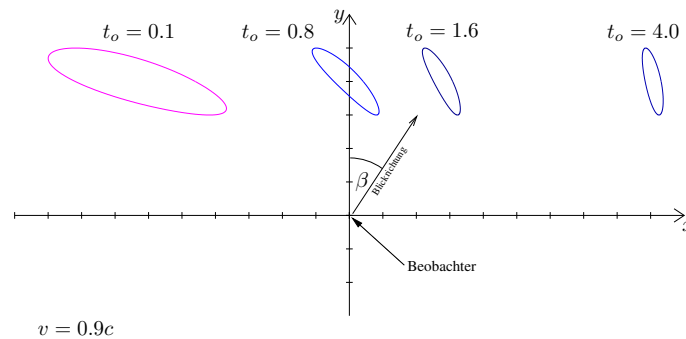


Abbildung 7.13: Scheinbare Orte und Umrisse eines Kreises mit Radius $r = 0.2$ zu verschiedenen Beobachtungszeitpunkten t_o .

Jeder einzelne Punkt dieser bohnenförmigen Objekte entspricht genau dem Ort, bezogen auf das System S , an dem der zugehörige Punkt der lorentztransformierten Kugel ein Lichtsignal ausgesendet hat, welches dann zur S -Zeit t_o beim Beobachter eintrifft. Das erstaunliche hierbei ist, daß trotz der seltsamen Phantombilder, der Beobachter stets eine Kugel — oder zumindest den Umriß einer Kugel — sieht [77, 90, 48]! In der Tat sieht er natürlich monokular nur eine Scheibe, diese ist jedoch kreisrund. Die Oberfläche hingegen erscheint eben aufgrund des bohnenförmigen Phantomobjekts verzerrt.

Betrachten wir wieder den direkten Vergleich zwischen opaker und transparenter Kugel (Abb. 7.14), so ergibt sich auch in diesem Fall, daß die Dominanz der Textur gebrochen wird und der Beobachter die scheinbare Bohnenform erkennen kann.

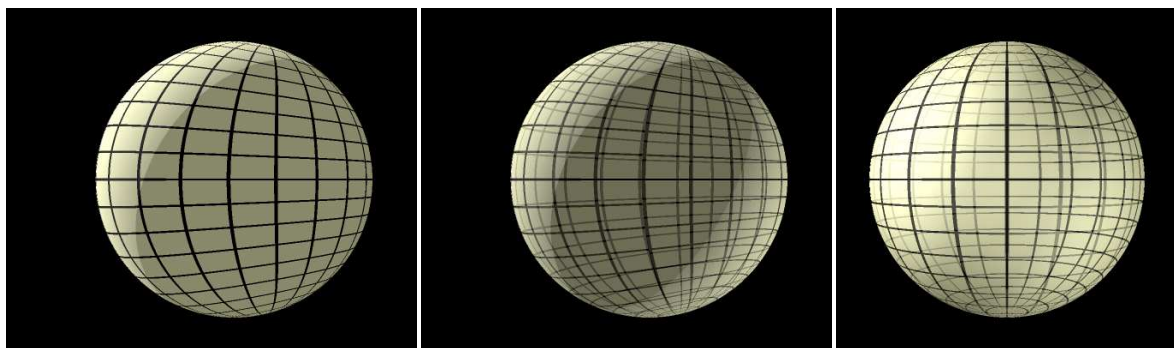


Abbildung 7.14: Eine opake bzw. transparente Kugel mit Gittertextur bewege sich mit $v = 0.9c$ von rechts nach links an einem Beobachter vorbei. Zum Vergleich ganz rechts die ruhende Kugel. Die unterschiedliche Beleuchtung zwischen bewegter und ruhender Kugel rührt von einer unterschiedlichen Beobachterposition her.

Dabei muß natürlich beachtet werden, daß bereits aufgrund der Perspektive die „Breitengradringe“ als Ellipsen erscheinen. Im Fall der Kugel ist es ungleich schwieriger, das tatsächliche Phantomobjekt wahrzunehmen. Allerdings vermittelt die Textur auch nicht, daß die Kugel gedreht erscheint. Dominant ist lediglich der kreisförmige Umriß, welcher sich nicht ändert.

Die Tendenz, eine Drehung oder eher eine Scherung *wahrzunehmen*, hängt also wesentlich von der Form wie auch der Texturierung eines Körpers ab. *Wir müssen in der Relativitätstheorie daher nicht nur zwischen Messen und Sehen unterscheiden, sondern zusätzlich auch die Wahrnehmung berücksichtigen.*

7.2.2 Binokulare Visualisierung in der SRT

Spricht man von der Wahrnehmung in der speziellen Relativitätstheorie, so wurde bisher stets nur die monokulare Sicht betrachtet. Aus unserer Alltagserfahrung wissen wir jedoch, daß uns die binokulare Sicht weitere Informationen unserer Umgebung liefert. So können wir erst durch zwei Augen die Tiefe eines Objekts oder dessen Entfernung richtig einschätzen. Ohne diese räumliche Wahrnehmung fiel es uns zum Beispiel schwer, ein Objekt zu greifen, welches sich vor uns befindet.

Würden wir uns mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen, so müßten wir natürlich die endliche Lichtlaufzeit berücksichtigen, wenn wir ein Objekt verfolgen. Es stellt sich nun die Frage, ob uns hier die räumliche Wahrnehmung wieder helfen würde; leider ist dem nicht so.

Zunächst müssen wir den Begriff des *Sehens* enger fassen. Bisher hieß Sehen: *Licht, welches gleichzeitig beim Beobachter ankommt*, sei es in seinem Auge oder in seiner Kamera. Nun wollen wir aber unter Sehen verstehen: *Licht, welches gleichzeitig beim Beobachter in beiden Augen ankommt*. Wichtig hierbei ist, daß sich beide Augen oder auch beide Kameras im gleichen Ruhssystem befinden. Gleichzeitig wollen wir dann die beiden Ereignisse nennen, bei denen zwei Lichtstrahlen die Linsen beider Augen oder Kameras treffen. Aufgrund des — wenn auch kleinen — Augenabstandes ist die Lichtlaufzeit von einem Objekt zu den beiden Augen eines Beobachters im allgemeinen unterschiedlich. Die beiden Netzhautbilder werden sich dementsprechend unterscheiden. Wir wollen hier der Frage nachgehen, ob aus diesen beiden Netzhautbildern *ein* visueller Eindruck entsteht.

Binokulares Phantombild eines Punktes

Betrachten wir einen schnell bewegten Punkt, der sich im Koordinatenursprung des Systems S' (vgl. oben) befindet, mit beiden Augen oder zwei Kameras mit einem definierten Abstand, so müssen wir, wie bereits erwähnt, die unterschiedliche Lichtlaufzeit berücksichtigen. Da physikalisch nichts Neues auftritt, können wir die Rechnung aus dem vorherigen Abschnitt für jedes Auge einzeln durchführen. Wir erhalten so zwei Phantombilder eines Punktes (siehe Abb. 7.15).

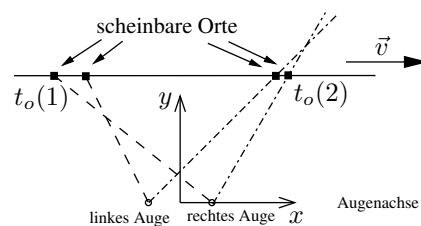


Abbildung 7.15: Linkes und rechtes Auge sehen gleichzeitig $t_L = t_R \equiv t_o$ den Koordinatenursprung von S' . Aufgrund der Lichtlaufzeit sind die Lichtstrahlen aber zu verschiedenen Zeiten und daher an verschiedenen Orten gestartet, woraus sich zwei verschiedene scheinbare Orte des Koordinatenursprungs ergeben.

Nun stellt sich zunächst die Frage, ob wir tatsächlich zwei Punkte oder lediglich einen Punkt wahrnehmen. Aus der bisher rein geometrischen Sicht erhalten wir keine weitere Information, die es uns ermöglichen würde, den Punkt als einen einzigen Punkt zu erkennen. In der Tat müßten wir eigentlich noch die unterschiedliche Doppler-Rotverschiebung berücksichtigen, da der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und dem Lichtstrahl zum

jeweiligen Auge verschieden ist. Wenn aber der Punkt für beide Augen eine unterschiedliche Farbe besitzt, werden wir sehr wahrscheinlich zwei getrennte Punkte wahrnehmen.

Sehen wir von der unterschiedlichen Farbe einmal ab und gehen davon aus, daß wir lediglich einen Punkt wahrnehmen würden, so läge dieser binokulare Phantompunkt im Schnittpunkt der beiden Lichtstrahlen. Betrachten wir hierzu die Situation aus Abbildung 7.15, so folgt für den scheinbaren Ort des Punktes, gesehen von einem Auge am Ort $(x_A, y_A = 0, z_A = 0)$ zum Zeitpunkt t_A mit $A = \{L, R\}$

$$x_{sA} = \gamma^2 v(t_o - vx_A) - \gamma v \sqrt{\gamma^2(x_A - vt_o)^2 + a^2}, \quad (7.2.13a)$$

$$y_{sA} = -a. \quad (7.2.13b)$$

Den Schnittpunkt erhalten wir durch Schneiden der beiden Verbindungsgeraden zwischen Auge \vec{x}_A und (monokularen) scheinbaren Ort \vec{x}_{sA} :

$$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} x_{sL} - x_L \\ y_{sL} - y_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} x_{sR} - x_R \\ y_{sR} - y_R \end{pmatrix}. \quad (7.2.14)$$

Daraus folgt

$$\xi = \frac{-x_L(y_{sR} - y_R) + y_L(x_{sR} - x_R) + x_R y_{sR} - x_{sR} y_R}{(x_{sL} - x_L)(y_{sR} - y_R) - (x_{sR} - x_R)(y_{sL} - y_L)},$$

$$\zeta = \frac{-x_R(y_{sL} - y_L) + y_R(x_{sL} - x_L) + x_L y_{sL} - x_{sL} y_L}{(x_{sL} - x_L)(y_{sR} - y_R) - (x_{sR} - x_R)(y_{sL} - y_L)}$$

und speziell hier mit $y_L = y_R = 0$ und $y_{sL} = y_{sR} = -a$

$$\xi = \zeta = \frac{x_R - x_L}{\gamma^2(x_R - x_L) + \gamma v \left(\sqrt{\gamma^2(x_R - vt_o)^2 + a^2} - \sqrt{\gamma^2(x_L - vt_o)^2 + a^2} \right)} \quad (7.2.15)$$

und damit ist der binokulare scheinbare Ort des Punktes gegeben durch

$$x_b = x_L + \xi(x_{sL} - x_L), \quad (7.2.16a)$$

$$y_b = -\xi a. \quad (7.2.16b)$$

Obwohl sich der Punkt parallel zur x -Achse des Beobachters bewegt, hat der den Eindruck, als ob sich der Punkt von links vorne nach rechts hinten bewegen würde (siehe Abb. 7.16).

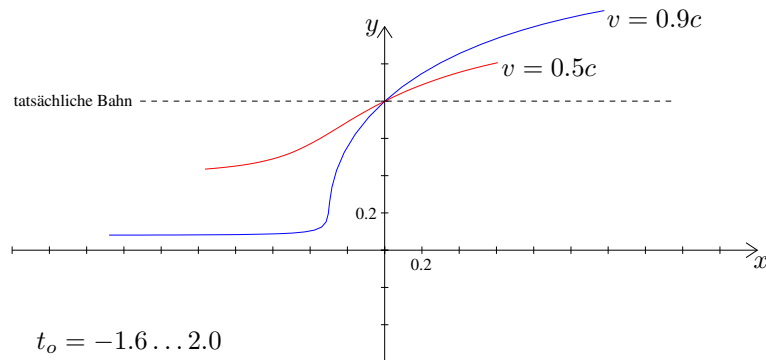


Abbildung 7.16: Scheinbarer Ort eines Punktes, der sich mit der Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse (tatsächliche Bahn) des Beobachters bewegt. Abhängig von der Geschwindigkeit scheint die Bahn des Punktes von der tatsächlichen deutlich abzuweichen. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$.

Bilden wir die Grenzwerte von y_b für $t_o \rightarrow \pm\infty$, so gelangen wir zu

$$y_{\min} = \lim_{t_o \rightarrow -\infty} y_b = -a(1 - v) \quad \text{und} \quad y_{\max} = \lim_{t_o \rightarrow +\infty} y_b = -a(1 + v). \quad (7.2.17)$$

Diese Grenzwerte sind jedoch rein theoretisch, da wir nur im Panumschen Fusionsgebiet (Abb. 7.2, rechts) die Netzhautbilder zu einem Objekt verschmelzen können.

Einen anderen interessanten Grenzfall erhalten wir, wenn wir den Augenabstand immer weiter verringern. So gilt für den Parameter ξ aus Gleichung (7.2.15) und den scheinbaren Ort x_{sA} aus Gleichung (7.2.13a)

$$\lim_{\substack{x_R \rightarrow 0 \\ x_L = 0}} \xi = \frac{\sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + a^2}}{\gamma^2 \left(\sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + a^2} - \gamma v^2 t_o \right)},$$

$$\lim_{\substack{x_R \rightarrow 0 \\ x_L = 0}} x_{sA} = \gamma^2 v t_o - \gamma v \sqrt{\gamma^2 v^2 t_o^2 + a^2},$$

woraus sich dann auch der scheinbare Ort (x_b, y_b) des Punktes ergibt. In Abbildung 7.16 ist dieser Grenzfall schon sehr gut erfüllt.⁵

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß sich ein Punkt innerhalb der Augenebene bewegt. Außerhalb dieser Ebene sind die Lichtstrahlen eines bewegten Punktes im allgemeinen windschief zueinander und haben deshalb keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Im Prinzip sollten wir dann stets zwei getrennte Punkte sehen, jedoch sehen wir in einem gewissen Bereich dennoch nur einen Punkt.

Binokulares Phantombild eines Quadrats

Betrachten wir nun ein (transparentes) Quadrat, welches sich mit der Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse des Beobachters bewegt. Geben wir dem Quadrat eine gewisse Textur, so können wir jeden einzelnen Punkt des Quadrats als *einen* Punkt erkennen. Verfolgen wir nun alle Punkte eines Quadrats, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, zurück, so erhalten wir die binokularen Phantombilder aus den Abbildung 7.17 und 7.18. Die rot beziehungsweise blau gepunktete Linie gibt den jeweiligen Phantomort des Quadratmittelpunktes an. Die schwarz gestrichelte Linie ist seine tatsächliche Bahn.

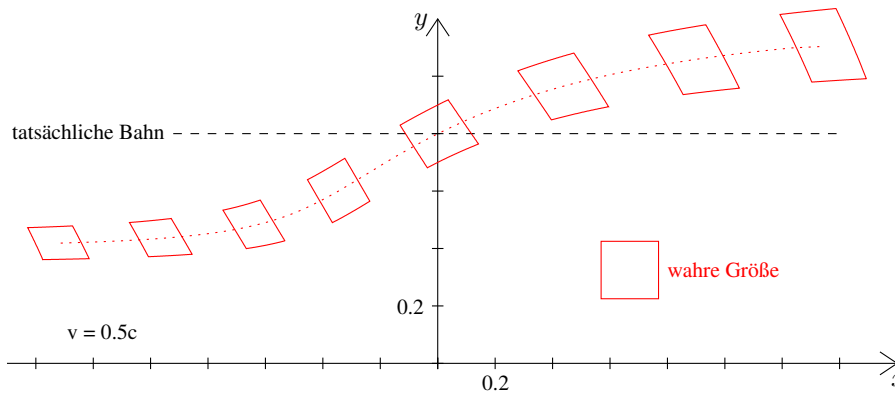


Abbildung 7.17: Binokulare Phantombilder eines Quadrats mit Kantenlänge $l = 0.2$, welches sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.5c$ parallel zur x -Achse (tatsächliche Bahn) des Beobachters bewegt. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$. Beobachtungszeitpunkte $t_o = \{-2.4, -1.6, -0.8, 0.0, 0.8, 1.6, 2.4, 3.2\}$.

☞ *Film*

Im Gegensatz zur monokularen Sicht sehen wir das Quadrat zur Beobachterzeit $t_o = 0.8$ nun tatsächlich gedreht und nicht nur geschert. Allerdings sind nun die Kanten nicht mehr einfach nur Geraden sondern leicht gekrümmt; dies fällt jedoch nicht wirklich auf.

In Abbildung 7.18 ist das Zustandekommen eines binokularen Phantombildes für zwei Fälle skizziert. Das grüne Phantomquadrat sieht das linke Auge, das magentane Phantomquadrat wird vom rechten Auge gesehen. Hier

⁵Da wir in geometrischen Einheiten ($c = 1$) rechnen, würde der Abstand $\Delta x = x_R - x_L = 0.06$ aus Abbildung 7.16 einem wahren Abstand von etwa $1.8 \cdot 10^4 \text{ km}$ entsprechen. Für den tatsächlichen Augenabstand von etwa 6 cm würden wir aber die gleiche Kurve sehen.

wird deutlich, daß aufgrund der verschiedenen Augenpositionen, das Licht des Quadrats zu unterschiedlichen Zeiten starten muß. Bewegt sich das Quadrat auf uns zu, so muß das Licht für unser rechtes Auge natürlich früher starten. Umgekehrt muß Licht für das linke Auge früher starten, wenn sich das Quadrat wieder von uns weg bewegt. Der Schnittpunkt zweier Strahlen ergibt den binokularen Phantompunkt. Bei 90% Lichtgeschwindigkeit sehen wir zur Zeit $t_o = 0.8$ im wesentlichen die linke Seite des Quadrats (siehe Abb. [7.18](#)).

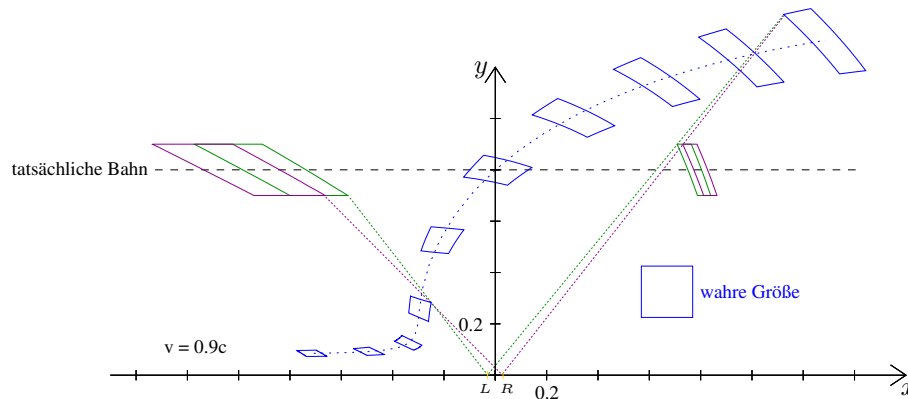


Abbildung 7.18: Binokulare Phantombilder eines Quadrats mit Kantenlänge $l = 0.2$, welches sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.9c$ parallel zur x -Achse (tatsächliche Bahn) des Beobachters bewegt. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$.

Beobachtungszeitpunkte $t_o = \{-0.7, -0.4, -0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1.1, 1.4, 1.7, 2.0\}$. [Film](#)

Die Wahrnehmung des Quadrats, beziehungsweise des Würfels im dreidimensionalen, ist aber dennoch nicht so eindeutig, wie es die eben gezeigten Abbildungen vermuten lassen. Die scheinbare Kurve ist ohne Referenz nur schwer zu erkennen. Die Drehung ist unter Umständen wahrnehmbar, jedoch ist die Dominanz der geraden Linien der Textur so stark, daß eine Scherung leichter wahrnehmbar ist. Im Gegensatz zum monokularen Fall sollten wir aber keine Scherung mehr sondern eine tatsächliche Drehung wahrnehmen. Einfacher wird es, wenn wir statt eines opaken einen transparenten Würfel betrachten. Da Einzelbilder hier nur wenig Einsicht bringen, sei auf die Bildsequenzen im Anhang [§F.1](#) verwiesen.

Binokulares Phantombild eines Kreises/einer Kugel

Die gleiche Betrachtung können wir natürlich auch für einen Kreis/eine Kugel durchführen. Würden wir den Kreis vom ruhenden System aus messen, so hätte er die Form einer Ellipse mit der kurzen Seite in Bewegungsrichtung. Mit einer Textur können wir die einzelnen Punkte der Kugel identifizieren und erhalten so wieder einen räumlichen Eindruck, der jedoch deutlich von der Kugelform, wie wir sie monokular erwarten würden, abweicht. In den Abbildungen [7.19](#) und [7.20](#) sind, analog zum Quadrat, die binokularen Phantombilder eines Kreises bei den Geschwindigkeiten $v = 0.5c$ bzw. $v = 0.9c$ dargestellt. Obwohl die Phantombilder stark verzerrt sind, sehen wir im wesentlichen doch wieder eine Kugel. Wie schon beim Quadrat verweisen wir hier wieder auf die Bildsequenzen im Anhang [§F.1](#).

Bewegung orthogonal zur Augengeraden

Anstelle der Bewegung parallel zur Augenachse (Abb. [7.15](#)) wollen wir hier die orthogonale Bewegung von der Achse weg und zur Achse hin betrachten. Das Verfahren ist wieder dasselbe; die beiden Phantombilder der beiden Augen werden Punkt für Punkt mit den Augenpunkten verbunden, wobei der Schnittpunkt wieder den binokularen Phantompunkt ergibt. Bewegt sich ein Würfel senkrecht auf uns zu, so scheint er zunächst rechtsseitig nach hinten geschert (siehe Abb. [7.21](#), links), bis er schließlich total verzerrt erscheint. Bewegt er sich jedoch von uns weg, so scheint er ebenfalls rechtsseitig geschert, aber nun zusätzlich in Bewegungsrichtung gestaucht.

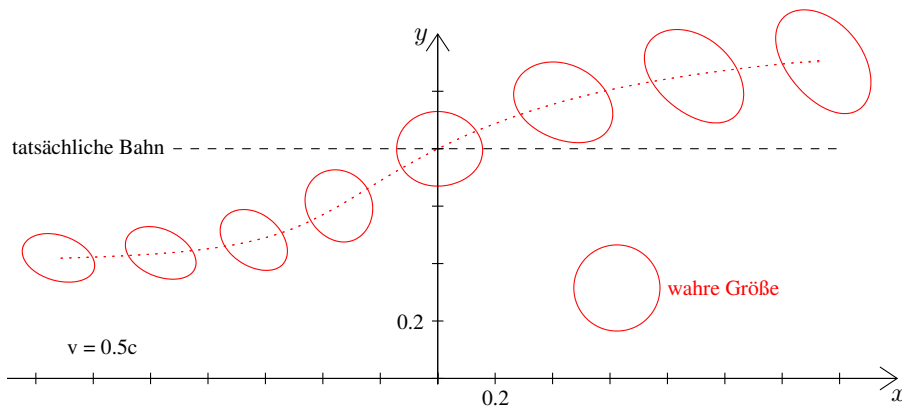


Abbildung 7.19: Binokulare Phantombilder eines Kreises mit Radius $r = 0.15$, welcher sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.5c$ parallel zur x -Achse (tatsächliche Bahn) des Beobachters bewegt. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$. Beobachtungszeitpunkte $t_o = \{-2.4, -1.6, -0.8, 0.0, 0.8, 1.6, 2.4, 3.2\}$.

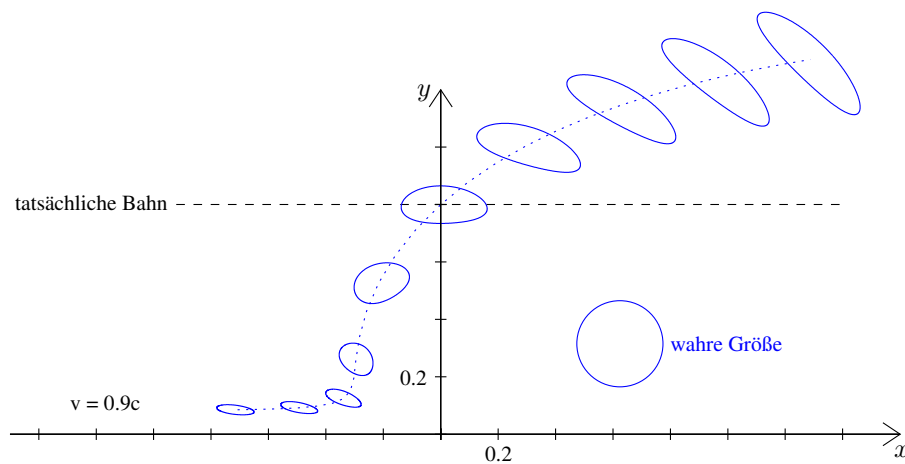


Abbildung 7.20: Binokulare Phantombilder eines Kreises mit Radius $r = 0.15$, welcher sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.9c$ parallel zur x -Achse (tatsächliche Bahn) des Beobachters bewegt. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$. Beobachtungszeitpunkte $t_o = \{-0.7, -0.4, -0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1.1, 1.4, 1.7, 2.0\}$.

Probleme bei der Stereoskopie in der SRT

Ein Objekt, welches sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit an uns vorbei bewegt, würden wir wohl überhaupt nicht wahrnehmen, da das zeitliche Auflösungsvermögen unserer Augen viel zu schlecht ist. Unter Umständen sähen wir höchstens einen verschmierten Streifen, aber kein einzelnes Objekt.

Angenommen, wir hätten zwei ideale Kameras mit ausreichend kurzen Verschlusszeiten und hinreichender Empfindlichkeit, so würden dennoch zwei wesentliche Probleme auftauchen. Zum einen können die Bilder für die beiden Augen bei sehr hoher Geschwindigkeit aufgrund der unterschiedlichen Lichtlaufzeit sehr verschieden groß ausfallen. Dann kann unser Sehapparat die beiden Bilder nicht mehr zu einem Bild verschmelzen. In der Augenmedizin spricht man auch von Aniseikonie⁶. Das andere Problem ergibt sich durch Helligkeits- und Farbunterschiede aufgrund des Searchlight- und Doppler-Effektes, auf die wir hier gar nicht eingegangen sind. Ist ein Bild

⁶Siehe z.B.

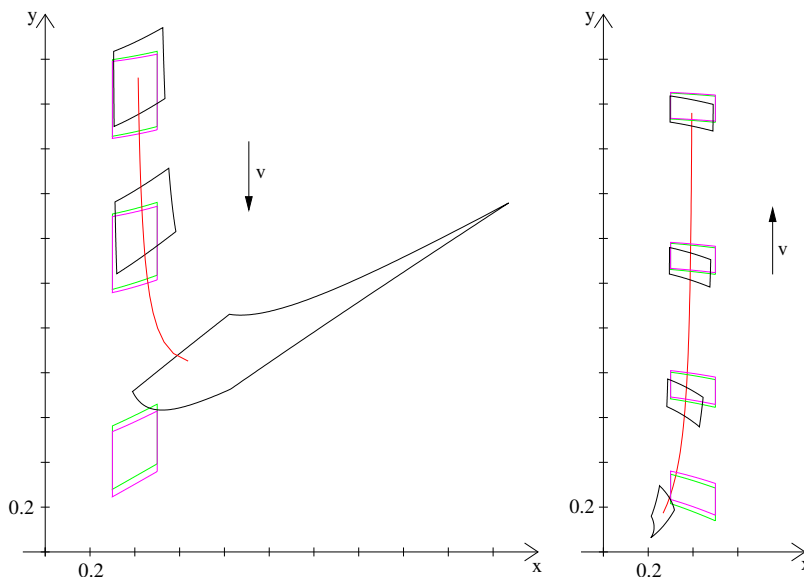


Abbildung 7.21: Binokulare Phantombilder eines Quadrats mit Kantenlänge $r = 0.2$, welches sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.5c$ orthogonal zur Augenachse des Beobachters bewegt. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$. **Links:** Beobachtungszeitpunkte für die Bewegung auf den Beobachter zu $t_o = \{-2.0, -1.3, -0.3\}$ (von oben nach unten). **Rechts:** Beobachtungszeitpunkte für die Bewegung vom Beobachter weg $t_o = \{1.0, 2.3, 4.0, 6.0\}$ (von unten nach oben).

sehr viel heller als das andere, wird letzteres eventuell kaum wahrgenommen. Aufgrund dieser retinalen Rivalität verschwindet gegebenenfalls der räumliche Eindruck. Der unterschiedliche Farbeindruck hätte wahrscheinlich nur zur Folge, daß eine Mischfarbe gesehen würde.

7.3 Stereoskopie in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Analog zur Stereoskopie in der Speziellen Relativitätstheorie wollen wir uns zunächst die monokulare Sichtweise nochmals vor Augen führen. Hierfür betrachten wir jedoch nur den Spezialfall einer sphärisch-symmetrischen Raumzeit — vertreten durch die Morris-Thorne-Metrik —, da wir für die Stereopsis die Schnittmethode der Lichtstrahlen aus Abschnitt §7.2.2 verwenden wollen. Eine sphärisch-symmetrische Raumzeit verschafft uns den Vorteil, daß zwei Geodäten zumindest in der Äquatorebene zum Schnitt führen können. Außerdem kennen wir die analytische Lösung der Geodätengleichung und können so die Nullgeodäten zwischen Objekt und Beobachter verhältnismäßig einfach bestimmen.

7.3.1 Monokulare Visualisierung in der ART

Als Beispiel für die monokulare Visualisierung in der ART betrachten wir einen Kreis oder eine Kugel in der Morris-Thorne-Raumzeit. Dabei wollen wir allgemein unter einer Kugel ein Objekt verstehen, bei dem alle Punkte seiner Oberfläche bezüglich pseudo-kartesischer Koordinaten (siehe Abs. §2.9) den gleichen Abstand besitzen.⁷ Ein Beobachter am Ort r_i empfängt nun Licht von einer Kugel am Ort (x_k, y_k) ; die beiden begrenzenden Lichtstrahlen treffen bei ihm unter den Winkeln τ_u und τ_o ein (siehe Abb. 7.22).

Da der Beobachter den gekrümmten Strahlen nicht folgen kann, sieht er die Kugel in der Verlängerung der Richtung, aus der er die Lichtstrahlen empfängt. Eine Entfernung kann er jedoch nicht ausmachen; in Abbildung

⁷Wir verwenden diese Definition einer Kugel, da sie für unsere Zwecke zu einer Vereinfachung der Rechnung führt. Eine bessere Definition wäre sicherlich, wenn anstelle des Koordinatenabstandes der Eigenradialabstand verwendet würde.

§7.22 haben wir die raumartige Länge der Geodäten dazu verwendet, jedem Punkt der Kugel eine fiktive Entfernung zuzuordnen. Das daraus entstehende Gebilde wollen wir ebenso als Phantomobjekt oder Phantombild einer Kugel bezeichnen. Da der Beobachter nur mit einem Auge sieht, kann er jedoch ohne Textur nur eine flache Scheibe wahrnehmen.⁸

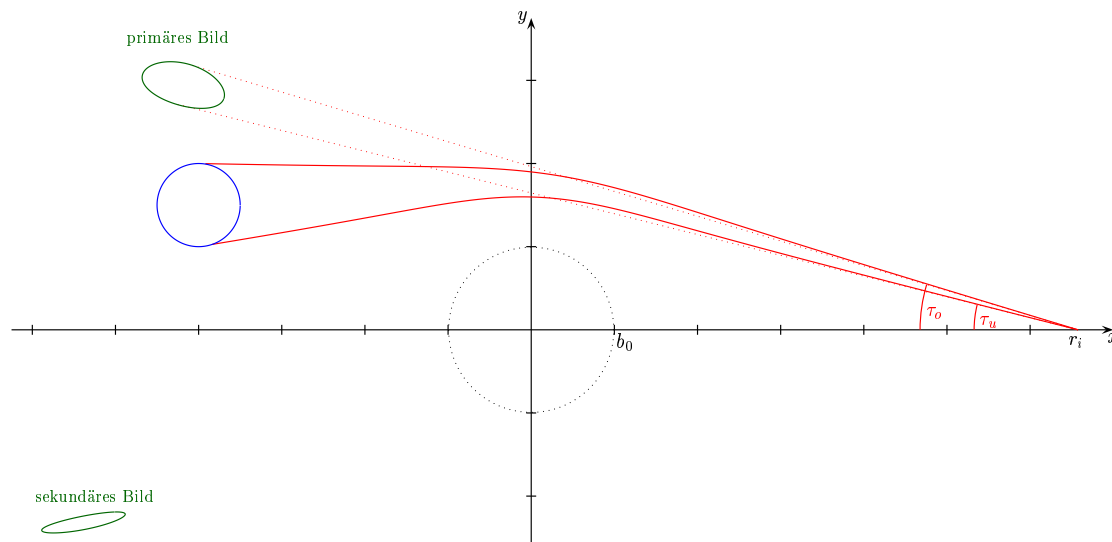


Abbildung 7.22: Gegeben sei ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$ und ein Kreis/eine Kugel (blauer Kreis) mit Radius $r_k = 1$ am Ort $(x_k = -8, y_k = 3)$ bezogen auf pseudo-kartesische Koordinaten. Der Beobachter am Ort $r_i = 13.15$ ($l_i = 13$) sieht den Kreis/die Kugel jedoch verzerrt an einer anderen Stelle (grün). Da Licht auf beiden Seiten des Wurmlochs herumlaufen kann, sieht der Beobachter sogar zwei Bilder ein und derselben Kugel.

Neben dem primären Bild sieht der Beobachter jedoch noch ein weiteres, sekundäres Bild der Kugel, welches dadurch zustande kommt, daß Licht das Wurmloch auf der anderen Seite passiert. Beim Beobachter kommen diese Lichtstrahlen in einem kleineren Winkelbereich an, weshalb die Kugel deutlich gestauchter aussieht. Verwenden wir wieder die raumartige Länge der Geodäten, so ist die fiktive Entfernung des Sekundärbildes größer als die des Primärbildes. Aus dem Kapitel §6 wissen wir, daß es prinzipiell unendlich viele Bilder der Kugel gibt, bei denen die Lichtstrahlen entsprechend häufig um das Wurmloch laufen ehe sie beim Beobachter ankommen. Da die Öffnungswinkel der höheren Bilder rapide kleiner werden, wollen wir sie hier nicht weiter betrachten.

Da wir, wie bereits erwähnt, bei der monokularen Sicht keine Entfernung eines Objekts erhalten, können wir nur durch monokulare Informationen (siehe Abs. §7.1), wie etwa der Verdeckung, auf die Tiefe oder die Entfernung schließen. Aus Abbildung §6.14 können wir daher nur schließen, daß sich das Wurmloch zwischen Beobachter und dem „Universe 1 North“ Schild befindet. Allerdings haben wir nicht den Eindruck, daß es sich innerhalb der Gitterstruktur befindet.

7.3.2 Binokulare Visualisierung in der ART

Die binokulare Sicht eines Objekts in der Allgemeinen Relativitätstheorie leiten wir analog der Betrachtung aus Abschnitt §7.2.2 her. Dabei spielt nun nicht die Bewegung des Objekts, sondern die gekrümmten Lichtbahnen die entscheidende Rolle, weshalb wir einen ungewohnten Blick auf das Objekt haben. Als Beispiel betrachten wir wieder zunächst einen einzelnen Punkt und anschließend eine Kugel bzw. einen Kreis in der Morris-Thorne-Raumzeit.

⁸Vergleiche dazu die Kugeln der Gitterstruktur in Abb. §6.14.

Binokulares Phantombild eines Punktes

Zunächst veranschaulichen wir uns die Situation an einem einzelnen Punkt (siehe Abb. [7.23](#)). Linkes und rechtes Auge des Beobachters befinden sich an den Orten (r_L, φ_L) bzw. (r_R, φ_R) ; ihre Blickrichtungen (rote Pfeile in Abb. [7.23](#)) sind parallel zur x -Achse ausgerichtet.⁹

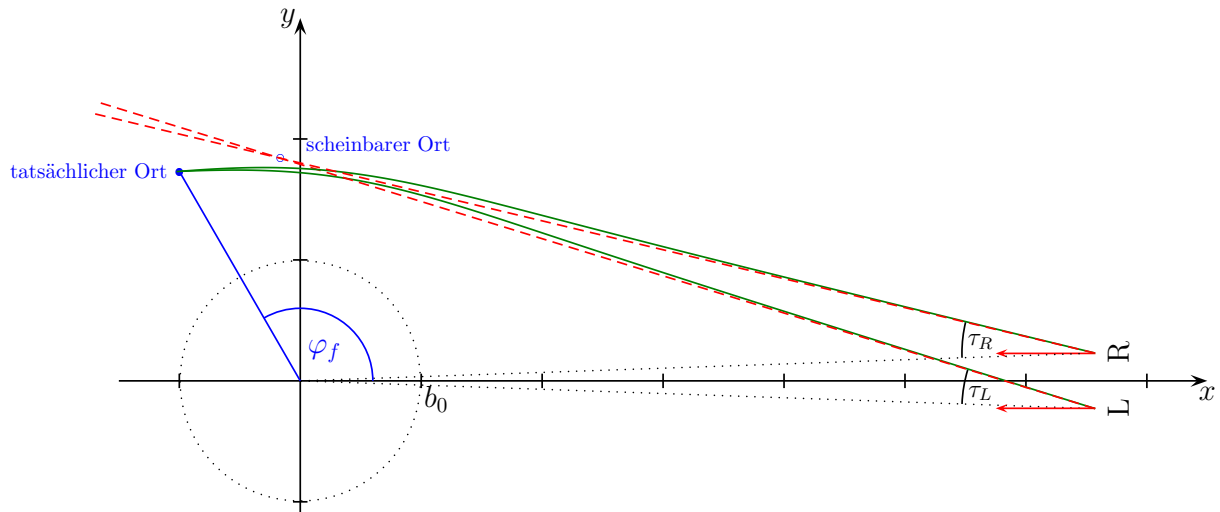


Abbildung 7.23: Gegeben sei ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$ und ein Punkt am Ort $(r_f = 4, \varphi_f = 120^\circ)$ bezogen auf pseudo-kartesische Koordinaten. Der Beobachter — linkes Auge am Ort $L(r_L = 13.15, \varphi_L = -2.0^\circ)$, rechtes Auge am Ort $R(r_R = 13.15, \varphi_R = 2.0^\circ)$ — sieht den Punkt mit beiden Augen an einer anderen Stelle.

Um die Startwinkel τ_L und τ_R zu bestimmen, betrachten wir für jedes Auge ein um den Winkel φ_L bzw. φ_R verdrehtes Koordinatensystem. Der tatsächliche Ort des Punktes befindet sich dann am Ort $\varphi_f - \varphi_{L,R}$. So dann können wir, wie in Abschnitt [6.4.3](#) beschrieben, den Startwinkel $\tau_{L,R}$ bestimmen, der den Augpunkt mit dem eigentlichen Punkt verbindet. Verfolgen wir die Lichtstrahlen von den Augen aus geradlinig in pseudo-kartesischen Koordinaten zurück, so gelangen wir durch Schnitt beider Geraden zum scheinbaren Ort des Punktes. Der Schnittpunkt in pseudo-kartesischen Koordinaten ist jedoch nur ein Anhaltspunkt für die Entfernung zum Beobachter; entscheidend sind die lokalen Richtungen, aus denen die beiden Strahlen einfallen, in Relation zur Blickrichtung der beiden Augen.

Binokulares Phantombild eines Quadrats

Wie bereits in Kapitel [6](#) angedeutet, verstehen wir die Topologie eines Morris-Thorne-Wurmloches besser, wenn wir einen räumlichen Eindruck erhalten könnten. Betrachten wir konkret die Situation aus Abschnitt [6.5.2](#), in der ein MT-Wurmloch zwei kubische Räume miteinander verbindet, so erhalten wir für die Sicht eines Beobachters am Ort $l_i = 20$ die Abbildung [7.24](#). Die Rückseite des Raums scheint nach vorn gebogen zu sein; der untere Raum erscheint konvex. Zur Orientierung ist der Hals des Wurmlochs gepunktet dargestellt. Hier wird die eben besprochene Problematik mit den pseudo-kartesischen Koordinaten nochmals deutlich. Der Raum innerhalb des Kreises existiert gar nicht, dennoch zeichnen wir dort die gesehene Wand des unteren Raumes ein.

Binokulares Phantombild eines Kreises

Greifen wir die Situation aus Abschnitt [6.5.4](#) wieder auf, in der ein Ball das Wurmloch umkreist, so erhalten wir für einen Beobachter am Ort $l_{\text{obs}} = 13, \varphi_{L,R} = \pm 2^\circ$ die Abbildung [7.25](#). Der Ball erscheint nie hinter dem

⁹Eine unterschiedliche Blickrichtung der beiden Augen ändert nichts am scheinbaren Ort des Punktes, erzwingt aber unter Umständen einen unentspannten Blick.

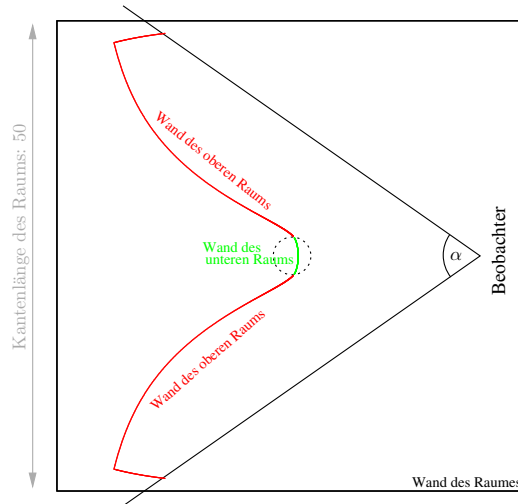


Abbildung 7.24: Stereophantombild eines Quadrats mit Kantenlänge $\Delta r = 50$, das ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$ (gepunkteter Kreis) umgibt. Der Beobachter befindet sich am Ort $l_{\text{obs}} = 20$, $\varphi_{L,R} = \pm 2^\circ$ und beobachtet mit einer Stereokamera mit Sichtfeld $\alpha = 70^\circ$. Das schwarze Quadrat kennzeichnet die Wand im oberen/unteren Raum. Binokular sieht der Beobachter jedoch in rot den oberen und in grün den unteren Raum. [Film](#)

Wurmloch sondern stets etwa auf der Halbseite, wo sich auch der Beobachter befindet. Anders als der Kreis aus Abbildung 7.25 (links) verzerrt sich der Ball zu einem Ring, wenn er sich direkt hinter dem Wurmloch befindet. Ein Stereoeindruck ist dann aber nicht mehr auszumachen.

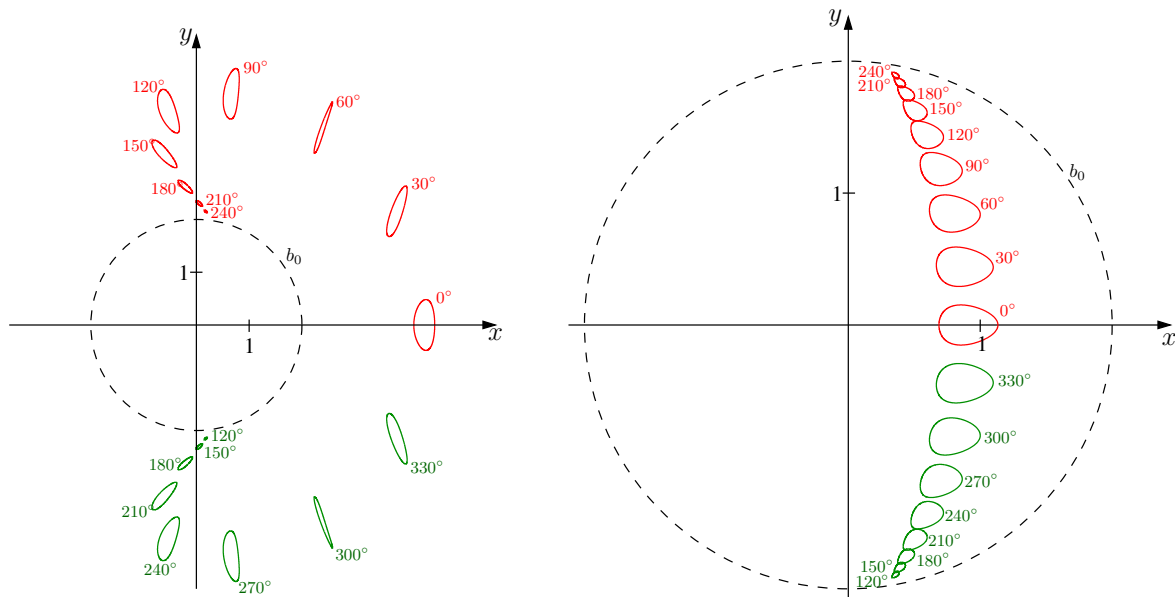


Abbildung 7.25: Stereophantombilder eines Kreises mit Radius $r_{\text{Kreis}} = 0.5$, der ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$ quasistatisch auf der Bahn $l = 4$ (links), bzw $l = -2$ (rechts) umkreist. Der Beobachter befindet sich am Ort $l_{\text{obs}} = 13$, $\varphi_{L,R} = \pm 2^\circ$ auf der gleichen (links) bzw. gegenüberliegenden (rechts) Seite des Wurmlochs wie der Kreis. Die Winkelangaben beziehen sich auf den Azimuth φ der jeweiligen Position des Kreises. Mit beiden Augen sehen wir den Kreis nie hinter dem Wurmloch.

Anhang A

Verschiedenes

A.1 Notation

Die gängigsten Symbole dieser Arbeit sind in Tabelle [A.1](#) zusammengefaßt.

\mathcal{M}	Mannigfaltigkeit
X^b	kovarianter Vektor in abstrakter Indexnotation
∂_μ	Basis-Vektor entlang der Koordinatenachse x^μ
\mathbf{X}	beliebiges Vektorfeld
\mathbf{e}_α	natürliche lokale Tetrade
θ^α	natürliche duale lokale Tetrade
$\hat{\mathbf{e}}_\alpha$	lokales Bezugssystem (in Abhängigkeit der natürlichen lokalen Tetrade)
\mathbf{g}	Metrik
$g_{\mu\nu}$	Metrik-Komponenten
${}^{(m)}g_{\mu\nu}$	Metrik-Komponenten eines m -dimensionalen Unterraums
$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$	Christoffel-Symbole
$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$	Riemann-Tensor
$R_{\mu\nu}$	Ricci-Tensor
K_{ab}	äußere Krümmung einer zweidimensionalen Hyperfläche
$\nabla_{\mathbf{X}}$	kovariante Ableitung entlang des Vektorfeldes \mathbf{X}
$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$	Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes \mathbf{X}
$\mathbb{F}_{\mathbf{u}}X^b$	Fermi-Walker-Ableitung eines Vektors \mathbf{X} entlang des Vektorfeldes \mathbf{u}
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
(a, b)	offenes Intervall: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b)$	halboffenes Intervall: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$[a, b)_c$	halboffenes Intervall: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \text{ mit } x = a + n \cdot c, n \in \mathbb{N}_0\}$

Tabelle A.1: *Notation*

Ganzer und gebrochener Teil einer Dezimalzahl werden in dieser Arbeit entgegen dem deutschen Standard durch einen Punkt getrennt.

A.2 Symbole

In dieser Arbeit verwenden wir zur besseren Orientierung einige spezielle Symbole und Kennzeichnungen. So sind Gleichungsnummern stets in runden Klammern angegeben. Andere Verweise erhalten ein spezielles Symbol wie in Tabelle [A.2](#) beschrieben.

\backslash	Verweis auf eine Abbildung
\square	Verweis auf eine Tabelle
\S	Verweis auf einen Abschnitt oder ein Kapitel
\Rightarrow <i>Film</i>	Hier gibt es einen zusätzlichen Film, der im jeweiligen Anhang näher erläutert wird
\Rightarrow <i>Maple ()</i>	Verweis auf ein Maple-Sheet

Tabelle A.2: Symbole zur besseren Orientierung

A.3 Naturkonstanten und sonstige Größen

A.3.1 Naturkonstanten

Die Naturkonstanten, welche wir in dieser Arbeit verwenden, sind allesamt der Datenbank des „National Institute of Standards and Technology“ (NIST)¹ entnommen. Die Zahlen in Klammern geben die jeweilige Ungenauigkeit an. Lediglich die Lichtgeschwindigkeit ist per Definition exakt.

Gravitationskonstante	G	$6.6742(10) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$299792458 \frac{m}{s}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6.6260693(11) \cdot 10^{-34} Js$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.3806505(24) \cdot 10^{-23} J/K$

Tabelle A.3: Naturkonstanten

Aus der Gravitationskonstanten, der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit sowie dem Planckschen Wirkungsquantum setzte Max Planck die vier nach ihm benannten Größen zusammen: Länge $L_P \equiv \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 1.62 \times 10^{-33} cm$, Zeit $T_P \equiv L_P/c = \sqrt{g\hbar/c^5} \approx 0.54 \times 10^{-43} s$, Masse $M_P \equiv \hbar/(cL_P) = \sqrt{\hbar c/G} \approx 2.218 \times 10^{-5} g$ und Energie $E_P \equiv \sqrt{\hbar c^5/G} \approx 1.22 \times 10^{19} GeV$.

A.3.2 Astronomische Größen

Die astronomischen Größen sind den „Fact Sheets“ des „National Space Science Data Center“ (NSSDC)². Fehlerangaben werden keine gemacht.

Mit den Werten aus Tabelle [A.4](#) erhalten wir für den Schwarzschildradius der Sonne (vgl. Abschnitt [§5.1](#))

$$r_s = 2GM_{\odot}/c^2 \approx 2.95423 \cdot 10^3 m.$$

Die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 aus Abschnitt [§D.1.10](#) haben in der Entfernung r_{\oplus} der Erdbahn zur Sonne die Werte

$$\kappa_1 \approx -4.68 \cdot 10^{-16} m^{-1} \quad \text{und} \quad \kappa_2 \approx 9.36 \cdot 10^{-16} m^{-1}.$$

¹Internet: <http://physics.nist.gov/cuu/index.html> (Stand: 2002)

²Internet: <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet> (Stand: 28.04.2005) entnommen. Die astronomische Einheit ist der Seite <http://neo.jpl.nasa.gov/glossary/au.html> entnommen.

Masse der Sonne	M_{\odot}	$1.9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Radius der Sonne	R_{\odot}	$6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Masse der Erde	M_{\oplus}	$5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
mittlerer Radius der Erde	R_{\oplus}	$6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$
siderische Umlaufperiode	T_{sid}	356.256 d
mittlere Distanz Erde–Sonne (1AU)	r_{\oplus}	$1.49597870691 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Tabelle A.4: Daten des Sonnensystems

A.3.3 Abgeleitete Größen

Aus den Naturkonstanten (Tab. [A.3](#)) und den astronomischen Größen (Tab. [A.4](#)) können wir einige weitere Größen ableiten:

Lichtsekunde	l_s	$2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m}$
Lichtjahr	l_j	$9.46088 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Parallaxensekunde (Parsec)	pc	3.26156 l_j

Tabelle A.5: Aus den Naturkonstanten und den astronomischen Größen abgeleitete Einheiten.

A.3.4 Größen des galaktischen Zentrums

Masse von SgrA* [38]	M_{\sphericalast}	$3.6 \cdot 10^6 M_{\odot}$
Spinparameter (Kerr) [38]	a	0.52
Distanz Erde – galaktisches Zentrum [26]	r_{\sphericalast}	$7.94 \pm 0.42 \text{ kpc}$

Tabelle A.6: Größen des galaktischen Zentrums

Betrachtet man das galaktische Zentrum (SgrA*) als ein statisches Schwarzes Loch, so kann man ihm einen Schwarzschildradius von $r_s \approx 1.064 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 0.07 \text{ AU} \approx 35.48 \text{ l}_s$ zuordnen.

A.3.5 Einheiten

Viele Gleichungen in der Relativitätstheorie vereinfachen sich, wenn man *geometrische Einheiten* verwendet, also sowohl die Gravitationskonstante G als auch die Lichtgeschwindigkeit c auf Eins setzt:

$$G = c = 1.$$

Die Einheiten der verschiedenen Größen reduzieren sich dabei auf eine Länge; so gilt

$$1.0 \equiv \frac{G}{c^2} \approx 7.42605 \cdot 10^{-28} \frac{\text{m}}{\text{kg}}, \quad (\text{A.3.1})$$

$$1.0 \equiv \frac{G}{c^4} \approx 8.26259 \cdot 10^{-45} \frac{\text{m}}{\text{J}}. \quad (\text{A.3.2})$$

MTW [\[65\]](#) setzen noch zusätzlich die Boltzmann-Konstante k_B auf Eins, was wir hier aber nicht tun wollen, da wir sie nur dort brauchen, wo wir physikalische Werte angeben möchten. Im hiesigen Fall können wir folglich Kilogramm und Joule in Metern ausdrücken. Die Einheit Meter bleibt sich gleich.

Am Beispiel der Schwarzschild-Metrik wollen wir uns den Sachverhalt nochmals veranschaulichen. In geometrischen Einheiten lautet der Schwarzschild-Radius $r_s = 2M$, wobei die Masse M nun die Einheit einer Länge besitzt. Ist $M = 1 m$ (in Worten: ein Meter), so können wir mit der Beziehung (A.3.1) die Masse M in kg oder in Vielfachen der Sonnenmasse M_\odot umrechnen:

$$M = 1 m = 1.0 \cdot 1 m \equiv \frac{c^2}{G} \cdot 1 m \approx 1.347 \cdot 10^{27} kg \approx 0.677 \cdot 10^{-3} M_\odot.$$

In der Regel lassen wir die Einheit bei der Masse M weg. So entspricht also der Masse $M = 1$ eine physikalische Masse von nicht ganz einem Promille der Sonnenmasse M_\odot . Umgekehrt können wir physikalische Einheiten auch in geometrische umwandeln, so erhalten wir zum Beispiel für die Masse der Sonne:

$$M_\odot = 1.0 \cdot M_\odot \equiv \frac{G}{c^2} \cdot M_\odot \approx 1.477 \cdot 10^3 m.$$

In geometrischen Einheiten gesprochen hat die Sonne eine Masse von etwa $1.477 km$.

Anstelle der Einheit „Meter“ können wir auch die Lichtsekunde (siehe Tab. □A.5) als Basiseinheit verwenden. Eine Strecke von $\Delta s = 299792458 m$ entspricht dann natürlich einer Lichtsekunde. Für die Masse der Sonne gilt

$$M_\odot = 1.0 \cdot M_\odot \equiv \frac{G}{c^3} \cdot M_\odot \approx 4.927 \cdot 10^{-6} ls.$$

Das galaktische Zentrum mit seinen rund drei Millionen Sonnenmassen hat dann eine Masse von etwa $17.74 ls$ und damit einen Schwarzschild-Radius von $r_s \approx 35.48 ls$.

A.4 Planck-Spektrum

Betrachten wir einen idealen „Schwarzen Körper“, so können wir sein thermisches Spektrum durch ein Planck-Spektrum bei entsprechender Temperatur beschreiben (vgl. Karttunen [53]). Die spektrale Intensität I_ν bezogen auf die Frequenz ν bei der Temperatur T lautet

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}, \quad (\text{A.4.1})$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit und k_B die Boltzmann-Konstante ist (siehe Tab. □A.3). Beziehen wir die spektrale Intensität auf die Wellenlänge, so gilt mit $I_\nu d\nu = -I_\lambda d\lambda$ und $c = \lambda\nu$

$$I_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}. \quad (\text{A.4.2})$$

Das Maximum der Intensität I_{\max} bei einer vorgegebenen Temperatur T liegt bei der Wellenlänge λ_{\max} , die sich aus dem *Wienschen Verschiebungsgesetz*

$$\lambda_{\max} \cdot T = b \quad \text{mit} \quad b = \frac{hc}{k_B [\mathcal{W}(-5e^{-5}) + 5]} \approx 2.8978 \cdot 10^{-3} K m \quad (\text{A.4.3})$$

und der Lambert-W-Funktion \mathcal{W} ergibt.

Die Gesamtstrahlungsintensität I ergibt sich nun aus dem Integral über das gesamte Spektrum³:

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \alpha T^4 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\pi^4}{15} \frac{2h}{c^2} \frac{k_b^4}{h^4} \approx 1.805 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^2}, \quad (\text{A.4.4})$$

wobei $\sigma = \pi\alpha$ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist.

Im Fall $\lambda \ll \lambda_{\max}$ sprechen wir vom Wienschen Teil, wohingegen der Bereich $\lambda \gg \lambda_{\max}$ Rayleigh-Jeans-Teil heißt. Die spektralen Intensitäten für diese beiden Grenzbereiche lauten

$$I_\lambda^{\text{Wien}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/(\lambda k_B T)} \quad \text{und} \quad I_\lambda^{\text{RJ}} = \frac{2ck_B T}{\lambda^4}. \quad (\text{A.4.5})$$

³Das nach Substitution $x = h\nu/(k_B T)$ auftretende Integral $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = n! \zeta(n+1)$ kann durch die Riemannsche Zeta-Funktion ausgedrückt werden.

A.5 Vom Spektrum zum RGB-Wert

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns im wesentlichen mit der rein geometrischen Visualisierung in der Relativitätstheorie. Den einzelnen Objekten ordnen wir einfach beliebige Farbwerte (rgb-Werte) zu und vernachlässigen ein detailliertes Farbspektrum. Jedoch können wir jedem Objekt auch ein realistisches Spektrum zuordnen und dies durch die berechnete Rotverschiebungstabelle für jedes Bildpixel in das gesehene Spektrum transformieren.⁴ Nun besteht aber die Schwierigkeit, dieses Spektrum auf Papier oder am Bildschirm einigermaßen so darzustellen, wie es das menschliche Auge wahrnehmen würde. Wir wollen hier gar nicht auf die Kolorimetrie (Farbmessung) näher eingehen, sondern verweisen auf die übersichtlichen Darstellungen in [34, 109, 116].

Für die Umrechnung eines Spektrums in rgb-Werte verwenden wir das Programm „specrend.c“ von John Walker⁵. Dabei wird ein Spektrum $I(\lambda)$ zunächst mit den Spektralwertkurven $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$ (siehe Abb. A.1, links) gefaltet.

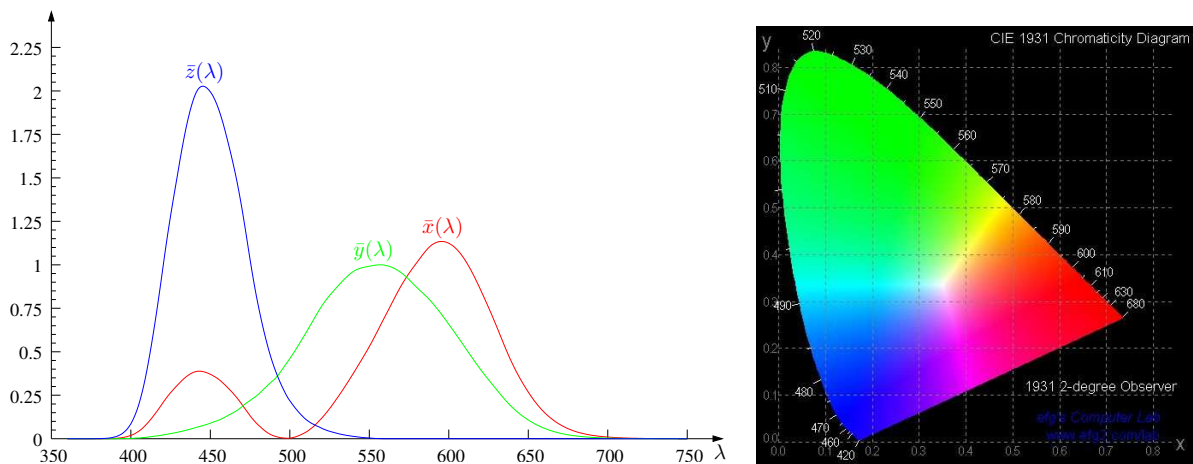


Abbildung A.1: Links: Spektralwertkurven $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$ und $\bar{z}(\lambda)$ für die Primärfarben X , Y und Z von CIE 1931 [116]. Die Farben dienen hier nur zur Kennzeichnung der Kurven und haben keine weitere Bedeutung. Rechts: CIE-Farbdiaagramm.

Aus der Faltung des Spektrums mit den Spektralwertkurven erhalten wir die (virtuellen) Primärfarben

$$X = k \int I(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda, \quad Y = k \int I(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \quad \text{und} \quad Z = k \int I(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \quad (\text{A.5.6})$$

aus denen wir die Farbwerte

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad \text{und} \quad z = \frac{Z}{X + Y + Z} \quad (\text{A.5.7})$$

bestimmen; die Konstante k kürzt sich dabei heraus. Die Y -Komponente steht für die Intensität des Lichts und die Farbwerte x und y geben die Farbe im CIE-Farbraum (Abb. A.1, rechts) an. Im Anschluß daran müssen wir nun in Abhängigkeit des darstellenden Geräts (z.B. Bildschirm oder Beamer) die Farbwerte in rgb-Werte umrechnen. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß nicht alle Farben korrekt dargestellt werden können. Zudem ist die darstellbare Intensität stark eingeschränkt. Wir skalieren die resultierenden rgb-Werte daher so, daß der größte Wert stets Eins ist.

⁴Für ein einzelnes Objekt wie in Abschnitt §5.6 beschrieben können wir die Transformation nachträglich durchführen. Bei mehreren Objekten müßte noch eine „Spektrumtextur“, die jedem Flächenelement ein Spektrum zuweist, in `GeoVis` implementiert werden.

⁵Colour Rendering of Spectra <http://www.fourmilab.ch> (Stand: 09. März 2003).

A.6 Geodäten in konform transformierten Raumzeiten

Wir wollen der Frage nachgehen, ob eine Geodäte bei einer konformen Transformation wieder in eine Geodäte übergeht. Hierzu betrachten wir eine Metrik g und die dazu konform transformierte Metrik $\hat{g} = \Omega^2(\mathbf{x})g$. Dann gilt für die Metrik-Koeffizienten

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2(\mathbf{x})g_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \hat{g}^{\alpha\beta} = \Omega^{-2}(\mathbf{x})g^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.6.1})$$

Für die transformierten Christoffel-Symbole $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}$ folgt

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \frac{1}{\Omega} \left\{ \delta_{\alpha}^{\mu} \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\beta}} + \delta_{\beta}^{\mu} \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\alpha}} - g_{\alpha\beta} g^{\mu\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\rho}} \right\} \quad (\text{A.6.2})$$

und die Geodätengleichung (2.4.4) lautet damit

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = -\frac{1}{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} - \kappa g^{\mu\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\rho}} \right\}, \quad (\text{A.6.3})$$

wobei wir schon die Anfangsbedingung $g_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = \kappa$ berücksichtigt haben. Wie wir an Gleichung (A.6.3) sehen, bleibt eine Geodäte bei konformer Skalierung im allgemeinen keine Geodäte mehr. Lediglich Nullgeodäten bleiben Nullgeodäten, wobei λ dann kein affiner Parameter mehr ist (siehe auch [46]).

Eine Geodäte in der Raumzeit (\mathcal{M}, g) erfüllt in affiner Parametrisierung die Geodätengleichung (2.4.4)

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0. \quad (\text{A.6.4})$$

Dann folgt, zusammen mit der Skalierung $\hat{\lambda} = \Upsilon(\lambda)$, $\partial_{\lambda} \Upsilon(\lambda) = \Omega^2(\mathbf{x}(\lambda))$ des affinen Parameters λ und den sich daraus ergebenden Ableitungsoperatoren

$$\frac{d}{d\hat{\lambda}} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{d}{d\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{d\hat{\lambda}^2} = \frac{1}{\Omega^4} \left\{ -\frac{2}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} + \frac{d^2}{d\lambda^2} \right\}, \quad (\text{A.6.5})$$

die Beziehung

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\hat{\lambda}^2} + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\hat{\lambda}} \frac{dx^{\beta}}{d\hat{\lambda}} = -\frac{\kappa c^2}{\Omega^5} g^{\mu\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\rho}}. \quad (\text{A.6.6})$$

mit κ wie in Gleichung (2.4.5). Nullgeodäten ($\kappa = 0$) gehen daher wieder in Nullgeodäten über und $\hat{\lambda}$ ist in diesem Fall ein affiner Parameter.

A.7 Sphärisch-symmetrische Raumzeiten

Die allgemeinste Metrik einer sphärisch-symmetrischen Raumzeit lautet [98]

$$ds^2 = -e^{2\nu(t,r)} dt^2 + e^{2\lambda(t,r)} dr^2 + Y(t,r)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (\text{A.7.1})$$

Vereinfachen wir die Metrik (A.7.1) auf statische Raumzeiten, so entfällt die Zeitabhängigkeit der Funktionen ν , λ und Y . Die zeitunabhängige Metrik lautet dann

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + Y(r)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (\text{A.7.2})$$

A.7.1 Lokale Tetrade

Die natürliche lokale Tetrade für die sphärisch-symmetrische Raumzeit (A.7.1) lautet

$$\mathbf{e}_t = e^{-\nu(t,r)} \partial_t, \quad \mathbf{e}_r = e^{-\lambda(t,r)} \partial_r, \quad \mathbf{e}_{\vartheta} = Y(t,r)^{-1} \partial_{\vartheta}, \quad \mathbf{e}_{\varphi} = (Y(t,r) \sin \vartheta)^{-1} \partial_{\varphi}. \quad (\text{A.7.3})$$

A.7.2 Geodäten

Aufgrund der sphärischen Symmetrie genügt es, Geodäten in der ($\vartheta = \pi/2$)-Ebene zu betrachten. Daher reduziert sich die Lagrange-Funktion auf

$$\mathcal{L} = -e^{2\nu(r)}\dot{t}^2 + e^{2\lambda(r)}\dot{r}^2 + Y(r)^2\dot{\varphi}^2. \quad (\text{A.7.4})$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0,$$

erhalten wir zwei Konstanten der Bewegung:

$$\begin{aligned} k &= e^{2\nu(r)}\dot{t}, \\ h &= Y(r)^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Konstanten in die Lagrange-Funktion (A.7.4) ein und berücksichtigen, daß $\mathcal{L} = \kappa$ für Geodäten, so folgt

$$\dot{r}^2 = e^{-2\lambda(r)} \left(\kappa + e^{-2\nu(r)}k^2 - \frac{h^2}{Y(r)^2} \right). \quad (\text{A.7.5})$$

Eine Bahnkurve $r = r(\varphi)$ einer Geodäten können wir dann über die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{Y(r)^4}{h^2} e^{-2\lambda(r)} \left(\kappa + e^{-2\nu(r)}k^2 - \frac{h^2}{Y(r)^2} \right) \quad (\text{A.7.6})$$

bestimmen. Die Konstanten der Bewegung k und h ersetzen wir durch eine Anfangsrichtung $\vec{\xi}$, bezogen auf eine lokale Tetrade am Ort r_i , wobei

$$\vec{\xi} = \xi \cos \tau \mathbf{e}_r + \xi \sin \tau \mathbf{e}_\varphi = \xi^r \partial_r + \xi^\varphi \partial_\varphi.$$

Die Null-Komponente ξ^t erhalten wir aus der Bedingung $\kappa = g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ für Geodäten, $\xi^t = \pm e^{-\nu(r_i)}\sqrt{\xi^2 - \kappa}$. Dies ergibt für die Konstanten der Bewegung:

$$\begin{aligned} k &= e^{2\nu(r_i)}\dot{t} = \sqrt{\xi^2 - \kappa}, \\ h &= Y(r_i)^2\dot{\varphi} = Y(r_i)\xi \sin \tau. \end{aligned}$$

Damit folgt für die Bahngleichung (A.7.6):

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{Y(r)^4 e^{-2\lambda(r)}}{Y(r_i)^2 \xi^2 \sin^2 \tau} \left[\kappa + e^{-2\nu(r)}(\xi^2 - \kappa) - \frac{Y(r_i)^2 \xi^2 \sin^2 \tau}{Y(r)^2} \right]. \quad (\text{A.7.7})$$

Aus Gleichung (A.7.7) lesen wir sofort ab, daß für $e^{-2\nu(r)} \equiv 1$ bzw. $\nu(r) \equiv 0$ die Bahnkurve unabhängig vom Typ der Geodäten ist.

A.7.3 Koordinatensystem anpassen

Bei einer sphärisch-symmetrischen Raumzeit kann man stets ein Koordinatensystem (x', y', z') so wählen, daß zwei Punkte $P(r_p, \vartheta_p, \varphi_p)$ und $Q(r_q, \vartheta_q, \varphi_q)$ auf der ($\vartheta' = \pi/2$)-Ebene zu liegen kommen und zusätzlich P auf der x' -Achse liegt.

Die $\mathbf{e}_{1'}$ -Achse ist durch

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_p \cos \varphi_p \\ \sin \vartheta_p \sin \varphi_p \\ \cos \vartheta_p \end{pmatrix}$$

und die $\mathbf{e}_{3'}$ -Achse durch

$$\mathbf{e}_{3'} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_p \sin \varphi_p \cos \vartheta_q - \cos \vartheta_p \sin \vartheta_q \sin \varphi_q \\ \cos \vartheta_p \sin \vartheta_q \cos \varphi_q - \sin \vartheta_p \cos \varphi_p \cos \vartheta_q \\ \sin \vartheta_p \cos \varphi_p \sin \vartheta_q \sin \varphi_q - \sin \vartheta_p \sin \varphi_p \sin \vartheta_q \cos \varphi_q \end{pmatrix}$$

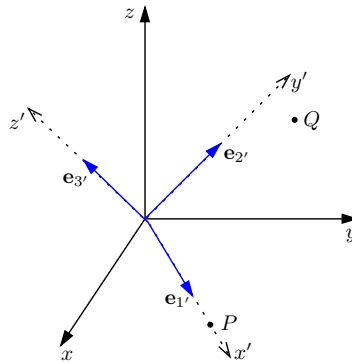


Abbildung A.2: Zwei Punkte P und Q haben bzgl. dem ungestrichenen System die Koordinaten $(r_p, \vartheta_p, \varphi_p)$ bzw. $(r_q, \vartheta_q, \varphi_q)$. Dann findet man ein gestrichenes System so, daß P auf der x' -Achse und Q in der $(\vartheta' = \pi/2)$ -Ebene liegt.

gegeben. Daraus können wir direkt die $e_{2'}$ -Achse bestimmen:

$$\mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_{3'} \times \mathbf{e}_{1'}.$$

Im gestrichenen System ergeben sich die Koordinaten von P und Q durch die Projektion der Vektoren \vec{p} und \vec{q} auf die neuen Basis-Vektoren $\{\mathbf{e}_{i'}\}$. So gilt

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} r_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{q}' = \begin{pmatrix} \langle \vec{q}, \mathbf{e}_{1'} \rangle \\ \langle \vec{q}, \mathbf{e}_{2'} \rangle \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A.8 Lochkamera beim Raytracing

Die Lochkamera (PinHoleCam) beim Raytracing simuliert eine gewöhnliche Digitalkamera, wobei der Augpunkt und die Brennebene vertauscht sind (siehe Abb. A.3). Für die Bildberechnung entscheidend sind die Parameter

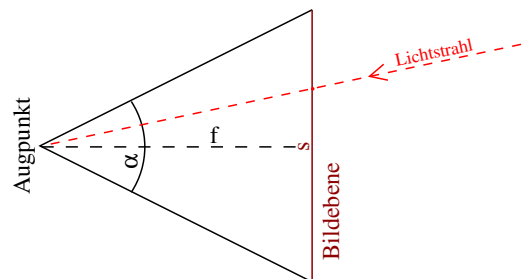


Abbildung A.3: Die Lochkamera beim Raytracing wird durch das Sichtfeld und die Anzahl Pixel bestimmt.

Sichtfeld (fov = *field of view*) und Auflösung (res = *resolution*). Zusammen mit der Anzahl Pixel pro Zoll (dpi=*dots per inch*) können wir die Brennweite f der Lochkamera bestimmen:

$$f = \frac{\frac{s}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \quad \text{mit} \quad s = \frac{r_x}{d_x}, \quad (\text{A.8.1})$$

wobei r_x die Auflösung des Bildes und d_x die Anzahl Pixel pro Zoll in horizontaler Richtung ist. Ein Bild mit $r_x = 1200$ Pixel Auflösung hat bei $d_x = 300$ dpi eine Bildgröße von etwa 10.16 cm. Die Lochkamera mit einem Sichtfeld von 45° hat in diesem Fall eine Brennweite von etwa 12.26 cm.

A.9 Filmbeschreibungen zum Raytracing-Kapitel

Die verschiedenen Modell-Szenarien aus dem Abschnitt §3.8 sind hier als kurze Filme zusammengestellt:

Verschiedene Bewegungsrichtungen

[orthoMovBall_960x480.mpg](#)

Abbildung \ 3.10 (Seite 37); 378 Einzelbilder mit Originalauflösung 1200x600, orthMov_ball.scn
Eine ruhende Ballreihe sei entlang der y -Achse ausgerichtet. Ein weiterer Ball bewege sich mit $v = 0.9c$ parallel zur Ballreihe. Der Beobachter bewegt sich mit $v = 0.9c$ senkrecht auf die Ballreihe zu und filmt mit seiner Panoramakamera (Sichtbereich: $120^\circ \times 40^\circ$) im Zeitintervall $t_{S''} \in [0, 3.77]$.

64 Prozessoren (Mozart-Cluster) benötigen etwa 28h.

Beleuchtung

[boxDoubleFlash_300x300.mpg](#)

Abbildung \ 3.11 (Seite 37); 210 Einzelbilder mit Originalauflösung 500x500, boxDoubleFlash_mozart.scn
Ein einfacher Lichtimpuls mit dem Muster („1010“, $\Delta t_{on} = 0.2, \Delta t_{off} = 0.1, \Delta t_{startTime} = -48.0$) wandert kreisförmig über eine Hintergrundfläche ($y = -1$). Der Beobachter sitzt am Ort $y = 8$ und beobachtet im Intervall $t \in [9.8, 11.06]_{0.006}$ mit einer Lochkamera (Sichtfeld: $50^\circ \times 50^\circ$).

[boxBallSingleFlash_500x500.mpg](#)

Abbildung \ 3.11 (Seite 37); 1000 Einzelbilder mit Originalauflösung 500x500, boxBallFlash_cacau.scn
Ein einfacher Lichtblitz mit dem Muster („10“, $\Delta t_{on} = 0.1, \Delta t_{startTime} = -46.55$) wird so losgeschickt, daß der Schattenwurf in der Mitte einer Hintergrundfläche ($y = -1$) erscheint. Der Beobachter sitzt am Ort $y = 8$ und beobachtet im Intervall $t \in [5.0, 12.0]_{0.007}$ mit einer Lochkamera (Sichtfeld: $70^\circ \times 70^\circ$).

[boxBallLight_500x500.mpg](#)

Abbildung \ 3.11 (Seite 37); Einzelbilder mit Originalauflösung 500x500, boxBallFlash_cacau.scn
Im Gegensatz zum einfachen Lichtblitz wird nun mit einer konstanten Punktlichtquelle beleuchtet. Die Hintergrundfläche befindet sich wieder bei $y = -1$ und der Beobachter sitzt bei $y = 8$. Er beobachtet mit einer Lochkamera (Sichtfeld: $70^\circ \times 70^\circ$) im Intervall $t \in [5.0, 13.4]_{0.007}$.

Statisches Einstein-Universum

[einsteinStaticUniverse_720x240.mpg](#)

Abbildung \ 3.12 (Seite 38); 180 Einzelbilder mit Originalauflösung 900x300, staticUniv_mozart.scn
Ein Beobachter im statischen Einstein-Universum betrachte vom Ort ($R = 2, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0$) aus mit seiner Panoramakamera (Sichtfeld: $360^\circ \times 120^\circ$) eine Erdkugel mit Radius $R_{Erde} = 0.2$, die sich quasistatisch auf der radialen Bahn $R = 0.5 \dots 2.827, \vartheta = \pi/2, \varphi = \pi$ bewegt.

64 Prozessoren (Mozart-Cluster) benötigen etwa 2h37min.

Schwarzschild-Raumzeit

[lookBackToEarth_z_500x500.mpg](#)

Abbildung \ 3.15 (Seite 40); 2000 Einzelbilder mit Originalauflösung 500x500, lookOutside.scn
Ein Beobachter in der Schwarzschild-Raumzeit schaue radial nach außen auf eine rotierende Erdkugel am Ort r_{Erde} . Dabei nähert er sich quasistatisch mit seiner Lochkamera (Sichtfeld: $10^\circ \times 10^\circ$) immer mehr dem Horizont. Im Bild angegeben ist seine Eigenzeit τ , seine momentane Position r , die inzwischen verstrichene Koordinatenzeit t . Der Faktor z gibt das Verhältnis zwischen seiner Eigenzeiten und der der Erdkugel an.

Anhang B

Details zum Kollaps

Grundlage hier ist die Kollaps-Raumzeit von Oppenheimer und Snyder [75].

B.1 Metriken aus den Feldgleichungen

Folgen wir der Herleitung von Oppenheimer und Snyder [75], so nehmen wir als Ansatz für das Linienelement

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{\Omega(R,\tau)} dR^2 + e^{\omega(R,\tau)} (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (\text{B.1.1})$$

Der Energie-Impuls-Tensor T_μ^ν verschwindet bis auf die Komponente $T_4^4 = -\rho$. Aus den Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_\mu^\nu = 8\pi T_\mu^\nu \quad (\text{B.1.2})$$

erhält man die vier Gleichungen

$$8\pi T_R^R = 0 = -e^{-\omega} + e^{-\Omega} \frac{\omega'^2}{4} - \ddot{\omega} - \frac{3}{4} \dot{\omega}^2, \quad (\text{B.1.3a})$$

$$8\pi T_\theta^\theta = 8\pi T_\phi^\phi = 0 = e^{-\Omega} \left(\frac{\omega''}{2} + \frac{\omega'^2}{4} - \frac{\Omega'\omega'}{4} \right) - \frac{\ddot{\Omega}}{2} - \frac{\dot{\Omega}^2}{4} - \frac{\ddot{\omega}}{2} - \frac{\dot{\omega}^2}{4} - \frac{\dot{\Omega}\dot{\omega}}{4}, \quad (\text{B.1.3b})$$

$$8\pi T_\tau^\tau = -8\pi\rho = -e^{-\omega} + e^{-\Omega} \left(\omega'' + \frac{3}{4}\omega'^2 - \frac{\Omega'\omega'}{2} \right) - \frac{\dot{\omega}^2}{4} - \frac{\dot{\Omega}\dot{\omega}}{2}, \quad (\text{B.1.3c})$$

$$8\pi e^\Omega T_\tau^R = -8\pi T_R^\tau = -\frac{\omega'\dot{\omega}}{2} + \frac{\dot{\Omega}\omega'}{2} - \dot{\omega}'. \quad (\text{B.1.3d})$$

Dabei bedeutet $\dot{\omega} = \partial\omega/\partial\tau$ und $\omega' = \partial\omega/\partial R$. Unter der Voraussetzung $\omega' \neq 0$ können wir (B.1.3d) bzgl. τ integrieren

$$\Omega = \omega + 2 \ln \omega' + \ln \frac{1}{4f(R)^2}, \quad (\text{B.1.4})$$

mit Integrationskonstante $f(R)^2$. Setzen wir Ω in (B.1.3a) ein und wählen die Integrationskonstante $f(R)^2 \equiv 1$, so erhalten wir eine Differentialgleichung nur für ω

$$\ddot{\omega} + \frac{3}{4}\dot{\omega} = 0. \quad (\text{B.1.5})$$

Nehmen wir weiter an, daß auch $\dot{\omega} \neq 0$, so ist (B.1.5) leicht zu integrieren

$$e^\omega = (F(R)\tau + G(R))^{4/3}, \quad (\text{B.1.6})$$

mit den Integrationskonstanten $F(R)$ und $G(R)$. Einsetzen von (B.1.4) in (B.1.3b) hätte uns zum selben Ergebnis geführt. Schließlich bleibt noch (B.1.3c) übrig. Setzen wir unsere bisherigen Ergebnisse dort ein, ergibt sich

$$8\pi\rho = \frac{4}{3} \left(\tau + \frac{G}{F} \right)^{-1} \left(\tau + \frac{G'}{F'} \right)^{-1}. \quad (\text{B.1.7})$$

Die Freiheit zweier beliebiger Funktionen F und G in (B.1.6) ist leider geringer wie sie scheint. Läßt man etwa R von einer neuen Variablen R^* abhängen, so ändern sich die Feldgleichungen (B.1.3a-B.1.3d) nicht. Wir können daher $G = R^{3/2}$ fest wählen.

Zu einer bestimmten Zeit $\tau = 0$ können wir die Dichte ρ als Funktion von R angeben. Aus (B.1.7) wird dann

$$9\pi\rho_0(R) R^2 = FF' = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2}{\partial R}. \quad (\text{B.1.8})$$

Leider ist die Vorgabe von $\dot{\rho}(\tau = 0)$ nicht möglich. Ein statischer Anfangszustand, von dem aus der Kollaps beginnen könnte, ist auf diese Art nicht zu konstruieren.

Setzen wir eine konstante Dichte im ganzen Staubstern voraus, so erhalten wir als spezielle Lösung

$$F = \begin{cases} -\frac{3}{2}\sqrt{r_s} \left(\frac{R}{R_b} \right)^{3/2}, & R \leq R_b \\ -\frac{3}{2}\sqrt{r_s} & , \quad R \geq R_b \end{cases} \quad (\text{B.1.9})$$

Daraus ergeben sich dann die Metriken für den Außen- sowie den Innenraum:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau \right)^{4/3} (dR^2 + R^2 d\Omega^2) \quad \text{für } R \leq R_b,$$

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{R}{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)^{2/3}} dR^2 + \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau \right)^{4/3} d\Omega^2 \quad \text{für } R \geq R_b,$$

B.2 Christoffel-Symbole, Riemann-Tensor, Ricci-Tensor, Ricci-Skalar

B.2.1 Außenraum-Metrik

Die Metrik für den Außenraum ($R \geq R_b$) lautet mit dem Schwarzschildradius r_s und dem Oberflächenelement $d\sigma^2$

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{R}{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)^{2/3}} dR^2 + \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau \right)^{4/3} d\sigma^2. \quad (\text{B.2.1})$$

Daraus ergeben sich die Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau R}^R &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{r_s}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, & \Gamma_{\tau\vartheta}^\vartheta &= -\frac{\sqrt{r_s}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, & \Gamma_{\tau\varphi}^\varphi &= -\frac{\sqrt{r_s}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, \\ \Gamma_{RR}^\tau &= \frac{R\sqrt{r_s}}{2(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)^{5/3}}, & \Gamma_{RR}^R &= -\frac{3\sqrt{r_s}\tau}{4(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau)R}, & \Gamma_{R\vartheta}^\vartheta &= \frac{\sqrt{R}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, \\ \Gamma_{R\varphi}^\varphi &= \frac{\sqrt{R}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\tau &= -\sqrt{r_s} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau \right)^{1/3}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^R &= -\frac{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}{\sqrt{R}}, \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \cot\vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\tau &= -\sqrt{r_s} \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau \right)^{1/3} \sin^2\vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin\vartheta \cos\vartheta, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^R &= -\frac{(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau) \sin^2\vartheta}{\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Die nicht-verschwindenden Riemann-Tensor-Komponenten lauten

$$\begin{aligned} R_{\tau R \tau R} &= -\frac{R r_s}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau\right)^{8/3}}, & R_{\tau \vartheta \tau \vartheta} &= \frac{1}{2} \frac{r_s}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau\right)^{2/3}}, \\ R_{\tau \varphi \tau \varphi} &= \frac{1}{2} \frac{r_s \sin^2 \vartheta}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau\right)^{2/3}}, & R_{R \vartheta R \vartheta} &= -\frac{1}{2} \frac{R r_s}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau\right)^{4/3}}, \\ R_{R \varphi R \varphi} &= -\frac{1}{2} \frac{R r_s \sin^2 \vartheta}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau\right)^{4/3}}, & R_{\vartheta \varphi \vartheta \varphi} &= \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau\right)^{2/3} r_s \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Da der Außenraum eine Vakuum-Raumzeit beschreibt, folgt sofort aus den Einsteinschen Feldgleichungen (2.5.4) mit verschwindender kosmologischer Konstanten, daß sowohl der Ricci-Tensor wie auch der Ricci-Skalar identisch verschwinden. Neben dem Ricci-Skalar kann man aber auch noch folgenden Skalar bilden,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12 \frac{r_s^2}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau\right)^4}.$$

Hierbei sieht man, daß für $R^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{r_s} \tau$ eine nichttriviale Singularität vorliegt.

B.2.2 Innenraum-Metrik

Die Metrik für den Innenraum ($R \leq R_b$) lautet mit dem Schwarzschildradius r_s , dem Staubrand R_b und dem Oberflächenelement $d\sigma^2$

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{4/3} (dR^2 + R^2 d\sigma^2). \quad (\text{B.2.2})$$

Daraus ergeben sich die Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau R}^R &= \Gamma_{\tau \vartheta}^{\vartheta} = \Gamma_{\tau \varphi}^{\varphi} = -\frac{\sqrt{r_s} R_b^{3/2}}{1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{3/2} \tau}, \\ \Gamma_{RR}^{\tau} &= -\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{1/3} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2}, & \Gamma_{R\vartheta}^{\vartheta} &= \frac{1}{R}, & \Gamma_{R\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{R}, \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\tau} &= -\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{1/3} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} R^2, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^R &= -R, & \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} &= \cot \vartheta, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tau} &= -\left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{1/3} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} R^2 \sin^2 \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^R &= -R \sin^2 \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Die nicht-verschwindenden Riemann-Tensor Komponenten lauten

$$\begin{aligned} R_{\tau R \tau R} &= -\frac{1}{2} \frac{r_s}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}}, & R_{\tau \vartheta \tau \vartheta} &= \frac{1}{2} \frac{r_s R^2}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}}, \\ R_{\tau \varphi \tau \varphi} &= \frac{1}{2} \frac{r_s R^2 \sin^2 \vartheta}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}}, & R_{R \vartheta R \vartheta} &= \frac{r_s R^2}{R_b^3} \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}, \\ R_{R \varphi R \varphi} &= \frac{r_s R^2 \sin^2 \vartheta}{R_b^3} \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}, & R_{\vartheta \varphi \vartheta \varphi} &= \frac{r_s R^4 \sin^2 \vartheta}{R_b^3} \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Der Weyl-Tensor verschwindet identisch. Wir haben es also mit einer konform flachen Raumzeit zu tun. Im Innenraum erhält man für den Ricci-Tensor

$$\begin{aligned} R_{\tau\tau} &= \frac{3}{2} \frac{r_s}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^2}, & R_{RR} &= \frac{3}{2} \frac{r_s}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}}, \\ R_{\vartheta\vartheta} &= \frac{3}{2} \frac{r_s R^2}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}}, & R_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{2} \frac{r_s R^2 \sin^2 \vartheta}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^{2/3}}, \end{aligned}$$

und für den Ricci-Skalar

$$Ricci = \frac{3}{2} \frac{r_s}{R_b^3 \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^2}.$$

Außerdem gilt

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 15 \frac{r_s^2}{R_b^6 \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)^4}.$$

Ab dem Zeitpunkt $\tau_C = \frac{2}{3} R_b^{3/2} r_s^{-1/2}$ ist die Innenraum-Metrik kollabiert.

B.3 Geodätengleichungen

Mit den Christoffelsymbolen aus Abschnitt (B.2) können wir nun die Geodätengleichungen für den Außenraum

$$0 = \ddot{r} + \frac{R\sqrt{r_s}}{2 \left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau\right)^{5/3}} \dot{R}^2 - \left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau\right)^{1/3} \sqrt{r_s} \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2\right), \quad (\text{B.3.1a})$$

$$0 = \ddot{R} + \frac{\sqrt{r_s}}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau\right)} \left(\dot{R}\dot{\tau} - \frac{4}{3} \frac{\tau}{R} \dot{R}^2\right) - \frac{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau\right)}{\sqrt{R}} \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2\right), \quad (\text{B.3.1b})$$

$$0 = \ddot{\vartheta} - \frac{2}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau\right)} \left(\sqrt{r_s} \dot{\vartheta}\dot{\tau} - \sqrt{R} \dot{\vartheta}\dot{R}\right) - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2, \quad (\text{B.3.1c})$$

$$0 = \ddot{\varphi} - \frac{2}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau\right)} \left(\sqrt{r_s} \dot{\varphi}\dot{\tau} - \sqrt{R} \dot{\varphi}\dot{R}\right) + \frac{2 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \dot{\varphi}\dot{\vartheta}. \quad (\text{B.3.1d})$$

und für den Innenraum

$$0 = \ddot{r} - \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{r_s}} R_b^{-3/2} \tau\right)^{1/3} \left[\dot{R}^2 + R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2\right)\right], \quad (\text{B.3.2a})$$

$$0 = \ddot{R} - \frac{2\sqrt{r_s}}{R_b^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)} \dot{R}\dot{\tau} - R \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2\right), \quad (\text{B.3.2b})$$

$$0 = \ddot{\vartheta} - \frac{2\sqrt{r_s}}{R_b^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)} \dot{\vartheta}\dot{\tau} + \frac{2}{R} \dot{\vartheta}\dot{R} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2, \quad (\text{B.3.2c})$$

$$0 = \ddot{\varphi} - \frac{2\sqrt{r_s}}{R_b^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} R_b^{-3/2} \tau\right)} \dot{\varphi}\dot{\tau} + \frac{2}{R} \dot{\varphi}\dot{R} + \frac{2 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \dot{\varphi}\dot{\vartheta}. \quad (\text{B.3.2d})$$

angeben.

Geradengleichung

Eine Gerade innerhalb einer Ebene läßt sich durch die beiden Funktionen

$$x(\lambda) = a\lambda + b \quad \text{und} \quad y(\lambda) = c\lambda + d \quad (\text{B.3.3})$$

mit den Parametern a, b, c, d beschreiben. Leiten wir beide Beziehungen zweimal nach der Variablen λ ab, so erhalten wir die zwei Differentialgleichungen für eine Gerade

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{y} = 0, \quad (\text{B.3.4})$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach der Variablen λ bedeutet. Transformieren wir nun auf Polarkoordinaten (r, φ) mit $x(\lambda) = r(\lambda) \cos \varphi(\lambda)$ und $y(\lambda) = r(\lambda) \sin \varphi(\lambda)$ und leiten zweimal nach λ ab, so erhalten wir

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi, \quad (\text{B.3.5a})$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (\text{B.3.5b})$$

Zusammen mit Gleichung (B.3.4) können wir aus den Linearkombinationen $0 = \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi$ und $0 = \ddot{y} \cos \varphi - \ddot{x} \sin \varphi$ die beiden Gleichungen

$$0 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad \text{und} \quad 0 = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \quad (\text{B.3.6})$$

herleiten.

B.4 Fallendes Objekt im Außenraum

Ruht ein Objekt im Außenraum bezüglich mitfallenden Koordinaten ($R = \text{const}, \vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$), so bewegt es sich auf einer zeitartigen Geodäten. Dies ist sofort klar, da die Geodätengleichungen (B.3.1) trivial erfüllt sind. Das Objekt beschreibt natürlich auch eine Geodäte in Schwarzschild-Koordinaten. Betrachten wir r und t in den Transformationsgleichungen (4.2.10a) und (4.2.10b) als Funktionen eines affinen Parameters λ und leiten nach diesem ab, so erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\dot{t} = \frac{1}{1 - r_s/r} \frac{d\tau}{d\lambda} \quad \text{und} \quad \dot{r} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} \frac{d\tau}{d\lambda}. \quad (\text{B.4.1})$$

Der Vergleich mit den Geodätengleichungen in Schwarzschild zeigt, daß wenn $E = 1$ gewählt wird, sich das Objekt auf einer zeitartigen Geodäten bewegt. Die Koordinatengeschwindigkeit v ergibt sich sehr schnell aus

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right). \quad (\text{B.4.2})$$

B.5 Kruskal-Koordinaten

Die maximale Erweiterung der Schwarzschild-Raumzeit führt auf die Darstellung in Kruskal-Koordinaten (siehe z.B. [57, 107, 93]). Die Schwarzschild-Metrik (2.3.4) lautet in Kruskal-Koordinaten

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (\text{B.5.1})$$

wobei $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ gegeben ist durch die Beziehung

$$\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{r/r_s} = X^2 - T^2 \quad \text{bzw.} \quad r = r_s \left[W \left(\frac{X^2 - T^2}{e} \right) + 1 \right] \quad (\text{B.5.2})$$

und $W = W(x)$ die sogenannte LambertW-Funktion [19] darstellt. Für die Koordinatenzeit t gilt hingegen

$$t_{r>r_s} = 2r_s \operatorname{arctanh} \frac{T}{X}, \quad t_{r<r_s} = 2r_s \operatorname{arctanh} \frac{X}{T}, \quad t_{r=r_s} = \infty. \quad (\text{B.5.3})$$

Im Fall $r \geq r_s$ gilt

$$X = \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \left(\frac{t}{2r_s} \right), \quad T = \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \frac{t}{2r_s} \quad (\text{B.5.4})$$

und für $0 < r < r_s$ gilt

$$X = \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \frac{t}{2r_s}, \quad T = \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \frac{t}{2r_s}. \quad (\text{B.5.5})$$

Aus Gleichung (B.5.2) folgt mit $r \geq 0$ die Bedingung $X^2 - T^2 \geq -1$. Der Zusammenhang zwischen Kruskal- und Schwarzschild-Koordinaten ist in Abbildung B.1 dargestellt. Da aufgrund der Gleichung (B.5.1) radiale Lichtstrahlen hier einen Winkel von 45° haben, ist deutlich die kausale Struktur ablesbar.

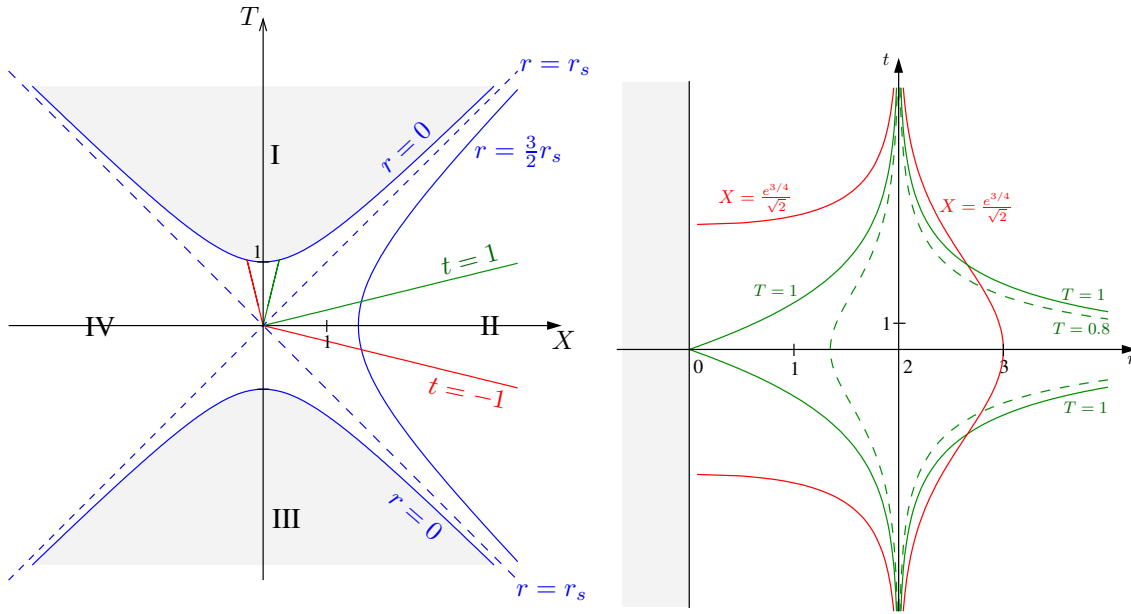


Abbildung B.1: Zusammenhang zwischen Kruskal- und Schwarzschild-Koordinaten. Die grau markierten Bereiche I und III gehören nicht zur Kruskal-Raumzeit. Die tatsächliche Raumzeit beschränkt sich auf den Bereich II ($X \geq 0 \setminus \{I, III\}$). Dem Bereich IV schreiben wir keine Bedeutung zu, da keinerlei Informationsaustausch zwischen II und IV möglich ist.

Die Koordinaten-Transformationen aus dem Abschnitt §4.2 für den Außenraum können wir auch wie folgt formulieren:

$$r = \left(R^{3/2} - \frac{3}{2} \sqrt{r_s} \tau \right)^{2/3},$$

$$t = \tau - 2\sqrt{r r_s} + 2r_s \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{r_s}{r}}.$$

Setzen wir die Transformation der Zeit-Koordinate t in die Ausdrücke (B.5.4) oder (B.5.5) ein und verwenden die Additionstheoreme der hyperbolischen Funktionen,

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y),$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y),$$

so vereinfachen sich obige Transformationen zu

$$X = e^{r/(2r_s)} \left[\sqrt{\frac{r}{r_s}} \cosh \alpha + \sinh \alpha \right] \quad \text{und} \quad T = e^{r/(2r_s)} \left[\sqrt{\frac{r}{r_s}} \sinh \alpha + \cosh \alpha \right],$$

wobei $\alpha = \tau/(2r_s) - \sqrt{r/r_s}$ und $r = r(\tau, R)$ ist. Die Einschränkung $r > r_s$ wird hinfällig.

B.6 Implementierung in RayViS und GeoViS

Wir wollen hier kurz die Implementierung der beiden Kollaps-Atlanten in `RayViS` und `GeoViS` aufzeigen. Wir sprechen vom *mitfallenden Atlas*, wenn wir sowohl Innen- als auch Außenraum in mitfallenden Koordinaten angeben. Der *statische Atlas* beschreibt den Außenraum in Schwarzschild-Koordinaten und den Innenraum weiterhin in mitfallenden Koordinaten.

B.6.1 RayViS-Klassen

In `RayViS` benötigen wir für jede Raumzeit eine Strahlerzeugungsklasse (`RvsPolRay5DGen...`) und eine Physik-Klasse (`Phys...`).

Mitfallender Atlas

Im Fall des rein mitfallenden Atlanten sind die beiden benötigten Klassen `RvsPolRay5DGenComoving` und `PhysComovingMetric`. Der Strahlerzeuger fordert in der Methode `calcPolyline()` die Physik-Klasse auf, die Teilstücke der Geodäten in der jeweiligen Karte zu berechnen. Die erste Startrichtung kommt natürlich von der Kamera. Die Umrechnung vom lokalen System der Kamera in die Koordinatendarstellung erfolgt über die Methode `camToCoord()`, wobei zunächst die Dreier-Richtung im Kamerasystem normiert wird. Im Anschluß daran wird die Karte abgefragt, in der sich die Kamera befindet und abhängig davon wird die Vierer-Richtung auf mitfallende Koordinaten im Innen- oder Außenraum transformiert. Erkennt die Physik-Klasse mit der Methode `isOneTwo()`, daß der Teilstrahl den Bereich einer Karte verläßt, so wird in derselben Methode die letzte Richtung in die neue Karte transformiert. Diese Richtung ist dann auch gleich die neue Startrichtung für den Strahlgenerator.

Statischer Atlas

Der statische Atlas ist durch die Strahlerzeugungsklasse `RvsPolRay5DGenCollapse` und die Physik-Klasse `PhysCollapseMetric` implementiert. Die Methode `camToCoord()` transformiert nun im Fall eines Beobachters im Außenraum (Karte 1) die Dreier-Richtung bezüglich der Kamera zunächst auf Schwarzschild- und dann in mitfallende Koordinaten.

B.6.2 GeoViS-Klassen

In `GeoViS` ist die Strahlerzeugung von der eigentlichen Raumzeit unabhängig, es wird lediglich zwischen einer einzelnen Karte (`GvsRayGenSimple`) und einem Atlas (`GvsRayGenAtlas`) unterschieden. Die Raumzeit selbst, sofern sie aus einem Atlas besteht, wird zunächst in die einzelnen Karten zerlegt, welche als Metrik-Klassen implementiert werden müssen. Anschließend sind in einem Atlas die entsprechenden Karten zusammenzustellen und die notwendigen Transformationen einzubauen.

Mitfallender Atlas

Der Atlas `GvsAtlasOppSnyderCollapse` beschreibt die Raumzeit eines kollabierenden Sterns mit Hilfe der beiden Metriken `GvsMetricOppSnyderCollapseOut` und `GvsMetricOppSnyderCollapseIn` in mitfallenden Koordinaten.

Statischer Atlas

Der statische Atlas wird durch die Klasse `GvsAtlasOppSnyderCollapseStatic` repräsentiert, der sich aus den Metriken `GvsMetricSchwarzschild`, `GvsMetricOppSnyderCollapseOut` und `GvsMetricOppSnyderCollapseIn` zusammensetzt.

B.7 Hilfsprogramme

Zur Erstellung einzelner Abbildungen aus dem Kapitel §4 wollen wir noch drei kleine Hilfsprogramme erwähnen. Eine ausführlichere Erklärung, sofern notwendig, steht in den jeweiligen Quelldateien.

radialeGeodaeten.cpp

berechnet im Außenraum radial einlaufende und auslaufende Nullgeodäten in mitfallenden Koordinaten (siehe Abb. 4.6 und Abb. 4.7). Da sich die radiale Geodätengleichung im Außenraum nur implizit angeben läßt, wird sie hier mit dem Brent-Verfahren [11] numerisch gelöst.

findIntersec.cpp, findPhantomObject.cpp

sucht den Rand des Staubsterns zu verschiedenen Zeitpunkten des statischen bzw. mitfallenden Beobachters. Anschließend kann die Oberfläche bestimmt werden, die der jeweilige Beobachter zu seiner Eigenzeit sieht; dies entspricht dem Phantombild.

geoCollapsGvs.cpp

berechnet Nullgeodäten in mitfallenden Koordinaten für den transparenten Kollaps (siehe Abb. 4.16).

geschwindigkeit.cpp

berechnet einerseits die Geschwindigkeit eines mitfallenden Beobachters bezüglich des jeweiligen lokalen Beobachters am momentanen Ort des mitfallenden Beobachters. Andererseits kann seine Geschwindigkeit, die ein weit entfernter Beobachter bestimmen würde, angegeben werden.

kruskalKoordinaten.cpp

transformiert anhand der Gleichungen aus Abschnitt §B.5 Schwarzschild- in Kruskal-Koordinaten und umgekehrt. Zudem können auch mitfallende Außenraum- in Kruskal-Koordinaten transformiert werden.

sichtbereich.cpp

bestimmt den Sichtbereich für einen Beobachter, der sich auf dem Rand eines kollabierenden Staubsterns befindet. Der Beobachter sieht in seinem Blickfeld von $2\pi sr$ einen Himmelsausschnitt von lediglich $\Omega = 2\pi(1 - \cos \varphi_f)$ (siehe Abb. 4.14). Der Himmelsausschnitt Ω bestimmt sich über die Integration einer Geodäten innerhalb der **GvsMetricOppSnyderCollapseOut**-Metrik, die zur Eigenzeit τ beim Beobachter am Ort $R = R_b$ in φ -Richtung startet. Der letzte Punkt einer Geodäten gibt näherungsweise den asymptotischen Wert φ_f .

B.8 Filmbeschreibungen

Kollabierender Stern

Unterverzeichnis:Kollaps/Opak

[opakKollapsCom_500x500.mpg](#)

Abbildung 4.11 (Seite 57); 415 Einzelbilder mit Originalauflösung 500x500

Der mitfallende Beobachter, der in mitfallenden Koordinaten den Abstand zum Sternrand beibehält, sieht den kollabierenden, opaken Staubstern ($r_s = 2, R_b = 5$) in seiner Eigenzeit $\tau = 0 \dots 41$. Der Staubstern scheint bis zur Zeit $\tau \approx 29$ immer kleiner zu werden, wohingegen die einsehbare Oberfläche immer größer wird. In der Tat hat der Rand des Sterns zur Zeit $\tau = 3.937$ den Horizont bereits überquert. Erst in den letzten Sekunden nimmt der Staubstern scheinbar an Größe zu. Der Beobachter erkennt jedoch nicht, wann er selbst den Horizont überschreitet.

[geodOpakPhantomCom_640x480.mpg](#)

Abbildung 4.10 (Seite 56); 163 Bilder im ppm-Format

Lichtstrahlen, die gleichzeitig beim Beobachter ankommen, sind zu verschiedenen Zeitpunkten des Kollaps gestartet. Die Endpunkte der Nullgeodäten kennzeichnen daher das Phantombild des kollabierenden Sterns. Beim Beobachter laufen die Nullgeodäten alle, abgesehen von den äußersten, in einem Winkelabstand von jeweils 2° zueinander ein. Da wir für die Darstellung mitfallende Koordinaten in pseudo-kartesische Koordinaten transformiert haben, scheinen die Richtungen der Geodäten zu wandern, bezogen auf den Beobachter sind sie jedoch konstant.

[opakKollapsStatic_720x720.mpg](#)

Abbildung [\ 4.13](#) (Seite 58); 272 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Der statische Beobachter am Ort $r_{stat} = 20$ sieht den kollabierenden, opaken Staubstern ($r_s = 2, R_b = 5$) in seiner Eigenzeit $t = [-10.75, 57.0]_{0.25}$ immer kleiner werden, bis er scheinbar am Photonenorbit $r_{po} = \frac{3}{2}r_s$ „einzufrieren“ scheint. Die einsehbare Oberfläche nimmt derweil immer weiter zu.

[geodOpakPhantomStatic_640x480.mpg](#)

Abbildung [\ 4.12](#) (Seite 57); 271 Bilder im ppm-Format

Der immer kleiner werdende Staubstern und die zunehmend einsehbare Oberfläche wird besonders durch die Darstellung der Nullgeodäten deutlich.

Sicht nach hinten

Unterverzeichnis:Kollaps/BlickNachHinten

[comovingBacksight_500x500.mpg](#)

Abbildung [\ 4.15](#) (Seite 59); 241 Einzelbilder mit Originalauflösung 500x500

Der Blick des mitfallenden Beobachters entgegen der Richtung zum kollabierenden Stern in azimutal-äquidistanter Projektion. Die gekrümmte Raumzeit wirkt als eine Art Vergrößerungslinse, wobei sich der Effekt erst dann deutlich bemerkbar macht, wenn der Beobachter den Horizont bereits überquert hat.

Transparenter kollabierender Stern

Unterverzeichnis:Kollaps/Transparent

[comovingTransparentKollaps_720x720.mpg](#)

Abbildung [\ 4.17](#) (Seite 61); 421 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Tatsächliche Sicht eines mitfallenden Beobachters am Ort $R_{com} = 20$ mit Sichtfeld $90^\circ \times 90^\circ$ durch den kollabierenden Stern ($R_b = 5, r_s = 2$) im Beobachtungszeitraum $\tau = [0, 42.1]_{0.1}$.

[geodMitfallend_640x480.mpg](#)

Abbildung [\ 4.16](#) (Seite 60); 421 Bilder im ppm-Format

Verlauf der Nullgeodäten für den Zeitraum $\tau = [0, 42.1]_{0.1}$.

[staticTransparentKollaps_720x720.mpg](#)

Abbildung [\ 4.19](#) (Seite 63); 291 Einzelbilder mit Originalauflösung 720x720

Tatsächliche Sicht eines statischen Beobachters am Ort $r_{stat} = 20$ mit Sichtfeld $90^\circ \times 90^\circ$ durch den kollabierenden Stern im Beobachtungszeitraum $\tau = [0, 42.7]_{0.147}$. Innerhalb des Staubsterns befinden sich im Abstand $R = 4.49$ vom Zentrum 12 Kugeln mit Radius $R_K = 0.5$. Der Photonenorbit $r_{po} = \frac{3}{2}r_s$ liegt bei 165.73° .

[geodStatisch_640x480.mpg](#)

Abbildung [\ 4.18](#) (Seite 62); 598 Bilder im ppm-Format

Verlauf der Nullgeodäten für den Zeitraum $\tau = [0, 59.7]_{0.1}$.

Anhang C

Elliptische Integrale und Funktionen

Elliptische Integrale tauchen in einer Reihe von mathematischen und physikalischen Fragestellungen auf. In unserem Fall sind dies licht- oder zeitartige Geodäten in verschiedenen Raumzeiten. Die Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale sind die elliptischen Funktionen. Wir wollen hier die wichtigsten Eigenschaften der elliptischen Integrale und Funktionen zusammenstellen die wir in dieser Arbeit brauchen. Eine ausführliche Darstellung, woran sich im wesentlichen die Notation orientiert, findet sich in Lawden [60]. Für eine ausführliche Formelsammlung wird auf Abramowitz/Stegun [1] verwiesen.

C.1 Allgemeine Form eines elliptischen Integrals

Unter einem *allgemeinen elliptischen Integral*

$$\int R(x, y) dx \tag{C.1.1}$$

verstehen wir ein Integral über eine rationale Funktion $R(x, y)$, wobei y^2 ein kubisches oder quartisches Polynom in x ist, welches lauter verschiedene Nullstellen besitzt. Wir können also y^2 durch

$$y^2 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{oder} \quad y^2 = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

mit $\{a_i, b_j\} \in \mathbb{R}$ darstellen.

C.2 Elliptische Integrale

Integrale der Form (C.1.1), die nicht elementar integrierbar sind, können durch Umformungen auf Integrale der folgenden drei Typen — in Standardform — gebracht werden [13]:

$$\mathcal{F}(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{C.2.1a}$$

$$\mathcal{D}(x, k) = \int_0^x \frac{(1-k^2t^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{C.2.1b}$$

$$\Pi(x, k; n) = \int_0^x \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{C.2.1c}$$

mit $0 < k < 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Transformiert man auf die Variable $t = \sin \vartheta$ ($0 < \vartheta < \pi/2$), so gelangt man zur LEGENDRE-Form der elliptischen Integrale:

$$\mathcal{F}_L(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad (\text{C.2.2a})$$

$$\mathcal{D}_L(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta, \quad (\text{C.2.2b})$$

$$\Pi_L(\varphi, k, n) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 + n \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}. \quad (\text{C.2.2c})$$

Der Definitionsbereich für φ ist $[0, \pi/2]$. Man bezeichnet die Integrale (C.2.1a–C.2.1c) bzw. (C.2.2a–C.2.2c) auch als elliptische Integrale erster, zweiter oder dritter Art.

Für $\varphi = \pi/2$ spricht man vom vollständigen elliptischen Integral und es gilt für das vollständige elliptische Integral erster Art \mathcal{K} und dessen Komplement \mathcal{K}' :

$$\mathcal{K}(k) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad \mathcal{K}'(k) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, k'\right), \quad (\text{C.2.3})$$

wobei $k^2 + k'^2 = 1$.

C.2.1 Reihenentwicklung für das elliptische Integral erster Art

Im folgenden wollen wir uns das elliptische Integral erster Art (C.2.2a), insbesondere dessen Reihenentwicklung, etwas genauer anschauen. Dazu führen wir zunächst den Begriff des *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* ein. Dieser ist durch

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}), \quad (\text{C.2.4})$$

definiert. Für $\alpha > 0$ gilt dann mit der Gammafunktion Γ

$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha)},$$

oder mit der Abkürzung $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$

$$\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k (\alpha)_k. \quad (\text{C.2.5})$$

Mit dem verallgemeinerten Binomialkoeffizienten gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad (x < 1, \alpha \in \mathbb{R}). \quad (\text{C.2.6})$$

Nun können wir den Integrand des elliptischen Integrals erster Art (C.2.2a) durch eine Reihenentwicklung der Form (C.2.6) darstellen:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} (k^2 \sin^2 \vartheta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} k^{2n} \sin^{2n} \vartheta. \quad (\text{C.2.7})$$

Damit haben wir die Integration der Wurzel in (C.2.2a) auf eine Integration der Sinus-Funktion zurückgeführt. Mittels vollständiger Induktion kann man zeigen, daß

$$S_{2n}(\varphi) \equiv \int_0^\varphi (\sin \vartheta)^{2n} d\vartheta = \frac{1}{2^{2n}} \left[\binom{2n}{n} \varphi + \sum_{m=1}^n (-1)^m \binom{2n}{n-m} \frac{\sin(2m\varphi)}{m} \right]. \quad (\text{C.2.8})$$

Die Reihenentwicklung des elliptischen Integrals erster Art lautet demnach

$$\mathcal{F}(\varphi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} k^{2n} S_{2n}(\varphi). \quad (\text{C.2.9})$$

C.2.2 Transformationen der elliptischen Integrale

Komplexes Argument

Ist das Argument des elliptischen Integrals rein imaginär und das Modul rein reell, so gelten folgende Transformationen, die aus den Legendre-Formen aus Abramowitz/Stegun [1] hergeleitet werden können:

$$\mathcal{F}(ix, k) = i\mathcal{F}(y, k'), \quad (\text{C.2.10a})$$

$$\mathcal{D}(ix, k) = -i\mathcal{D}(y, k') + i\mathcal{F}(y, k') + ix\sqrt{1 - m'^2 y^2}, \quad (\text{C.2.10b})$$

$$\Pi(ix, \nu, k) = \frac{i}{1 - \nu} [\mathcal{F}(y, k') - \nu\Pi(y, 1 - \nu, k')], \quad (\text{C.2.10c})$$

mit $y = \sin(\arctan(x))$ und $k'^2 = 1 - k^2$.

Im Fall eines komplexen Arguments und eines reellen Moduls lautet die Transformation in Legendre-Form¹

$$\mathcal{F}_L(\varphi + i\psi, k) = \mathcal{F}_L(\lambda, k) + i\mathcal{F}_L(\mu, k), \quad (\text{C.2.11})$$

wobei die beiden neuen Variablen λ und μ wie folgt bestimmt werden: Die positive Wurzel y_+ der quadratischen Gleichung

$$y^2 - \left(\cot^2 \varphi + k^2 \frac{\sinh^2 \psi}{\sin^2 \varphi} - k'^2 \right) y - k'^2 \cot^2 \varphi = 0 \quad (\text{C.2.12})$$

ergibt dabei $y_+ = \cot^2 \lambda$. Anschließend bestimmen wir aus der Gleichung

$$k^2 \tan^2 \mu = \tan^2 \varphi \cot^2 \lambda - 1 \quad (\text{C.2.13})$$

die Variable μ . Aus der Legendre-Form (C.2.11) wollen wir nun die Transformation für die Standardform herleiten, welche die Form

$$\mathcal{F}(x + iw, k) = \mathcal{F}(u, k) + i\mathcal{F}(v, k') \quad (\text{C.2.14})$$

haben soll. Da beide Formen mittels der Substitution $t = \sin \vartheta$ zusammenhängen, gilt

$$x + iw = \sin(\varphi + i\psi) = \sin \varphi \cosh \psi + i \cos \varphi \sinh \psi.$$

Mit den allgemein bekannten Beziehungen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ und $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ leiten wir für die Größen $x = \sin \varphi \cosh \psi$ und $w = \cos \varphi \sinh \psi$ folgende Relationen ab:

$$\frac{x^2}{\sin^2 \varphi} - \frac{w^2}{\cos^2 \varphi} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{\cosh^2 \psi} + \frac{w^2}{\sinh^2 \psi} = 1.$$

Beide Relationen können wir jeweils nach $\sin^2 \varphi$ bzw. $\sinh^2 \psi$ auflösen und erhalten so die Hilfsgrößen

$$\xi^2 = \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \left(x^2 + w^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 2w^2x^2 - 2x^2 + w^4 + 2w^2 + 1} \right) \quad \text{und}$$

$$\zeta^2 = \sinh^2 \psi = \frac{1}{2} \left(x^2 + w^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 2w^2x^2 - 2x^2 + w^4 + 2w^2 + 1} \right).$$

Verfahren wir analog zu den Gleichungen (C.2.12) und (C.2.13) so müssen wir zuerst die positive Wurzel y_+ aus der Gleichung

$$y^2 - \left(\frac{1 - \xi^2}{\xi^2} + k^2 \frac{\zeta^2}{\xi^2} - k'^2 \right) y - k'^2 \frac{1 - \xi^2}{\xi^2} = 0$$

bestimmen. Die neuen Variablen u und v lauten dann

$$u = \sqrt{\frac{1}{1 + y_+}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{\frac{(y_+ + 1)\xi^2 - 1}{k^2 - 1 + (y_+ - k^2 + 1)\xi^2}}.$$

¹Die Legendre-Form ist Abramowitz/Stegun[1] entnommen, wobei das Modul mit unserer Notation über $m = k^2$ zusammenhängt.

Argumente größer 1

Für Argumente $x > 1$ nehmen wir uns die Legendre-Form des elliptischen Integrals erster Art (Gl. C.2.2a) zu Hilfe. Aus x erhalten wir das Argument $\varphi = \arcsin(x)$, wobei hier die Schwierigkeit auftritt, daß der Arcussinus einer Zahl größer Eins komplex wird. Verwenden wir die Beziehung

$$x = \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i},$$

so gelangen wir recht schnell über den Hauptzweig des Logarithmus ($\ln z = \ln(\rho e^{i\beta}) = \ln \rho + i\beta$) zur Umkehrfunktion des Sinus für $x > 1$:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - i \ln \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \right). \quad (\text{C.2.15})$$

Verwenden wir die Transformation für komplexe Argumente aus dem vorherigen Abschnitt, so folgt mit $\alpha = \varphi + i\psi$ für die positive Wurzel

$$y_+ = k^2 \cosh^2 \psi - 1 = k^2 x^2 - 1 = \cot^2 \lambda,$$

wobei die Zweideutigkeit der Umkehrfunktion wieder verschwindet. Zusammen mit der Variablen $\mu = \pi/2$ und der Beziehung (C.2.3) erhalten wir die Beziehung

$$\mathcal{F}(x, k) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{xk}, k\right) - i\mathcal{K}(k'), \quad k'^2 = 1 - k^2, \quad (\text{C.2.16})$$

für $x > 1$, $k < 1$ und $xk > 1$.

Transformationen der Module

Im Fall $k > 1$ können wir folgende Transformationsregeln herleiten

$$\mathcal{F}(x, k) = \frac{1}{k} \mathcal{F}\left(kx, \frac{1}{k}\right), \quad (\text{C.2.17})$$

$$\mathcal{E}(x, k) = k\mathcal{E}\left(kx, \frac{1}{k}\right) - \frac{k^2 - 1}{k} \mathcal{F}\left(kx, \frac{1}{k}\right). \quad (\text{C.2.18})$$

Die erste Regel folgern wir direkt aus der Darstellung (17.4.15) in Abramowitz/Stegun [1]. Die zweite Regel erhalten wir durch folgende Umrechnung: so gilt mit $u = \mathcal{F}(x, k)$, der Substitution $z = kw$ und $m = 1/k$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, k) &= \int_0^u \text{dn}^2(w, k) dw = \int_0^u \text{cn}^2(kw, 1/k) dw = \frac{1}{k} \int_0^{ku} \text{cn}^2(z, m) dz \\ &= \frac{1}{k} \frac{1}{m^2} \left\{ \int_0^{ku} \text{dn}^2(z, m) - m'^2 ku \right\} = k \int_0^{ku} \text{dn}^2(z, m) dz - (k^2 - 1) u, \end{aligned}$$

woraus mit Gleichung (C.2.17) die Transformation (C.2.18) folgt.

Imaginäre Module

Ist das Modul rein imaginär, so gilt für $x \leq 1$ und $k \leq 1$ mit $m = k/\sqrt{1+k^2}$

$$\mathcal{F}(x, ik) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \text{sd}^{-1}\left(\frac{x}{m}, m\right) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left\{ \mathcal{K}(m) - \mathcal{F}\left(\sqrt{1-x^2}, m\right) \right\}. \quad (\text{C.2.19})$$

C.3 Elliptische Funktionen

Die elliptischen Funktionen wollen wir aus den vier Jacobi-Theta-Funktionen aufbauen. Aus diesen kann man dann auch alle Eigenschaften der elliptischen Funktionen bestimmen.

C.3.1 Theta-Funktionen

Die Theta-Funktionen sind definiert durch

$$\Theta_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin [(2n+1)z], \quad (\text{C.3.1a})$$

$$\Theta_2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos [(2n+1)z], \quad (\text{C.3.1b})$$

$$\Theta_3 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos [2nz], \quad (\text{C.3.1c})$$

$$\Theta_4 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos [2nz]. \quad (\text{C.3.1d})$$

Diese sieht man als Funktionen der (komplexen) Variablen z an und behandelt q als (komplexen) Parameter mit der Eigenschaft $|q| < 1$.

C.3.2 Jacobi elliptische Funktionen

Aus diesen Theta-Funktionen setzen sich die elliptischen Funktionen wie folgt zusammen:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{\Theta_3(0, q) \Theta_1(z, q)}{\Theta_2(0, q) \Theta_4(z, q)}, \quad (\text{C.3.2a})$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \frac{\Theta_4(0, q) \Theta_2(z, q)}{\Theta_2(0, q) \Theta_4(z, q)}, \quad (\text{C.3.2b})$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{\Theta_4(0, q) \Theta_3(z, q)}{\Theta_3(0, q) \Theta_4(z, q)}, \quad (\text{C.3.2c})$$

mit $z = u/\Theta_3^2(0, q)$ und $q = \exp[-\pi\mathcal{K}'(k)/\mathcal{K}(k)]$.

C.3.3 Eigenschaften der elliptischen Funktionen

Setzen wir voraus, daß das Modul k im Intervall $[0, 1]$ liegt und das Argument x rein reell ist, so gilt für den Wertebereich der elliptischen Funktionen

$$|\operatorname{sn}(u, k)| \leq 1, \quad |\operatorname{cn}(u, k)| \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \operatorname{dn}(u, k) \leq 1. \quad (\text{C.3.3})$$

Im Grenzfall $k = 0$ gilt

$$\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u, \quad \operatorname{cn}(u, 0) = \cos u, \quad \operatorname{dn}(u, 0) = 1.$$

Im Grenzfall $k = 1$ hingegen ist

$$\operatorname{sn}(u, 1) = \tanh u, \quad \operatorname{cn}(u, 1) = \frac{1}{\cosh u}, \quad \operatorname{dn}(u, 1) = \frac{1}{\cosh u}.$$

Periodizität:

$$\operatorname{sn}(u + 4\mathcal{K}, k) = \operatorname{sn}(u, k), \quad \operatorname{cn}(u + 4\mathcal{K}, k) = \operatorname{cn}(u, k), \quad \operatorname{dn}(u + 2\mathcal{K}, k) = \operatorname{dn}(u, k).$$

Identitäten:

$$\operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{cn}^2(u, k) = 1, \quad \operatorname{dn}^2(u, k) + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) = 1, \quad \operatorname{dn}^2(u, k) - k^2 \operatorname{cn}^2(u, k) = k'^2.$$

Ähnlich wie bei den trigonometrischen Funktionen gibt es auch für die elliptischen Funktionen Additionstheoreme. Der besseren Übersicht halber lassen wir das Modul weg:

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u \pm v, k) &= \frac{\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) \pm \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)}, \\ \operatorname{cn}(u \pm v, k) &= \frac{\operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) \mp \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)}, \\ \operatorname{dn}(u \pm v, k) &= \frac{\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) \mp k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)}.\end{aligned}$$

Ableitungen nach dem Argument:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k) &= \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u, k) &= -\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u, k) &= -k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k).\end{aligned}$$

Ableitungen nach dem Modul:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k} \operatorname{sn}(u, k) &= \frac{u}{k} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) + \frac{k}{k'^2} \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}^2(u, k) - \frac{\mathcal{E}(u, k)}{k k'^2} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\ \frac{\partial}{\partial k} \operatorname{cn}(u, k) &= -\frac{u}{k} \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) - \frac{k}{k'^2} \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{cn}(u, k) + \frac{\mathcal{E}(u, k)}{k k'^2} \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\ \frac{\partial}{\partial k} \operatorname{dn}(u, k) &= -\frac{k}{k'^2} \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{dn}(u, k) - k u \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) + \frac{k \mathcal{E}(u, k)}{k'^2} \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k).\end{aligned}$$

mit der Jacobi-Epsilon-Funktion $\mathcal{E}(u, k) = \mathcal{D}(\operatorname{am} u, k)$ und der Amplituden-Funktion $\operatorname{am}(u) = \int_0^u \operatorname{dn} v \, dv$ mit der Eigenschaft $\operatorname{sn}(u) = \sin(\operatorname{am} u)$.

C.3.4 Weitere elliptische Funktionen

Neben den eigentlichen drei elliptischen Funktionen sn , cn , dn können wir auch neun weitere Funktionen definieren. Dies sind zum einen die Reziproken Funktionen

$$\operatorname{ns}(u) = \frac{1}{\operatorname{sn}(u)}, \quad \operatorname{nc}(u) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u)}, \quad \operatorname{nd}(u) = \frac{1}{\operatorname{dn}(u)} \quad (\text{C.3.4})$$

und andererseits die verschiedenen Kombinationen

$$\operatorname{pq}(u) = \frac{\operatorname{pn}(u)}{\operatorname{qn}(u)}, \quad (\text{C.3.5})$$

wobei p und q jeweils für einen Buchstaben s, c oder d stehen, jedoch verschieden sein müssen.

C.3.5 Transformationsverhalten der elliptischen Funktionen

Landen's absteigende Transformation (Gauss-Transformation) [1, 60]:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{(1 + k_1) \operatorname{sn}(v, k_1)}{1 + k_1 \operatorname{sn}^2(v, k_1)}, \quad \text{mit } k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, v = \frac{u}{1 + k_1}, k' = \sqrt{1 - k^2}. \quad (\text{C.3.6})$$

Jacobi's Imaginäre Transformation [1]:

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i \operatorname{sc}(u, k'), \quad \operatorname{cn}(iu, k) = \operatorname{nc}(u, k'), \quad \operatorname{dn}(iu, k) = \operatorname{dc}(u, k'). \quad (\text{C.3.7})$$

C.4 Berechnung mittels Computer-Algebra-Systemen

Die Definition der elliptischen Integrale und Funktionen in Maple, Mathematica oder Mathematik-Bibliotheken wie Numerical Recipes oder GnuScientificLibrary sind leicht unterschiedlich. Wir wollen hier daher eine kleine Übersicht geben, indem wir die bisher verwendete Notation für die elliptischen Integrale und Funktionen in das jeweilige System übersetzen.

C.4.1 Maple

Grundlage hier ist Maple 7.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi, k) &= \text{EllipticF}(\sin \varphi, k), \\ \mathcal{D}(\varphi, k) &= \text{EllipticE}(\sin \varphi, k), \\ \mathcal{E}(x, k) &= \text{EllipticE}(\text{JacobiSN}(x, k), k), \\ \text{sn}(x, k) &= \text{JacobiSN}(x, k), \quad \text{und analog.}\end{aligned}$$

C.4.2 Mathematica

Grundlage hier ist Mathematica 4.1.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi, k) &= \text{EllipticF}[\varphi, k^2], \\ \mathcal{D}(\varphi, k) &= \text{EllipticE}[\varphi, k^2], \\ \text{sn}(x, k) &= \text{JacobiSN}[x, k^2], \quad \text{und analog.}\end{aligned}$$

C.4.3 Numerical Recipes

Grundlage hier sind die Numerical Recipes [78]. Notwendig ist das Einlesen der `nr.h` Datei und der `numrec-Library`.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi, k) &= \text{ellf}(\varphi, k), \\ \mathcal{D}(\varphi, k) &= \text{elle}(\varphi, k)\end{aligned}$$

Die Jacobi-Funktionen `sn`, `cn`, `dn` erhält man durch den Funktionsaufruf

```
sncndn(x, 1.0-k*k, &sn, &cn, &dn);
```

C.4.4 GNU Scientific Library

Basis ist die Version 1.4². Notwendig ist das Einlesen der `gsl_sf_ellint.h` und `gsl_sf_elljac.h` Dateien und der `gsl-` und `gslcblas-Libraries`.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi, k) &= \text{gsl_sf_ellint.F}(\varphi, k, tMode), \\ \mathcal{D}(\varphi, k) &= \text{gsl_sf_ellint.E}(\varphi, k, tMode)\end{aligned}$$

Die Jacobi-Funktionen `sn`, `cn`, `dn` erhält man durch den Funktionsaufruf

```
gsl_sf_elljac_e(x, k*k, &sn, &cn, &dn);
```

²GNU Scientific Library: <http://www.gnu.org/software/gsl>

C.4.5 Abramowitz/Stegun

Aus dem Mathematischen Handbuch von Abramowitz und Stegun [1] leiten wir folgenden Algorithmus (C/C++) für die Berechnung der Jacobi-Funktionen her:

```
void sncndn(const double u, const double m, const double eps,
           double &sn, double &cn, double &dn)
{
    double a[15];
    double b[15];
    double c[15];
    double phi[15];

    double mu,v,hn;
    if (m>1) { mu=1.0/m; v=u*sqrt(m); } else {mu=m; v=u;}
    a[0] = 1.0;
    b[0] = sqrt(1.0-mu);
    c[0] = sqrt(mu);
    int N=0;

    do {
        N++;
        a[N] = 0.5*(a[N-1]+b[N-1]);
        b[N] = sqrt(a[N-1]*b[N-1]);
        c[N] = 0.5*(a[N-1]-b[N-1]);
    } while (fabs(c[N])>eps);

    phi[N] = pow(2.0,N)*a[N]*v;
    for(int i=N;i>0;i--) {
        phi[i-1] = 0.5*(asin(c[i]/a[i]*sin(phi[i]))+phi[i]);
    }
    sn = sin(phi[0]);
    cn = cos(phi[0]);
    dn = cn/cos(phi[1]-phi[0]);
    if (m>1) {
        sn *= sqrt(mu);
        hn = dn; dn = cn; cn = hn;
    }
}
```

Anhang D

Details zur Schwarzschild-Raumzeit

D.1 Details zur Metrik

Der Vollständigkeit halber wollen wir hier neben der Metrik auch die Christoffel-Symbole und den Riemann-Tensor der Schwarzschild-Metrik anführen. Außerdem betrachten wir das Einbettungsdiagramm unter differenti-geometrischem Aspekt.

D.1.1 Metrik, Christoffel-Symbole, Riemann-Tensor

Die Schwarzschild-Metrik lautet in Schwarzschild-Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (\text{D.1.1})$$

wobei $r_s = 2GM/c^2$ der Schwarzschild-Horizont, G die Newtonsche Gravitationskonstante und M die Masse des Schwarzen Lochs ist. Die Christoffel-Symbole ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{c^2 r_s (r - r_s)}{2r^3}, & \Gamma_{tr}^t &= \frac{r_s}{2r(r - r_s)}, & \Gamma_{rr}^r &= -\frac{r_s}{2r(r - r_s)}, \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -(r - r_s), \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \cot \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -(r - r_s) \sin^2 \vartheta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Die nicht-verschwindenden Riemann-Tensor-Komponenten lauten

$$\begin{aligned} R_{trtr} &= -\frac{c^2 r_s}{r^3}, & R_{t\vartheta t\vartheta} &= \frac{1}{2} \frac{c^2 (r - r_s) r_s}{r^2}, & R_{t\varphi t\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{c^2 (r - r_s) r_s \sin^2 \vartheta}{r^2}, \\ R_{r\vartheta r\vartheta} &= -\frac{1}{2} \frac{r_s}{r - r_s}, & R_{r\varphi r\varphi} &= -\frac{1}{2} \frac{r_s \sin^2 \vartheta}{r - r_s}, & R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} &= r r_s \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Wie zu erwarten, verschwinden der Ricci-Tensor sowie der Ricci-Skalar identisch, da es sich bei der Schwarzschild-Metrik um eine Vakuum-Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen handelt. Eine weitere interessante skalare Größe ist der Kretschmann-Skalar

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12 \frac{r_s^2}{r^6}.$$

Diese ist bei der Koordinatensingularität $r = r_s$ endlich und zeigt, daß dort keine „richtige“ Singularität vorliegt.

D.1.2 Transformation: localToCoord

Die im Abschnitt §3.6.5 angeführte Transformation „localToCoord“ einer lokalen Richtung $\mathbf{y} = y^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ in die Koordinatendarstellung lautet im einzelnen für die natürliche lokale Tetrade (5.1.2) mit der Darstellung (2.4.9)

$$\tilde{y}^t = \frac{1}{c\sqrt{1 - r_s/r}} y^t, \quad \tilde{y}^r = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} y^r, \quad \tilde{y}^\vartheta = \frac{1}{r} y^\vartheta, \quad \tilde{y}^\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} y^\varphi. \quad (\text{D.1.2})$$

D.1.3 Umfang-Radius-Relation

Aus der Radialkoordinaten r der Schwarzschild-Koordinaten können wir direkt den Umfang $U = 2\pi r$ eines Kreises bestimmen. Andererseits folgt dann natürlich aus einer Umfangmessung die Radialkoordinate. Messen wir den Umfang U_H des Ereignishorizonts und den Umfang U_r eines weiter außen liegenden Kreises, so erhalten wir für den radialen Koordinatenabstand Δr zwischen Kreis und Horizont

$$\Delta r = \frac{|U_r - U_H|}{2\pi}. \quad (\text{D.1.3})$$

Legen wir jedoch ein Maßband radial zwischen die Kreise, dann messen wir den Eigenradialabstand Δl zwischen Horizont und Kreis aufgrund der Beziehung $dl = dr/\sqrt{1 - r_s/r}$ mit $x = r/r_s$ zu

$$\Delta l = r_s \sqrt{x(x-1)} + \frac{r_s}{2} \ln \left[-1 + 2x + 2\sqrt{x(x-1)} \right]. \quad (\text{D.1.4})$$

Das Verhältnis zwischen Radialkoordinate r und Eigenradiallänge Δl ist in Abbildung [D.1](#) aufgetragen.

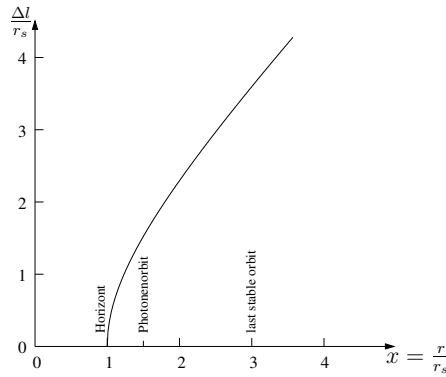


Abbildung D.1: Eigenradiallänge Δl vom Horizont r_s aus gemessen in Relation zur Radialkoordinate r . Beide Größen sind auf den Schwarzschildradius r_s skaliert.

D.1.4 Einbettungsdiagramm als Rotationsfläche im euklidischen Raum

Betrachten wir das Einbettungsdiagramm (Flammisches Paraboloid) aus Abschnitt [§5.1.2](#) als Rotationsfläche \mathcal{R} im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 aus differentialgeometrischer Sicht¹, so können wir der Fläche \mathcal{R} folgende Parametrisierung $\vec{\Phi}$ geben:

$$\vec{\Phi}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z(r)) \quad (\text{D.1.5})$$

mit $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ und der Einbettungsfunktion $z(r) = 2\sqrt{r_s}\sqrt{r - r_s}$. Die Tangentialvektoren $\partial_i \vec{\Phi}$ und der Normalenvektor \vec{N} der Fläche lauten dann

$$\partial_r \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z' \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{N} = \frac{\partial_r \vec{\Phi} \times \partial_\varphi \vec{\Phi}}{\|\partial_r \vec{\Phi} \times \partial_\varphi \vec{\Phi}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \begin{pmatrix} -z' \cos \varphi \\ -z' \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1.6})$$

wobei z' für die Ableitung der Einbettungsfunktion nach der Variablen r steht. Diese Tangentialvektoren stellen gleichzeitig die Basisvektoren eines Tangentialraums $T_{\vec{p}}\mathcal{R}$ der Fläche \mathcal{R} im Punkt $\vec{p} = (r, \varphi, z(r))$ dar. Die erste Fundamentalform $I_{\vec{p}}$ mit

$$I_{\vec{p}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\vec{p}} \quad : \quad T_{\vec{p}}\mathcal{R} \times T_{\vec{p}}\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stellt das auf $T_{\vec{p}}\mathcal{R}$ eingeschränkte Skalarprodukt des \mathbb{R}^3 und damit auch die Metrik $g_{ij} = \langle \partial_i \vec{\Phi}, \partial_j \vec{\Phi} \rangle$ auf \mathcal{R} dar.

¹Wir folgen hier der Darstellung von Fischer/Kaul [\[32\]](#).

Im einzelnen lauten die Metrik-Koeffizienten

$$g_{11} = 1 + z'^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r^2, \quad (\text{D.1.7})$$

welche natürlich denen der Metrik $d\sigma_{\text{Hyperflache}}^2$ aus Abschnitt §5.1.2 entsprechen. Neben der ersten Fundamentalform gibt es auch noch eine zweite Fundamentalform $II_{\bar{p}}$, die durch

$$II_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}\mathcal{R} \times T_{\bar{p}}\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad II_{\bar{p}}(\vec{u}, \vec{v}) := \left\langle \vec{u}, -\partial_{\vec{v}}\vec{N} \right\rangle_{\bar{p}} = \left\langle \vec{u}, S_{\bar{p}}\vec{v} \right\rangle_{\bar{p}}$$

definiert ist. Der Operator $S_{\bar{p}} : \vec{v} \mapsto -\partial_{\vec{v}}\vec{N}$ heißt Weingarten-Abbildung oder Gestalt-Operator. Die Koeffizienten h_{ij} dieser symmetrischen Bilinearform, welche über $h_{ij} := II_{\bar{p}}(\partial_i\vec{\Phi}, \partial_j\vec{\Phi}) = \left\langle \partial_i\vec{\Phi}, -\partial_j\vec{N} \right\rangle$ definiert sind, lauten hier

$$h_{11} = \frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}}, \quad h_{12} = h_{21} = 0, \quad h_{22} = \frac{rz'}{\sqrt{1+z'^2}}. \quad (\text{D.1.8})$$

Aus dem symmetrischen Gestalt-Operator lassen sich nun die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 , die Hauptkrümmungsrichtungen \vec{v}_1 und \vec{v}_2 , sowie die Gaußsche Krümmung ($K = \kappa_1\kappa_2$) und die mittlere Krümmung ($H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$) berechnen. So gilt mit der Matrix h_i^k des Operator $S_{\bar{p}}$ und den beiden Ableitungen $z' = \sqrt{r_s/(r-r_s)}$ und $z'' = -\frac{1}{2}\sqrt{r_s}(r-r_s)^{-3/2}$

$$K = \det h_i^k = \det(g^{jk}) \det(h_{ij}) = \frac{h}{g} = \frac{z'z''}{r(1+z'^2)^2} = -\frac{r_s}{2r^3}, \quad (\text{D.1.9a})$$

$$H = \frac{1}{2}\text{tr}h_i^k = \frac{1}{2g}(g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}}\right) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{r_s}}{r^{3/2}}. \quad (\text{D.1.9b})$$

Die Hauptkrümmungen erschließen sich aus K und H über

$$\kappa_1 = H - \sqrt{H^2 - K} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{r_s}}{r^{3/2}} \quad \text{und} \quad \kappa_2 = H + \sqrt{H^2 - K} = \frac{\sqrt{r_s}}{r^{3/2}}. \quad (\text{D.1.10})$$

D.2 Fermi-Walker-Transport auf Kreisbahnen

Angenommen ein Beobachter bewege sich mit seinem eigenen Antrieb auf einer Kreisbahn in der Schwarzschild-Raumzeit, wobei sein lokales Bezugssystem — seine lokale Tetrade — nicht-rotierend sein soll. Laut Abschnitt §2.7 müssen wir seine Tetrade Fermi-Walker-transportieren. Die Kreisbahn $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ beschreiben wir wie folgt:

$$x^0 = t(\tau), \quad x^1 = R = \text{const}, \quad x^2 = \frac{\pi}{2} = \text{const}, \quad x^3 = \varphi(\tau) = \omega\tau,$$

wobei τ die Eigenzeit des Beobachters auf der Kreisbahn und $R > r_s$ sein soll. Die Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} ist einfach die Ableitung nach τ ,

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau}, \quad u^1 = 0, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega.$$

Damit \mathbf{u} tatsachlich die Vierergeschwindigkeit ist, muss sie die Normierungsbedingung $|\mathbf{u}|^2 = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -c^2$ erfüllen. Dies bestimmt die noch unbekannt Funktion $t = t(\tau)$,

$$u^0 = \sqrt{\frac{\omega^2 R^2/c^2 + 1}{1 - r_s/R}}, \quad t = \sqrt{\frac{\omega^2 R^2/c^2 + 1}{1 - r_s/R}} \tau.$$

Lassen wir einen lokalen, ruhenden Beobachter am Ort $r = R$ bezüglich seiner lokalen Tetrade (5.1.2) die Geschwindigkeit \mathbf{u} messen, so erhalten wir die Dreiergeschwindigkeit v mit $\gamma = -\frac{1}{c}\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{u} \rangle$ zu

$$v = \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 R^2/c^2 + 1}} \quad \text{mit} \quad v \rightarrow c \quad \text{für} \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Egal wie groß die Kreisfrequenz ω auch sein mag, lokal mißt jeder ruhende Beobachter maximal Lichtgeschwindigkeit. Die Viererbeschleunigung ergibt sich aus Gleichung (2.7.6) zu

$$a^0 = 0, \quad a^1 = \frac{3}{2}r_s\omega^2 + \frac{c^2r_s}{2R^2} - R\omega^2, \quad a^2 = 0, \quad a^3 = 0.$$

Wie zu erwarten war, gibt es nur eine radiale Beschleunigung. Die beiden letzten Terme von a^1 haben eine klassische Bedeutung. So entspricht der letzte Term, $-R\omega^2$, der Zentrifugalkraft, wobei das negative Zeichen anzeigt, daß die Kraft zum Kreismittelpunkt gerichtet sein muß, damit der Beobachter auf der Kreisbahn bleibt. Der mittlere Term, $c^2r_s/(2R^2)$, hingegen ist die Kraft, die aufgewendet werden muß, um der Zentralkraft eines $1/r$ -Potentials die Waage zu halten. Im Spezialfall $\omega = \omega_\varphi$ (vgl. Gl. (5.2.15)) bewegt sich der Beobachter auf einer zeitartigen, kreisförmigen Geodäten.

Aus der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} , der Viererbeschleunigung \mathbf{a} und den Christoffelsymbolen erhalten wir aus dem Fermi-Walker-Transport (2.7.5) folgendes Differentialgleichungssystem für einen Vektor X^μ

$$\begin{aligned} \frac{dX^0}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R(2R - 3r_s)}{c^2(R - r_s)} \sqrt{\frac{(\omega^2 R^2/c^2 + 1) R}{R - r_s}} X^1 &= 0, \\ \frac{dX^1}{d\tau} + \frac{\omega^2}{2R} (2R - 3r_s)(R - r_s) \sqrt{\frac{(\omega^2 R^2/c^2 + 1) R}{R - r_s}} X^0 - \frac{\omega}{2} (2R - 3r_s) \left(\frac{\omega^2 R^2}{c^2} + 1 \right) X^3 &= 0, \\ \frac{dX^2}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dX^3}{d\tau} + \frac{\omega}{2R} \frac{(2R - 3r_s)(\omega^2 R^2/c^2 + 1)}{R - r_s} X^1 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses lineare, gekoppelte Differentialgleichungssystem erster Ordnung können wir direkt integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} X^0(\tau) &= k_1 + k_2 \cos(\nu\tau) + k_3 \sin(\nu\tau), \\ X^1(\tau) &= c^2 \frac{R - r_s}{\omega R^2} \left[k_2 \sin(\nu\tau) - k_3 \cos(\nu\tau) \right], \\ X^2(\tau) &= k_4, \\ X^3(\tau) &= k_1 \omega \sqrt{\frac{1 - r_s/R}{\omega^2 R^2/c^2 + 1}} + c^2 \frac{\sqrt{(\omega^2 R^2/c^2 + 1)(1 - r_s/R)}}{\omega R^2} \left[k_2 \cos(\nu\tau) + k_3 \sin(\nu\tau) \right], \\ \nu &= \frac{\omega}{2} (2R - 3r_s) \sqrt{\frac{\omega^2 R^2/c^2 + 1}{R(R - r_s)}}, \end{aligned}$$

mit den Integrationskonstanten k_1, k_2, k_3, k_4 . Zur Kontrolle, ob \mathbf{X} tatsächlich Fermi-Walker-transportiert wurde, können wir das Skalarprodukt von \mathbf{X} mit sich selbst berechnen. Dieses muß konstant, also unabhängig von τ sein, was auch der Fall ist,

$$X_\mu X^\mu = -c^2 \frac{1 - r_s/R}{\omega^2 R^2/c^2 + 1} k_1^2 + c^4 \frac{1 - r_s/R}{\omega^2 R^2} (k_2^2 + k_3^2) + R^2 k_4^2.$$

Fordert man, daß $X_\mu u^\mu = 0$, so muß k_1 verschwinden, denn es gilt

$$X_\mu u^\mu = -k_1 \sqrt{\frac{1 - r_s/R}{\omega^2 R^2/c^2 + 1}}.$$

Geben wir nun Anfangswerte $X_i^\mu = X^\mu(\tau = 0)$ vor, so folgt für die Integrationskonstanten

$$k_1 = \left(\frac{\omega^2 R^2}{c^2} + 1 \right) X_i^0 - \frac{\omega R^2}{c^2} \sqrt{\frac{\omega^2 R^2/c^2 + 1}{1 - r_s/R}} X_i^3, \quad k_2 = \frac{\omega R^2}{c^2} \left(\sqrt{\frac{\omega^2 R^2/c^2 + 1}{1 - r_s/R}} X_i^3 - \omega X_i^0 \right),$$

$$k_3 = -\frac{\omega R^2}{c^2(R - r_s)} X_i^1, \quad k_4 = X_i^2.$$

Betrachten wir nun den Spezialfall $X_i^\mu = (0, \sqrt{1 - r_s/R}, 0, 0)$ und bestimmen den Drehwinkel α nach einer vollen Umdrehung. Transformieren wir anschließend den Vektor \mathbf{X} auf die lokale Tetrade, so erhalten wir

$$\tan \alpha = \frac{\tilde{X}^3(\tau_1)}{\tilde{X}^1(\tau_1)} = -\frac{\omega^2 R^2/c^2 + 1}{1 - r_s/R} \tan(\nu\tau_1),$$

wobei τ_1 die Eigenzeit für einen kompletten Umlauf bedeutet.

D.3 Annäherung an ein Schwarzes Loch

Gegeben sei ein Schwarzes Loch der Masse M und dem Schwarzschild-Horizont $r_s = 2GM/c^2$.² Als Hintergrund dient das Milchstraßenpanorama von Axel Mellinger³, wie es von der Erde aus gesehen wird. Blicken wir in Richtung des Schwarzen Lochs, so erscheint uns das Panorama aufgrund der Lichtablenkung verzerrt. Den Bereich, aus dem uns kein Licht mehr erreicht, nehmen wir als schwarze Scheibe war. Der Radius dieser Scheibe entspricht dabei dem Radius r_{ph} des Photonorbit.

Nähern wir uns nun dem Schwarzen Loch und machen bei verschiedenen Abständen $x_i = r_s/r_i$ mit einer Panoramakamera ($360^\circ \times 90^\circ$) ein Bild, so nimmt das Schwarze Loch, abhängig davon ob wir uns quasistatisch oder freifallend auf es zubewegen, einen unterschiedlich großen Sichtbereich ein.

Ein Problem bei dieser Visualisierung ist, daß die Sterne von der Erde aus betrachtet stets punktförmig sind. Auf einer Abbildung sehen wir die Sterne jedoch stets als — im günstigsten Fall beugungsbegrenzte — Scheibchen. Verwenden wir nun diese Abbildung beim Raytracing, so werden die Scheibchen aufgrund der Lichtablenkung verzerrt. Richtig wäre es jedoch, die Lichtablenkung zunächst für die punktförmigen Sterne zu berechnen und anschließend mit der Punktverbreiterung eines Objektivs abzubilden. Dies wäre mit der in dieser Arbeit hergeleiteten analytischen Lösung der Geodätengleichung prinzipiell möglich.

D.3.1 Quasi-statische Annäherung

Nähern wir uns quasi-statisch einem Schwarzen Loch, so haben wir aufgrund der Geometrie der Raumzeit einen begrenzten Sichtbereich. Der halbe Öffnungswinkel ξ , den das Schwarze Loch einnimmt, ergibt sich direkt aus Gleichung (5.3.12):

$$\xi = \arcsin \sqrt{\frac{27}{4} x_i^2 (1 - x_i)}.$$

Ziehen wir als Beispiel die Positionen aus Abbildung 5.6 heran, so ergeben sich die Bilder aus Abbildung D.2. Die (vollen) Öffnungswinkel sind nochmals in Tabelle D.1 zusammengefaßt.

Im Grenzfall $r_i \rightarrow r_s (x_i \rightarrow 1)$, wenn sich der Beobachter dem Horizont immer weiter nähert, nimmt das Schwarze Loch den gesamten Sichtbereich des Beobachters ein. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß der Beobachter jeweils ruht, wenn er ein Bild macht. Je näher er dem Schwarzen Loch ist, desto größer muß seine Antriebsbeschleunigung sein, um nicht ins Schwarze Loch zu stürzen.⁴

²Wichtig ist hier nicht die eigentliche Masse des Schwarzen Lochs sondern das Verhältnis Schwarzschild-Horizont zu Entfernung.

³Internet: <http://home.arcor-online.de/axel.mellinger/allsky.html>. Email: axm@rz.uni-potsdam.de

⁴Eine schöne Illustration der quasistatischen Annäherung anhand eines stellaren Schwarzen Lochs findet sich in [55].

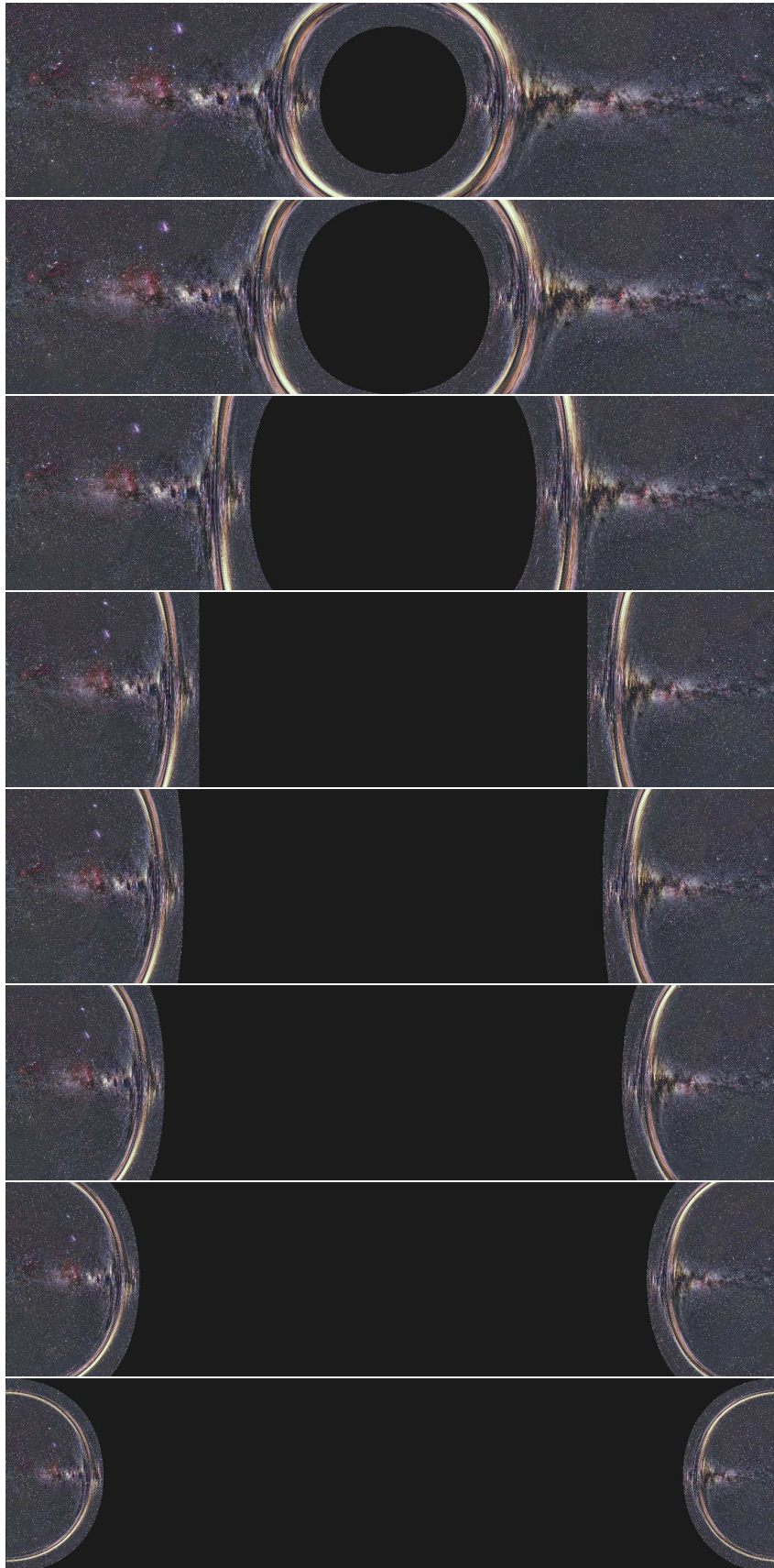


Abbildung D.2: Statische Annäherung an ein stellares Schwarzes Loch; Abstand (von oben nach unten) $r_i/r_s = 4.0, 3.0, 2.0, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1$; Panoramakamera mit Sichtfeld $306^\circ \times 90^\circ$. Im Hintergrund ist das Milchstraßenpanorama zu sehen. [Film](#)

Abstand x_i^{-1}	4.0	3.0	2.0	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
Voller Öffnungswinkel ξ	68.4°	90.0°	133.4°	180.0°	194.5°	212.5°	235.8°	269.2°

Tabelle D.1: Öffnungswinkel bei der quasi-statischen Annäherung an ein Schwarzes Loch mit dem Schwarzschild-Horizont r_s .

D.3.2 Annäherung durch freien Fall

Nähern wir uns einem Schwarzen Loch auf einer radialen zeitartigen Geodäten — also im freien Fall —, so müssen wir die Aberration aufgrund seiner hohen Geschwindigkeit berücksichtigen. Welcher Effekt überwiegt — Aberration oder Lichtablenkung — wollen wir im folgenden genauer betrachten.

Die lokale Tetrade eines radial bewegten Beobachters mit der Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} setzt sich wie folgt aus der Dreiergeschwindigkeit v und der natürlichen lokalen Tetrade $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi\}$ am jeweiligen Ruheort zusammen:

$$\mathbf{e}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{u} = \gamma (\mathbf{e}_t + \beta \mathbf{e}_r), \quad \mathbf{e}_1 = \gamma (\beta \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_r), \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\vartheta, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (\text{D.3.1})$$

Bezüglich dieser Tetrade können wir nun eine Lichtstrahlrichtung \mathbf{y} vorgeben,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \pm \mathbf{e}_0 + \cos \xi \mathbf{e}_1 + \sin \xi \mathbf{e}_3 \\ &= \left(\pm \frac{\gamma}{c \sqrt{1 - r_s/r}} + \frac{\gamma v \cos \xi}{c^2 \sqrt{1 - r_s/r}} \right) \partial_t + (\pm \beta + \cos \xi) \gamma \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \partial_r + \frac{\sin \xi}{r} \partial_\varphi \\ &= \dot{t} \partial_t + \dot{r} \partial_r + \dot{\varphi} \partial_\varphi, \end{aligned}$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach einem affinen Parameter λ ist. Das positive Vorzeichen gilt für Nullgeodäten, welche in die Zukunft laufen, das negative Vorzeichen für die, welche aus der Vergangenheit kommen. Mit den Konstanten der Bewegung $k = (1 - r_s/r_i) c^2 \dot{t}$ und $h = r_i \sin \xi$ aus dem Kapitel (5) folgt mit Gleichung (5.3.12) am Beobachterort r_i

$$a_{\text{krit}}^2 = r_s^2 \frac{k^2}{c^2 h^2} = \frac{r_s^2}{r_i^2} \frac{\left(1 - \frac{r_s}{r_i}\right) \gamma^2 (\pm 1 + \beta \cos \xi)^2}{\sin^2 \xi} \stackrel{!}{=} \frac{4}{27}. \quad (\text{D.3.2})$$

Setzen wir die Geschwindigkeit v eines frei fallenden Beobachters (vgl. Abschnitt §5.2.3) in Gleichung (D.3.2) ein, dann gelangen wir zu der Bedingungsgleichung für ξ :

$$a_{\text{krit}}^2 = \frac{r_s^2}{r_i^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) \frac{\left[\pm 1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_s}{r_i}\right) \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right)^{-1}} \cos \xi \right]^2}{\sin^2 \xi} = \frac{4}{27}. \quad (\text{D.3.3})$$

Im Grenzfall $r_i \rightarrow r_s (x_i \rightarrow 1)$ erreicht der frei fallende Beobachter, egal wo er startet, Lichtgeschwindigkeit. Aufgrund der Aberration krümmt sich sein Sichtfeld aber in Abhängigkeit seiner Geschwindigkeit nach vorn, Licht scheint mehr und mehr aus der Bewegungsrichtung zu kommen. Nach der speziellen Relativitätstheorie würde sich sein Sichtfeld dann im Grenzfall der Lichtgeschwindigkeit auf einen Punkt zusammenziehen. Beim freien Fall überlagern sich nun beide Effekte — Aberration und Lichtablenkung — wobei, abhängig vom Startort r , der Grenzwinkel ξ aus Gleichung (D.3.3) folgt.

Ziehen wir wieder als Beispiel die Positionen aus Abbildung \S 5.6 heran, so ergeben sich im freien Fall aus dem Unendlichen die Bilder aus Abbildung \S D.3. Die (vollen) Öffnungswinkel sowie die Momentangeschwindigkeiten, bezogen auf einen ruhenden lokalen Beobachter am jeweiligen Ort, sind in Tabelle \S D.2 zusammengefasst.

Beim freien Fall aus dem Unendlichen nimmt das Schwarze Loch für den Beobachter beim Überqueren des Horizonts einen halben Öffnungswinkel von etwa 84.2° ein.

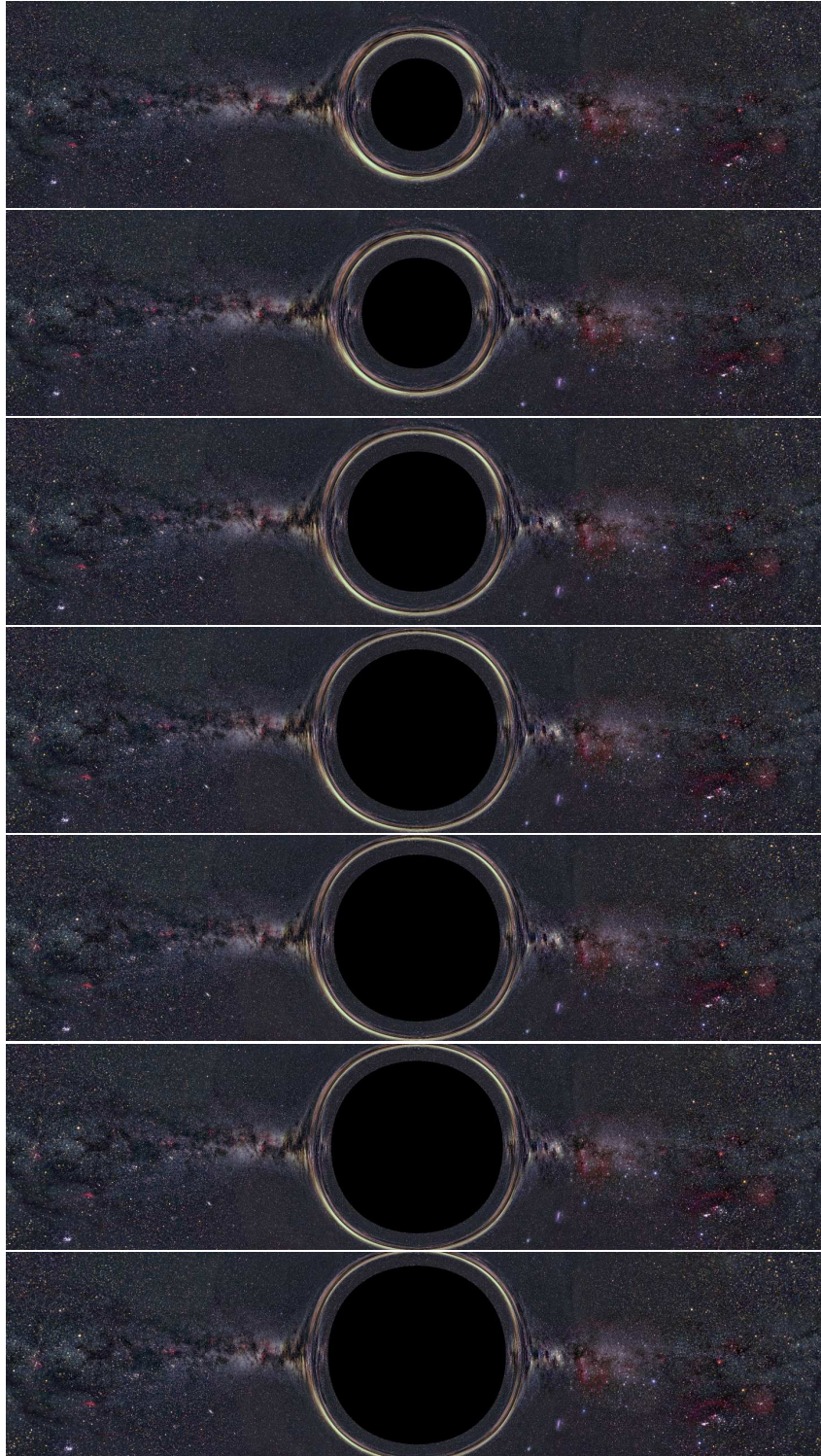


Abbildung D.3: Freier Fall auf ein stellares Schwarzes Loch; Abstand (von oben nach unten) $r_i/r_s = 4.0, 3.0, 2.0, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1$; Panoramakamera mit Sichtfeld $306^\circ \times 90^\circ$. Im Hintergrund ist wieder das Milchstraßenpanorama zu sehen.

Abstand x_i^{-1}	4.0	3.0	2.0	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
Momentangeschwindigkeit β	0.50	0.577	0.707	0.816	0.845	0.877	0.912	0.953
Voller Öffnungswinkel ξ	40.3°	48.4°	61.0°	70.5°	72.8°	75.4°	78.1°	81.0°

Tabelle D.2: Öffnungswinkel beim freien Fall aus dem Unendlichen ($x_0 = 0$) auf ein Schwarzes Loch mit dem Schwarzschild-Horizont r_s .

D.3.3 Annäherung durch erzwungene zeitartige Bahn

Bisher haben wir nur den freien Fall auf ein Schwarzes Loch betrachtet. Nun wollen wir uns auf einer erzwungenen Bahn dem Schwarzen Loch nähern. Wie wir dies technisch umsetzen können, soll uns hier nicht kümmern. Wir müssen lediglich darauf achten, daß wir stets eine zeitartige Kurve beibehalten.

Als Beispiel diene uns die, durch unsere Eigenzeit τ parametrisierte, radiale Bahn

$$r(\tau) = r_i - a\tau \quad (\text{D.3.4})$$

mit dem Startort r_i und dem linearen Faktor a . Die entlang dieser Kurve verstrichene Koordinatenzeit t erhalten wir aus der Metrik (D.1.1) mit $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ und $d\vartheta = d\varphi = 0$. Dann gilt für $r > r_s$:

$$dt = \frac{d\tau}{1 - r_s/r(\tau)} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r(\tau)} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2}. \quad (\text{D.3.5})$$

Substituieren wir $x = r_s/(r_i - a\tau)$ und integrieren anschließend, so erhalten wir den etwas komplexen Ausdruck

$$t = \left[\frac{r_s}{a} \frac{\operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{1-x'+a^2/c^2}}{\sqrt{1+a^2/c^2}}}{\sqrt{1+a^2/c^2}} \left(-1 - 2\frac{a^2}{c^2} \right) + r_s \ln \frac{\sqrt{1-x'+a^2/c^2} + a/c}{\sqrt{1-x'+a^2/c^2} - a/c} - \frac{\sqrt{1-x'+a^2/c^2}}{x'} \right]_{x'=x_0}^{x(\tau)} \quad (\text{D.3.6})$$

mit den Grenzen $x_0 = r_s/r_i$ und $x(\tau) = r_s/(r_i - a\tau)$. Die Vierergeschwindigkeit für diese Bahn erhalten wir ganz einfach aus

$$\mathbf{u} = \frac{dt}{d\tau} \partial_t + \frac{dr}{d\tau} \partial_r = \frac{\sqrt{1 - r_s/r(\tau) + a^2/c^2}}{1 - r_s/r(\tau)} \partial_t - a \partial_r. \quad (\text{D.3.7})$$

Der Vergleich mit der Darstellung $\mathbf{u} = c\gamma(\mathbf{e}_t + \beta\mathbf{e}_r)$ für die Vierergeschwindigkeit bezüglich der jeweiligen Ruhetetrade am momentanen Aufenthaltsort führt auf die lokale Dreiergeschwindigkeit β mit

$$\beta = \frac{a/c}{1 - r_s/r(\tau) + a^2/c^2}. \quad (\text{D.3.8})$$

Im Grenzfall $a \rightarrow 0$, wenn also der Beobachter am Ort $r = r_i$ verharrt, vereinfacht sich der Ausdruck (D.3.6) für die Koordinatenzeit wie zu erwarten zu

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - r_s/r_i}} \tau. \quad (\text{D.3.9})$$

D.4 Beschreibung zum „Schnellen Bildbetrachter“: BHFastView

Die Beschreibungen der „schnellen Bildberechnung“ aus dem Abschnitt §5.5 sind in dem Programm *BHFastView* umgesetzt. Dabei liegt, wie bereits in *GeoVis*, eine objektorientierte Programmierung in C++ [100] vor. Die Oberfläche (Abb. D.4) läuft unter QT⁵. Sofern die notwendigen Treiber vorhanden sind, ist auch eine Video-Version, bei der als Objektbild ein Video-Stream verwendet wird, einstellbar.

⁵Verwendete Version: QT 3.0 für OpenSource-Anwendungen. <http://www.trolltech.com>.

D.4.1 Steuerung mittels GUI

Die grafische Benutzeroberfläche (kurz: GUI = *Graphical User Interface*, siehe Abb. [D.4](#)) ermöglicht die volle Interaktion mit der in Abbildung [5.12](#) gezeigten Szene.

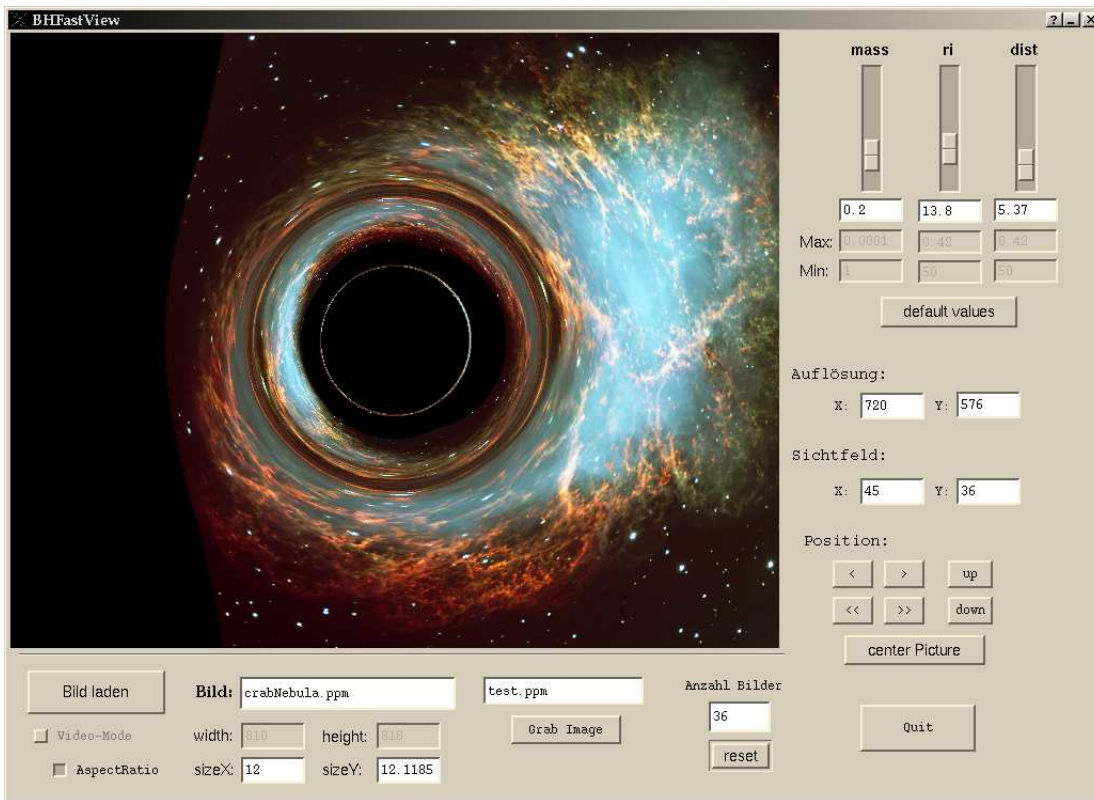


Abbildung D.4: GUI zum „Schnellen Bildbetrachter“ **BHFastView**. Als Beispiel ist ein Bild des Krebsnebels auf der Objektebene eingeblendet. (Erklärung im Text)

Beginnen wir mit der Objektebene, so ist entweder ein beliebiges Bild (im ppm-Format) oder gegebenenfalls ein Video-Stream einlesbar. Dieses Bild ist an sich nochmals auf der Objektebene in beide Richtungen skalierbar ($sizeX$, $sizeY$). Soll das Seitenverhältnis des ursprünglichen Bildes ($width$, $height$) erhalten bleiben, so muß der Knopf (*AspectRatio*) aktiviert sein.

Die Parameter der Szene — Masse des Schwarzen Lochs ($mass$), Abstand des Beobachters zum Schwarzen Loch (ri) und Abstand der Objektebene zum Schwarzen Loch ($dist$) — lassen sich sowohl mit Schiebereglern, als auch durch direkte Zahleneingabe verändern. Das Beobachterbild wird nach jeder Veränderung sofort neu berechnet.

Die Sicht des Beobachters — und damit seine Kamera — kann sowohl in der Auflösung als auch im Sichtfeld angepaßt werden. Die maximale Auflösung, die hier noch angezeigt werden kann, ist auf 720×576 Pixel beschränkt. Ebenso kann höchstens ein Sichtfeld von $90^\circ \times 90^\circ$ eingestellt werden.

Die Position des Objektbildes kann nun auf der Objektebene verschoben werden. Die seitliche Verschiebung geschieht mit den Knöpfen ('<', '<<') bzw. ('>', '>>'); die Auf- und Abbewegung ist mit den Knöpfen ('up') und ('down') möglich. Die Startposition wird durch ('center Picture') erreicht.

D.4.2 Implementierung ohne Video

Solange kein Video-Stream verwendet werden soll, beschränkt sich die Implementierung von *BHFastView* auf die Dateien in Tabelle [D.3](#).

Datei	Beschreibung
main.cpp	Das Hauptprogramm startet die eigentliche QT-Applikation.
bhfvDlg.ui	Die Oberfläche (GUI) der Applikation ist mit QT-Designer erstellt. Dort wurden auch alle notwendigen „slots“ definiert, die als Methoden verwendet werden.
bhfvDlg.h / .cpp	Beim Kompilieren wird die eigentliche Mutterklasse der Oberfläche in C++-Code generiert.
bhfastview.h / .cpp	Von „bhfvDlg“ abgeleitete Klasse, hier stehen die tatsächlichen Methodendefinitionen, die das Verhalten der einzelnen Schaltflächen bestimmen.
bhviewer.h / .cpp	Die Bilddarstellung ist als kleines OpenGL-Fenster im GUI eingebaut. Die Auflösung und das Sichtfeld des Beobachterbildes, sowie die Größe des Objektbildes sind hier gespeichert.

Tabelle D.3: Programm-Dateien des „Schnellen Bildbetrachters“ *BHFastView*.

Die Bilddarstellung erfolgt über eine Pixelzuordnungstabelle, die jeweils neu berechnet werden muß, wenn sich ein Parameter der Szene (Masse oder Abstände) verändert. Die Zuordnungstabelle bestimmt dabei für jedes Bildpixel das jeweils zugehörige Pixel der Objektebene mittels dem Verfahren aus Abschnitt §5.5. Die Anwendung der Zuordnungstabelle erfolgt auf der CPU; erst dann wird das eigentliche Bild auf die Grafikkarte verschoben und angezeigt. Bei der hier vorgegebenen Maximalauflösung von 720×576 Bildpunkten sind nur etwa 13 Bilder pro Sekunde darstellbar. Eine weitaus höhere Bildrate ist durch die Verwendung der GPU möglich.⁶

D.4.3 Implementierung mit Video

Anstelle eines statischen Objektbildes können wir auch ein Video-Stream verwenden. In der momentanen Implementierung ist die Erfassung des Video-Streams über die FireWire- (IEEE1394- bzw. i.LINK-) Schnittstelle eingebaut, wobei das Video-Signal die gängige Auflösung von 720×576 besitzt. Bei gleicher Auflösung des eigentlichen Bildes ist eine Darstellung von 6 Bildern pro Sekunde möglich. Zusätzlich zu den in der Tabelle □D.3 aufgeführten Programmteile benötigt man die Ansteuerung der schon erwähnten FireWire-Schnittstelle, die unter Linux mit „dvgrab“⁷ abgefragt werden kann.

D.5 Beschreibung zum „Scheibenbetrachter“: BHDiskView

Wir wollen hier einige Details zum Abschnitt §5.6.2 über die „Scheibe als Strahlungsquelle“ anführen. Dazu gehören einerseits die eigentliche Schnittberechnung, die Bestimmung der Rotverschiebung und die Implementierung der interaktiven Scheibenvisualisierung.

D.5.1 Schnittberechnung und Rotverschiebung

Die Szenerie beim Scheibenbetrachter *BHDiskView* ist ähnlich der beim schnellen Bildbetrachter *BHFastView*. Die Objektebene — hier die Staubscheibe — ist jedoch um den Winkel ι verdreht (siehe Abb. \D.5), was die Schnittberechnung zwischen Nullgeodäte und Scheibenebene etwas komplizierter macht.

Zu jedem Bildpixel (s_x, s_y) bestimmen wir die Startrichtung $\vec{d} = (-1, dx, dy)^T$ wie in Gleichung (5.5.2) und erhalten die Startrichtung τ aus Gleichung (5.5.3). Die Geodätenebene ergibt sich demnach zu

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{r} + s\vec{d}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad (\text{D.5.1})$$

⁶In der Dissertation von Marc Borchers [8] ist die Verwendung der GPU für diese Visualisierung ausführlich dokumentiert.

⁷Quelle: <http://www.kinodv.org/> Stand: Januar 2006.

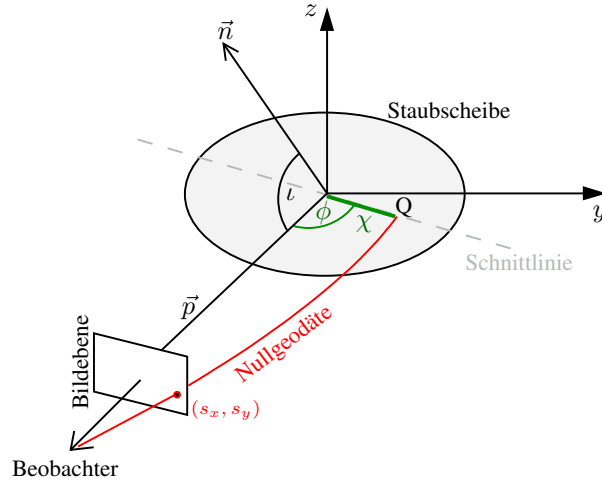


Abbildung D.5: Ein Beobachter befindet sich am Ort $\vec{p} = (p, 0, 0)^T$ und schaut unter dem Inklinationwinkel ι auf eine Staubscheibe mit dem Normalenvektor \vec{n} . Die Geodätenebene wird durch die Radialrichtung zum Schwarzen Loch und der Nullgeodäten aufgespannt. Der Schnitt zwischen Scheibenebene und Geodätenebene ergibt die Schnittlinie. Auf dieser Linie befindet sich der Schnittpunkt Q im Abstand χ vom Schwarzen Loch, welches selbst im Ursprung des Koordinatensystems liegt, hier aber nicht eingezeichnet ist.

mit dem Richtungsvektor $\vec{r} = (-1, 0, 0)^T$ und dem Ortsvektor $\vec{p} = (r_i, 0, 0)^T$ des Beobachters. Schneiden wir die Geodätenebene (D.5.1) mit der Scheibenebene $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0$, dargestellt in Hessescher Normalform, so erhalten wir die Schnittgerade

$$\vec{x} = s \begin{pmatrix} -dy \tan \iota \\ dx \\ dy \end{pmatrix} =: s \vec{m}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.5.2})$$

Hier setzen wir voraus, daß $\iota \neq \pi/2$ ist, der Beobachter also nicht auf die Kante der Scheibe schaut. Der Winkel ϕ zwischen der Beobachterrichtung $-\vec{r}$ und der Schnittgeraden \vec{m} erhalten wir über

$$\cos \phi = \frac{\langle -\vec{r}, \vec{m} \rangle}{\|\vec{r}\| \cdot \|\vec{m}\|} = \frac{dy \tan \iota}{\sqrt{dx^2 + dy^2 (1 + \tan^2 \iota)}} \quad (\text{D.5.3})$$

und so können wir direkt aus der Bahngleichung (5.3.6) den radialen Abstand $\chi = r_s/x(\phi)$ berechnen. Der Schnittpunkt Q der Nullgeodäten mit der Scheibenebene hat dann den Ortsvektor $\vec{q} = \chi \vec{m}^o$ mit dem normierten Richtungsvektor $\vec{m}^o = \vec{m}/\|\vec{m}\|$. Ein Staubteilchen an diesem Ort rotiert mit der Keplergeschwindigkeit $v_{\text{Kepler}} = \sqrt{GM/\chi}$ um das Schwarze Loch und hat die momentane Richtung $\vec{e} = (\vec{n} \times \vec{m})/\|\vec{n} \times \vec{m}\|$. Seine Vierergeschwindigkeit \mathbf{u} lautet demnach

$$\mathbf{u} = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - r_s/\chi}} \partial_t + \gamma v_{\text{Kepler}} e_1 \sqrt{1 - \frac{r_s}{\chi}} \partial_r + \gamma v_{\text{Kepler}} e_2 \partial_\vartheta + \gamma v_{\text{Kepler}} e_3 \partial_\varphi, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{Kepler}}^2/c^2}}, \quad (\text{D.5.4})$$

wobei $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$ die Darstellung von \vec{e} in sphärischen Koordinaten ist.

Den Auftreffwinkel des Lichtstrahls auf die Scheibenebene zu ermitteln ist etwas schwieriger. Zunächst können wir die Richtung innerhalb der Geodätenebene mit Hilfe der Geodätengleichung (vgl. Abschnitt §5.3.1) angeben. Aus der Ableitung der Radiuskoordinate

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \chi^2 \left[\frac{\chi^2}{b^2} - \left(1 - \frac{r_s}{\chi}\right) \right] \quad \text{mit} \quad b = \frac{r_i \sin \tau}{\sqrt{1 - r_s/\chi}} \quad (\text{D.5.5})$$

und der Ableitung der Zeitkoordinate

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{cb} \frac{\chi^2}{1 - r_s/\chi} \quad (\text{D.5.6})$$

sowie $\dot{\varphi} = r_i \sin \tau / \chi^2$ erhalten wir für den Wellenvektor $\tilde{\mathbf{k}}$ der Nullgeodäte

$$\tilde{\mathbf{k}} = \dot{x}^\mu \partial_\mu = \dot{\varphi} \frac{dt}{d\varphi} \partial_t + \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} \partial_r + \dot{\varphi} \partial_\varphi. \quad (\text{D.5.7})$$

Diesen Wellenvektor müssen wir anschließend mit dem Winkel ω um die Beobachtrichtung in die eigentliche Geodätenebene drehen und erhalten so den tatsächlichen Wellenvektor \mathbf{k} . Kontraktion mit der Vierergeschwindigkeit, $-k_\mu u^\mu$, ergibt so die vom Staubteilchen emittierte Frequenz ν_{emit} . Die gleiche Überlegung liefert uns die beim Beobachter empfangene Frequenz ν_{empf} und das Verhältnis beider Frequenzen ergibt die gesuchte Gesamtrotschiebung $z_{\text{ges}} = \nu_{\text{emit}} / \nu_{\text{empf}}$.

Da wir von einem idealen Planck-Spektrum ausgehen, welches jedes Staubteilchen aussendet, können wir nun aus der Rotverschiebung die scheinbare Temperatur und mit Hilfe spektraler Empfindlichkeitskurven daraus die darzustellenden rgb-Werte berechnen.⁸

D.5.2 Implementierung

Die Implementierung des Scheibenbetrachters *BHDiskView* gliedert sich in vier Unterprogramme, die in Tabelle [D.4](#) näher erläutert sind.⁹

Datei	Beschreibung
bhDiskView.cpp	Das Hauptprogramm beinhaltet die Schnittberechnung und die Erstellung der Pixelzuordnungstabelle. Weiterhin bestimmt es die Rotverschiebung z_{ges} .
imageHandle.h / .cpp	Die Darstellung des Beobachterbildes erfolgt über OpenGL. Die scheinbaren Temperaturen werden in rgb-Werte transformiert. Die Einstellung der Parameter: Inklinationswinkel ι , Masse des Schwarzen Lochs m , sowie Distanz zur Scheibe werden ermöglicht.
transCoordinates.h / .cpp	Umrechnung sphärische \leftrightarrow kartesische Koordinaten.
specrend.h / .cxx	Umrechnung der scheinbaren Temperatur in ein Planck-Spektrum und die daraus resultierenden rgb-Werte.

Tabelle D.4: Programm-Dateien des Scheibenbetrachters *BHDiskView*.

Neben der interaktiven Visualisierung der Scheibe mittels *BHDiskView*, die lediglich ein sehr einfaches Modell zuläßt, können wir mit dem Hilfsprogramm *WriteDiskImage* die umfangreichen Daten des SPH-Modells direkt transformieren und als Einzelbilder abspeichern (siehe Abb. [5.31](#)).

D.6 Notwendige Bildauflösung beim Raytracing

Für die Bilddarstellung beim Raytracing sind zwei Parameter wichtig: das Sichtfeld der Kamera und die Auflösung des Bildes. Damit ein Objekt einer Szenerie zumindest durch einen einzigen Pixel dargestellt wird, muß dessen Winkeldurchmesser $\Delta\alpha_{x,y}$ in x - bzw. y -Richtung die Beziehung

$$\frac{\text{res}_{x,y}}{\text{fov}_{x,y}} \cdot \Delta\alpha_{x,y} \stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{D.6.1})$$

erfüllen, wobei $\text{res}_{x,y}$ die Auflösung und $\text{fov}_{x,y}$ das Sichtfeld in x - bzw. y -Richtung sind.

Nehmen wir als Beispiel die Situation aus Abschnitt [5.6.1](#) und beobachten einen statischen Stern am Ort ($r = 3r_s, \varphi = 0^\circ$) von der Position ($r = 15r_s, \varphi = 0^\circ$) aus. Die Mittelpunktstrahlen, welche ein oder mehrere Male um das Schwarze Loch laufen, erreichen den Beobachter unter einem Winkel ξ (siehe Abb. [D.6](#)).

⁸Eine ausführliche Darstellung, wie man vom Spektrum zu den rgb-Werten gelangt findet man z.B. in [\[103\]](#).

⁹Das hier verwendete (public domain) Hilfsprogramm „specrend“ stammt von John Walker <http://www.fourmilab.ch>.

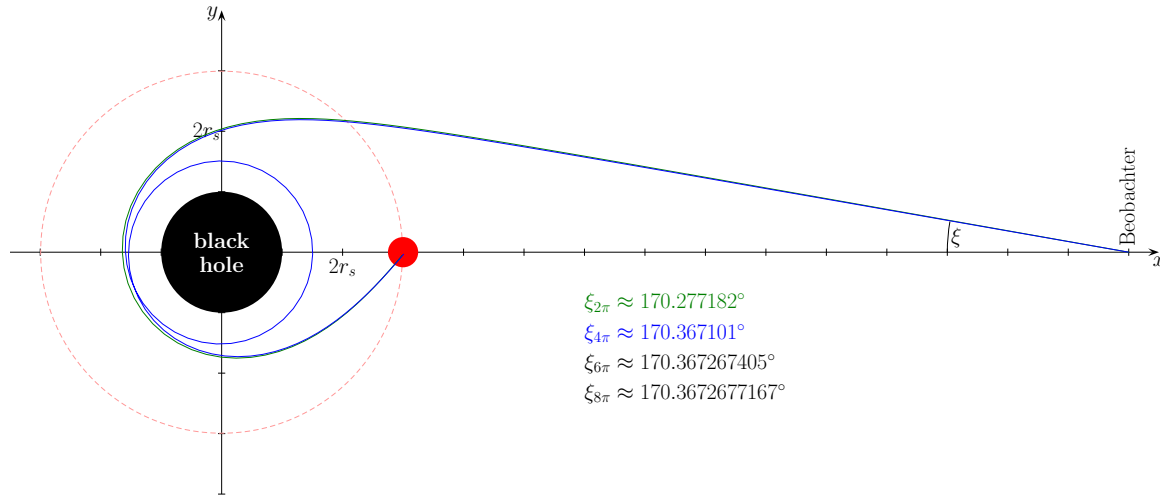


Abbildung D.6: Mittelpunktstrahlen für die Bilder erster ($\xi_{2\pi}$) und zweiter ($\xi_{4\pi}$) Ordnung. Das Bild nullter Ordnung entsteht durch den direkten Strahl vom Stern zum Beobachter.

Die Anzahl Umläufe um das Schwarze Loch geben hier die Ordnung des Bildes an. Damit alle Ordnungen auf dem Bild eingefangen werden, muß in diesem Fall das Sichtfeld der Kamera $20^\circ \times 20^\circ$ betragen. Die Winkeldurchmesser $\Delta\alpha_i$ der Bilder i -ter Ordnung und die damit aus Gleichung (D.6.1) folgenden Mindestauflösungen des Bildes sind in Tabelle D.5 zusammengefaßt.

Ordnung i	$\Delta\alpha$ [Grad]	Mindestauflösung [Pixel]
1	$1.517 \cdot 10^{-2}$	1319
2	$2.78 \cdot 10^{-5}$	719425

Tabelle D.5: Mindestauflösungen für die Darstellung der Bilder i -ter Ordnung.

Ein Bild mit einer quadratischen Auflösung von 719425 Pixeln würde unkomprimiert und monochromatisch jedoch 482GB Speicher benötigen. Als gedrucktes Bild mit einer Druckauflösung von 300dpi hätte es eine Kantenlänge von etwa 61 Metern.

D.7 Weitere Hilfsprogramme

Zur Erstellung einzelner Abbildungen und der Umsetzung der analytischen Rechnung aus dem Kapitel §5 wollen wir noch drei kleine Hilfsprogramme erwähnen. Eine ausführlichere Erklärung, sofern notwendig, steht im jeweiligen Quellfile.

bhPotential.cpp

stellt das effektive Potential für eine zeit-, licht- oder raumartige Geodäte anhand Gleichung (5.2.4) dar.

bhKubisch.cpp

liefert zusammen mit der GnuPlot¹⁰-Datei *kub.gnu* die Abbildung 5.8, die über das qualitative Verhalten zeitartiger Geodäten in Abhängigkeit der Startrichtung ξ und der Startgeschwindigkeit β Auskunft gibt.

¹⁰Quelle: <http://www.gnuplot.info/> Stand: Januar 2006.

bhGeodesic.cpp

schließlich setzt die analytische Rechnung aus dem Kapitel §5 um, wobei vor allem die im Abschnitt §5.4 berechneten Werte ermittelt werden können.

D.8 Szene-Datei für kugelförmige Strahlungsquelle

Nachfolgend ist die vollständige Szene-Datei für die Simulation aus dem Abschnitt §5.6.1 angeführt.

```

;; -----
;; GeoViS:  galacticCenter_incl45.scm
;;
;;   (c) Thomas Mueller, Universitaet Tuebingen, TAT
;;       16.11.2004
;; -----

;; ---- Metrik ----
(init-metric '(type "Schwarzschild")
             '(masse 1.0)
             '(id "metric")
)

;; ---- Geodaetenintegrator fuer Raytracing ----
(init-solver '(type      "GSL_Fehlberg")
             '(eps_abs  1.0e-9)
             '(id "raytracing")
)

;; ---- Beobachter-Kamera ----
(init-camera '(type "PinHoleCam")
            '(dir #( 1.0 0.0 0.0) )
            '(vup #( 0.0 0.0 1.0) )
            '(fov #( 8.0 8.0 ) )
            '(res #(1000 1000))
            '(filter "FilterRGBz")
            '(id "cam1")
)

;; ---- Strahlgenerator ----
(init-raygen '(type      "RayGenSimple")
            `(boundBoxLL ,(vector (- gpDBLMAX) -150.0 -150.0 -150.0) )
            `(boundBoxUR ,(vector  gpDBLMAX  150.0  150.0  150.0) )
            '(stepsize 0.01)
            '(solver "raytracing")
            '(maxNumPoints 6000)
)

;; ---- Beobachter-Tetrade ----
(local-tetrad '(pos #(120.76 120.0 0.7854 0.0 0.0))
             '(e0 #(1.0 0 0 0) )
             '(e1 #(0.0 -1 0 0) )
             '(e2 #(0.0 0 0 -1) )
             '(e3 #(0.0 0 -1 0) )
             '(incoords #f)
             '(id "locTedObs")
)

```

```

;; ---- Projektor ----
(init-projector-std '(localTetrad "locTedObs")
                   '(color #(0.0 0.0 0.0))
                   '(id "proj")
)

;; ---- Lichtquellen-Manager ----
(init-light-mgr '(ambient #(1.0 1.0 1.0)))

;; -----
;; Szenenbeschreibung: einfache Kugel
;; -----
(init-texture '(type "UniTex")
              '(color #(0.8 0.16 0.16))
              '(id "utex1")
)

(init-texture '(type "UniTex")
              '(color #(0.9 0.63 0.63))
              '(id "utex2")
)

(init-shader '(type "ExtFiltPhongShader")
             `(objcolor ,(init-texture '(type "CheckerT2D")
                                       '(texture "utex1")
                                       '(texture "utex2")
                                       `(transform ,(scale-obj #(20.0 10.0)))
                                       )
              )
             '(ambient 1.0)
             '(diffuse 0.0)
             '(specular 0.0)
             '(id "ballShader")
)

(solid-ellipsoid `(objtype ,gpObjTypeLocal)
                 '(center #(0.0 0.0 0.0))
                 '(axlen #(0.5 0.5 0.5))
                 '(shader "ballShader")
                 '(id "ball")
)

;; ---- Geodaetenintegrator fuer Bewegung ----
(init-solver '(type "GSL_RK4")
             '(geodType "timelike")
             '(eps_abs 0.01)
             '(id "gsolver")
)

;; ---- Bewegung entlang zeitartiger Geodaete ----
(init-motion '(type "Geodesic")
             '(solver "gsolver")
             '(pos #(0.0 6.0 1.5707963 0.0 0.0))
             '(localvel #(0.0 0.0 0.5))
)

```

```

        '(e0 #(1.0 0.0 0.0 0.0))
        '(e1 #(0.0 0.0 -1.0 0.0))
        '(e2 #(0.0 0.0 0.0 -1.0))
        '(e3 #(0.0 1.0 0.0 0.0))
        '(maxnumpoints 3000)
        '(forward 220.0)
        '(backward 250.0)
        '(id "motion")
    )

;; ---- lokaler Verbund ----
(local-comp-object '(obj "ball")
                  '(motion "motion")
                  '(id "lcol")
)

;; ---- Devices zur Erzeugung der Filmsequenz ----
(do ((count 0 (+ count 1)) (= count 187))
    (init-device '(type "standard")
                 '(solver "raytracing")
                 '(obj "lcol")
                 '(setparam ("locTedObs" "time" ,(+ 120.76 (* 0.5 count))))
    )
)

```

D.9 Filmbeschreibungen

Stern um galaktisches Zentrum

Im folgenden sind die Filme beschrieben, welche die Situation aus Abschnitt §5.6.1 — einzelne kugelförmige Quelle der Strahlung um das galaktische Zentrum — darstellen.

Unterverzeichnis: [Schwarzschild/GalCenterBlob](#)

[galCenter_incl90_long_700x700.mpg](#)

Abbildung §5.24 (Seite 101); 370 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000,
galacticCenter_incl90_high.scm

Ein Stern mit Radius $r^ = \frac{1}{4}r_s$ umkreist auf dem letzten stabilen Orbit das galaktische Zentrum. Die Textur gibt die Orientierung des Sterns an, der sich aufgrund der geodätischen Präzession innerhalb eines Umlaufs verdreht. Deutlich zu sehen sind auch die Bilder höherer Ordnung. Beobachterinklination: 90° .*

[galCenter_incl90_long_rs_700x700.mpg](#)

Abbildung §5.24 (Seite 101); 370 hdf5-Dateien, galacticCenter_incl90_high.scm

Ein Stern mit Radius $r^ = \frac{1}{4}r_s$ und homogen, isotroper Oberflächentemperatur $T_{star} = 6000^\circ K$ umkreist auf dem letzten stabilen Orbit das galaktische Zentrum mit halber Lichtgeschwindigkeit. Die gravitative- und Doppler-Rotverschiebung zeigt sich in einer sich scheinbar ändernden Temperatur des Sterns, welche im Bereich zwischen $3030^\circ K$ und $6580^\circ K$ liegt. Beobachterinklination: 90° .*

[galCenter_incl45_r120_700x700.mpg](#)

Abbildung §5.26 (Seite 101); 370 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000, galacticCenter_incl45.scm
Beobachterinklination: 45° (geometrische Darstellung).

[galCenter_incl45_r120_rs_700x700.mpg](#)

Abbildung §5.26 (Seite 101); 370 hdf5-Dateien, galacticCenter_incl45.scm

Beobachterinklination: 45° (Rotverschiebung).

[galCenter_incl70_500x500.mpg](#)

Abbildung [§ 5.27](#) (Seite 102); 370 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000, galacticCenter_incl70.scn

Beobachterinklination: 70° (geometrische Darstellung).

[galCenter_incl70_rs_500x500.mpg](#)

Abbildung [§ 5.27](#) (Seite 102); 370 hdf5-Dateien, galacticCenter_incl70.scn

Je größer die Inklination des Beobachters ist, desto stärker ändert sich scheinbar die Temperatur. Da die gravitative Rotverschiebung bei konstanter Entfernung des Beobachters zum Schwarzen Loch gleich bleibt, ist die eben genannte Verstärkung allein dem Doppler-Effekt zuzuschreiben. Beobachterinklination: 70° (Rotverschiebung).

Akkretionsscheibe um galaktisches Zentrum

Abschnitt [§ 5.6.2](#) geht von der Annahme aus, daß sich eine Akkretionsscheibe um das galaktische Zentrum gebildet hat.

Unterverzeichnis: Schwarzschild/SPHscheibe

[scheibe_1024x576_mpg1.mpg](#)

Abbildung [§ 5.31](#) (Seite 105); 2000 Einzelbilder mit Originalauflösung 1024x576

Eine SPH-Scheibe mit der Ausdehnung $r_{iso} = 6m$ bis $r_{out} = 25m$, rotiere differentiell um das galaktische Schwarze Loch. Die dichten Blobs am Scheibeninnenrand zerfließen bereits innerhalb einer viertel Umdrehung, wohingegen Blobs im Außenbereich etwas länger kompakt bleiben. Beobachterinklination: 80° (Rotverschiebung).

Quasistatische Annäherung an ein Schwarzes Loch

Unterverzeichnis: Schwarzschild

[quasiStaticApprox_972x324.mpg](#)

Abbildung [§ D.2](#) (Seite 194); 291 Einzelbilder mit Originalauflösung 2160x720

Ein Beobachter mit seiner Panoramakamera (Sichtfeld: $360^\circ \times 120^\circ$) nähert sich quasistatisch, auf der radialen Bahn $r \in [8, 2.2)_{-0.02}$, einem Schwarzen Loch der Masse $m = 1$.

Stern um ein Kerr Schwarzes Loch

Unterverzeichnis: Kerr

[galCenter_incl80_700x700.mpg](#)

Abbildung [§ 5.34](#) (Seite 107); 186 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Ein Stern mit Radius $r^ = 0.5m$ umkreist auf dem innersten stabilen Orbit r_{isco} ein Kerr Schwarzes Loch. Die Textur gibt die Orientierung des Sterns an, der sich aufgrund der geodätischen Präzession innerhalb eines Umlaufs verdreht. Deutlich zu sehen sind auch die Bilder höherer Ordnung. Beobachterinklination: 80°.*

[galCenter_incl80_kerr_rs_700x700.mpg](#)

Abbildung [§ 5.34](#) (Seite 107); 186 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Ein Stern mit Radius $r^ = 0.5m$ und homogen, isotroper Oberflächentemperatur $T_{star} = 6000^\circ K$ umkreist auf dem innersten stabilen Orbit r_{isco} ein Kerr Schwarzes Loch mit Masse $m = 1$ und Parameter $a = 0.52$. Die gravitative- und Doppler-Rotverschiebung zeigt sich in einer sich scheinbar ändernden Temperatur des Sterns. Beobachterinklination: 80°.*

Anhang E

Details zum Thema Wurmloch

E.1 Formeln zur Morris-Thorne-Metrik

Wir wollen hier eine Zusammenstellung der verschiedenen Darstellungen der Morris-Thorne-Metrik geben. Die einfachste Form — diese war bereits 1973 von H. Ellis gefunden [27], jedoch nicht als Wurmloch-Raumzeit erkannt — geben wir in Eigenradialkoordinaten- und Tetraden-Darstellung an. Im Anschluß stellen wir die Formeln für die allgemeine Morris-Thorne-Metrik in Eigenradial- und gewöhnlichen Radial-Koordinaten zusammen.

E.1.1 Einfachste (Ellis-)Metrik

Koordinaten-Darstellung

Metrik

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2) (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (\text{E.1.1})$$

Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{l\vartheta}^{\vartheta} = \frac{l}{b_0^2 + l^2}, \quad \Gamma_{l\varphi}^{\varphi} = \frac{l}{b_0^2 + l^2}, \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^l = -l, \quad (\text{E.1.2a})$$

$$\Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} = \cot\vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^l = -l \sin^2\vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\sin\vartheta \cos\vartheta. \quad (\text{E.1.2b})$$

Riemann-Tensor

$$R_{l\vartheta l\vartheta} = -\frac{b_0^2}{b_0^2 + l^2}, \quad R_{l\varphi l\varphi} = -\frac{b_0^2 \sin^2\vartheta}{b_0^2 + l^2}, \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = b_0^2 \sin^2\vartheta. \quad (\text{E.1.3})$$

Ricci-Tensor und Ricci-Skalar

$$R_{ll} = -2 \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \quad R = -2 \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}. \quad (\text{E.1.4})$$

Einstein-Tensor

$$G_{tt} = -\frac{c^2 b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \quad G_{ll} = -\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \quad G_{\vartheta\vartheta} = \frac{b_0^2}{b_0^2 + l^2}, \quad G_{\varphi\varphi} = \frac{b_0^2 \sin^2\vartheta}{b_0^2 + l^2}. \quad (\text{E.1.5})$$

Tetraden-Darstellung

Lokale Tetrade

$$\omega^t = c dt, \quad \omega^l = dl, \quad \omega^{\vartheta} = \sqrt{b_0^2 + l^2} d\vartheta, \quad \omega^{\varphi} = \sqrt{b_0^2 + l^2} \sin\vartheta d\varphi, \quad (\text{E.1.6a})$$

$$\mathbf{e}_t = \frac{1}{c} \partial_t, \quad \mathbf{e}_l = \partial_l, \quad \mathbf{e}_{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + l^2}} \partial_{\vartheta}, \quad \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + l^2} \sin\vartheta} \partial_{\varphi}. \quad (\text{E.1.6b})$$

Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{i\hat{\vartheta}}^{\hat{\vartheta}} = \frac{l}{b_0^2 + l^2}, \quad \Gamma_{\hat{\vartheta}}^{\hat{\vartheta}} = \frac{l}{b_0^2 + l^2}, \quad \Gamma_{\hat{\vartheta}}^{\hat{\vartheta}} = -\frac{l}{b_0^2 + l^2}, \quad (\text{E.1.7a})$$

$$\Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = \frac{\cot \vartheta}{\sqrt{b_0^2 + l^2}}, \quad \Gamma_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{\vartheta}} = -\frac{l}{b_0^2 + l^2}, \quad \Gamma_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{\vartheta}} = -\frac{\cot \vartheta}{\sqrt{b_0^2 + l^2}}. \quad (\text{E.1.7b})$$

Riemann-Tensor

$$R_{i\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = R_{i\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -R_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}. \quad (\text{E.1.8})$$

Ricci-Tensor und Ricci-Skalar

$$R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = -2\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \quad R = -2\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}. \quad (\text{E.1.9})$$

Einstein-Tensor

$$G_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -G_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = -G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}. \quad (\text{E.1.10})$$

E.1.2 Allgemeine MT-Metrik in Eigenradial-Koordinaten

Koordinaten-Darstellung

Metrik

$$ds^2 = -e^{2\Phi(l)} c^2 dt^2 + dl^2 + r(l)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (\text{E.1.11})$$

Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{tt}^l = \Phi'(l) c^2 e^{2\Phi(l)}, \quad \Gamma_{tl}^t = \Phi'(l), \quad \Gamma_{l\vartheta}^{\vartheta} = \frac{r'(l)}{r(l)}, \quad \Gamma_{l\varphi}^{\varphi} = \frac{r'(l)}{r(l)}, \quad (\text{E.1.12a})$$

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta}^l = -r(l) r'(l), \quad \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} = \cot \vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^l = -r(l) r'(l) \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (\text{E.1.12b})$$

Riemann-Tensor

$$R_{tltl} = e^{2\Phi(l)} c^2 (\Phi'(l)^2 + \Phi''(l)), \quad R_{l\vartheta l\vartheta} = \Phi'(l) r'(l) r(l) c^2 e^{2\Phi(l)}, \quad (\text{E.1.13a})$$

$$R_{l\varphi l\varphi} = \Phi'(l) r'(l) r(l) \sin^2 \vartheta c^2 e^{2\Phi(l)}, \quad R_{l\vartheta l\vartheta} = -r(l) r''(l), \quad (\text{E.1.13b})$$

$$R_{l\varphi l\varphi} = -r''(l) r(l) \sin^2 \vartheta, \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = (1 - r'(l)^2) r(l)^2 \sin^2 \vartheta. \quad (\text{E.1.13c})$$

Ricci-Tensor

$$R_{tt} = \frac{c^2 e^{2\Phi(l)}}{r(l)} \left(\Phi'(l)^2 r(l) + \Phi''(l) r(l) + 2\Phi'(l) r'(l) \right), \quad (\text{E.1.14a})$$

$$R_{ll} = -\frac{1}{r(l)} \left(\Phi'(l)^2 r(l) + \Phi''(l) r(l) + 2r''(l) \right), \quad (\text{E.1.14b})$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = -r(l) \left(\Phi'(l) r'(l) + r''(l) \right) + 1 - r'(l)^2, \quad (\text{E.1.14c})$$

$$R_{\varphi\varphi} = -r(l) \sin^2 \vartheta \left(\Phi'(l) r'(l) + r''(l) \right) + \sin^2 \vartheta \left(1 - r'(l)^2 \right). \quad (\text{E.1.14d})$$

Ricci-Skalar

$$R = -\frac{2}{r(l)^2} \left[r(l)^2 \left(\Phi'(l)^2 + \Phi''(l) \right) + 2r(l) \left(\Phi'(l) r'(l) + r''(l) \right) - 1 + r'(l)^2 \right]. \quad (\text{E.1.15})$$

Einstein-Tensor

$$G_{tt} = -\frac{c^2 e^{2\Phi(l)}}{r(l)^2} \left[2r(l)r''(l) + r'(l)^2 - 1 \right], \quad (\text{E.1.16a})$$

$$G_{uu} = \frac{1}{r(l)^2} \left[2\Phi'(l)r'(l)r(l) + r'(l)^2 - 1 \right], \quad (\text{E.1.16b})$$

$$G_{\vartheta\vartheta} = r(l) \left[\Phi'(l)r'(l) + r''(l) + \Phi'(l)^2 r(l) + \Phi''(l)r(l) \right], \quad (\text{E.1.16c})$$

$$G_{\varphi\varphi} = r(l) \sin^2\vartheta \left[\Phi'(l)r'(l) + r''(l) + \Phi'(l)^2 r(l) + \Phi''(l)r(l) \right]. \quad (\text{E.1.16d})$$

Tetraden-Darstellung

Lokale Tetrade

$$\omega^t = e^{\Phi(l)} c dt, \quad \omega^l = dl, \quad \omega^\vartheta = r(l) d\vartheta, \quad \omega^\varphi = r(l) \sin\vartheta d\varphi, \quad (\text{E.1.17a})$$

$$\mathbf{e}_t = e^{-\Phi(l)} \partial_t, \quad \mathbf{e}_l = \partial_l, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{r(l)} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r(l) \sin\vartheta} \partial_\varphi. \quad (\text{E.1.17b})$$

Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{\hat{t}\hat{t}}^{\hat{l}} = \Phi'(l), \quad \Gamma_{\hat{t}\hat{t}}^{\hat{\vartheta}} = \Phi'(l), \quad \Gamma_{\hat{l}\hat{\vartheta}}^{\hat{\vartheta}} = \frac{r'(l)}{r(l)}, \quad \Gamma_{\hat{l}\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = \frac{r'(l)}{r(l)}, \quad (\text{E.1.18a})$$

$$\Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}}^{\hat{l}} = -\frac{r'(l)}{r(l)}, \quad \Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = \frac{\cot\vartheta}{r(l)}, \quad \Gamma_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{l}} = -\frac{r'(l)}{r(l)}, \quad \Gamma_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{\vartheta}} = -\frac{\cot\vartheta}{r(l)}. \quad (\text{E.1.18b})$$

Riemann-Tensor

$$R_{\hat{l}\hat{t}\hat{t}\hat{l}} = \Phi'(l)^2 + \Phi''(l), \quad R_{\hat{l}\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}\hat{l}} = -\frac{r''(l)}{r(l)}, \quad (\text{E.1.19a})$$

$$R_{\hat{t}\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}\hat{t}} = \frac{\Phi'(l)r'(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{l}\hat{\varphi}\hat{\varphi}\hat{l}} = -\frac{r''(l)}{r(l)}, \quad (\text{E.1.19b})$$

$$R_{\hat{t}\hat{\varphi}\hat{\varphi}\hat{t}} = \frac{\Phi'(l)r'(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}\hat{\varphi}\hat{\vartheta}} = \frac{1 - r'(l)^2}{r(l)^2}. \quad (\text{E.1.19c})$$

bzw.

$$R_{\hat{t}\hat{t}\hat{l}\hat{l}}^{\hat{t}} = -\Phi'(l)^2 - \Phi''(l), \quad R_{\hat{\vartheta}\hat{t}\hat{t}\hat{\vartheta}}^{\hat{t}} = -\frac{\Phi'(l)r'(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{\varphi}\hat{t}\hat{t}\hat{\varphi}}^{\hat{t}} = -\frac{\Phi'(l)r'(l)}{r(l)}, \quad (\text{E.1.20a})$$

$$R_{\hat{t}\hat{t}\hat{l}\hat{l}}^{\hat{l}} = -\Phi'(l)^2 - \Phi''(l), \quad R_{\hat{\vartheta}\hat{l}\hat{l}\hat{\vartheta}}^{\hat{l}} = -\frac{r''(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{\varphi}\hat{l}\hat{l}\hat{\varphi}}^{\hat{l}} = -\frac{r''(l)}{r(l)}, \quad (\text{E.1.20b})$$

$$R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}}^{\hat{\vartheta}} = -\frac{\Phi'(l)r'(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{l}\hat{l}\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}}^{\hat{\vartheta}} = \frac{r''(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{\varphi}\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}\hat{\varphi}}^{\hat{\vartheta}} = \frac{1 - r'(l)^2}{r(l)^2}, \quad (\text{E.1.20c})$$

$$R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = -\frac{\Phi'(l)r'(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{l}\hat{l}\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = \frac{r''(l)}{r(l)}, \quad R_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}\hat{\varphi}\hat{\vartheta}}^{\hat{\varphi}} = \frac{r'(l)^2 - 1}{r(l)^2}. \quad (\text{E.1.20d})$$

Ricci-Tensor

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{1}{r(l)} (\Phi'(l)^2 r(l) + \Phi''(l)r(l) + 2\Phi'(l)r(l)), \quad (\text{E.1.21a})$$

$$R_{\hat{l}\hat{l}} = \frac{1}{r(l)} (\Phi'(l)^2 r(l) + \Phi''(l)r(l) + 2r''(l)), \quad (\text{E.1.21b})$$

$$R_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = \frac{1}{r(l)^2} (1 - \Phi'(l)r'(l)r(l) - r''(l)r(l) - r'(l)^2). \quad (\text{E.1.21c})$$

Ricci-Skalar (siehe Gl.(E.1.15))

Einstein-Tensor

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{1}{r(l)^2} (1 - r''(l)r(l) - r'(l)^2), \quad (\text{E.1.22a})$$

$$G_{\hat{i}\hat{i}} = \frac{1}{r(l)^2} (1 - 2\Phi'(l)r'(l)r(l) - r'(l)^2), \quad (\text{E.1.22b})$$

$$G_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{1}{r(l)} (\Phi'(l)r'(l) + r''(l) + \Phi'(l)^2 r(l) + \Phi''(l)r(l)). \quad (\text{E.1.22c})$$

E.1.3 Allgemeine MT-Metrik in Radial-Koordinaten

Koordinaten-Darstellung

Metrik

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (\text{E.1.23})$$

Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{tt}^r = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) c^2 e^{2\Phi(r)} \Phi'(r), \quad \Gamma_{tr}^t = \Phi'(r), \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{rb'(r) - b(r)}{r(r - b(r))}, \quad (\text{E.1.24a})$$

$$\Gamma_{r\vartheta}^\vartheta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = b(r) - r, \quad (\text{E.1.24b})$$

$$\Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi = \cot\vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = (b(r) - r) \sin^2\vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta = -\sin\vartheta \cos\vartheta. \quad (\text{E.1.24c})$$

Riemann-Tensor

$$R_{ttrt} = c^2 e^{2\Phi(r)} \left[\Phi'(r)^2 + \Phi''(r) - \frac{\Phi'(r)}{2r^2 (1 - b(r)/r)} (rb'(r) - b(r)) \right], \quad (\text{E.1.25a})$$

$$R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{c^2 e^{2\Phi(r)} \Phi'(r)}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right), \quad R_{t\varphi t\varphi} = R_{t\vartheta t\vartheta} \sin^2\vartheta, \quad (\text{E.1.25b})$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = \frac{1}{2r} \frac{rb'(r) - b(r)}{1 - b(r)/r}, \quad R_{r\varphi r\varphi} = R_{r\vartheta r\vartheta} \sin^2\vartheta, \quad (\text{E.1.25c})$$

$$R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = rb(r) \sin^2\vartheta. \quad (\text{E.1.25d})$$

Ricci-Tensor

$$R_{tt} = c^2 e^{2\Phi(r)} \left[(\Phi'(r)^2 + \Phi''(r)) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{\Phi'(r)}{2r^2} (4r - rb'(r) - 3b(r)) \right], \quad (\text{E.1.26a})$$

$$R_{rr} = -(\Phi'(r)^2 + \Phi''(r)) + \frac{\Phi'(r)}{2r^2} \frac{rb'(r) - b(r)}{1 - b(r)/r} + \frac{1}{r^3} \frac{rb'(r) - b(r)}{1 - b(r)/r}, \quad (\text{E.1.26b})$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = -\Phi'(r)r \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{rb'(r) + b(r)}{2r}, \quad R_{\varphi\varphi} = R_{\vartheta\vartheta} \sin^2\vartheta. \quad (\text{E.1.26c})$$

Tetraden-Darstellung

Lokale Tetrad

$$\mathbf{e}_t = e^{-\Phi(r)} \frac{1}{c} \partial_t, \quad \mathbf{e}_r = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \partial_r, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{r} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\varphi. \quad (\text{E.1.27})$$

Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{\hat{t}\hat{t}}^{\hat{r}} = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \Phi'(r), \quad \Gamma_{\hat{t}\hat{r}}^{\hat{t}} = \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \Phi'(r), \quad \Gamma_{\hat{r}\hat{r}}^{\hat{r}} = \frac{1}{2} \frac{rb'(r) - b(r)}{r^2 \sqrt{1 - b(r)/r}}, \quad (\text{E.1.28a})$$

$$\Gamma_{\hat{r}\hat{\vartheta}}^{\hat{\vartheta}} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}, \quad \Gamma_{\hat{r}\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}, \quad \Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}}^{\hat{r}} = -\frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}, \quad (\text{E.1.28b})$$

$$\Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = \frac{\cot \vartheta}{r}, \quad \Gamma_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{r}} = -\frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}, \quad \Gamma_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^{\hat{\vartheta}} = -\frac{\cot \vartheta}{r}. \quad (\text{E.1.28c})$$

Riemann-Tensor

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = (\Phi'(r)^2 + \Phi''(r)) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{b(r) - r\Phi'(r)b'(r)}{2r^2}, \quad (\text{E.1.29a})$$

$$R_{\hat{r}\hat{\vartheta}\hat{r}\hat{\vartheta}} = R_{\hat{t}\hat{\varphi}\hat{t}\hat{\varphi}} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \frac{\Phi'(r)}{r}, \quad (\text{E.1.29b})$$

$$R_{\hat{r}\hat{\vartheta}\hat{r}\hat{\varphi}} = R_{\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\vartheta}} = \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^3}, \quad (\text{E.1.29c})$$

$$R_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}\hat{\vartheta}\hat{\varphi}} = \frac{b(r)}{r^3}. \quad (\text{E.1.29d})$$

Ricci-Skalar

$$R = -2(\Phi''(r) + \Phi'(r)^2) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \frac{\Phi'(r)}{r^2} (4r - rb'(r) - 3b(r)) + \frac{2b'(r)}{r^2} \quad (\text{E.1.30})$$

Einstein-Tensor

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b(r)}{r^2}, \quad G_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{2\Phi'(r)}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \frac{b(r)}{r^3}, \quad (\text{E.1.31a})$$

$$G_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}, \quad G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) [\Phi'(r) + r\Phi''(r) + r\Phi'^2] + \frac{b(r) - rb'(r) - \Phi'(r)b'(r)r^2}{2r^3}. \quad (\text{E.1.31b})$$

E.2 Details zu Geodäten

E.2.1 Entfernung und Halsradius

Wir wollen hier zeigen, daß die Funktion (Gl. 6.4.60a)

$$f(a, \tau) = \mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(\sin \tau, a) - \pi \quad (\text{E.2.1})$$

genau eine Lösung $f(a, \tau) = 0$ für ein bestimmtes $a = a_0$ besitzt. Der Parameter τ liege im offenen Intervall $(0, \pi/2)$. Leiten wir $f(a, \tau)$ partiell nach a ab, so folgt

$$\frac{\partial f(a, \tau)}{\partial a} = -\frac{\mathcal{K}(a)}{a} + \frac{\mathcal{E}(a)}{a(1-a^2)} + \frac{a \sin \tau \cos \tau}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2 \sin^2 \tau}} + \frac{\mathcal{F}(\sin \tau, a)}{a} - \frac{\mathcal{D}(\sin \tau, a)}{a(1-a^2)} \quad (\text{E.2.2})$$

und mit Gleichung (E.2.1), unter der Bedingung $f(a, \tau) = 0$, können wir die Ableitung zu

$$\frac{\partial f(a, \tau)}{\partial a} = -\frac{\pi}{a} + \frac{\mathcal{E}(a) - \mathcal{D}(\sin \tau, a)}{a(1-a^2)} + \frac{a \sin \tau \cos \tau}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2 \sin^2 \tau}} \quad (\text{E.2.3})$$

vereinfachen. Nun ist aber

$$\frac{\partial f(a, \tau)}{\partial a} > 0 \quad \text{für} \quad 0 < a \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{2},$$

also ist f streng monoton steigend. Da zusätzlich $f(0, \tau) = -\pi/2 - \tau$ und $\lim_{a \rightarrow 1} f(a, \tau) \rightarrow \infty$ gilt, existiert genau eine Nullstelle a_0 von f . Da die Funktion f nicht explizit nach a auflösbar ist, bestimmen wir die Nullstelle a_0 numerisch mittels der *Brent-Dekker-Methode* (Originalarbeit siehe [11]).

E.2.2 Verhalten von Geodäten bei konformer Transformation

Skalieren wir die einfachste Morris-Thorne-Metrik (6.3.1) mit dem konformen Faktor $\Omega = \Omega(t)$, so folgt für die Lagrange-Funktion (6.4.4)

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} = \Omega(t)^2 \left\{ -c^2 \dot{t}^2 + \dot{l}^2 + r(l)^2 \dot{\varphi}^2 \right\} \quad (\text{E.2.4})$$

mit $r(l)^2 = (b_0^2 + l^2)$ und aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (6.4.5) folgen die Gleichungen

$$0 = -2 \frac{d}{d\lambda} \left(\Omega^2 \frac{dt}{d\lambda} \right) - 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial t} \kappa, \quad (\text{E.2.5a})$$

$$0 = 2 \frac{d}{d\lambda} \left(\Omega^2 r(l)^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \right). \quad (\text{E.2.5b})$$

Führen wir nun die Umparametrisierung $\hat{\lambda} = \Upsilon(\lambda)$ mit $\partial_\lambda \Upsilon = \Omega^{-2}$ aus, so gilt zunächst $d/d\lambda = \Omega^{-2} d/d\hat{\lambda}$ und wir erhalten die beiden Beziehungen

$$\left(\frac{dt}{d\hat{\lambda}} \right)^2 = 2K - \frac{\kappa}{2} \Omega^4 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\hat{\lambda}} = \frac{h}{r(l)^2} \quad (\text{E.2.6})$$

mit den Konstanten h und K . Analoge Anfangsbedingungen wie in Abschnitt §6.4.2 ergeben $h = r(l) \sin \xi / \Omega$ und $2K = 1/\Omega^2 + \frac{\kappa}{2} \Omega^4$ und wir erhalten die Bahngleichung

$$\left(\frac{dl}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2K + \frac{\kappa}{2} \Omega^4}{h^2} r(l)^4 - r(l)^2 \quad (\text{E.2.7})$$

Der Vergleich mit (6.4.18) zeigt, daß die Bahnen von Nullgeodäten durch die konforme Transformation nicht beeinträchtigt werden.

E.2.3 Atlas in GeoViS

Der Atlas der einfachsten Morris-Thorne-Metrik (6.3.1) ist in `GeoViS` durch die Metrik **GvsMetricMorris-Thorne** implementiert. Die Berechnung der Geodäten erfolgt in Eigenradialkoordinaten, wohingegen die Schnittberechnung mit Koordinatenobjekten in pseudo-kartesischen Koordinaten, welche die Radialkoordinate r verwenden, durchgeführt wird. Die Methode `coordTransf` transformiert hierfür zunächst die Eigenradial- in die Radialkoordinate, um anschließend daraus die pseudo-kartesischen Koordinaten zu berechnen. Da wir prinzipiell die gesamte Raumzeit mit einer Karte überdecken können, speichern wir im Strahl die Kartenummer Null. Bei der Transformation in Radialkoordinaten bezeichnen wir das „obere Universum“ ($l \geq 0$) als Karte 1 und das „untere Universum“ ($l < 0$) als Karte 2. Diese Zuordnung ist speziell für die Beschreibung von Koordinatenobjekten wichtig.

Die allgemeinere Form (6.2.1) der Morris-Thorne-Metrik muß jedoch als richtiger Atlas, bestehend aus zwei Metriken, implementiert werden. Die Formfunktion $b(r)$ und die Rotverschiebungsfunktion $\Phi(r)$ können direkt als Funktion (siehe Abs. §3.6.12) übergeben werden. Dabei ist natürlich darauf zu achten, daß die Anschlußbedingungen aus dem Abschnitt §6.2.1 erfüllt sind.

E.2.4 Hilfsprogramm whEllFunc.cpp

Mit dem Hilfsprogramm `Progr (whEllFunc.cpp)` können wir die meisten Elemente aus dem Abschnitt §6.4 über Geodäten in der Morris-Thorne-Raumzeit berechnen. Die Methoden tragen in der Regel den Namen der zu berechnenden Größe. Eine Nähere Beschreibung befindet sich im Programmtext selbst.

E.3 Filmbeschreibungen

Flug durch ein statisches Gitter

Unterverzeichnis: Wurmloch/Gitter

mtWormholeFlight_720x576.mpg

Abbildung \ 6.14 (Seite 133); 162 Einzelbilder

Flug mit einer Geschwindigkeit $v \ll c$ durch eine Gitterstruktur vom Ort $l = 13$ bis hin zu $l = -2.9$. Der Wurmlochhals hat einen Radius $b_0 = 2.0$.

Panoramaflug durch ein Wurmloch

Unterverzeichnis: Wurmloch/Raum

mtRaumPanoramaFlug_1200x300.mpg

Abbildung \ 6.18 (Seite 136); 250 Einzelbilder mit Originalauflösung: 2400x600, raumPanorama.scn

Flug mit einer Geschwindigkeit $v \ll c$ durch ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$, welches zwei Räume miteinander verbindet. Aufgenommen wird mit einer Panorama-Kamera mit Sichtfeld $360^\circ \times 90^\circ$ auf dem Weg zwischen $l = 8.0$ und $l = -2.0$.

Flug im Wurmlochhals

Unterverzeichnis: Wurmloch/Raum

mtRaumHalsFlug_500x500.mpg

Abbildung \ 6.19 (Seite 137); 360 Einzelbilder mit Originalauflösung: 1000x1000, raumFlug.scn

Flug mit einer Geschwindigkeit $v \ll c$ im Wurmlochhals. Aufgenommen wird mit einer Panorama-Kamera mit Sichtfeld $130^\circ \times 130^\circ$ entlang des Halses bei $l = 0$ und tangential zur φ -Richtung.

mtRaumHalsFastFlug_v0.90c_500x500.mpg

Abbildung \ 6.19 (Seite 137); 304 Einzelbilder mit Originalauflösung: 1000x1000,

Flug mit 90% Lichtgeschwindigkeit im Wurmlochhals. Aufgenommen wird mit einer Panorama-Kamera mit Sichtfeld $130^\circ \times 130^\circ$ entlang des Halses bei $l = 0$ und tangential zur φ -Richtung.

Relativistischer Flug durch eine statische Szene: 2 Räume

Unterverzeichnis: Wurmloch/Raum

mtRaumFastMov_v0.90c_500x500

Abbildung \ 6.20 (Seite 137); 128 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000, raumFlugFast.scn

Flug mit 90% Lichtgeschwindigkeit durch ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$. Aufgenommen wird mit einer Loch-Kamera mit Sichtfeld $70^\circ \times 70^\circ$ vom Ort $l = 16$ bis $l = -10.43$.

mtRaumFastMov_v0.99c_500x500

Abbildung \ 6.20 (Seite 137); 159 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000, raumFlugFast.scn

Flug mit 99% Lichtgeschwindigkeit durch ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$. Aufgenommen wird mit einer Loch-Kamera mit Sichtfeld $70^\circ \times 70^\circ$ vom Ort $l = 16$ bis $l = -10.43$.

mtRaumPanFastFlug_v0.99_1200x300

Abbildung \ 6.20 (Seite 137); 200 Einzelbilder mit Originalauflösung 2400x600

Flug mit 99% Lichtgeschwindigkeit durch ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$. Aufgenommen wird mit einer Panorama-Kamera mit Sichtfeld $360^\circ \times 90^\circ$ vom Ort $l = 16$ bis $l = -24.5$.

Bewegtes Objekt in statischer Szene: Tübingen – Mars

Unterverzeichnis: Wurmloch/Tübingen

[mtTueMarsBall_seitlich_512x512.mpg](#)

Abbildung [§ 6.21](#) (Seite [138](#)); 301 Einzelbilder mit Originalauflösung 2048x2048

Gegeben sei ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 6$ zwischen dem Tübinger Marktplatz und einer fiktiven Marsstation. Ein Beobachter am Ort ($l = 25, \vartheta = \pi/2, \varphi = 0$) beobachtet mit einer Lochkamera (Sichtbereich: $(70^\circ \times 70^\circ)$). Ein Ball bewegt sich entlang einer radialen Geodäten ($\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$) von $l = [15, -15]_{0.1}$ durch das Wurmloch.

[mtTueMarsBall_orbit_512x512.mpg](#)

Abbildung [§ 6.22](#) (Seite [139](#)); 360 Einzelbilder mit Originalauflösung 2048x2048, tueWhMarsBall_hals.scn

Gegeben sei ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 6$ zwischen dem Tübinger Marktplatz und einer fiktiven Marsstation. Ein Ball bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius $l = 2.0$ um das Wurmloch herum.

Anhang F

Details zur Stereo-Visualisierung

F.1 Filmbeschreibungen

Relativistische Bewegung parallel zur Augenachse

Unterverzeichnis: Stereo/SRT

[stDieMov_v0p5_720x720.bg.redcyan.mpg](#)

Abbildung \ 7.17 (Seite 156); 360 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Bewegt sich ein Würfel mit der Geschwindigkeit $\beta_{par} = 0.5$ parallel zur Augenachse im Abstand $a = 3.0$ von links nach rechts, so scheint er sich von vorne nach hinten zu bewegen.

[stDieMov_v0p9_720x720.bg.redcyan.mpg](#)

Abbildung \ 7.18 (Seite 157); 390 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Die scheinbare Bewegung eines Würfels von links vorne nach rechts hinten verstärkt sich bei höherer Geschwindigkeit ($\beta_{par} = 0.9$).

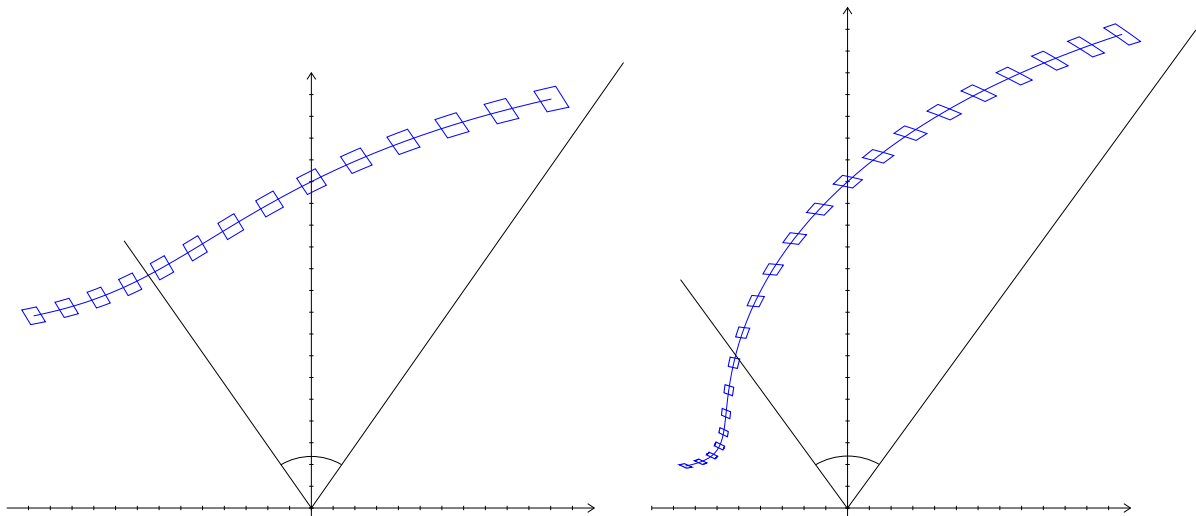


Abbildung F.1: Stereosicht eines Würfels, der sich mit $\beta_{par} = 0.5$ (links) bzw. $\beta_{par} = 0.9$ (rechts) im Abstand $a = 3.0$ am Beobachter — Augenabstand $b_0 = 0.06$, Sichtfeld 70° — vorbei bewegt. Dargestellt sind die Stereophantomwürfel zu den Beobachtungszeiten $t_o = -3.4 \dots 7.0$ mit $\Delta t = 0.8$ (links) bzw. $t_o = -0.9 \dots 5.4$ mit $\Delta t = 0.3$ (rechts).

[stParBallMov_v0p5_720x720.redcyan.mpg](#)

Abbildung \ 7.19 (Seite 158); 780 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000, BallParMov.scm

Binokulare Sicht einer Kugel mit Radius $r = 0.15$, welche sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.5c$ im Abstand $\Delta y = 3.0$ parallel zur Augenachse des Beobachters (Sichtfeld: $70^\circ \times 70^\circ$) bewegt. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$. Der Beobachtungszeitraum ist $t_o = [-0.3, 7.8]_{0.02}$.

stTransBox_v0p5_720x720.redcyan.mpg

Abbildung [7.12](#) (Seite 152); 260 Stereobilder mit Originalauflösung 1000x1000, transBoxBall.rvs

Ein transparenter Würfel mit Kantenlänge $r = 0.2$ und einer Gittertextur bewegt sich im Abstand $\Delta y = 0.8$ mit $v = 0.5c$ parallel zur Augenachse des Beobachters (Augenabstand $\Delta = 0.06$).

stTransBox_v0p9_720x720.redcyan.mpg

Abbildung [7.12](#) (Seite 152); 260 Stereobilder mit Originalauflösung 1000x1000, transBoxBall.rvs

Analoge Situation; jedoch bewegt sich jetzt der Würfel mit der Geschwindigkeit $v = 0.5c$.

Relativistische Bewegung orthogonal zur Augenachse

Unterverzeichnis: Stereo/SRT

stOrthoBoxZubeweg_v0p5_720x720.redcyan.mpg

Abbildung [7.21](#) (Seite 159); 300 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Binokulare Sicht eines Würfels mit Kantenlänge $r = 0.2$, welcher sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.5c$ orthogonal zur Augenachse (x -Achse) des Beobachters bewegt. Die Koordinaten der Augen sind: $x_L = -0.03$ und $x_R = 0.03$. Beobachtungszeit für die Bewegung des Würfels entlang der Geraden $x = 0.4$ auf den Beobachter zu: $t_o = [-2, -0.125]_{0.00625}$.

stOrthoBoxWegbeweg_v0p5_720x720.redcyan.mpg

Abbildung [7.21](#) (Seite 159); 320 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Analoge Situation wie im vorherigen Fall. Beobachtungszeit für die Bewegung des Würfels entlang der Geraden $x = 0.4$ vom Beobachter weg: $t_o = [1, 4]_{0.009375}$.

Stereoskopie in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Unterverzeichnis: Stereo/ART

whStereoRaumUnten_720x720.mpg

Abbildung [7.24](#) (Seite 162); 720 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000, raumStereo.scm

Stereosicht eines kubischen Raums mit Kantenlänge $\Delta r = 50$, der ein MT-Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 2$ umgibt. Der Beobachter bewegt sich ausgehend vom Ort $l_{obs} = -20$, $\varphi_{L,R} = \pm 1.72^\circ$ kreisförmig um das Wurmloch und beobachtet mit einer Stereokamera mit Sichtfeld $\alpha = 70^\circ$.

whStereoTueMarsBallOrbit_lBall_m2_720x720.mpg

Abbildung [7.25](#) (Seite 162); 720 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Stereosicht eines Balls mit Radius $r_{Ball} = 1.0$, der ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 6$ quasistatisch auf der Bahn $l = -2$ umkreist. Der Beobachter befindet sich am Ort $l_{obs} = 25$, $\varphi_{L,R} = \pm 0.57^\circ$ und hat ein Sichtfeld von $50^\circ \times 50^\circ$.

whStereoTueMarsBallOrbit_lBall_p4_720x720.mpg

Abbildung [7.25](#) (Seite 162); 720 Einzelbilder mit Originalauflösung 1000x1000

Stereosicht eines Balls mit Radius $r_{Ball} = 1.0$, der ein Wurmloch mit Halsradius $b_0 = 6$ quasistatisch auf der Bahn $l = 4$ umkreist. Der Beobachter befindet sich am Ort $l_{obs} = 13$, $\varphi_{L,R} = \pm 0.57^\circ$ und hat ein Sichtfeld von $50^\circ \times 50^\circ$.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Tangentialraum und lokale Tetrade: <i>coordinates (xfig)</i>	9
2.2	Anfangsrichtung y mit Winkel-Koordinaten: <i>sphKoord (xfig)</i>	13
2.3	Kongruenz zeitartiger Geodäten: <i>geodesicDev (xfig)</i>	15
3.1	Prinzip des Raytracings: <i>raytracing (xfig)</i>	19
3.2	Basisprotokoll von RayViS: <i>rayvis_basis (xfig)</i>	21
3.3	Basisprotokoll von GeoViS: <i>geovis_basis (xfig)</i>	24
3.4	Klassen-Struktur der Raumzeiten: <i>spacetimeClasses (pstricks)</i>	24
3.5	Klassen-Struktur der Geodäten-Integratoren: <i>geodSolverClasses (pstricks)</i>	27
3.6	Integrationsrichtungen: <i>lichtkegelIntegrator (xfig)</i>	27
3.7	Klassenstruktur der Objekte: <i>objectClasses (pstricks)</i>	30
3.8	Flashlight-Muster: <i>flashLightPatter (xfig)</i>	31
3.9	Geodätenbetrachter „GvsGeodViewer“: <i>GeodViewer</i>	35
3.10	Ballreihe: <i>ballreihe, orthMov_115 (orthMov_ball.scm)</i>	37
3.11	Blitzlicht mit endlicher Lichtlaufzeit: <i>boxdoublefl_ (boxDoubleFlash_mozart.scm)</i>	37
3.12	Statisches Einstein-Universum: <i>statuniv_ (staticUniv_mozart.scm)</i>	38
3.13	Geodäten für Einstein-Universum: <i>einsteinStatUnivGeod (GvsGeodViewer)</i>	39
3.14	Fiktive Raumzeit: <i>fiktiveMetrikImage, fiktiveMetrik (fiktMetrik_mozart.scm)</i>	39
3.15	Blick nach Außen in der Schwarzschild-Raumzeit: <i>lookOut_0, lookOut_1900 (lookOutside.scm)</i>	40
4.1	Gültigkeitsbereich der Koordinaten τ und R : <i>gueltigkeitsbereich (gueltig.gnu,xfig)</i>	44
4.2	Staubrand in Kruskal-Koordinaten: <i>kruskMitfallend (kruskalKoordinaten.cpp)</i>	46
4.3	Staubrand in Schwarzschild-Koordinaten: <i>lineRb</i>	47
4.4	Zusammenhang Schwarzschild- und Mitfallende-Koordinaten: <i>collCoords</i>	47
4.5	Geschwindigkeit eines mitfallenden Beobachters aus versch. Perspektive: <i>geschwindigkeit (geschwindigkeit.cpp)</i>	49
4.6	Radial einlaufende Nullgeodäten: <i>einlRadialNullgeod (radialeGeodaeten.cpp)</i>	50
4.7	Radial auslaufende Nullgeodäten: <i>auslRadialNullgeod, auslRadialNullgeod_in</i>	51
4.8	Konformes Diagramm radialer Nullgeodäten im Innenraum: <i>collKonfDia (xfig)</i>	54
4.9	Sichtwinkel des Staubrands für mitf. und stat. Beob.: <i>staubrandMitfallend, staubrandStatisch (findIntersec.cpp)</i>	55
4.10	Phantombilder für mitfallenden Beobachter: <i>phantomMitfallend_tau0, phantomMitfallend_tau30 (findPhantomObject.cpp, phantomStatic.pl)</i>	56
4.11	Einzelbilder für mitfallenden Beobachter: <i>comovingImage_fromR20 (RayViS,GeoViS)</i>	57
4.12	Phantombilder für statischen Beobachter: <i>phantomStatic_m10p757, phantomStatic_21p243</i>	57
4.13	Einzelbilder für statischen Beobachter: <i>collOpakStatic (GeoViS)</i>	58
4.14	Sichtbereich eines mitfallenden Beobachters: <i>sichtbereich (sichtbereich.cpp)</i>	58
4.15	Tatsächliche Sicht eines mitfallenden Beobachters: <i>collSicht2pi_ (GeoViS)</i>	59
4.16	Nullgeodäten bei transparentem Staubstern: <i>comovingGeodaeten_ (geoCollapsGvs.cpp, geoCollLos)</i>	60
4.17	Sicht durch transparenten, kollabierenden Staubstern: <i>collTransCom_ (GeoViS)</i>	61

4.18	Nullgeodäten bei transparentem Staubstern: <i>staticGeodaeten_</i> (<i>geoCollapsGvs.cpp</i> , <i>geoCollLos</i>)	62
4.19	Sicht durch transparenten, kollabierenden Staubstern: <i>collTransCom_</i> (<i>GeoViS</i>)	63
4.20	Mehrfachbilder beim transparenten, kollabierenden Staubstern: <i>collTransStatic_</i> (<i>GeoViS</i>), <i>static-Geodaeten_t34p72</i> (<i>geoCollapsGvs.cpp</i>)	64
5.1	Einbettungsdiagramm für die Hyperebene ($t = \text{const}$, $\vartheta = \pi/2$): <i>flamm</i> (<i>emb.cpp</i>)	67
5.2	Startrichtung einer Geodäte bzgl. lokalem System: <i>bhLokAnfRichtung</i> , (<i>xfig</i>)	69
5.3	Effektives Potential für eine zeitartige Geodäte: <i>bhPotential_z0,z1,z2a,z2b</i> (<i>bhPotential.cpp</i>)	70
5.4	Effektives Potential für eine lichtartige Geodäte: <i>bhPotential</i> (<i>bhPotential.cpp</i>)	73
5.5	Effektives Potential für raumartige Geodäten: <i>bhSpaceGeod</i> (<i>bhPotential.cpp</i>)	74
5.6	Qualitativer Verlauf einer Nullgeodäten: <i>bhBereiche</i> , <i>bhBereicheZoom</i> (<i>xfig</i>)	77
5.7	Abhängigkeit des Parameters q vom Startort x_i : <i>paramNull</i> (<i>bhParamNull.cpp</i>)	78
5.8	Verlauf der zeitartigen Geodäten in Abh. von β und ξ : <i>bhKubisch_ri3,ri4,ri6,ri12</i> (<i>bhKubisch.cpp</i>)	79
5.9	Ablenkung eines Lichtstrahls an einem Schwarzen Loch: <i>lightBending</i>	86
5.10	Nullgeodäten verbinden zwei Punkte: <i>bhShapiro</i> (<i>GvsGeodViewer</i>), <i>pstricks</i>)	87
5.11	Kugelblitz zur Entfernungsbestimmung: <i>bhEntfernung</i> (<i>GeoViS</i> , <i>pstricks</i>)	89
5.12	Einfache Szene für schnelle Visualisierung: <i>bhEinfacheSzene</i> (<i>xfig</i>)	90
5.13	Vom Pixel zur Startrichtung: <i>bhPixToCoord</i> (<i>xfig</i>)	91
5.14	Geodäte vom Beobachter zur Objektebene: <i>bhSchnellVis</i> (<i>pstricks</i>)	92
5.15	Nullstellen der Kurven ergeben Schnittwinkel Φ_P : <i>bhSV</i> (<i>bhGeodesics.cpp</i>)	92
5.16	Stern um galaktisches Zentrum: <i>bhSgrA</i> (<i>xfig</i>)	93
5.17	Geodätische Präzession bei halber Lichtgeschwindigkeit: <i>bhGeodPrec</i> (<i>pstricks</i>)	95
5.18	Bild des Sterns zu verschiedenen Zeitpunkten: <i>galMov_4320x540_0,60,153,185</i> (<i>GeoViS</i>)	96
5.19	Wahrer und scheinbarer Ort des Sterns: <i>bhGalacticOrbits</i> (<i>GeoViS</i> , <i>pstricks</i>)	97
5.20	Laufzeiten für Lichtstrahlen vom Stern zum Beobachter: <i>laufzeiten</i> (<i>GeoViS</i>)	97
5.21	Phantombild und Rotverschiebung des Sterns: <i>bhPhantom</i> , <i>bhZgesamt</i> (<i>GeoViS</i>)	99
5.22	Gesamtrotverschiebung für einen Stern bei der inneren Konjunktion: <i>bhZbild_r30</i>	99
5.23	Planck-Spektrum bei $T = 6000^\circ K$: <i>planckLambda_t6000</i>	100
5.24	Blob um galaktisches Zentrum ($\iota = 90^\circ$): <i>gal_incl90</i>	101
5.25	Rotverschiebung entlang des Einsteinrings für ($\iota = 90^\circ$): <i>gc_incl90_rsData</i>	101
5.26	Blob um galaktisches Zentrum ($\iota = 45^\circ$): <i>gal_incl45</i>	101
5.27	Blob um galaktisches Zentrum ($\iota = 70^\circ$): <i>gal_incl70</i>	102
5.28	Lichtkurve für Blob um galaktisches Zentrum: <i>intIntensity_incl70</i>	102
5.29	Scheibe um Schwarzes Loch: <i>bhScheibenSzene</i> (<i>xfig</i>)	103
5.30	Scheibe um Schwarzes Loch: <i>diskimage_80grad</i> , <i>diskimage_30grad</i> (<i>BHDiskView</i>)	104
5.31	SPH-Scheibe um Schwarzes Loch: <i>density_</i> , <i>diskimage_sph</i> , (<i>GeoViS</i>)	105
5.32	SPH-Scheibe um Schwarzes Loch: <i>temp_</i>	106
5.33	Lichtkurve für Blob um ein Kerr Schwarzes Loch: <i>gal_incl80_kerrInt</i>	107
5.34	Blob um Kerr Schwarzes Loch: <i>gal_incl80_kerr_</i> (<i>galacticCenter_incl80_kerr.scm</i>)	107
5.35	Zentroid für Blob um Kerr Schwarzes Loch: <i>centroid_incl80_kerr</i>	107
6.1	Einbettungsdiagramm der Hyperfläche $\vartheta = \pi/2$: <i>whEmbedding</i>	116
6.2	Anfangsrichtung bezogen auf lokale Tetrade: <i>lokaleTetrade</i> (<i>xfig</i>)	116
6.3	Effektives Potential: <i>whPotential</i> (<i>whPotential.cpp</i>)	119
6.4	Lokale Anfangsrichtung: <i>lokaleAnfangsrichtung</i> (<i>xfig</i>)	119
6.5	Kritische Bereiche einer Geodäten: <i>whKritBereiche</i>	122
6.6	Geodäten, die im gleichen Universum bleiben: <i>whtOrbits</i> (<i>whEllFunc.cpp</i> , <i>xfig</i>)	124
6.7	Lokale Startrichtung einer Geodäten, die zwei Punkte verbindet: <i>lokaleRichtung</i> (<i>xfig</i>)	126
6.8	Kritische Geodäte, die sich asymptotisch dem Wurmlochhals nähert: <i>IKritisch</i>	126
6.9	Entfernungsbestimmung mittels Lichtblitz: <i>whUmlauf</i>	129
6.10	3D-Gitter um MT-Wurmloch (Layout): <i>whLattice_Layout</i> , <i>whEmbDirections</i>	131

6.11	3D-Gitter um MT-Wurmloch $b_0 = 0$ und $b_0 = 0.3$: <i>whLattice_b0, whLattice_b0p3</i>	131
6.12	3D-Gitter um MT-Wurmloch $b_0 = 0.3$: <i>whLattice_b0p3, zweiWege</i>	132
6.13	3D-Gitter um MT-Wurmloch $b_0 = 2.0$: <i>whLattice_b2p0, whEmbDrei</i>	132
6.14	3D-Gitter um MT-Wurmloch $b_0 = 2.0$: <i>whLattice_113_2400x1920</i>	133
6.15	3D-Gitter um MT-Wurmloch $b_0 = 2.0$ mit Geodäten: <i>whgeod</i>	134
6.16	3D-Gitter um MT-Wurmloch $b_0 = 2.0$: <i>whLattice_b2p0, whEmbSouth</i>	135
6.17	Flug durch ein Wurmloch: <i>raumOhneWL (whRaumPanFlug.scm)</i>	135
6.18	Flug durch ein Wurmloch: <i>raumMovTest_100 (whRaumPanFlug.scm)</i>	136
6.19	Flug im Wurmlochhals: <i>raumHalsPanCam030, raumHalsPanCam130 (whRaumPanFlug.scm)</i>	137
6.20	Flug durch ein Wurmloch: <i>fastFlug_v0p0_1m0p5, fastFlug_v0p90_80, fastFlug_v0p99_81 (whRaumPanFlug.scm)</i>	137
6.21	Ball fliegt durch Wurmloch: <i>tueBall_... (tueWhMarsBall.scm)</i>	138
6.22	Ball fliegt um Wurmloch herum: <i>tueBall_... (tueWhMarsBall.scm)</i>	139
7.1	Querschnitt durch ein Auge: <i>draweye</i>	143
7.2	Horopter: <i>horopter (Z.u.L.)</i>	143
7.3	Strahlensatz für die Größe: <i>strahlensatz_groesse (xfig)</i>	144
7.4	Strahlensatz für die Tiefe: <i>strahlensatz_tiefe (xfig)</i>	144
7.5	Abbildungskette: <i>strahlensatz_kette (xfig)</i>	145
7.6	Situation bei der monokularen Visualisierung: <i>monoVisSituation (xfig)</i>	147
7.7	Scheinbarer Ort eines bewegten Punktes: <i>scheinbarerOrt (xfig)</i>	148
7.8	Stab bewegt sich senkrecht zur Ausrichtung: <i>stab_p50, stab_p90 (stabVis.cpp)</i>	149
7.9	Phantombilder eines schnell bewegten Quadrats/Würfels: <i>wuerfelSzene, scheinbaresQuadrat</i>	150
7.10	Realbilder eines schnell bewegten Würfels: <i>movingBox_v0p5_</i>	151
7.11	Scheinbare Drehung eines Würfels: <i>apparentRotation</i>	151
7.12	Würfel mit Gitternetz (opak und transparent): <i>stBox_opak_v0p5, stBox_trans_v0p5 (transBoxBall.rvs)</i>	152
7.13	Scheinbarer Kreis: <i>scheinbarerKreis</i>	153
7.14	Kugel mit Gitternetz: <i>stBall_opak_v0p9, stBall_trans_v0p9, transBall_v0p0 (transBoxBall.rvs)</i>	153
7.15	Binokulares Phantombild eines Punktes: <i>stereoSituation</i>	154
7.16	Binokularer scheinbarer Ort eines Punktes: <i>scheinbareKurve</i>	155
7.17	Binokulares Phantombild eines Quadrats bei $v = 0.5c$: <i>stereoBox_v0p5 (figPlotter)</i>	156
7.18	Binokulare Phantombild eines Quadrats bei $v = 0.9c$: <i>stereoBox_v0p9 (figPlotter)</i>	157
7.19	Binokulare Phantombilder eines Kreises bei $v = 0.5c$: <i>stereoKreis_v0p5 (figPlotter)</i>	158
7.20	Binokulare Phantombilder eines Kreises bei $v = 0.9c$: <i>stereoKreis_v0p9 (figPlotter)</i>	158
7.21	Binokulare Phantombild eines Quadrats bei $v = 0.5c$: <i>orthogonaleBewegung... (figPlotter)</i>	159
7.22	Scheinbarer Kreis in der MT-Raumzeit: <i>stMonoArt (whEllFunc.cpp, pstricks)</i>	160
7.23	Scheinbarer Ort eines Punktes in der MT-Raumzeit: <i>whStereoPoint (whStereoPoint.cpp, pstricks)</i>	161
7.24	Stereophantombild eines kubischen Raums um ein MT-Wurmloch: <i>stereoQuadratOben (whStereoQuadrat.cpp)</i>	162
7.25	Stereophantombilder eines Kreises um ein MT-Wurmloch: <i>whStereoKreis (whStereoKreis.cpp)</i>	162
A.1	Spektralwertkurven: <i>cie_cmf (CIE)</i>	167
A.2	Geeignete Drehung eines Koordinatensystems: <i>zweiPunkte (xfig)</i>	170
A.3	Lochkamera-Modell beim Raytracing: <i>pinholecam (xfig)</i>	170
B.1	Zusammenhang zwischen Kruskal- und Schwarzschild-Koordinaten: <i>kruskalXT (kruskalKoordinaten.cpp)</i>	177
D.1	Eigenradiallänge in der Schwarzschild-Metrik: <i>bhEigenlaenge (bhEigenlaenge.cpp)</i>	190
D.2	Statische Annäherung an ein stellares Schwarzes Loch: <i>staticApprox_m0p1_ (staticApproach.scm)</i>	194
D.3	Freier Fall auf stellares Schwarzes Loch: <i>freeFall_ (freefallApproach.scm)</i>	196

D.4	BHFastView screenshot: <i>bhFastView_screenshot</i>	198
D.5	Szenerie für Scheibenbetrachter: <i>bhScheibenSkizze (xfig)</i>	200
D.6	Ordnung der Bilder: <i>bhGalacticStatic (GvsGeodViewer, pstricks)</i>	202
F.1	Stereosicht eines Würfel mit $\beta_{\text{par}} = 0.5$ bzw. $\beta_{\text{par}} = 0.9$: <i>stbox_v0p5_a3, stbox_v0p9_a3 (FigPlotter)</i>	215

Tabellenverzeichnis

3.1 GvsGeodViewer-Registerbeschreibung	36
5.1 Qualitativer Verlauf einer Nullgeodäten	77
5.2 Modell-Parameter für Sagittarius A*	93
A.1 Notation	163
A.2 Orientierungssymbole	164
A.3 Naturkonstanten	164
A.4 Sonnensystem	165
A.5 Abgeleitete Größen	165
A.6 Größen des galaktischen Zentrums	165
D.1 Öffnungswinkel bei quasi-statischer Annäherung	195
D.2 Öffnungswinkel beim freien Fall auf das Schwarze Loch	197
D.3 BHFastView-Datei-Tabelle	199
D.4 BHDiskView-Datei-Tabelle	201
D.5 Mindestauflösungen für verschiedene Bilderordnungen	202

Index

- Abbildung
 - orthostereoskopische, 146
 - tautostereoskopische, 146
- Abstand
 - euklidischer, 88
 - minimaler, 73, 76, 118
 - Winkel-, 7
 - zweier Punkte, 25
- abstrakte Indexnotation, 9, 163
- Akkommodation, 142
- Anfangsbedingungen, 13
- Bewegung
 - kreisförmige, 125
 - nichtradiale, 121
 - radiale, 71, 120
- BHDiskView, 104, 199
- BHFastView, 93, 197
- Boltzmann-Konstante, 164
- Christoffel-Symbole, 12, 173, 189, 207
- CIE-Farbraum, 167
- Doppler-Effekt, 20
- Doppler-Verschiebung, 98
- effektives Potential, 68
 - lichtartige Geodäten, 73
 - zeitartige Geodäten, 70
- Einbettungsdiagramm, 66, 115, 190
- Einstein-Tensor, 14
- Elliptische Integrale, 181
- Energie-Impuls-Tensor, 42
- Energiebedingungen, 113
- Entfernungsbestimmung, 88, 129
- Fermi-Walker-Ableitung
 - in abstrakter Notation, 16
 - in Koordinatendarstellung, 16
 - in Tetradendarstellung, 17
- Fermi-Walker-Transport, 17
- Flammsches Paraboloid, 66, 190
- flare-out Bedingung, 110, 111
- Gaußsche Normalkoordinaten, 111
- Geodäten
 - lichtartige, 73
 - radiale, 72
 - raumartige, 73
 - zeitartige, 69
- Geodätengleichung, 12
- geodätische Abweichung, 15
- geodätische Präzession, 94
- Geometrische Einheiten, 165
- Geradengleichung
 - in kartesischen Koordinaten, 176
 - in Polarkoordinaten, 176
- Geschwindigkeit
 - Kepler-, 103
 - Vierer-, 13, 48, 71, 94, 117, 191, 200
- Gleichgewichtsbedingung, 41
- Gleichung
 - kubische, 76, 80
- Gram-Schmidt-Orthonormalisierung, 11
- Gravitationskonstante, 164
- GvsGeodViewer, 34
- Hilfsprogramme, 179, 202, 212
- Horopter, 142
- Informationen
 - monokulare, 142
 - okulomotorische, 142
- innerster stabiler Orbit, 106
- Interaktive Visualisierung, 90
- Konvergenz, 142
- Koordinaten
 - Kruskal-, 46, 176
 - pseudo-kartesische, 18
 - sphärische, 7
 - stereographische, 7
- korrespondierende Netzhautpunkte, 142
- Krümmung
 - äußere, 110
 - Gauß-, 115, 191
 - Haupt-, 115, 164, 191

- mittlere, 115, 191
- Lagrange-Funktion, 67, 118
- LambertW-Funktion, 166, 176
- letzter stabiler Orbit, 70, 103
- Lichtablenkung, 85
 - am Sonnenrand, 86
- Lichtblitz, 37, 88, 129
- Lichtgeschwindigkeit, 164
- Lichtjahr, 165
- Lichtkurve, 102
- Lichtsekunde, 165
- Lie-Ableitung, 15
- Lochkamera, 170
- lokale Tetrade, 9
 - Kerr-Metrik, 10
 - Kollaps-Metrik, 48
 - Morris-Thorne Wurmloch, 117
 - Schwarzschild-Metrik, 10, 68
- lokaler Zusammenhang, 12
- Lorentz-Transformation, 147
- Masse
 - Erde, 165
 - Sonne, 165
- Metrik
 - Kerr-, 10, 106
 - konforme, 168
 - Minkowski-, 10
 - Morris-Thorne-, 114
 - Robertson-Walker-, 43
 - Schwarzschild-, 10, 66, 189
 - Wurmloch-, 111
- Naturkonstanten, 164
- Numerische Integration, 14
- Panumsches Fusionsgebiet, 143, 156
- Parallel-Transport, 18
- Phantombild
 - binokulares, 154
 - einer Kugel, 4, 152, 160
 - eines kollabierenden Sterns, 56, 179
 - eines Punktes, 147
 - eines Quadrats, 150
 - eines Stabes, 149
 - eines Sterns, 98
- Phantomobjekt, 98
- Photonenorbit, 73, 85, 86, 89, 92
- Planck-Spektrum, 100, 166
- Plancksches Wirkungsquantum, 164
- Poincaré-Transformation, 146
- Querdisparation, 142
- Raumzeit
 - Schwarzschild-, 39
 - sphärisch-symmetrische, 168
 - statische, 67
- Raytracing
 - in komplexen Raumzeiten, 20
 - konventionelles, 19
 - Konzept, 19
 - vierdimensionales, 20
- Relativbeschleunigung, 114
- Ricci-Tensor, 14
- Riemann-Tensor, 14, 173, 189, 207
- Rotverschiebung, 18
 - gravitative, 67
- Schwarzes Loch
 - freier Fall auf ein, 72, 195
 - quasi-statische Annäherung, 193
- Searchlight-Effekt, 20
- Shapiro-Effekt, 87
- Sonnensystem, 165
- Spektralwertkurven, 167
- Startbedingungen, 68
- Statisches Einstein-Universum, 38
- Staubscheibe, 103
- Szenenbeschreibungssprache, 32
- Tangentialraum, 8
- Tiefenwahrnehmung, 144
- Zentroid, 107

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, New York, 1964.
- [2] ALCUBIERRE, M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Class. Quant. Grav.* 11 (1994), L73–L77.
- [3] AMES, W. L., AND THORNE, K. S. The optical appearance of a star that is collapsing through its gravitational radius. *ApJ.* 151 (1968), 659–670.
- [4] BARDEEN, J. M., PRESS, W. H., AND TEUKOLSKY, S. A. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal* 178 (1972), 347–369.
- [5] BENGER, W. Light++. <http://www.photon.at/~werner/light/intro.html>, 1990-2000. Stand: Oktober 2002.
- [6] BERTOTTI, B., IESS, L., AND TORTORA, P. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature* 425 (2003), 374–376.
- [7] BOAS, M., CALHOUN, R., AND HORAN, O. Binocular observation of moving objects. *Am. J. Phys.* 39, 7 (1971), 782–790.
- [8] BORCHERS, M. Interaktive und stereoskopische Visualisierung in der speziellen Relativitätstheorie. Dissertation, 2005. Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- [9] BOYER, R. H., AND LINDQUIST, R. W. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *J.Math.Phys.* 8, 2 (1967), 265–281.
- [10] BOZZA, V., AND MANCINI, L. Time Delay in Black Hole Gravitational Lensing as a Distance Estimator. *Gen. Rel. Grav.* 36 (2004), 435–450.
- [11] BRENT, R. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. *The Computer Journal* 14 (1971), 422–425.
- [12] BREWIN, L. Classroom computer animations of relativistic objects. <http://www.maths.monash.edu.au/~leo/relativity/sr-photography/>. Stand: 12. April 2005.
- [13] BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A., MUSIOL, G. UND MÜHLIG, H. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1995.
- [14] BRYSON, S. Virtual spacetime: An environment for the visualization of curved spacetime via geodesic flows. In *Proceedings of the IEEE Visualization '92 Conference* (1992), pp. 291–298.
- [15] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [16] CARTER, B. Complete Analytic Extension of the Symmetry Axis of Kerr’s Solution of Einstein’s Equations. *Phys. Rev.* 148, 4 (1966), 1242–1247.

- [17] CARTER, B. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Phys.Rev.* 174, 5 (1968), 1559–1571.
- [18] CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford Science Publications, 2000.
- [19] CORLESS, R. M., ET AL. On the Lambert W Function. *Adv. Comp. Math.* 5 (1996), 329–359.
- [20] DEISLER, R. J. The appearance, apparent speed, and removal of optical effects for relativistically moving objects. *Am. J. Phys.* 73, 7 (July 2005), 663–669.
- [21] D'INVERNO, R. *Einführung in die Relativitätstheorie*. VCH, 1995.
- [22] DYSON, F. W., EDDINGTON, A. S., AND DAVIDSON, C. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* 220 (1920), 291–333.
- [23] EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 17 (1905), 891–921.
- [24] EINSTEIN, A. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.* (1915), 778–786.
- [25] EINSTEIN, A., AND ROSEN, N. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Phys. Rev.* 48 (1935), 73–77.
- [26] EISENHAEUER, F., ET AL. A Geometric Determination of the Distance to the Galactic Center. *Ap. J.* 597 (2003), L121–L124.
- [27] ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. *J. Math. Phys.* 14, 1 (1973), 104–118.
- [28] ERTL, T., GEYER, F., HEROLD, H., KRAUS, U., NIEMEIER, R., NOLLERT, H.-P., REBETZKY, A., RUDER, H., AND ZELLER, G. Visualization in astrophysics. In *Eurographics '89 Proceedings* (1989), pp. 149–158.
- [29] EVERETT, A. E., AND ROMAN, T. A. Superluminal subway: The Krasnikov tube. *Phys. Rev. D* 56, 4 (1997), 2100–2108.
- [30] FECHTIG, O. Physikalische Aspekte und Visualisierung von stationären Wurmlöchern. Diplomarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 2004.
- [31] FISCHER, H. UND KAUL, H. *Mathematik für Physiker 1, 2*. ed. Teubner Studienbücher, 1990.
- [32] FISCHER, H. UND KAUL, H. *Mathematik für Physiker 3, 1*. ed. Teubner Studienbücher, 2003.
- [33] FLAMM, L. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physik. Zeitschr.* XVII (1916), 448–454.
- [34] FOLEY, J. D. *Grundlagen der Computergrafik*. Addison-Wesley, 1994.
- [35] FORD, L. H., AND ROMAN, T. A. Averaged energy conditions and quantum inequalities. *Phys. Rev. D* 51, 8 (1995), 4277–4286.
- [36] FULLER, R. W., AND WHEELER, J. A. Causality and Multiply Connected Space-Time. *Phys. Rev.* 128, 2 (1962), 919–929.
- [37] GAMOW, G. A. *Mr. Tompkins in Wonderland*. University Press, Cambridge, 1939.
- [38] GENZEL, R., ET AL. Near-infrared flares from accreting gas around the supermassive black hole at the galactic centre. *Nature* 425 (October 2003), 934–937.

- [39] GHEZ, A. M., ET AL. High proper-motion stars in the vicinity of SagA*: evidence for a supermassive black hole at the center of our galaxy. *Ap. J.* 509 (1998), 678–686.
- [40] GHEZ, A. M., ET AL. The first measurement of spectral lines in a short-period star bound to the galaxy's central black hole: a paradox of youth. *Ap. J.* 586 (April 2003), L127–131.
- [41] GLASSNER, A. S. *An introduction to ray tracing*. Morgan Kaufmann, 1989.
- [42] GOLDSTEIN, B. *Wahrnehmungspsychologie*. Spektrum Akademischer Verlag, 2002.
- [43] GRAVE, F. Visualisierung zum Gravitationskollaps und Wellenfronten in der Allgemeinen Relativitätstheorie. Diplomarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 2004.
- [44] GRÖLLER, E. Nonlinear ray tracing. *The Visual Computer* 11, 5 (1995), 263–276.
- [45] GRÖNE, A. *Entwurf eines objektorientierten Visualisierungssystems auf der Basis von Raytracing*. PhD thesis, University of Tübingen, Germany, 1996. In German.
- [46] HAWKING, S. W., AND ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1999.
- [47] HOCHBERG, D., AND VISSER, M. Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat. *Phys. Rev. D* 56 (1997), 4745–4755.
- [48] HOLLENBACH, D. Appearance of a rapidly moving sphere: A problem for undergraduates. *Am. J. Phys.* 44, 1 (1976), 91–93.
- [49] HSIUNG, P., THIBADEAU, R. H., COX, C., AND DUNN, R. Time dilation visualization in relativity. In *Proceedings of Supercomputing '90* (November 1990), pp. 835 – 844.
- [50] HSIUNG, P.-K., AND DUNN, R. H. P. Visualizing relativistic effects in spacetime. In *Supercomputing '89: Proceedings of the 1989 ACM/IEEE conference on Supercomputing* (New York, NY, USA, 1989), ACM Press, pp. 597–606.
- [51] JAFFE, J. Collapsing Objects and the Backward Emission of Light. *Annals of Physics* 55 (1969), 374–390.
- [52] KAR, S. Evolving wormholes and the weak energy condition. *Phys. Rev. D* 49, 2 (1994), 862–865.
- [53] KARTTUNEN, H., ET AL. *Fundamental Astronomy*. Springer-Verlag, 2003.
- [54] KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.* 11, 5 (1963), 237–238.
- [55] KRAUS, U. Reiseziel: Schwarzes Loch – Visualisierungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie. *Sterne und Weltraum* (November 2005), 46–50.
- [56] KRAUS, U., RUDER, H., WEISKOPF, D. UND ZAHN, C. Was Einstein noch nicht sehen konnte. *Physik Journal*, 7 (2002), 77–82.
- [57] KRUSKAL, M. D. Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Phys. Rev.* 119, 5 (1960), 1743–1745.
- [58] LAMPA, A. Wie erscheint nach der Relativitätstheorie ein bewegter Stab einem ruhenden Beobachter? *Zeitschrift für Physik* 27 (1924), 138–148.
- [59] LAPLACE, P. S. *Exposition du Système du Monde – Livre quatrième: De la théorie de la pesanteur universelle*. Imprimerie du Cercle Social, 1796.
- [60] LAWDEN, D. F. *Elliptic Functions and Applications*. Springer-Verlag, 1989.

- [61] LINDQUIST, R. W. Relativistic Transport Theory. *Annals of Physics* 37 (1966), 487–518.
- [62] MCGILL, N. C. The apparent shape of rapidly moving objects in special relativity. *Contemporary Physics* 9 (1968), 33–48.
- [63] MICHELL, J. On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, &c. of the Fixed Stars, in Consequence of the Diminution of the Velocity of Their Light, in Case Such a Diminution Should be Found to Take Place in any of Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would be Farther Necessary for That Purpose. By the Rev. John Michell, B. D. F. R. S. In a Letter to Henry Cavendish, Esq. F. R. S. and A. S. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 74 (1784), 35–57.
- [64] MICHELSON, A. A. Experimental Determination of the Velocity of Light. *Proc. Am. Assoc. Adv. Sci.* 27 (1878), 71–77.
- [65] MISNER, C., THORNE, K., AND WHEELER, J. *Gravitation*. W.H.Freeman, 1973.
- [66] MISNER, C. W., AND WHEELER, J. A. Classical Physics as Geometry - Gravitation, Electromagnetism, Unquantized Charge, and Mass as Properties of Curved Empty Space. *Ann. Phys.* 2 (1957), 525–603.
- [67] MORRIS, M. S., AND THORNE, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.* 56, 5 (1988), 395–412.
- [68] MORRIS, M. S., THORNE, K. S., AND YURTSEVER, U. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. *Phys. Rev. Lett.* 61, 13 (1988), 1446–1449.
- [69] MÜLLER, A. Emissionslinienprofile akkretierender Scheiben um rotierende Schwarze Löcher. Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt, 2000.
- [70] MÜLLER, T. Visual appearance of a Morris-Thorne wormhole. *Am. J. Phys* 72, 8 (August 2004), 1045–1050.
- [71] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. Adam Hilger, 1990.
- [72] NEMIROFF, R. J. Visual distortions near a neutron star and a black hole. *Am. J. Phys.* 61, 7 (July 1993), 619–632.
- [73] NOLLERT, H.-P., KRAUS, U., AND RUDER, H. Visualization in curved spacetimes. I. Visualization of objects via four-dimensional ray-tracing. In *Relativity and Scientific Computing*, F. W. Hehl, R. A. Puntigam, and H. Ruder, Eds. Springer, 1996, pp. 314–329.
- [74] NOLLERT, H.-P., RUDER, H., HEROLD, H., AND KRAUS, U. The relativistic 'looks' of a neutron star. *Astron. Astrophys.* 208 (1989), 153–156.
- [75] OPPENHEIMER, J. R., AND SNYDER, H. On Continued Gravitational Contraction. *Phys. Rev.* 56 (1939), 455–459.
- [76] OPPENHEIMER, J. R., AND VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.* 55 (1939), 374–381.
- [77] PENROSE, R. The apparent shape of a relativistically moving sphere. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 55 (1959), 137–139. Received July 29, 1958.
- [78] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., AND FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2002.
- [79] PUSSEL, V. Visualisierung des Strahlungstransportes in der Umgebung eines akkretierenden Schwarzen Loches. Diplomarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1992.
- [80] RAU, H. Visualisierung in dynamischen Metriken. Diplomarbeit, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1996.

- [81] REASENBERG, J., ET AL. VIKING Relativity experiment: Verification of signal retardation by solar gravity. *Ap. J.* 234 (1979), L219–L221.
- [82] RINDLER, W. *Relativity – Special, General and Cosmology*. Oxford University Press, 2001.
- [83] RØMER, O. C. A demonstration concerning the motion of light. *Phil. Trans.* 12 (1677-1678), 893–894.
- [84] RUDER, H. UND NOLLERT, H.-P. Einsteins Holodeck. *Spektrum der Wissenschaft* (Juli 2005), 56–65.
- [85] SAGAN, C. *Contact*. Simon and Schuster, New York, 1985.
- [86] SCHNEIDER, M. *Himmelsmechanik, Band III: Gravitationstheorie*. Spektrum-Verlag, 0.
- [87] SCHÖDEL, R., ET AL. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the center of the Milky Way. *Nature* 419 (2002), 694–696.
- [88] SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. English translation: <http://de.arxiv.org/abs/physics/9905030>, 1916.
- [89] SCHWARZSCHILD, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.* (1916), 189–196.
- [90] SCOTT, G. D., AND VAN DRIEL, H. J. Geometrical Appearances at Relativistic Speeds. *Am. J. Phys.* 38, 8 (August 1970), 971–977.
- [91] SCOTT, G. D., AND VINER, M. R. The Geometrical Appearances of Large Objects Moving at Relativistic Speeds. *Am. J. Phys.* 33 (1965), 534–536.
- [92] SEXL, R.U. UND URBANTKE, H.K. *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer-Verlag, Wien, New York, 1992.
- [93] SEXL, R.U. UND URBANTKE, H.K. *Gravitation und Kosmologie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995.
- [94] SHAPIRO, I. Fourth test of general relativity. *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964), 789–791.
- [95] SPEITH, R. Rotverschiebung längs Photonenbahnen in der Nähe Aktiver Galaktischer Kerne. Diplomarbeit, 1993. Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- [96] SPEITH, R. Untersuchung von Smoothed Particle Hydrodynamics anhand astrophysikalischer Beispiele. Dissertation, 1998. Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- [97] STEPHANI, H. *Allgemeine Relativitätstheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980.
- [98] STEPHANI, H., KRAMER, D., MACCALLUM, M., HOENSELAERS, C., AND HERLT, E. *Exact Solutions of the Einstein Field Equations*, 2. ed. Cambridge University Press, 2003.
- [99] STRAUMANN, N. *General Relativity With Applications to Astrophysics*. Springer, 2004.
- [100] STROUTSTRUP, B. *Die C++-Programmiersprache*. Addison-Wesley, 2003.
- [101] TEO, E. Rotating traversable wormholes. *Phys. Rev. D* 58 (1998), 024014–1–6.
- [102] TERRELL, J. Invisibility of the Lorentz contraction. *Phys. Rev.* 116, 4 (November 1959), 1041–1045. Received June 22, 1959.
- [103] TEUFEL, H. Psychophysical Investigation of Chromatic Induction. Dissertation, 2000. Eberhard-Karls-Universität Tübingen.
- [104] TIPLER, F. J. Energy conditions and spacetime singularities. *Phys. Rev. D* 17, 10 (1978), 2521.

- [105] TOLMAN, R. C. Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 20 (1934), 169–176.
- [106] VISSER, M. *Lorentzian Wormholes*. AIP Press, 1995.
- [107] WALD, R. M. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [108] WEINSTEIN, R. Observation of Length by a Single Observer. *Am. J. Phys.* 28, 7 (October 1960), 607–610.
- [109] WEISKOPF, D. *Visualization of Four-Dimensional Spacetimes*. PhD thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 2001.
- [110] WEISKOPF, D., KRAUS, U., AND RUDER, H. Searchlight and Doppler Effects in the Visualization of Special Relativity: A Corrected Derivation of the Transformation of Radiance. *ACM Transactions on Graphics* 17, 3 (July 1999), 278–292.
- [111] WEISSKOPF, V. F. The visual appearance of rapidly moving objects. *Physics Today* 13, 9 (1960), 24–27.
- [112] WHEELER, J. A. Geons. *Phys. Rev* 92, 2 (1955), 511–536.
- [113] WHEELER, J. A. *Geometrodynamics*. Academic Press, New York, 1962.
- [114] WILL, C. M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [115] WRÓBLWESKI, A. de mora luminis: A spectacle in two acts with a prologue and an epilogue. *Am. J. Phys.* 7 (July 1985).
- [116] WYSZECKI, G., AND STILES, W. *Color Science – Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, 2 ed. Wiley Classics Library, 2000.
- [117] ZAHN, C. Vierdimensionales Ray-Tracing in einer gekrümmten Raumzeit. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1991.
- [118] ZAHN, C. Visualisierung der Relativitätstheorie – Koordinatenfreie und interaktive Werkzeuge. Dissertation, 2006. Eberhard-Karls-Universität Tübingen.

Lebenslauf

Name: **Thomas Müller**

Geburtsdatum: 21. August 1973

Geburtsort: Villingen-Schwenningen

Schulbildung: 1980-1984
Grundschule in Schwenningen
1984-1993
Gymnasium am Deutenberg in Schwenningen

Studium: 1995-2001
Studium der Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
1997
Vordiplom in Physik (Universität Tübingen)
2001
Diplom in Physik (Universität Tübingen)

Promotion: 2001-2006
Anfertigung der Dissertation „Visualisierung in der Relativitätstheorie“
bei Prof. Dr. Hanns Ruder am Institut für Astronomie und Astrophysik,
Abteilung Theoretische Astrophysik

Akademische Lehrer: M. Baumann, A. Faessler, H. Fischer, J. Frauendiener, F. Gönnenwein,
W.-D. Hartmann, E. Haug, R. Hübener, H. Kaul, D. Kern, U. Kraus, O. Lutz,
H. Müther, H. Pfister, E. Plies, H. Ruder, N. Schopohl, R. Staubert,
J. Strähle, G.J. Wagner, K. Werner, D. Wharam, M. Wolff