

Majorana Neutrinos: Kern- und Teilchenphysikalische Aspekte

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik

der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

OLIVER HAUG

aus Böblingen

2000

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Januar 2001

Dekan: Prof. Dr. G.J. Wagner

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Amand Fäßler
2. Berichterstatter: Prof. Dr. G.J. Wagner

Für Barbara

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Massive Neutrinos und Neutrino Oszillationen	11
2.1	Neutrinoeigenschaften	14
2.1.1	Dirac Neutrinos	14
2.1.2	Majorana Neutrinos	16
2.2	Neutrinomassenmatrizen	20
2.3	Oszillationen massiver Neutrinos	23
2.3.1	Experimentelle Evidenz für Neutrinooszillationen	24
2.3.2	3-Familien Oszillationen im Vakuum	32
2.3.3	Oszillationen in Materie	38
2.4	Phänomenologie von ν -Oszillationen	41
2.5	Zusammenfassung	47
3	ν-Massen im MSSM	51
3.1	\mathcal{R}_p -MSSM	52
3.2	ν -Massen im \mathcal{R}_p -MSSM	60
3.2.1	Baumniveau Neutrino Masse	60
3.2.2	1-Schleifen-Korrekturen	63
3.2.3	Neue Grenzen für Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$	66
3.3	Massenmatrizen mit $U(1)_X$ Flavor Symmetrie	67

3.3.1	Texture Zeros und Symmetrien	67
3.3.2	$U(1)_X$ Flavor Symmetrie und $\lambda_{ijk}^{(l)}$	71
3.3.3	Neutrino Oszillationen und das $U(1)_X$ - \mathbb{R}_p -MSSM	74
3.3.4	Ergebnisse	75
3.4	Zusammenfassung	77
4	Semiklassische Methode zur Beschreibung des $\beta\beta$-Zerfalls	81
4.1	Einleitung	82
4.2	Paarkraft und Lösungsmethoden	84
4.2.1	Paarkräfte in der Kernphysik	84
4.2.2	BCS-Näherung	87
4.2.3	Bogoliubov-Transformation	89
4.2.4	Bosonenmappung	90
4.2.5	Die Random-Phase-Approximation	93
4.2.6	Betazerfallsamplituden	94
4.2.7	Die Ikeda-Summenregel	95
4.3	Semiklassische Lösungsmethode	96
4.3.1	Modell Hamiltonoperator	96
4.3.2	Anregungsenergien	98
4.3.3	Grundzustandskorrelationen	112
4.3.4	β -Übergangsamplituden	116
4.3.5	Ikeda-Summenregel	119
4.4	Zusammenfassung	121
5	Zusammenfassung und Ausblick	123
A	Baumniveau Neutrino Massenmatrix	129
B	1-Schleifen ν Massen	131

C RPA Matrixelemente	135
D Matrixelemente der Bosonenrepräsentationen	137
E β Übergangsamplituden	139
Abbildungsverzeichnis	143
Tabellenverzeichnis	144
Literaturverzeichnis	146

Kapitel 1

Einleitung

Wie einst in der Hypothese der Neutrinos durch Wolfgang Pauli im Jahr 1930 begründet, können Neutrinos auch heute wieder der Wegweiser sein, wie unser Verständnis der Physik erweitert werden muß. Damals berichtete W. Pauli am 4. Dezember 1930 in seinem an die Teilnehmer einer Konferenz über Radioaktivität in Tübingen adressierten Brief über einen verzweifelten Ausweg, um die bei der Beobachtung des β -Zerfalls gefundenen Probleme zu lösen. In diesen Experimenten war das Spektrum von β Emittlern beobachtet worden. Dabei war in der Energieverteilung ein kontinuierliches Spektrum gefunden worden. Im Rahmen der bekannten Teilchen ging man aber davon aus, daß der Betazerfall ein Zweikörperzerfall ist. Somit erwartete man eine diskrete Linie im Betazerfallsspektrum. Desweiteren wurde beobachtet, daß die Drehimpulserhaltung um $1/2$ Einheit ¹ verletzt ist. In diesem Brief, beginnend mit den mittlerweile berühmten Worten, "sehr geehrte radioaktive Damen und Herren," macht Pauli den Vorschlag, daß ein bisher noch unbekanntes Teilchen für die vermeintliche Verletzung des Energie- und Drehimpulserhaltungssatzes verantwortlich sein könnte. Dieses damals unbekanntes Teilchen war nach seinen Vorstellungen ein Fermion, führte somit zur Erhaltung des Drehimpulses im Betazerfall. Es war außerdem sehr leicht und elektrisch neutral. Pauli hatte schon erkannt, daß dieses Teilchen, wenn überhaupt, sehr schwer nachzuweisen sein würde. Eine wesentliche Frage an seine in Tübingen tagenden Kollegen war daher auch die mögliche Meßbarkeit des Teilchens und damit der Überprüfbarkeit seiner Hypothese. Mit der Einbeziehung des von Pauli als "Neutron" bezeichneten Teilchens konnten die in der β Spektroskopie gewonnenen Ergebnisse beschrieben werden, ohne daß der Energie- und Drehimpulserhaltungssatz verletzt war.

Heute wissen wir, daß dieses von Pauli postulierte Teilchen, das Neutrino, wirklich existiert. Die von ihm geforderten Eigenschaften des Neutrinos sind heute auch als gesichert anzusehen. Das Neutrino ist ein Fermion, besitzt also einen intrinsischen Drehimpuls von $1/2$. Es ist elektrisch neutral, unterliegt der schwachen und falls es eine Masse besitzt auch der Gravitationswechselwirkung. Durch die hohe Masse der Austauschboson der schwachen Wechselwirkung kommt es zu sehr kleinen Wirkungsquerschnitten von unter 10^{-38} cm² bei Energien bis 1 GeV. Weiterhin ist die Masse des Neutrinos, wie auch schon von Pauli gefordert, sehr klein. Im heutigen Standardmodell (SM) der Elementarteilchen wird sie als Null angenommen. Bisher konnte keine Masse des Neutrinos direkt nachgewiesen werden. Für die Massen der Neutrinos, insbesondere für die des Elektronneutrino,

¹Hier und im folgenden werden natürliche Einheiten, also $\hbar = c = 1$ verwendet. Für Umrechnung in SI Einheiten siehe z.B. [1].

gibt es aber heute sehr restriktive Obergrenzen. Diese sind

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} &< 2.6 \text{ eV}[2], \\ m_{\nu_\mu} &< 170.0 \text{ keV}[3], \\ m_{\nu_\tau} &< 18.2 \text{ MeV}[3]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Somit sind 70 Jahre nach der Postulierung des Neutrinos durch Pauli und mehr als 40 Jahre nach der Entdeckung des Neutrinos durch Cowans und Reines immer noch grundlegende Eigenschaften des Neutrinos, wie die Masse, nicht bekannt.

In den letzten Jahren sind aber indirekte Hinweise auf eine nichtverschwindende Neutrinomasse gefunden worden. In einigen dieser Experimente [4, 5, 6, 7] sind Flüsse von Elektronneutrinos (ν_e) aus der Sonne gemessen worden. Beim Vergleich von den experimentell gemessenen und den theoretisch berechneten Flüssen wurde eine starke Abweichung gefunden. Weitere Probleme wurden bei der Messung der Verhältnisse der Flüsse von Myonneutrinos (ν_μ) zu ν_e , welche durch hadronische Prozesse in der oberen Erdatmosphäre entstehen, gefunden. Dabei wurde wieder eine Abweichung der experimentellen Werte von den Erwartungen gefunden. Diese Abweichungen kann man durch Neutrinooszillationen erklären. Das Neutrino wird in seinem Wechselwirkungseigenzustand erzeugt, doch es propagiert in seinen Masseneigenzuständen, die anscheinend davon abweichen. Wenn die Neutrinos verschiedene Massen haben, verändert sich das Mischungsverhältnis der einzelnen Komponenten. Falls das Neutrino zu einem späteren Zeitpunkt wieder in einem Wechselwirkungseigenzustand detektiert wird, sind daher auch die Verhältnisse dieser Zustände verändert. Zustände können daher wegoszillieren. Damit Oszillationen aber auftreten können, müssen Neutrinos massiv sein. Die angesprochenen Experimente, die Evidenz für Neutrinooszillationen gefunden haben, lassen sich problemlos durch die Mischung von drei Neutrinos beschreiben. Zusätzlich zu den oben erwähnten Experimenten [4, 5, 6, 7] hat die LSND Kollaboration [8, 9] Evidenz für Neutrinooszillationen gefunden. Diese Resultate, zusammen mit den Ergebnissen der solaren und atmosphärischen Neutrinooszillationsexperimente, schienen lange Zeit nicht kompatibel mit der Mischung von nur drei Neutrinos zu sein. Weil die LSND Ergebnisse bisher von keinem anderen Experiment bestätigt worden sind, wurde ihre Gültigkeit stark angezweifelt. Seit kurzem gibt es jedoch neue Analysen aller experimentellen Daten, die Evidenz für Neutrinooszillationen gefunden haben, im Rahmen von drei Neutrinofamilien.

Aus der Vielzahl der Experimente, die Evidenz für Neutrinooszillationen gefunden haben, kann man davon ausgehen, daß Neutrinos massiv sind. Wie sieht aber die

Neutrinomassenmatrix aus? In dieser Arbeit wird untersucht, welche Konsequenzen sich für die Neutrinomassenmatrix aus den Analysen von Neutrinooszillationsdaten ableiten lassen. Dabei wird auch untersucht, welcher Unterschied sich für die Neutrinomassenmatrix ergibt, wenn man die LSND Ergebnisse ausschließt oder miteinbezieht.

Da im SM die Neutrinos masselos sind, folgt aus der Existenz von Neutrinooszillationen, daß das SM erweitert werden muß. Das Neutrino ist daher wie 1930 wieder ein Wegweiser, wie das derzeitige Verständnis der Physik erweitert werden kann. Erweiterungen des SM müssen also in der Lage sein, massive Neutrinos zu beschreiben. Ein Problem dabei ist zu erklären, warum die Masse der Neutrinos um ein vielfaches kleiner ist als die der anderen elementaren Fermionen. Der Mechanismus, der zur Masse der Neutrinos führt, sollte ein anderer sein als der, der die geladenen Fermionen massiv werden läßt. Für Neutrinos gibt es dafür als einziges bekanntes Elementarteilchen die Möglichkeit, einen Majorana Massenterm zu haben. Damit ein Majorana Massenterm existiert, muß das Neutrino nach einer Idee von Ettore Majorana aus dem Jahr 1937 zufolge bis auf eine Phase sein eigenes Antiteilchen sein. In diesem Fall existieren für das neutrale Fermion nicht, wie von Dirac 1928 gefunden, vier Freiheitsgrade, also Teilchen/Antiteilchen und Spin “up” und “down”, sondern nur zwei. Diese Möglichkeit kann bei den uns bekannten Teilchen nur beim Neutrino realisiert sein. Es ist bisher das einzige elementare neutrale Fermion. Bei allen anderen Teilchen ist immer die Teilchen-/Antiteilcheneigenschaft eindeutig durch die verschiedene elektrische Ladung gekennzeichnet. Die sich aus der Dirac oder Majorana Natur ergebenden Konsequenzen für die Neutrinomassenmatrix werden ebenfalls in dieser Arbeit untersucht.

Da Neutrinos massiv zu sein scheinen, benötigt man auch eine theoretische Beschreibung dafür. Wegen der geringen Masse der Neutrinos werden sie in den meisten Modellen für Neutrinomassen als Majoranateilchen betrachtet. In dieser Arbeit wird ein solches Modell zur Beschreibung der Neutrinomassen verwendet. Das betrachtete Modell gehört zur Klasse der supersymmetrischen Modelle. Supersymmetrische Modelle sind eine Erweiterung des SM aufbauend auf einer zusätzlichen Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen. In den letzten Jahren sind Supersymmetrische Modelle aus vielen Gründen populär geworden. Sie lösen auf einfachem Weg z.B. das Natürlichkeits- und Hierarchieproblem. Durch die Abwesenheit rechtshändiger Isosingulettneutrinos in diesen Modellen, ist der Mechanismus, der zu massiven Neutrinos führt, grundsätzlich verschieden vom Higgsmechanismus des Standard Modells. Ein Problem aller Modelle für Neutrinomassen ist, daß ein direkter Vergleich mit experimentellen Daten noch nicht

möglich ist. Vor allem bei supersymmetrischen Modellen bereitet dies durch die Vielzahl von möglichen Kopplungen Probleme. Meist werden daher zusätzliche Symmetrien herangezogen, um auf eine definierte Weise die Parameterzahl der Modelle zu reduzieren. Dieser Weg wird auch in dieser Arbeit verfolgt.

Ein Test unseres Modells wird durch Vergleich mit einer anderen Observablen durchgeführt. Dazu eignet sich die Majorana-Neutrinomasse $\langle m \rangle$, die im neutrinolosen Doppeltenbetazerfall ($0\nu\beta\beta$) eine wichtige Rolle spielt. Der $0\nu\beta\beta$ Prozeß ist ein Prozeß höherer Ordnung. Er stellt eine Möglichkeit dar zu testen, ob das Neutrino ein Majoranateilchen ist. Der $0\nu\beta\beta$ sollte beobachtbar sein, falls das Neutrino, wie in unserem Modell, ein massives Majoranateilchen ist. Der Mechanismus, der zum $0\nu\beta\beta$ Zerfall führen kann, ist in Abbildung 1.1 schematisch gezeigt. Der $0\nu\beta\beta$ ist bisher noch nicht beobachtet worden. Aber aus den Grenzwerten für die Lebensdauer bestimmter Kerne bezüglich des $0\nu\beta\beta$ kann eine Obergrenze für $\langle m \rangle$ abgeleitet werden. Diese wird als Test für unser Modell massiver Majorananeutrininos herangezogen.

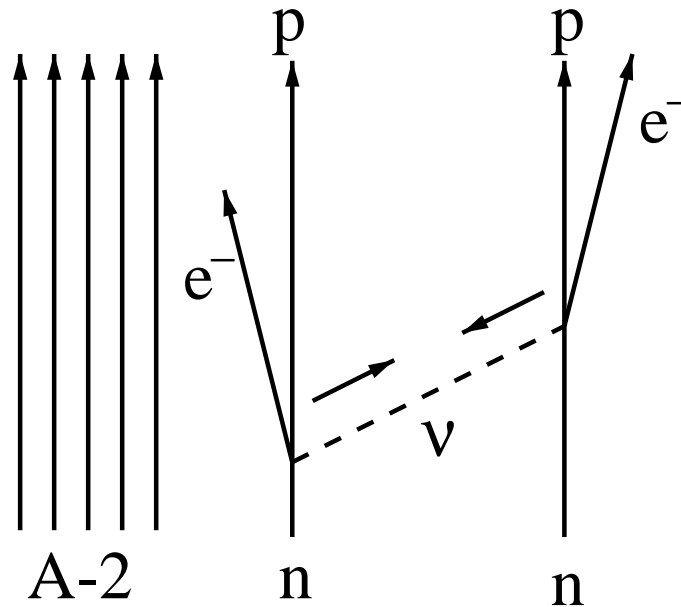


Abbildung 1.1: *Schema für Neutrinolosen Doppeltenbetazerfall durch Austausch eines massiven Majorana Neutrinos.*

Der $0\nu\beta\beta$ Prozeß kann nur in Kernen, also Vielteilchensystemen auftreten. Man muß daher zu seiner theoretischen Beschreibung ein Vielteilchenproblem lösen.

Dies kann aufgrund der Vielzahl der möglichen Zustände nur näherungsweise geschehen. Ein erfolgreiches und oft verwendetes Konzept, dies zu tun, ist die pn-QRPA² Methode. Ein Problem dieser Methode ist jedoch, daß sie einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich hat. Z.B. liegt der physikalisch relevante Wert des 1^+ -Proton-Neutron-Gamow-Teller-Matrixelements im beobachteten neutrinobegleiteten $\beta\beta$ Zerfall sehr nahe am Ende des Gültigkeitsbereichs der pn-QRPA Methode. Im letzten Teil dieser Arbeit wird eine neue Methode vorgestellt, wie man den Gültigkeitsbereich in einem einfachen, exakt lösbaren Modell erweitern kann.

Die gesamte Arbeit gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil werden die Konsequenzen der Neutrinooszillationsexperimente für die Neutrinomassenmatrix untersucht. In diesem Zusammenhang werden die sich aus der Dirac oder Majorana Natur ergebenden Konsequenzen für die Neutrinomassenmatrix analysiert. Ebenso wird in diesem Teil der Einfluß des LSND Ergebnisses auf die Neutrinomassenmatrix untersucht. Im zweiten Teil werden massive Neutrinos in einem supersymmetrischen Modell beschrieben. Durch Vergleich der theoretischen Neutrinomassenmatrix mit den Einschränkungen, die sich aus den Neutrinooszillationsexperimenten für die Neutrinomassenmatrix ergeben, werden neue Obergrenzen für Kopplungskonstanten des Modells abgeleitet. Durch Einbeziehung einer zusätzlichen $U(1)_X$ Symmetrie werden eindeutige Werte für die Neutrinomassen im Rahmen des betrachteten Modells bestimmt. Daraus wird die gemittelte Majorananeutrinomasse abgeleitet und die Verträglichkeit mit den Ergebnissen der $0\nu\beta\beta$ Experimente getestet. Im letzten Teil wird schließlich eine Methode vorgestellt, die eine Möglichkeit darstellt, den Gültigkeitsbereich der QRPA Methode zu erweitern.

Zu Beginn jedes Kapitels werden zunächst die theoretischen Grundlagen dargestellt. Am Ende jedes Kapitels sind die jeweiligen Ergebnisse zusammengefaßt.

²Quasiboson Random Phase Approximation

Kapitel 2

Massive Neutrinos und Neutrino Oszillationen

Seit der Postulierung des Neutrinos durch Wolfgang Pauli im Jahr 1930 in seinem Brief an die “radioaktiven Damen und Herren” in Tübingen, sind viele Eigenschaften der Neutrinos erforscht und entdeckt worden. So ist die Existenz von drei Isodublettzuständen aus der Zerfallsbreite des Z^0 bestimmt worden. Auch Wirkungsquerschnitte für Standardreaktionen sind heute gut bekannt. Jedoch ist es bis heute noch nicht gelungen, die Masse von Neutrinos direkt zu messen. Es existieren bisher nur Obergrenzen für die Massen der Wechselwirkungseigenzustände. Diese liegen heute bei

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} &< 2.6 \text{ eV}[2], \\ m_{\nu_\mu} &< 170.0 \text{ keV}[3], \\ m_{\nu_\tau} &< 18.2 \text{ MeV}[3]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aufgrund der Ergebnisse von Neutrinooszillationsexperimente kann man davon ausgehen, daß Neutrinos massive Teilchen sind. Die Größe der Neutrinomassen läßt sich jedoch aus diesen Experimenten nicht bestimmen. Eine weitere ungeklärte Neutrinoeigenschaft ist dessen eigentliche Natur, also die Frage, ob das Neutrino analog zum fermionischen Elektron ein Diraceteilchen oder — wie von Ettore Majorana im Jahr 1937 [10] vorgeschlagen — ein sogenanntes Majoranateilchen ist. Wenn das Neutrino ein Majoranateilchen ist, ist es bis auf eine Phase sein eigenes Antiteilchen. Dies ist bei den uns bisher bekannten Teilchen nur für das Neutrino möglich. Es ist das einzige elementare neutrale Fermion unter den heute bekannten Elementarteilchen.

In der Theorie der schwachen Wechselwirkung kommen nur linkshändige Neutrinos und rechtshändige Antineutrinos vor. Es wechselwirken daher nur zwei Neutrinozustände ν_L und ν_R^c aus jeder Familie. Die beiden Zustände ν_R und ν_L^c sind für masselose Neutrinos unerreichbar. Eine meßbare Unterscheidung zwischen Dirac- und Majorananeutrinos ist nur möglich, wenn Neutrinos massiv sind. Die für Dirac- und Majorananeutrinos möglichen Zustände sind schematisch in Abbildung 2.1 dargestellt. Um, ausgehend von einem linkshändigen Neutrino ν_L , zu einem rechtshändigen zu kommen, muß ein Masseterm vorhanden sein. Das linkshändige Neutrino ν_L bewegt sich dann mit einer Geschwindigkeit kleiner als der Lichtgeschwindigkeit c . Durch eine Lorentztransformation kann man in diesem Fall immer ein Koordinatensystem finden, in dem das Neutrino seinen Spin in Flugrichtung hat und somit rechtshändig ist. Wenn dieser Zustand vom anderen bekannten Wechselwirkungszustand $\bar{\nu}_R$ verschieden ist, benötigt man zur Beschreibung der Neutrinos analog zu den geladenen Leptonen und Quarks vier Komponenten. Identifizieren kann man diese als links- bzw. rechtshändige Neutrinos und zusätzlich jeweils als Teilchen und Antiteilchen. Da aber die Ladung

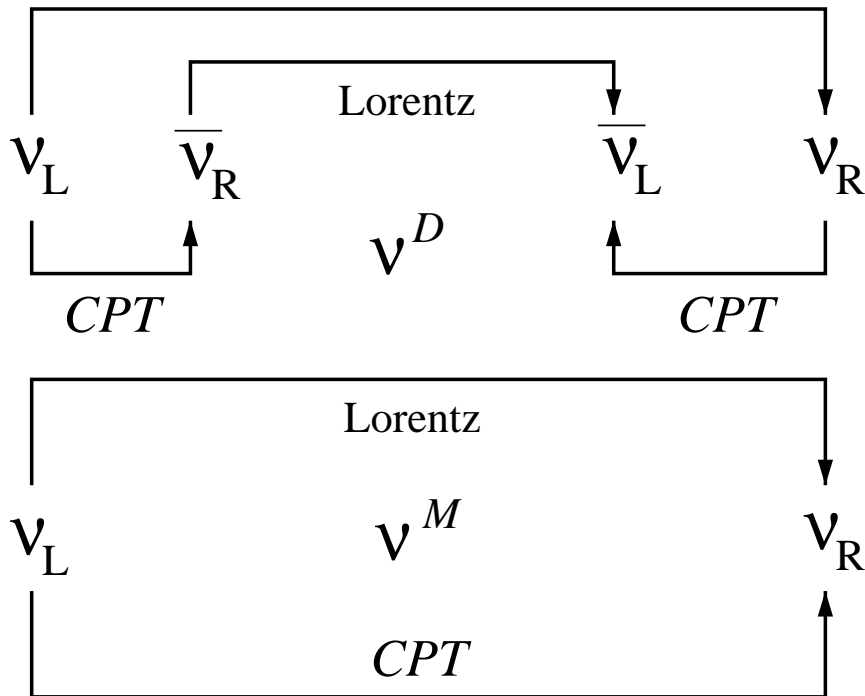


Abbildung 2.1: Zustände für Dirac und Majorana Neutrinos.

der Neutrinos gleich Null ist, kann man den Teilchen-/Antiteilchencharakter nicht leicht bestimmen. Im Fall von Majoranateilchen ist dieser Unterschied nicht vorhanden, und es gibt nur zwei verschiedene Neutrinofelder, z.B. ν_L und $(\nu_L)^c \equiv \nu_R^c$. Im folgenden werden die elementaren Eigenschaften der Neutrinos sowohl im Fall von Dirac- als auch von Majorananeutrinos diskutiert. Daran anschließend werden die verschiedenen Möglichkeiten zur Generierung von Neutrinomassen beschrieben. Da bis heute die Neutrinomasse noch nicht experimentell bestimmt worden ist, wird der Mechanismus der Neutrinooszillationen und Experimente, die Evidenz für solche gefunden haben, diskutiert. Dabei wird untersucht, ob man aufgrund der heute existierenden Analysen von Oszillationsexperimenten alle Daten im Rahmen von drei Neutrinofamilien beschreiben kann und wo mögliche Unterschiede der Ergebnisse der Analysen durch theoretische Modelle für Neutrinomassen festgestellt werden können. Am Ende dieses Teils werden die Konsequenzen aus Analysen von Neutrinooszillationsexperimenten in Verbindung mit anderen Einschränkungen der Neutrinomassen für die Massenmatrix der Neutrinos sowohl für Diracneutrinos, als auch für Majorananeutrinos untersucht.

2.1 Neutrinoeigenschaften

2.1.1 Dirac Neutrinos

Wenn das Neutrino ebenso wie die geladenen Leptonen und Quarks ein Diraceteilchen ist, wird jeder Masseneigenzustand im freien Fall durch die Lagrangedichte der Diracgleichung (siehe z.B. [11]) beschrieben:

$$\mathcal{L} = \bar{\nu}(i\gamma \cdot \partial \mp m)\nu \quad (2.2)$$

Dabei ist ν ein Standard 4-Komponenten Spinor und m die jeweilige Neutrinomasse. Die Diracmatrizen γ erfüllen die Vertauschungsrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Die allgemeine Lösung der aus der Lagrangefunktion abgeleiteten Bewegungsgleichung $(i\gamma \cdot \partial \mp m)\nu = 0$ ist

$$\begin{aligned} \nu(x) = & \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=-1/2}^{1/2} [u(\vec{p}, s)a(\vec{p}, s) \exp(\mp i p \cdot x) \\ & + v(\vec{p}, s)b^\dagger(\vec{p}, s) \exp(+i p \cdot x)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei ist $s = \pm 1/2$ die Spinprojektion eines Neutrinos, und $a(\vec{p}, s), b^\dagger(\vec{p}, s)$ sind die Neutrinovernichtungs- und Antineutrinoerzeugungsoperatoren. In Gleichung (2.4) sind $u(\vec{p}, s)$ und $v(\vec{p}, s)$ 4-Komponenten Spinoren, die Lösungen zu

$$(\gamma \cdot p \mp m)u(\vec{p}, s) = 0, \quad (\gamma \cdot p + m)v(\vec{p}, s) = 0 \quad (2.5)$$

sind. In der Diracdarstellung der Gammamatrizen und mit Normierung

$$\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s) = 1 \quad (2.6)$$

sind diese gegeben als

$$\begin{aligned} u(\vec{p}, s) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p}/(E+m) \end{pmatrix} \chi_s \\ v(\vec{p}, s) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}/(E+m) \\ 1 \end{pmatrix} \bar{\chi}_s, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei

$$\begin{aligned} \chi_s &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } s = +\frac{1}{2}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } s = \Leftrightarrow\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \bar{\chi}_s &= \begin{cases} \Leftrightarrow\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } s = +\frac{1}{2}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } s = \Leftrightarrow\frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ist. Für ein freies Neutrino sind die Spinoren aus Gleichung (2.7) Eigenzustände des Helizitätsoperators $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$.

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u(\vec{p}, s) &= 2su(\vec{p}, s) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} v(\vec{p}, s) &= \Leftrightarrow 2sv(\vec{p}, s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dies gilt auch für den Fall massiver Neutrinos. Wichtig ist es, den Unterschied von Helizitäts- und Chiralitätseigenzuständen zu beachten. Die chiralen Eigenzustände sind Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung. Diese sind definiert durch

$$\nu_L = \frac{1}{2}(1 \Leftrightarrow \gamma_5)\nu, \quad \nu_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\nu. \quad (2.10)$$

Nach Konstruktion gilt $\nu = \nu_R + \nu_L$ und

$$\gamma_5 \nu_L = \Leftrightarrow \nu_L, \quad \gamma_5 \nu_R = +\nu_R. \quad (2.11)$$

Im Fall masseloser Neutrinos kann die Diracgleichung (2.2) zur Weylgleichung reduziert werden [11]

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \nu = \pm \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \nu. \quad (2.12)$$

Diese Gleichung wurde zuerst von Weyl im Jahr 1929 diskutiert, aber wieder verworfen, da sie die Parität verletzt. Nachdem die Paritätsverletzung von Wu nachgewiesen wurde, ist sie wiederentdeckt worden. Es kann gezeigt werden, daß CP in der Weylgleichung erhalten ist [12, 13, 14].

Im Fall masseloser Neutrinos sind Helizitäts- und Chiralitätseigenzustände identisch. Dies ist exakt nur in diesem Fall richtig. Da Neutrinos sehr leicht sind und man meist relativistische Teilchen betrachtet, kann in guter Näherung die Masse vernachlässigt werden. Dann sind die Helizitäts- und Chiralitätseigenzustände wiederum gleich.

Die Eigenschaften von Dirac Neutrinos sollen nun nicht weiter vertieft werden. Im nächsten Abschnitt werden die Eigenschaften von Majorananeutrinos dargestellt. Durch ihre einzigartige Stellung in der Welt der Elementarteilchen sind sie von theoretischer Seite von besonderem Interesse.

2.1.2 Majorana Neutrinos

Am Anfang der Diskussion der Eigenschaften von Majorana Neutrinos soll zunächst ein Gedankenexperiment stehen. Dieses soll den Unterschied und auch die Idee, warum Majorana Neutrinos eingeführt wurden, klarer machen.

Zunächst betrachtet man dazu ein geladenes Diracfeld, z.B. ein Elektron. Die Zustände können durch vier verschiedene Spinoren beschrieben werden. Zwei davon können als Zustände positiver und negativer Helizität des Elektrons interpretiert werden. Wegen der geringen Masse des Elektrons sind diese fast immer relativistisch und die Helizitätseigenzustände gleich den Chiralitätseigenzuständen. Im folgenden werden diese immer als gleich angenommen. Für die bildliche Interpretation sollte bedacht werden, daß ein Teilchen mit positiver Helizität gleich einem rechtshändigen Teilchen ist.

Somit hat man links- und rechtshändige Elektronen e_L^-, e_R^- und analog links- und rechtshändige Antielektronen e_L^+, e_R^+ . Betrachten kann man nun die Bewegung eines Elektrons in Richtung der positiven z -Achse in einem ruhendem Koordinatensystem. Die z -Komponente des Spins sei $s = \pm 1/2$. Der Spin und die Flugrichtung des Elektrons sind somit antiparallel zueinander. Es handelt sich also um ein linkshändiges Elektron e_L^- . Ein Beobachter, der sich schneller als das Elektron bewegt, sieht ein sich in negative z -Richtung bewegendes Teilchen. Er sieht somit ein rechtshändiges Teilchen. Zur Beschreibung des Teilchens kommen also für den bewegten Beobachter die Zustände e_R^- und e_R^+ in Betracht. Aufgrund der Ladung des Teilchens kann es aber nur ein Elektron, also e_R^- sein. Somit kann der Zustand e_L^- keinem Beobachter als e_R^+ erscheinen.

Wie sieht diese Überlegung für Neutrinos aus? Dazu geht man wiederum von einem linkshändigen Neutrino ν_L aus. Wenn das Neutrino massiv ist — wovon man, wie in Abschnitt 2.3.1 gezeigt werden wird, ausgehen kann — hat ein Beobachter

die Möglichkeit sich schneller als das Neutrino zu bewegen. Wie im Fall des Elektrons sieht er ein rechtshändiges Teilchen. Das Problem, das sich nun stellt, ist, daß bis heute nur linkshändige Neutrinos ν_L und rechtshändige Antineutrinos $\bar{\nu}_R$ experimentell beobachtet worden sind. Um wieder auf dieselbe Situation wie im Fall des Elektrons zu kommen, muß man also zwei Zustände, ν_R und $\bar{\nu}_L$, postulieren, die bisher noch nicht nachgewiesen worden sind. Der bewegte Beobachter wird dann wiederum ein rechtshändiges Neutrino beobachten, und wir haben ein Diracneutrino und einen analogen Fall zum Elektron. Die Auswahl des richtigen rechtshändigen Neutrinos hat der Beobachter durch die Leptonenzahl getroffen. Was ist aber, wenn diese beiden Zustände nicht existieren? Der Beobachter sieht ein rechtshändiges Objekt. Experimentell gibt es auch ein rechtshändiges Teilchen, das $\bar{\nu}_R$. Weil das Neutrino keine elektrische Ladung trägt, kann er dies beobachten, wenn die Leptonenzahl L verletzt ist. L ist die einzige Quantenzahl, die ν_L und $\bar{\nu}_R$ unterscheidet. Da die Leptonenzahlerhaltung im Standardmodell aber reiner Zufall ist und auf keiner bekannten Symmetrie beruht, wäre es nicht überraschend, wenn die Leptonenzahl keine Erhaltungsgröße wäre. Wenn diese aber verletzt ist, gibt es keinen Grund, warum der Zustand ν_L nicht in einem anderen Koordinatensystem als $\bar{\nu}_R$ erscheinen sollte. Die beiden Spinoren sind in diesem Fall die links- und rechtshändigen Projektionen ein und desselben Feldes. Weil somit nur zwei Spinoren benötigt werden, handelt es sich also um ein zweikomponentiges massives Fermionenfeld. Diese Idee wurde zuerst von Ettore Majorana im Jahr 1937 diskutiert [10], und ein Feld mit diesen Eigenschaften wird als Majoranafeld bezeichnet.

Majorana Neutrinos sollten jedoch nicht mit der in Abschnitt 2.1.1 angesprochenen Weyl Darstellung verwechselt werden. In der Weylbeschreibung sind Neutrinos notwendigerweise masselos. Somit benötigt man für die kovariante Beschreibung keine Transformation von ν_L in einen rechtshändigen Zustand, da sich das Neutrino mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Zur formalen Definition des Majoranafelds ν_i^M mit Masseneigenwert m_i wird in dieser Arbeit

$$\nu_i^M = \eta_i^M (\nu_i^M)^c \tag{2.13}$$

verwendet. Zusammen mit der generellen Entwicklung nach ebenen Wellen aus Gleichung (2.4) und den generellen C -Transformationseigenschaften (siehe z.B. [15]) erhält man

$$a = \eta_c^* b \quad b^\dagger = \eta_c^* a^\dagger. \tag{2.14}$$

Die Entwicklung eines Majorananeutrino-felds mit Masse m_i kann somit geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \nu_i^M &= \eta_i^M \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{2/3}} \sum_s [u(\vec{p}, s)a \exp(ip \cdot x) \\ &\quad + v(\vec{p}, s)\eta_c^* a^\dagger \exp(\Leftrightarrow ip \cdot x)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei wird η_c^* als Erzeugungsphasenfaktor bezeichnet. Dieser spielt eine wichtige Rolle bei den CP -Eigenschaften der Majorana Neutrinos. Zur Vereinfachung setzt man meist $\eta^M = 1$.

Wie transformiert sich nun ein Majorana Neutrino unter CP ? Die CP -Phase eines freien Majorana Neutrinos ist definiert als

$$CP|\nu_i^M(\vec{p}, s)\rangle = \eta_{CP}^M |\nu_i^M(\Leftrightarrow\vec{p}, s)\rangle. \quad (2.16)$$

Mit Gleichungen (2.15) und der Majoranabedingung erhält man für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\begin{aligned} CPA^\dagger(\vec{p}, s)P^{-1}C^{-1} &= \eta_{CP}\eta_c^* a^\dagger(\Leftrightarrow\vec{p}, s) \\ CPA^\dagger(\vec{p}, s)P^{-1}C^{-1} &= \Leftrightarrow\eta_{CP}\eta_c a^\dagger(\Leftrightarrow\vec{p}, s). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Also insgesamt

$$\begin{aligned} \eta_{CP}^M &= \eta_{CP}\eta_c^* \\ &= \Leftrightarrow\eta_{CP}^*\eta_c \\ &= \Leftrightarrow\eta_{CP}^{M*}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Majorana Neutrinos haben also eine rein imaginäre CP -Phase.

Bei der bisherigen Diskussion wurde ein einzelner Neutrinomasseneigenzustand betrachtet. Wie in Abschnitt 2.3.1 gezeigt werden wird, muß man aber davon ausgehen, daß die Massen- und Wechselwirkungseigenzustände nicht übereinstimmen. Die Wechselwirkungseigenzustände ν_α , $\alpha = e, \mu, \tau$, sind dann durch eine nichtdiagonale, unitäre Mischungsmatrix U , definiert durch

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i, \quad (2.19)$$

mit den Masseneigenzuständen verknüpft. Der ladungskonjugierte Wechselwirkungszustand ist dann unter Verwendung von Gleichung (2.13) gegeben als

$$\begin{aligned}
 \nu_\alpha^c &= \sum_i U_{\alpha i}^* \nu_i^c \\
 &= \sum_i U_{\alpha i}^* \eta_{M_i}^* \nu_i \\
 &\neq \eta_{M_\alpha}^* \nu_\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Der Wechselwirkungseigenzustand ist daher im Allgemeinen, selbst wenn jeder Masseneigenzustand ein Majorananeutrino ist, nicht unbedingt auch ein Majorananeutrino. ν_α ist nur im Fall einer reellen Mischungsmatrix U und gleichen Phasen η_{M_i} für alle Masseneigenzustände auch ein Majorananeutrino.

Dieser Unterschied ist von besonderer Bedeutung, wenn man die Vektorkopplung von Majorananeutrinos betrachtet. Für die Vektorkopplung findet man allgemein

$$\bar{\nu}_j^c \gamma_\mu \nu_k^c = \Leftrightarrow \bar{\nu}_k \gamma_\mu \nu_j. \tag{2.21}$$

Speziell für die Vektorkopplung von Majorananeutrinos ergibt sich

$$\bar{\nu}_j^c \gamma_\mu \nu_k^c = \eta_j^M \eta_k^{M*} \bar{\nu}_j \gamma_\mu \nu_k. \tag{2.22}$$

Es gibt damit keine diagonalen Beiträge zur Vektorkopplung von Majorananeutrinos.

Die von der CHARM II gemessenen Werte für die Vektorkopplung der Neutrinos lassen den Fall von Majorananeutrinos auf den ersten Blick somit als den unwahrscheinlicheren erscheinen. Der von CHARM II gefundene Wert für die Vektorkopplung ist [16]

$$g_V^{e\nu_e} = \Leftrightarrow 0.035 \pm 0.012(\text{stat}) \pm 0.012(\text{syst}). \tag{2.23}$$

Der nicht verschwindende Wert für die Vektorkopplung scheint zu dem Schluß zu führen, daß Neutrinos keine Majoranateilchen sein können [17]. Diese Schlußfolgerung ist aber so nicht haltbar, da die Wechselwirkungseigenzustände auch in diesem Fall keine Masseneigenzustände sein müssen. Die Vektorkopplung der Wechselwirkungseigenzustände ergibt sich bei gemischten Majorananeutrinos zu

$$\bar{\nu}_\alpha \gamma_\lambda \nu_\beta = \sum_{j < k} [U_{\alpha j}^* U_{\beta k} \Leftrightarrow U_{\alpha k}^* U_{\beta j} \eta_j^M \eta_k^{M*}] \bar{\nu}_j \gamma_\lambda \nu_k. \tag{2.24}$$

Für den Fall einer reellen Mischungsmatrix U führt dies zu Einschränkungen der dann möglichen reellen Phasen η_i^M . Zur Veranschaulichung kann man den Fall von nur zwei Familien betrachten. Für gleiche Werte der Phasen η_i^M beider Familien findet man bei einer reellen Mischungsmatrix

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_\alpha \gamma_\lambda \nu_\alpha &= \bar{\nu}_\beta \gamma_\lambda \nu_\beta = 0, \\ \bar{\nu}_\alpha \gamma_\lambda \nu_\beta &= \bar{\nu}_1 \gamma_\lambda \nu_2.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Im Fall von entgegengesetzten Vorzeichen der Phasen η_i^M ergibt sich die Vektorkopplung zu

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_\alpha \gamma_\lambda \nu_\alpha &= \Leftrightarrow \bar{\nu}_\beta \gamma_\lambda \nu_\beta = \sin 2\theta \bar{\nu}_1 \gamma_\lambda \nu_2, \\ \bar{\nu}_\alpha \gamma_\lambda \nu_\beta &= \cos 2\theta \bar{\nu}_1 \gamma_\lambda \nu_2\end{aligned}\tag{2.26}$$

Das Ergebnis der CHARM II Kollaboration impliziert daher, daß für den Fall einer reellen Mischungsmatrix U die Phasen η_i^M nur +1 und -1 sein können, jedoch nicht alle das gleiche Vorzeichen haben dürfen.

2.2 Neutrinomassenmatrizen

Die möglichen Terme, die in der Lagrangedichte als Massenterme auftreten können, müssen lorentzinvariant sein. Somit können für fermionische Felder $\Psi_L = \{\Psi_{aL}\}$, $\Psi_R = \{\Psi_{aR}\}$ im Allgemeinen die folgenden bilinearen Kombinationen vorkommen

$$\bar{\Psi}_{aL} \mathcal{M}_{ab}^D \Psi_{bR} + \text{H.C.}\tag{2.27}$$

$$\bar{\Psi}_{aL} \mathcal{M}_{ab}^L \Psi_{bR}^c + \bar{\Psi}_{aL}^c \mathcal{M}_{ab}^R \Psi_{bR} + \text{H.C.}\tag{2.28}$$

Dabei ist a, b der Wechselwirkungsfamilienindex, und die Felder Ψ_L und Ψ_R tragen die gleiche elektrische Ladung, können aber verschiedene Quantenzahlen wie Isospin haben. Die Felder $\bar{\Psi}_{bR}^c$, $\bar{\Psi}_{aL}^c$ sind die ladungskonjugierten Felder in Bezug auf $\bar{\Psi}_{bL}$, $\bar{\Psi}_{aR}$. Man beachte dabei, daß gilt [18]

$$(\Psi_{R,L})^c = (\Psi^c)_{L,R} \equiv \Psi_{L,R}^c.\tag{2.29}$$

Wenn daher keine rechtshändigen Neutrinos in der Theorie enthalten sind, existiert auch Ψ_L^c nicht. Die Diagonalelemente des als Diracmassenterm bezeichneten

Ausdrucks \mathcal{M}_{ab}^D aus Gleichung (2.27) sind generell erlaubt, während die Nebendiagonalelemente nur von Null verschieden sind, wenn die einzelnen Familienquantenzahlen nicht erhalten sind. Der als Majoranamassenterme bezeichnete Ausdruck aus Gleichung (2.28) ist nicht erlaubt, wenn alle Ladungen (Elektrische Ladung, Baryonenzahl, Leptonenzahl) erhalten sind. Somit ist er aufgrund der Erhaltung der elektrischen Ladung für alle Quarks und geladenen Leptonen verboten. Nur für das Neutrino, das unter den bekannten Elementarteilchen als einziges ein neutrales Fermion ist, kann ein Majoranamassenterm auftreten, wenn die Leptonenzahl keine Erhaltungsgröße ist. Majoranamassenterme sind im Gegensatz zu Diracmassentermen immer symmetrisch, es gilt stets

$$\mathcal{M}_{ab}^{R,L} = \mathcal{M}_{ba}^{R,L}. \quad (2.30)$$

Wenn die Leptonenzahl gebrochen ist und zusätzlich auch rechtshändige isosingulett Neutrinos existieren, enthält die allgemeinste Neutrinomassenmatrix folgende Beiträge:

$$\begin{array}{c|cc} & \Psi_R^c & \Psi_R \\ \hline \bar{\Psi}_L & \mathcal{M}_L & \mathcal{M}^D \\ \bar{\Psi}_L^c & \mathcal{M}^{D^T} & \mathcal{M}_R \end{array} \quad (2.31)$$

Dabei können die Majoranamassenterme \mathcal{M}^R und \mathcal{M}^L auch auftreten, wenn nur rechts- oder nur linkshändige Neutrinos existieren. In großvereinheitlichten Theorien treten diese Terme meist in Form von reinen linkshändigen Neutrinos auf. Der Massenterm hat dann die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m (\bar{\nu}_R^c \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R^c) \\ &= m \bar{\nu}_M \nu_M. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dabei ist $\nu_M = \nu_L + \nu_R^c$ ein Majorananeutrino. Da ein Majorananeutrino keine definierte Leptonenzahl hat (Linearkombination aus Neutrino und Antineutrino), muß die Leptonenzahl um zwei Einheiten verletzt sein, um einen Majoranamassenterm zu erhalten. Ein Diracmassenterm dagegen würde die Leptonenzahl nicht verletzen, da er invariant unter der Phasentransformation

$$\nu \rightarrow e^{i\alpha} \nu \quad (2.33)$$

ist.

Da im heutigen Standardmodell der Elementarteilchen nur linkshändige isodublett Neutrinos, aber keine rechtshändigen isosingulett Neutrinos enthalten sind und keine leptonenzahlverletzenden Prozesse vorkommen, sind Neutrinos im Standardmodell masselos. Massive Neutrinos kann man im Standardmodell erhalten, indem man z.B. rechtshändige isosingulett Neutrinos einführt. Dies würde bei weiterhin erhaltener Leptonenzahl zu reinen Diracmassentermen führen. Analog zu den Massetermen der Quarks und geladenen Leptonen führt die Generierung aber im Rahmen von Eichtheorien auf Probleme, wenn sich die links- und rechtshändigen Neutrinos unter einer der Eichgruppen der Theorie verschieden transformieren [18]. Da die links- und rechtshändigen Neutrinos verschiedene Ladungen bezüglich des schwachen Isospins haben, kann man aus den beiden Feldern keine bilinearen Terme konstruieren, die invariant unter Transformationen bezüglich dieser Eichgruppe sind. Eichinvariante Massenterme kann man daher nur durch Yukawakopplungen generieren, wenn die Eichsymmetrie spontan gebrochen ist [1]. Dazu wird im Standardmodell ein zusätzliches isodublett Feld, das sogenannte Higgsfeld, eingeführt. Durch einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert dieses Felds wird die Eichsymmetrie spontan gebrochen und führt durch Yukawaterme zu den Einträgen in der Massenmatrix. Im Falle reiner Diracmassen ist es im Rahmen von großvereinheitlichten Theorien jedoch nicht möglich, die geringe Größe der Yukawakopplung der Neutrinos an das Higgs zu verstehen [19]. Daher geht man in fast allen Erweiterungen des Standardmodells, die auf einem Vereinheitlichung Schema basieren, davon aus, daß das Neutrino ein Majoranateilchen ist.

Der allgemeinste Weg, massive Majorananeutrinos zu beschreiben stellt eine Kombination sowohl aus Dirac-, als auch Majoranamassentermen dar. Dazu benötigt man sowohl rechtshändige Neutrinos, als auch leptonenzahlverletzende Terme. Das Neutrino ist in diesem Fall ein Majoranateilchen. Der Masseterm ist dann gegeben als

$$\mathcal{L}_{mass}^{D-M} = \Leftrightarrow \frac{1}{2} \bar{\nu}^c \mathcal{M} \nu + \text{H.C.}, \quad (2.34)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} m_L & M \\ M & m_R \end{pmatrix}, \\ \nu &= (\nu_L, \nu_R^c) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ist. Interessant ist der als Seesaw Mechanismus bekannte Spezialfall dieser allgemeinen Matrix [20]. In diesem Fall nimmt man an, daß $m_R \gg M$ und $m_L = 0$

ist. Im Fall von nur einer Generation ergeben sich die beiden Massenzustände zu

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{4M^2 + m_R^2} \Leftrightarrow \frac{m_R}{2} \\
 &\simeq \frac{M^2}{m_R},
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{4M^2 + m_R^2} + \frac{m_R}{2} \\
 &\simeq m_R.
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Man erhält also ein sehr schweres und ein extrem leichtes Neutrino. Im allgemeinen Dreifamilienfall findet man drei leichte und drei schwere Neutrinos. Die schweren Neutrinos stellen im Rahmen der Seesaw Theorie noch nicht beobachtete Teilchen dar, und die leichten Neutrinos sind die schon bekannten. Der Seesaw Mechanismus stellt eine Möglichkeit dar, die geringe Masse der bekannten Neutrinos zu erklären, ohne in Konflikt mit großvereinheitlichten Theorien zu kommen. Das Problem des Seesaw Mechanismus auf der anderen Seite ist, daß man rechtshändige Neutrinos ohne allgemeine Begründung ins Standardmodell integrieren muß. Auch ist dies nur eine Teilerweiterung, ohne andere Bereiche gleichzeitig in ein natürliches Modell für Neutrinomassen einzubinden.

Zur theoretischen Beschreibung massiver Neutrinos wird in dieser Arbeit von Majorananeutrinos ausgegangen. In Abschnitt 3 wird dazu ein supersymmetrisches Modell, das \mathcal{R}_p -MSSM, verwendet. Das \mathcal{R}_p -MSSM ist eine supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells auf minimaler Basis. Im \mathcal{R}_p -MSSM sind alle drei Neutrinos massiv. Diese Massen werden im Rahmen des \mathcal{R}_p -MSSM ohne die Einführung von rechtshändigen Neutrinos generiert.

2.3 Oszillationen massiver Neutrinos

In den folgenden Abschnitten wird das Phänomen der Neutrinooszillationen diskutiert. Als erstes werden Experimente, die Evidenz für Neutrinooszillationen gefunden haben, vorgestellt. Als nächstes werden die Voraussetzungen für Neutrinooszillationen sowohl im Vakuum als auch im Medium hergeleitet. Anschließend werden Analysen von Neutrinooszillationen vorgestellt. Anhand dieser Analysen wird zunächst untersucht, wie die allgemeine Neutrinomassenmatrix aussehen kann. Als nächstes werden die Auswirkungen der Einbeziehung des umstrittenen LSND Ergebnisses auf die Neutrinomassenmatrix diskutiert. Abschließend werden Obergrenzen für die Matrixelemente der Neutrinomassenmatrix im Allgemeinen und für den Fall von Majorananeutrinos berechnet.

2.3.1 Experimentelle Evidenz für Neutrinooszillationen

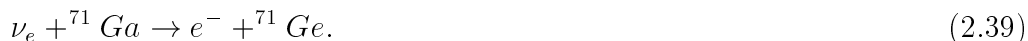
Zur Untersuchung der Neutrinoeigenschaften benötigt man eine Quelle, deren Intensität ausreicht, um bei dem verschwindend kleinen Wirkungsquerschnitt von nur etwa 10^{-38} cm^2 [21] ($E_\nu < 1 \text{ GeV}$), eine genügend große Zahl von Neutrinowechselwirkungen zu erzeugen. In der Natur und im Labor gibt es dafür verschiedene Möglichkeiten. Man teilt deshalb die verschiedenen Arten von Neutrinoexperimenten, die Evidenz für Neutrinooszillationen gefunden haben, nach der Art der Quelle in Klassen ein. Die historisch ältesten sind die solaren Neutrinoexperimente.

Bei den solaren Neutrinoexperimenten untersucht man Neutrinos, die in der Sonne produziert werden. Im Rahmen des Standard-Sonnenmodells (*SSM*) entstehen Elektronneutrinos im CNO und *pp* Zyklus (siehe Abbildungen 2.3 und 2.2 [22, 23]). Die so entstandenen Elektronneutrinos führen zu den in Tabelle 2.1 angegebenen Flüssen und haben im Rahmen des SSM, je nach Quelle, verschiedene Energien. Mit diesen Angaben kann die erwartete Reaktionsrate für Experimente berechnet werden. Das erste Experiment, das solare Neutrinos untersucht hat, war das Davis Experiment in Homestake im Jahre 1968 [5, 4]. Der Neutrinodetektor bestand dabei aus einem Tank, der mit 6×10^5 Litern C_2Cl_4 gefüllt war. Durch induzierten inversen β Zerfall am Chlor in der Reaktion



wurde dabei radioaktives Argon produziert. Dieses wurde durch Spülen mit ${}^4\text{He}$ extrahiert und mit Proportionalzählrohren nachgewiesen. Die Energieschwelle für die Nachweisreaktion war dabei $E_{th} = 0.81 \text{ MeV}$. Somit wurden hauptsächlich ${}^8\text{B}$ und ${}^7\text{Be}$ Neutrinos nachgewiesen. Die gemessenen Werte für den Elektronneutrinofluß sind in Tabelle 2.2 dargestellt. Beim Vergleich mit den im Rahmen des SSM nach BP98 [27] berechneten Werten wurden im Experiment eine zu geringe Anzahl von Elektronneutrinos gemessen.

Auch in den anderen beiden radiochemischen Experimenten GALLEX [7] und SAGE [28] wurde ein im Vergleich zum SSM zu geringer Fluß an Elektronneutrinos gefunden (siehe Tabelle 2.2). Der Nachweis erfolgte in diesen Experimenten ebenso über den inversen Betazerfall, aber in der Reaktion



Der Vorteil dieser Experimente war die niedrigere Energieschwelle im Vergleich zum Homestake Experiment. Die Energieschwelle lag bei $E_{th}^{71\text{Ga}} = 0.233 \text{ MeV}$. Somit tragen alle verschiedenen Ketten der solaren Zyklen bei.

Quelle	Reaktion	$\langle E_{\nu_e} \rangle / \text{MeV}$	$E_{\nu_e}^{\text{max}} / \text{MeV}$	Fluß / $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$
pp	$p + p \rightarrow d + e^+ \nu_e$	0.267	0.423 ± 0.03	$(5.94 \pm 0.06) \times 10^{10}$
pep	$p + e^- + p \rightarrow d + \nu_e$	1.445	1.445	$(1.39 \pm 0.01) \times 10^8$
${}^7\text{Be}$	$e^- + {}^7\text{Be} \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	0.386 0.863	0.386 0.863	$(4.80 \pm 0.43) \times 10^9$
${}^8\text{B}$	${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{B}^* + e^+ \nu_e$	6.735	~ 15	$(5.15_{-0.72}^{+0.98}) \times 10^6$
hep	${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ \nu_e$	9.628	18.778	2.10×10^3
${}^{13}\text{N}$	${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ \nu_e$	0.706	1.1982 ± 0.0003	$(6.05_{-0.77}^{+1.15}) \times 10^8$
${}^{15}\text{O}$	${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ \nu_e$	0.996	1.732 ± 0.001	$(5.32_{-0.80}^{+1.15}) \times 10^8$
${}^{17}\text{F}$	${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O} + e^+ \nu_e$	0.998	1.7364 ± 0.0003	$(6.33_{-0.76}^{+0.76}) \times 10^6$

Tabelle 2.1: Quellen von Elektronenneutrinos in der Sonne im Rahmen des SSM [24, 23, 25, 26] und Werte der gemittelten Elektronenneutrinoenergie $\langle E_{\nu_e} \rangle$, der maximalen Energie $E_{\nu_e}^{\text{max}}$ und des Fluusses aus dem jeweiligen Prozeß.

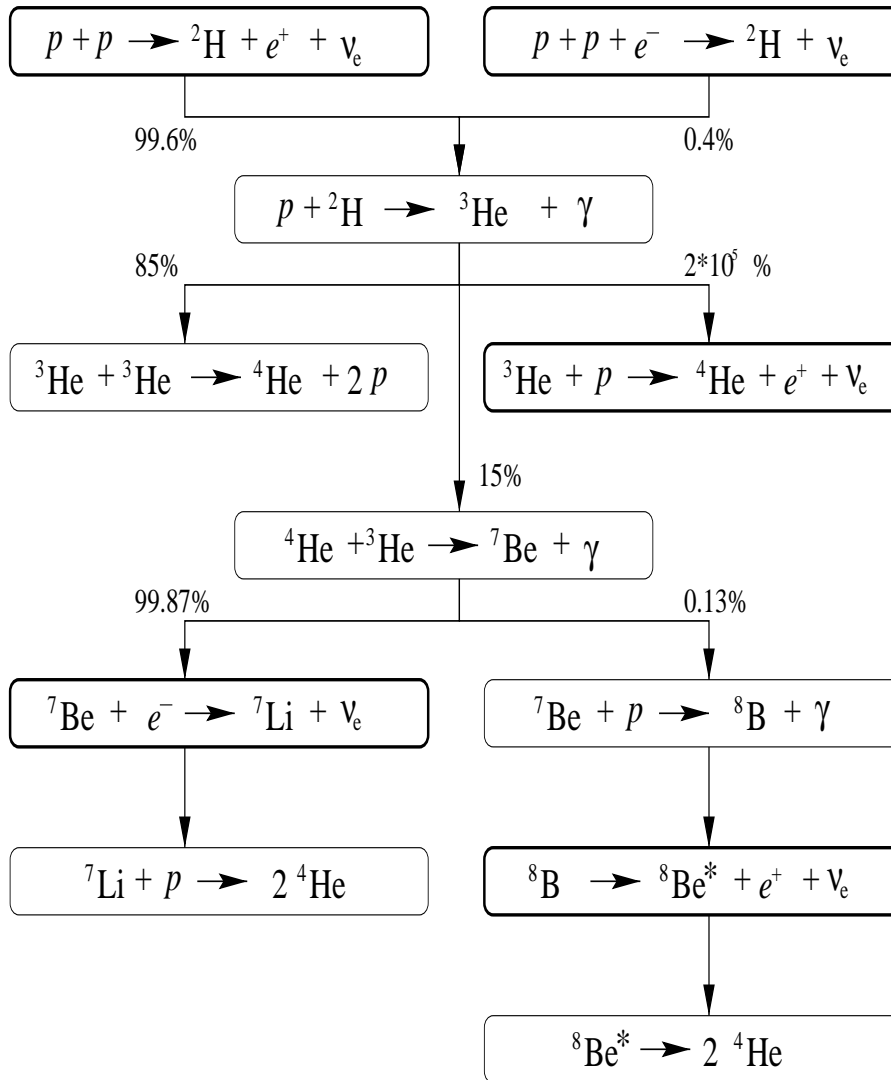


Abbildung 2.2: *pp Zyklus der Fusionsprozesse in der Sonne. Dick umrahmte Prozesse tragen zum Elektronneutrinofluß der Sonne bei.*

Weiterhin wurden solare Neutrinos mit den Kamiokande [6] und Super-Kamiokande [29] Experimenten untersucht. Die Detektion der Neutrinos erfolgte dabei über die Beobachtung des Cherenkovlichts der Rückstoßelektronen bei elastischer Neutrino-Streuung,

$$\nu_i + e^- \rightarrow \nu_i + e^- . \quad (2.40)$$

Da bei elastischer Neutrino-Streuung an ruhenden Elektronen das Elektron

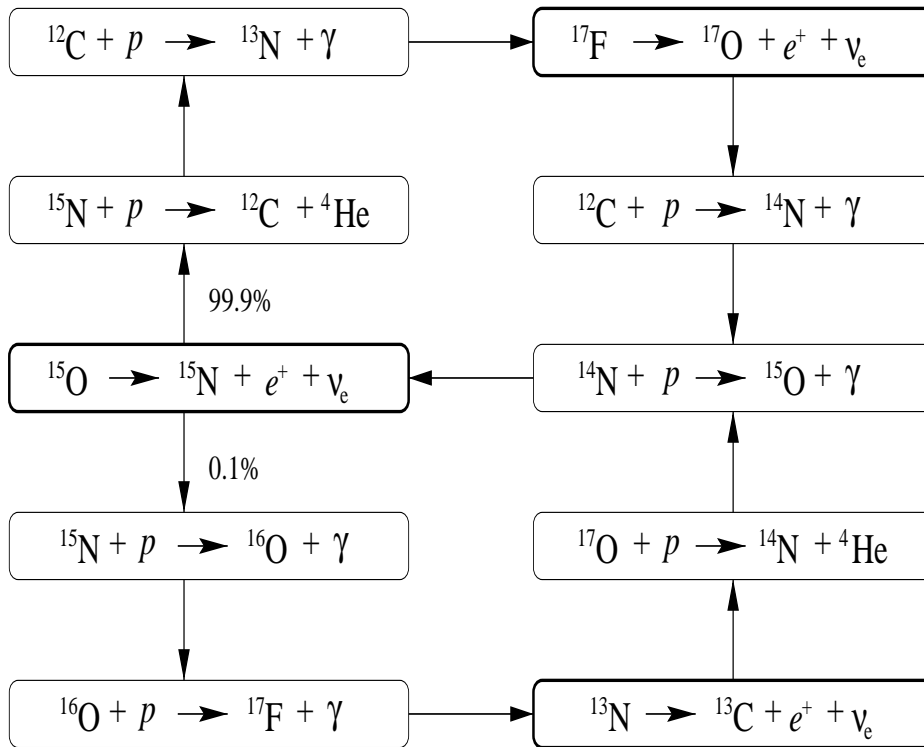


Abbildung 2.3: CNO-Zyklus der Fusion in der Sonne. Dick umrahmte Prozesse tragen zum Elektronenneutrinofluß der Sonne bei.

hauptsächlich in Richtung des einlaufenden Neutrinos gestreut wird, konnte mit diesen Experimenten auch die Richtung des nachgewiesenen Neutrinos bestimmt werden. Die Energieschwelle für den Nachweis der Neutrinos war durch die Schwelle für den Nachweis des Cherenkovlichts gegeben. Durch den großen Untergrund im Niederenergiebereich war diese höher als in den radiochemischen solaren Neutrinoexperimenten. Für das Kamiokande Experiment lag er bei $E_{th}^{Kam} \simeq 7$ MeV und im Super-Kamiokande Experiment bei $E_{th}^{SK} \simeq 6.5$ MeV. Es konnten somit nur Neutrinos aus dem ^8B Prozeß nachgewiesen werden. Die gemessenen Flüsse sind wie in den radiochemischen Experimenten kleiner als im Rahmen des SSM vorhergesagt. Die Ergebnisse aller solaren Neutrinoexperimente sind in Tabelle 2.2 dargestellt. Die gefundenen Werte sind alle signifikant kleiner als die Vorhersagen im Rahmen des SSM. Die Abweichungen der solaren Neutrinoexperimente von den Vorhersagen des SSM werden als solares Neutrinoexperiment bezeichnet. Die dabei auftretende Differenz zwischen theoretischen Vorhersagen und experi-

Experiment	Ergebnis	Theorie	$\frac{\text{Ergebnis}}{\text{Theorie}}$
Homestake [4]	$2.56 \pm 0.16 \pm 0.16$	$7.7^{+1.2}_{-1.0}$	$0.33^{+0.04}_{-0.05}$
GALLEX [7]	$77.5 \pm 6.2^{+4.3}_{-4.7}$	129^{+8}_{-6}	0.69 ± 0.07
SAGE [28]	$66.6^{+6.8+3.8}_{-7.1-4.0}$	129^{+8}_{-6}	0.52 ± 0.07
Kamiokande [6]	$2.80 \pm 0.19 \pm 0.33$	$5.15^{+1.0}_{-0.7}$	0.54 ± 0.07
Super-Kamiokande [29]	$2.44 \pm 0.05^{+0.09}_{-0.07}$	$5.15^{+1.0}_{-0.7}$	$0.47^{+0.07}_{-0.09}$

Tabelle 2.2: Experimentelle Ergebnisse und theoretische Vorhersagen im Rahmen des SSM für solare Neutrinoexperimente. Die Ergebnisse für Homestake, GALLEX und SAGE sind in SNU ($1 \text{ SNU} \equiv 10^{-36}$ Ereignisse pro Atom und Sekunde) und für Kamiokande und Super-Kamiokande in Einheiten des ^8B Neutrinoflusses angegeben.

mentellen Ergebnissen kann durch Neutrinooszillationen erklärt werden und ist einer von mehreren Hinweisen auf die Existenz von Neutrinooszillationen.

Weitere Neutrinoexperimente, die Evidenz für Neutrinooszillationen gefunden haben, sind die atmosphärischen Neutrinoexperimente. Diese verwenden Neutrinos, die durch kosmische Strahlung in der Atmosphäre produziert werden, als Quelle. Die verschiedenen Stufen der Neutrinoproduktion in der Atmosphäre, die zum Verständnis der experimentellen Daten unerlässlich sind, kann man vereinfacht in drei Schritte einteilen. Im ersten Schritt werden dabei durch Stöße primärer kosmischer Strahlung geladene Pionen und Kaonen erzeugt. Diese zerfallen im zweiten Schritt in

$$\begin{aligned}
 \pi^\pm &\rightarrow \mu^\pm + (\bar{\nu}_\mu) \\
 K^\pm &\rightarrow \mu^\pm + (\bar{\nu}_\mu).
 \end{aligned}
 \tag{2.41}$$

Dies ist der erste Prozeß, der zur Neutrinoproduktion beiträgt. Im dritten Schritt zerfallen die im zweiten Schritt erzeugten Myonen durch

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + (\bar{\nu}_e) + (\bar{\nu}_\mu).
 \tag{2.42}$$

Im Niederenergiebereich kann die Kaonproduktion aufgrund der höheren Kaonenmasse vernachlässigt werden. Das Verhältnis der Myon- zu Elektronneutrinos ist daher etwa

$$\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e} \right) = \frac{\#\nu_\mu + \#\bar{\nu}_\mu}{\#\nu_e + \#\bar{\nu}_e} \simeq 2.
 \tag{2.43}$$

Ab einer Energie von etwa 1 GeV zerfallen nicht mehr alle Myonen auf ihrem Weg zur Erde. Das Verhältnis aus Gleichung (2.43) steigt deshalb für diesen Energiebereich an [30, 31]. Zum Vergleich von Vorhersagen und experimentellen Werten, wird das betrachtete Verhältnis für jedes Experiment im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen berechnet. Betrachtet wird anschließend die Größe

$$R = \frac{\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)_{Daten}}{\left(\frac{\nu_\mu}{\nu_e}\right)_{MC}}. \quad (2.44)$$

Messungen dieses Doppelverhältnisses sind zum einen in Experimenten mit Kalorimetern als Detektoren und zum anderen mit Wasser-Cherenkov-Detektoren durchgeführt worden. Bei den Kalorimeter Experimenten wurden dabei die Ionenpaare eines Gases, die durch in der Neutrino-Streuung produzierte Elektronen erzeugt worden sind, nachgewiesen und deren Spuren rekonstruiert. Vertreter dieser Experimente sind Fréjus [32], NUSEX [33] und Soudan-2 [34, 35]. Experimente mit Wasser-Cherenkov-Detektoren sind IMB [36, 37, 38], Kamiokande [39, 40, 41] und Super-Kamiokande[42]. Die Ergebnisse des Doppelverhältnisses R aus Gleichung (2.44) dieser Experimente sind in Tabelle 2.3 angegeben. Dabei ist bei allen Wasser-Cherenkov Experimenten eine deutliche Abweichung

Experiment	R
Fréjus [32]	$1.00 \pm 0.15 \pm 0.08$
NUSEX [33]	$0.96^{+0.32}_{-0.28}$
Soudan-2 [34]	$0.61 \pm 0.15 \pm 0.05$
IMB [36, 43]	$0.54 \pm 0.05 \pm 0.11$
Kamiokande [40, 39]	$0.60^{+0.07}_{-0.06} \pm 0.05$ sub-GeV
	$0.57^{+0.08}_{-0.07} \pm 0.07$ multi-GeV
Super-Kamiokande [9]	$0.63 \pm 0.03 \pm 0.05$ sub-GeV
	$0.65 \pm 0.05 \pm 0.08$ multi-GeV

Tabelle 2.3: Ergebnisse für das in Gleichung 2.44 definierte Doppelverhältnis. Außer Fréjus und NUSEX sehen alle Experimente eine große Abweichung von Daten und Monte-Carlo-Simulation.

der experimentellen Daten von der Monte-Carlo-Simulation gefunden worden. Nur die beiden Kalorimeterexperimente Fréjus und NUSEX finden im Rahmen ihrer Fehler Übereinstimmung von Daten und Monte-Carlo-Simulation. Jedoch muß bei der Betrachtung der Ergebnisse beachtet werden, daß die Anzahl der von der Super-Kamiokande Kollaboration gemessenen Ereignisse weitaus größer

ist als die in allen anderen Experimenten. Daher müssen Fragen bezüglich der statistischen Relevanz vor allem der Fréjus Daten untersucht werden.

Zusätzlich zu dem Doppelverhältnis R hat die Super-Kamiokande Kollaboration die Richtung jedes einzelnen Ereignisses bestimmt. Für die ν_μ -ähnlichen Ereignisse wurde dabei die in Figur 2.4 dargestellte Abhängigkeit vom Zenitwinkel θ gefunden. Dabei bedeutet $\cos \theta = 1$ senkrechter Einfall von oben und $\cos \theta = -1$

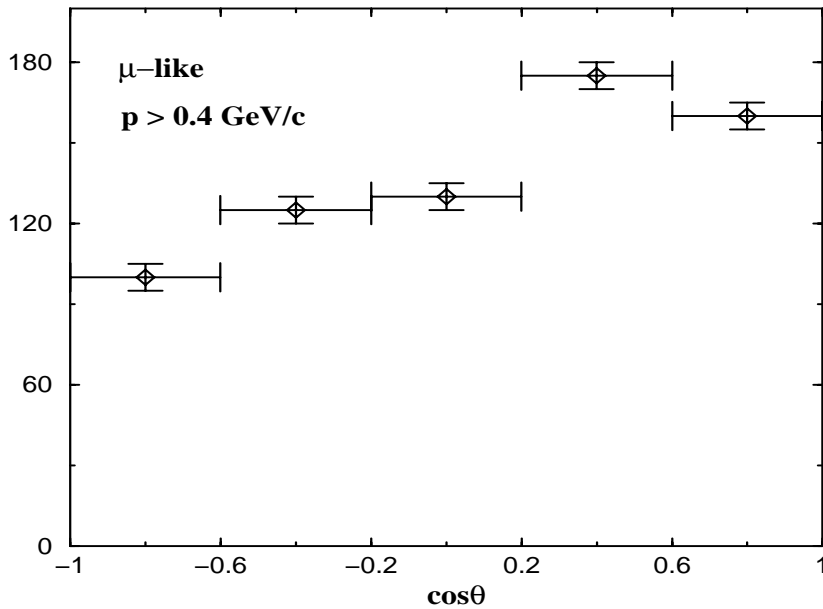


Abbildung 2.4: Winkelverteilung der sub-GeV μ -ähnlichen Ereignisse im Super-Kamiokande Experiment. Auf der Ordinate ist die Anzahl der gefundenen Ereignisse aufgetragen [42].

ein von unten in den Detektor kommendes, also die Erde durchquerendes, Neutrino (siehe Figur 2.5). Man sieht, daß die Anzahl der von oben kommenden Ereignisse höher ist als die Anzahl der von unten kommenden. In den Vorhersagen der Monte-Carlo-Rechnungen der SK-Kollaboration ohne Neutrinooszillationen wird für alle Winkelbereiche ein Wert von etwa 180 Ereignissen gefunden [42]. Die von unten kommenden Ereignisse weichen somit stark von den Erwartungen ohne Neutrinooszillationen ab, während die von oben kommenden im Rahmen der Fehler keine Abweichungen zeigen. Diese Winkelabhängigkeit, die nahezu modellunabhängig ist, zusammen mit den gemessenen Abweichungen des Doppelverhältnisses R von 1 (siehe Tabelle 2.3), stellen die atmosphärische Neutrinoanomalie dar. Diese kann ebenso wie das solare Neutrinoanomalie im Rahmen von Neutrinooszillationen erklärt werden.

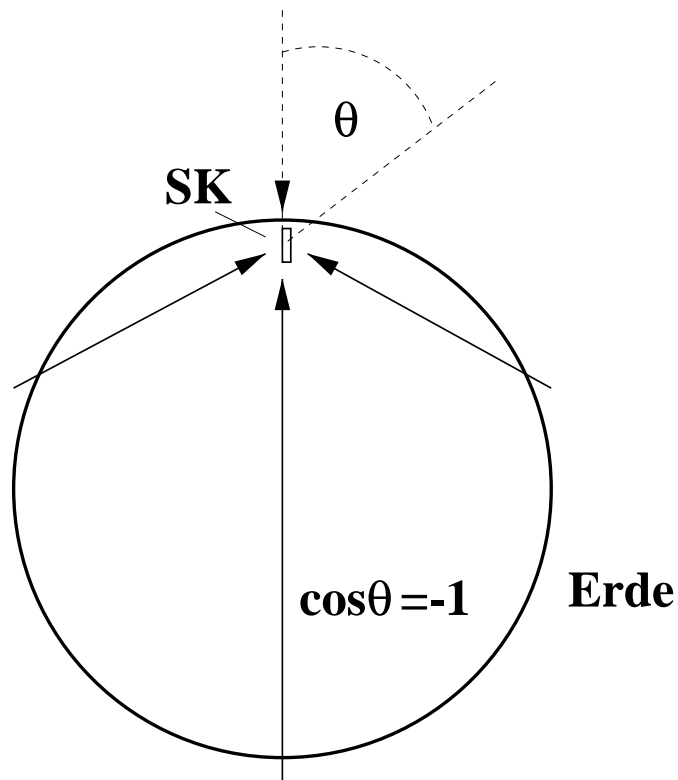


Abbildung 2.5: Zenitwinkel θ und Einfallsrichtung der Neutrinos in den Super-Kamiokande-Detektor (SK).

Als nächste Quelle von Neutrinos kommen Teilchenbeschleuniger in Fragen. Das LSND¹ Experiment in Los Alamos benutzt dabei zur Erzeugung der Neutrinos einen 800 MeV Protonenstrahl, der auf ein Target geschossen wird. Dabei werden Pionen, hauptsächlich π^+ produziert. Die meisten der π^+ werden anschließend im Target gestoppt und zerfallen in Myonen. Die Myonen zerfallen mit einer Halbwertszeit von 1.5×10^{-6} s [3] in ein Elektron und ein Elektronneutrino.



Somit werden nur $\bar{\nu}_\mu$, jedoch keine $\bar{\nu}_e$ produziert. Die LSND Kollaboration hat nach $\bar{\nu}_e$ gesucht. Diese wurden durch die Reaktion



¹Liquid Scintillator Neutrino Detector

nachgewiesen. Zur Identifikation des $\bar{\nu}_e$ wurde dabei zusätzlich zu dem aus Szintillationslicht gemessenen e^+ ein verzögertes 2.2 MeV Photon aus der Reaktion $n + p \rightarrow d + \gamma(2.2 \text{ MeV})$ gefordert. Nach Abzug aller erwarteter Untergrundereignisse fand die LSND Kollaboration einen Überschuß von $51_{-19.5}^{+20.2} \pm 8 e^+$ Ereignissen im Energiebereich von 20-60 MeV. Dieser Überschuß von e^+ Ereignissen kann durch Neutrinooszillationen erklärt werden. Die dafür relevante Oszillationswahrscheinlichkeit für $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oszillationen, die im nächsten Abschnitt definiert wird, ist dann [44]

$$P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) = (3.1 \pm 1.2 \pm 0.5) \times 10^{-3}. \quad (2.47)$$

Weiterhin wurde von der LSND Kollaboration in diesem Experiment auch $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ Oszillationen, die aus dem Zerfall von ungestoppten Pionen stammen ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$), untersucht. Die ν_e wurden dabei inklusiv durch

$$\nu_e + {}^{12}\text{C} \rightarrow e^- + X \quad (2.48)$$

nachgewiesen. Die Elektronenenergie liegt für diesen Prozeß im Bereich von 60-200 MeV. Insgesamt wurden 40 Elektronenereignisse gefunden. Von diesen waren 21.9 ± 2.1 durch Untergrundreaktionen erwartet worden. Die noch verbleibenden Ereignisse entsprechen dann einer Oszillationswahrscheinlichkeit von [9]

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = (2.6 \pm 1.0 \pm 0.5) \times 10^{-3}. \quad (2.49)$$

Das Problem des LSND Experiments ist, daß es noch von keinem anderen Experiment bestätigt worden ist. Die KARMEN Kollaboration [45, 46, 47] hat 1990 begonnen, diese Ergebnisse in einer ähnlichen Reaktion nachzumessen. Bis heute hat KARMEN jedoch keine Evidenz für Oszillationen gefunden. Bei Analysen der experimentellen Daten im Rahmen von Neutrinooszillationen findet man jedoch Parameterbereiche, die sowohl mit den LSND, als auch den KARMEN Ergebnissen verträglich sind. Beide Resultate werden in naher Zukunft mit Hilfe von neuen Experimenten wie BoONE am Fermilab, I-216 am CERN, ORLAND in Oak Ridge und NESS an der europäischen Spallationsquelle überprüft werden.

2.3.2 3-Familien Oszillationen im Vakuum

Die Voraussetzungen für das Auftreten von Neutrinooszillationen sind

1. Die Massenmatrix \mathcal{M} der Neutrinos in der Basis der Wechselwirkungseigenzustände ist nicht diagonal \Leftrightarrow Masseneigenzustände \neq Wechselwirkungseigenzustände
2. Die Eigenwerte der Neutrinomassenmatrix \mathcal{M} sind nicht entartet, also für mindestens ein Paar von $i \neq j$ gilt $m_i \neq m_j$ und damit ein $m_i \neq 0$ ist

Wenn diese beiden Voraussetzungen erfüllt sind, treten Neutrinooszillationen auf.

Auch wenn nach 1. die Masseneigenzustände ν_α , $\alpha = e, \mu, \tau$, und die Wechselwirkungseigenzustände ν_i , $i = 1, 2, 3$, verschieden sind, sind diese aufgrund von *CPT*-Erhaltung durch eine unitäre Transformation, wie schon in Gleichung (2.19) eingeführt, miteinander verknüpft

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i. \quad (2.50)$$

Die Mischungsmatrix U kann im Fall von vernachlässigbarer *CP* Verletzung analog zur Cabbibo-Kobajashi-Maskawa Matrix durch drei Winkel parametrisiert werden. Eine üblich Parametrisierung von U ist [19]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ \Leftrightarrow s_{12}c_{23} \Leftrightarrow c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} \Leftrightarrow s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} \Leftrightarrow c_{12}c_{23}s_{13} & \Leftrightarrow c_{12}s_{23} \Leftrightarrow s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

dabei steht s_{ij} und c_{ij} für $\sin \theta_{ij}$ und $\cos \theta_{ij}$.

Der komplette Masseneigenzustand kann durch den Zustandsvektor

$$|\Psi_{\mathbf{a}}^{\mathbf{M}}\rangle = |\Psi_a^{\mathbf{M}}\rangle \otimes |\nu_a\rangle \quad (2.52)$$

beschrieben werden, wobei $|\nu_a\rangle$ im Hilbertraum der Masseneigenzustände definiert ist und nur Informationen über die Natur des Neutrinos enthält. $|\Psi_a^{\mathbf{M}}\rangle$ enthält dagegen alle restlichen Informationen, einschließlich der Energie-/Impuls- und Orts-/Zeitabhängigkeit. Man kann $|\Psi_a^{\mathbf{M}}\rangle$ somit schreiben als

$$\begin{aligned} |\Psi_a^{\mathbf{M}}\rangle &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| \Psi_a^{\mathbf{M}}\rangle \\ &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} |\vec{p}\rangle \Psi_a^{\mathbf{M}}(\vec{p}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Die Zeitentwicklung des Massenzustands ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
 |\Psi_a^M(t)\rangle &= e^{-iHt}|\Psi_a^M\rangle \\
 &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \Psi_a^M(\vec{p}) e^{-iE_a t} |\vec{p}\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dabei ist $E_a = \sqrt{p^2 + m_a^2}$. Durch Übergang zur Ortsdarstellung kann man den propagierenden Masseneigenzustand insgesamt schreiben als

$$\begin{aligned}
 |\Psi_a^M(\vec{x}, t)\rangle &= \langle \vec{x} | \Psi_a^M \rangle \otimes |\nu_a\rangle \\
 &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \Psi_a^M(\vec{p}) e^{-iE_a t} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \otimes |\nu_a\rangle \\
 &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \Psi_a^M(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iE_a t} \otimes |\nu_a\rangle \\
 &\equiv \Psi_a^M(\vec{x}, t) \otimes |\nu_a\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Der propagierende Wechselwirkungseigenzustand ist dann durch Gleichung (2.50) gegeben als

$$|\Psi_\alpha^W(\vec{x}, t)\rangle = \sum_a U_{\alpha a} \Psi_a^M(\vec{x}, t) \otimes |\nu_a\rangle. \tag{2.56}$$

Die Amplitude dafür, daß ein Wechselwirkungseigenzustand, der im Ursprung zur Zeit $t = 0$ erzeugt worden ist, nach der Zeit t in den Zustand β oszilliert, ist

$$A(\alpha \rightarrow \beta; t) = \langle \Psi_\beta^W(\vec{x}, t) | \Psi_\alpha^W(\vec{0}, 0) \rangle. \tag{2.57}$$

Die Oszillationswahrscheinlichkeit dieses Übergangs ergibt sich mit $\langle \nu_a | \nu_b \rangle = \delta_{a,b}$ zu

$$\begin{aligned}
 P(\alpha \rightarrow \beta; t) &= |A(\alpha \rightarrow \beta; t)|^2 \\
 &= \left| \sum_a U_{\beta a} U_{\alpha a} \Psi_a^M(\vec{0}, 0) \Psi_a^{M*}(\vec{x}, t) \right|^2.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit hängt somit von der Beschreibung der Wellenfunktion und vom Detektionsort \vec{x} bzw. der Flugzeit t ab. Zur Beschreibung der Wellenfunktion macht man üblicherweise folgende Näherungen:

- Man nimmt an, daß das Neutrino durch eine ebene Welle mit wohl definierter Energie und Impuls beschrieben werden kann, also

$$\Psi_a^M(\vec{p}) = (2\pi)^{3/2} \delta^3(\vec{p} \Leftrightarrow \vec{p}_a) \quad (2.59)$$

oder im Ortsraum

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{(i\vec{p}_a \cdot \vec{x} - iE_a t)}. \quad (2.60)$$

- Es wird weiterhin angenommen, daß die Neutrinos relativistisch sind, also $|\vec{p}_a| \gg m_a$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} E_a &= \sqrt{|\vec{p}_a|^2 + m_a^2} \\ &\simeq p_a + \frac{m_a^2}{2p_a}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dabei ist $p_a \equiv |\vec{p}_a|$.

Zur einfacheren Schreibweise soll sich das Neutrinos entlang der x -Achse bewegen. Mit den eben gemachten Annahmen kann man nun die Ortswellenfunktion schreiben als

$$\Psi_a^M(\vec{x}, t) = \Psi_a^M(x, t) \simeq \exp(ip_a(x \Leftrightarrow t) \Leftrightarrow i\frac{m_a^2}{2p_a}t). \quad (2.62)$$

Für relativistische Neutrinos gilt in sehr guter Näherung $p_a \simeq p_b = p \simeq E = t/L$ und $x = t$. Die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich somit letztendlich zu

$$\begin{aligned} P(\alpha \rightarrow \beta) &= \sum_a U_{\alpha a}^2 U_{\beta a}^2 \\ &\quad + 2 \sum_{a < b} U_{\alpha a} U_{\beta a} U_{\alpha b} U_{\beta b} \exp\left(\Leftrightarrow i \frac{\Delta m_{ab}^2}{2E} L\right) \\ &= \delta_{\alpha, \beta} \Leftrightarrow 4 \sum_{\alpha < \beta} U_{\alpha a} U_{\beta a} U_{\alpha b} U_{\beta b} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ab}^2 L}{4E}\right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dabei ist $\Delta m_{ab}^2 \equiv m_a^2 \Leftrightarrow m_b^2$. Die Oszillationswahrscheinlichkeit hängt somit von den Elementen der Mischungsmatrix U und den Differenzen der Quadrate der Masseneigenwerte ab. Damit ist es klar, daß die Neutrinomassenmatrix aus den Analysen von Neutrinooszillationsdaten nicht komplett bestimmt werden kann.

Die Skala der Massen und die Vorzeichen der Masseneigenwerte bleiben unbestimmt.

Interessant ist der Vergleich dieses allgemeinen Ergebnisses für drei Neutrinofamilien mit dem Grenzfall der Entkopplung eines Neutrinos. Im Fall, daß nur zwei Neutrinos miteinander mischen, ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit zu

$$P(1 \rightarrow 2) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E}\right). \quad (2.64)$$

Dabei ist die Mischungsmatrix U durch

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

parametrisiert worden. Um den Unterschied zwischen Resultaten im Rahmen von zwei und drei vollständig mischenden Neutrinofamilien zu sehen, kann man die Oszillationen von Elektronneutrinos in einen unbestimmten Wechselwirkungszustand betrachten. Bei den solaren Neutrinoexperimenten beobachtet man, wie in Abschnitt 2.3.1 diskutiert, eine zu geringe Anzahl von ν_e auf der Erde. Die Wahrscheinlichkeit für diese Oszillation im Rahmen von drei Neutrinos mit beliebiger Mischung ergibt sich aus Gleichung (2.63) zu

$$\begin{aligned} P(e \rightarrow x) &= P(e \rightarrow \mu) + P(e \rightarrow \tau) \\ &= U_{e1}^2 (U_{\mu 1}^2 + U_{\tau 1}^2) \left[\sin^2\left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta m_{13}^2 L}{4E}\right) \right. \\ &\quad \left. \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\Delta m_{23}^2 L}{4E}\right) \right] \\ &\quad + U_{e2}^2 (U_{\mu 2}^2 + U_{\tau 2}^2) \left[\sin^2\left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E}\right) \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\Delta m_{13}^2 L}{4E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\Delta m_{23}^2 L}{4E}\right) \right] \\ &\quad + U_{e3}^2 (U_{\mu 3}^2 + U_{\tau 3}^2) \left[\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta m_{13}^2 L}{4E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\Delta m_{23}^2 L}{4E}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

Im Grenzfall $U_{e3} = 0$, also Entkopplung des Elektron- und Tauneutrinos, erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeit im Fall dreier Familien und der Para-

metrisierung der Mischungsmatrix U aus Gleichung (2.51)

$$\begin{aligned}
 P(e \rightarrow x) &= 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \right) U_{e1}^2 (1 \Leftrightarrow U_{e1}^2) \\
 &= \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \theta_{12}.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

In diesem Grenzfall findet man trivialeweise exakte Übereinstimmung von zwei und drei Familienoszillationen. Sobald jedoch U_{e3} von Null verschieden ist, ist eine Übertragung der Ergebnisse aus zwei Familienoszillationsbetrachtungen auf den drei Familienfall sogar im Falle kleiner U_{e3} nicht mehr möglich. Im Fall eines kleinen U_{e3} kann man die Übergangswahrscheinlichkeit unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung U_{e3}^4 näherungsweise schreiben als

$$\begin{aligned}
 P(e \rightarrow x) &= 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \right) U_{e1}^2 (1 \Leftrightarrow U_{e1}^2 \Leftrightarrow U_{e3}^2) \\
 &\quad + 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{13}^2 L}{4E} \right) U_{e1}^2 U_{e3}^2 \\
 &\quad + 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{23}^2 L}{4E} \right) U_{e3}^2 (1 \Leftrightarrow U_{e1}^2).
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Für einen großen Mischungswinkel von U_{e1} mit maximalem Wert $U_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt sich die betrachtete Oszillationswahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned}
 P(e \rightarrow x) &= \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \right) + U_{e3}^2 \left[\Leftrightarrow \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{13}^2 L}{4E} \right) + \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{23}^2 L}{4E} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Die Abweichung vom zwei Familienfall ist proportional zu U_{e3}^2 . Die Abweichung vom Resultat der Mischung von nur zwei Familien kann somit nur für sehr kleine U_{e3} vernachlässigt werden. Somit sollten Resultate, die im Rahmen von zwei Familienanalysen gewonnen worden sind, nur zum Vergleich von experimentellen Ergebnissen mit sehr ähnlichen Energien und Oszillationslängen verwendet werden. Die Übertragung von zwei auf drei Familienoszillationen kann im Allgemeinen gar nicht erfolgen, und die im Rahmen von zwei Familienanalysen gewonnenen Ergebnisse stellen nur effektive Parameter dar [48].

2.3.3 Oszillationen in Materie

Zur Beschreibung von Neutrinooszillationen in Materie muß der im letzten Abschnitt beschriebene Formalismus noch erweitert werden. Die Propagation des Neutrinos in Materie wird im Vergleich zur Propagation im Vakuum durch die Wechselwirkung des Neutrinos mit der Materie verändert. Die Wechselwirkungsprozesse können durch die in Abbildung 2.6 dargestellten Feynmangraphen beschrieben werden. Sie setzen sich aus neutralen Stromprozessen durch Z^0 Aus-

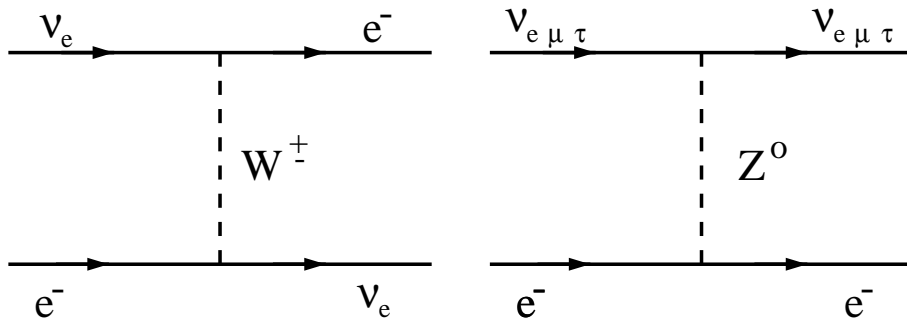


Abbildung 2.6: Neutrino Wechselwirkungsprozeß in Materie. In normaler Materie können nur Elektronneutrinos durch W^\pm Austausch wechselwirken, es können jedoch alle Neutrinos in normaler Materie durch Z^0 Austausch wechselwirken.

tausch und geladenen Strömen, durch W^\pm Austausch zusammen. Wichtig für die Propagation der Neutrinos sind kohärente Streuungen, die zu einer zusätzlichen potentiellen Energie

$$V = V_C + V_N \tag{2.70}$$

führen. Dabei ist V_C die zusätzliche potentielle Energie durch W^\pm Austausch und V_N die durch Z^0 Austausch. Dies wurde zuerst von Wolfenstein im Jahr 1978 diskutiert [49]. Da aber in den natürlichen Neutrinoquellen, v.a. der Sonne, die Teilchendichte der Myonen und Tauonen vernachlässigbar ist, verschwindet V_C für diese beiden Neutrinofamilien in diesen Bereichen. Die Massenmatrix \mathcal{M} ist durch die Wechselwirkung mit dem Medium durch das effektive Potential V modifiziert worden. Da aber die Addition des gleichen Terms V_N zu allen Elementen der Massenmatrix nur zu einer globalen Phase führt [15], ist nur die

Veränderung durch V_C interessant. Die relevante Massenmatrix ist somit

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} + A & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

wobei M_{ij} die Elemente der Vakuummassenmatrix sind und A die Modifikation durch die geladene Stromwechselwirkung V_C darstellt ($A \simeq V_C$).

In Figur 2.7 sind die Mediummasseneigenwerte μ_i in Abhängigkeit von $A = 2pV \sim \rho$ für den Fall einer Mischung von nur zwei Neutrinofamilien aufgetragen. Je nach Dichte ändert sich somit nicht nur der Wert der effektiven Massen,

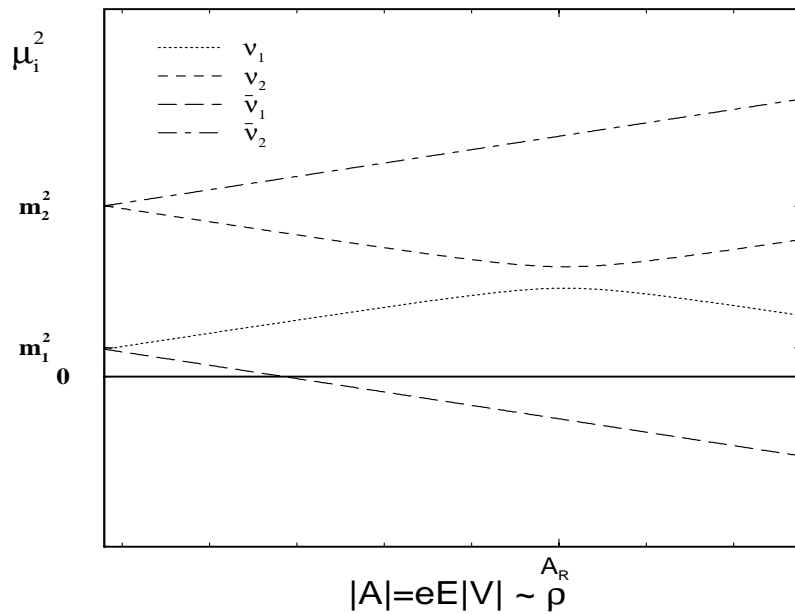


Abbildung 2.7: Effektive Neutrinomassen in Materie in Abhängigkeit von der Dichte des Mediums. Es wurde dabei $V_C > |V_N|$ angenommen.

sondern auch deren relative Anordnung.

Ebenso interessant wie die Massen ist auch der Mediummischungswinkel ϕ , der durch

$$\sin^2 2\phi = \frac{\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta \left(1 \leftrightarrow \frac{A}{A_R}\right)^2 + \sin^2 2\theta} \quad (2.72)$$

gegeben und in Abbildung 2.8 dargestellt ist. A_R ist dabei diejenige Modifikation

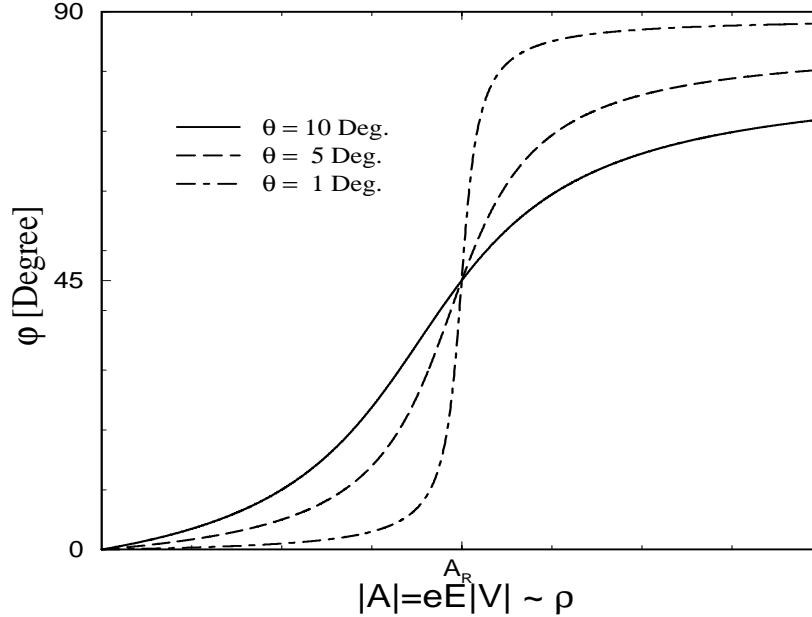


Abbildung 2.8: Effektiver Mischungswinkel der Neutrinos in Materie für eine Mischung von nur zwei Neutrinofamilien in Abhängigkeit von der Dichte des Mediums.

der Massenmatrix aus Gleichung (2.71), bei der die Oszillationslänge in Resonanz ist. Auch für kleine Vakuummischungswinkel θ kann der Mediummischungswinkel ϕ groß werden. Die Oszillationslänge verändert sich im Medium ebenso und ist gegeben durch

$$L_m^{osz} = \frac{L_0}{\sqrt{\cos^2 2\theta \left(1 \leftrightarrow \frac{A}{A_R}\right)^2 + \sin^2 2\theta}}. \quad (2.73)$$

Somit führt also bereits ein homogenes Medium zu einer starken Modifikation der Beschreibung der Neutrinooszillationen.

Wenn nun aber die Dichte ρ im Medium nicht konstant ist, sondern sich langsam kontinuierlich ändert, kommt man zum sogenannten Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein-Effekt (*MSW*). Dazu geht man davon aus, daß ein Elektronneutrino im Innern der Sonne produziert wird. Im Innern der Sonne ist $A \gg A_R$, also gemäß Abbildung 2.8 der Mediummischungswinkel $\phi \simeq 90^\circ$. Das Neutrino ist somit ein fast reiner ν_2^m Zustand. Als solcher propagiert er mit sich verändernden

effektiven Massen vom Innern der Sonne bis an deren Oberfläche. Dort ist der Mischungswinkel dann der Vakuummischungswinkel θ , und es gilt

$$\nu_2 = \sin \theta \nu_e + \cos \theta \nu_\mu. \quad (2.74)$$

Da dieser in einigen Modellen als klein angenommen wird, ist ν_2 näherungsweise identisch mit ν_μ . Durch die Materiemodifikationen und einer langsamen Dichteabhängigkeit im Medium ist aus einem als ν_e erzeugten Neutrino auf dem Weg aus der Sonne ein Neutrino mit hauptsächlich ν_μ Charakter geworden. Diese Umwandlung von einem ν_e in ein ν_μ trotz eines kleinen Vakuummischungswinkels θ wird als adiabatischer MSW-Effekt bezeichnet.

Wenn diskontinuierliche Dichteschwankungen auftreten, kommt man zum nichtadiabatischen MSW-Effekt. Dabei treten bei $A \simeq A_R$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Übergänge von $\nu_2^m \rightarrow \nu_1^m$ auf. Dadurch wird die ν_μ Komponente trotz eines kleinen Vakuummischungswinkels θ reduziert.

Insgesamt stellt der MSW-Effekt eine interessante Möglichkeit dar, die solaren Neutrinoexperimente zu beschreiben. Ein Problem ist jedoch die zusätzliche Unsicherheit durch nicht exakt fixierte Parameter im Sonnenmodell. Der MSW-Effekt wird jedoch in vielen Detailanalysen der solaren Neutrinoexperimente verwendet [24, 19].

2.4 Phänomenologie von ν -Oszillationen

In den letzten Abschnitten wurden der Mechanismus der Neutrinooszillationen, wie auch Experimente, die als Evidenz für Neutrinooszillationen gesehen werden können, vorgestellt. Als Fazit aus der Summe der positiven experimentellen Resultate und vor allem aus der von der Super-Kamiokande Kollaboration gefundenen Zenitwinkelabhängigkeit der sub-GeV ν_μ ähnlichen Ereignisse, kann man davon ausgehen, daß Neutrinos oszillieren und somit massiv sind. Die einzelnen Hinweise sind schematisch nochmals in Abbildung 2.9 zusammengefaßt.

Zunächst sollen die Konsequenzen von Analysen der experimentellen Daten auf die Neutrinomassenmatrix untersucht werden. Dabei werden nur Analysen im Rahmen von drei Neutrinofamilien betrachtet. Der erste Punkt der Untersuchung ist, was man über die Massenmatrix der Neutrinos lernen kann. Dazu werden entweder reine 3×3 Dirac- oder reine 3×3 Majoranamassenmatrizen betrachtet. In diesen beiden Fällen kann die Neutrinomassenmatrix geschrieben werden als

$$\mathcal{M} = U \cdot \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \cdot U^\dagger. \quad (2.75)$$

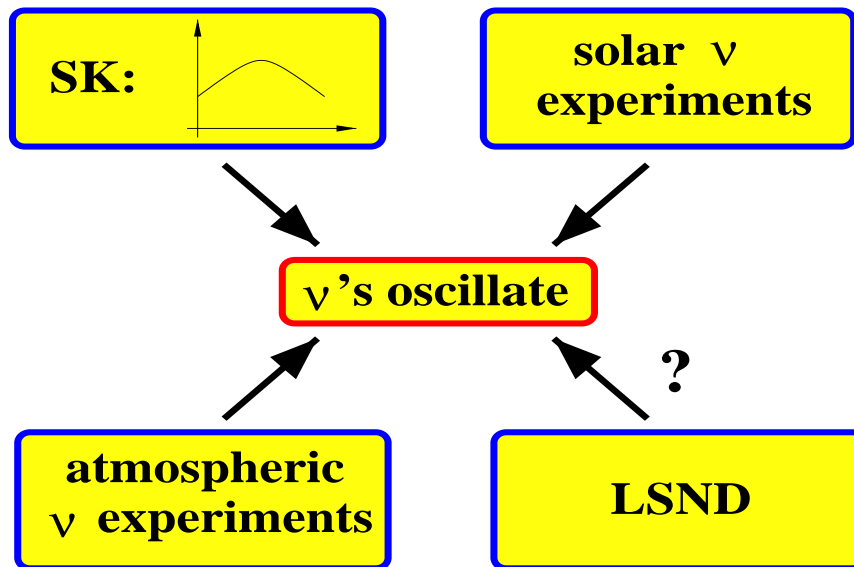


Abbildung 2.9: Summe der Experimente mit Evidenz für Neutrinooszillationen.

In Gleichung (2.75) ist U die Mischungsmatrix, die Massen- und Wechselwirkungseigenzustände verbindet (siehe Gleichung (2.50)). Im folgenden wird angenommen, daß CP Verletzung klein und somit U reell ist. \mathcal{M} ist dann auch für Diracneutrinos symmetrisch. Aus Analysen von Neutrinooszillationsexperimenten kann die Mischungsmatrix U und die Differenzen der Quadrate der Masseneigenwerte bestimmen werden. Die Massenmatrix wird durch Neutrinooszillationsanalysen aber nicht absolut bestimmt, sondern nur bis auf eine Skala der Massen und deren relative Vorzeichen. Sobald also eine der Massen festgelegt ist und die relativen Vorzeichen der Massen fixiert sind, ist der Rest durch Analysen von Neutrinooszillationsdaten bestimmbar.

Ein Problem der Analysen der Neutrinooszillationsexperimente ist, daß sie bisher meist im vereinfachten Zwei-Familienbild erfolgt sind. Dabei wurden sowohl für die solaren, die atmosphärischen und das LSND Experiment drei verschiedene Wertebereiche für die Differenz der jeweils relevanten Massenquadrate gefunden [19]. Die Schlußfolgerung war nun, daß zumindest vier verschiedene Neutrinomassenzustände existieren müssen oder die LSND Ergebnisse falsch sind. Eine direkte Übertragung der Ergebnisse aus zwei Familienanalysen ist jedoch im Allgemeinen nicht möglich. Die Schlußfolgerungen sind somit auf Grund dieser Ergebnisse nicht zwingend.

In Tabelle 2.4 sind Ergebnisse von Neutrinooszillationsdaten im Rahmen von drei Familienschemen dargestellt, die die solaren und atmosphärischen Neutri-

no Experimente analysiert haben. In Tabelle 2.5 sind Ergebnisse von Analysen

$\Delta m_{12}^2 [eV^2]$	$\Delta m_{23}^2 [eV^2]$	$\theta_{12} [Deg.]$	$\theta_{23} [Deg.]$	$\theta_{13} [Deg.]$	ref.
$3 \times 10^{-6} \Leftrightarrow 7 \times 10^{-5}$	0.01	53-62	28-37	<13	[50]
$4 \times 10^{-6} \Leftrightarrow 7 \times 10^{-5}$	1.0	51-72	27-32	<4	[51]
$4 \times 10^{-6} \Leftrightarrow 7 \times 10^{-5}$	0.1	51-72	28-33	<3	[51]
10^{-4}	8×10^{-4}	39.23	45	26.6	[52]

Tabelle 2.4: *Ergebnisse von Neutrinooszillationsanalysen im Rahmen von drei Neutrinofamilien unter Einbeziehung von solaren und atmosphärischen Neutrinoexperimenten.*

dargestellt, die gezeigt haben, daß mit globalen Fits im Rahmen drei Familienanalysen alle experimentellen Daten, einschließlich der LSND Daten, beschrieben werden können. Dabei gibt es jedoch größere Unterschiede bei den Ergebnissen der Analysen, und auch die Konvergenz des Fits ist nicht mehr so gut wie bei Ausschluß der LSND Daten. Aus den Tabellen 2.5 und 2.4 ist ersichtlich, daß die Mischungswinkel θ_{12} und θ_{23} in den verschiedenen Analysen relativ stabil sind, aber der Winkel θ_{13} auch im Rahmen der einzelnen Analysen nicht exakt festgelegt werden kann. Der Bereich, in dem sich θ_{13} bewegt, liegt bei Werten, bei denen der Sinus empfindlich von Schwankungen abhängt.

In dieser Arbeit wurde daher die Veränderung der Matrixelemente der Neutrinomassenmatrix unter Variation von θ_{13} untersucht. Da die Skala der Neutrinomassenmatrix nicht bekannt ist, ist dabei zusätzlich die kleinste Masse m_1 im Intervall von 0 bis 1 eV variiert worden. Die dabei erhaltenen Ergebnisse sind für positive relative Vorzeichen der Masseneigenwerte graphisch in Abbildung 2.10 dargestellt. Es ist dabei interessant zu sehen, daß bei wachsendem m_1 die Nebendiagonalelemente kleiner werden, während bei größeren θ_{13} die Nebendiagonalelemente wachsen.

$\Delta m_{12}^2 [eV^2]$	$\Delta m_{23}^2 [eV^2]$	$\theta_{12} [Deg.]$	$\theta_{23} [Deg.]$	$\theta_{13} [Deg.]$	ref.
$10^{-4} \Leftrightarrow 10^{-3}$	0.3	35.5	27.3	13.1	[48]
$10^{-4} \Leftrightarrow 10^{-3}$	0.3	54.5	27.3	13.1	[48]
2.87×10^{-4}	1.11	45	28.9	4.2	[53]
$10^{-4} \Leftrightarrow 10^{-3}$	0.4	37.6	26.5	10.3	[54]
$4 \times 10^{-6} \Leftrightarrow 7 \times 10^{-5}$	1	51-72	27-32	3-4	[51]

Tabelle 2.5: *Ergebnisse von Neutrinooszillationsanalysen im Rahmen von drei Neutrinofamilien unter Einbeziehung von solaren und atmosphärischen Neutrinoexperimenten und den LSND Daten.*

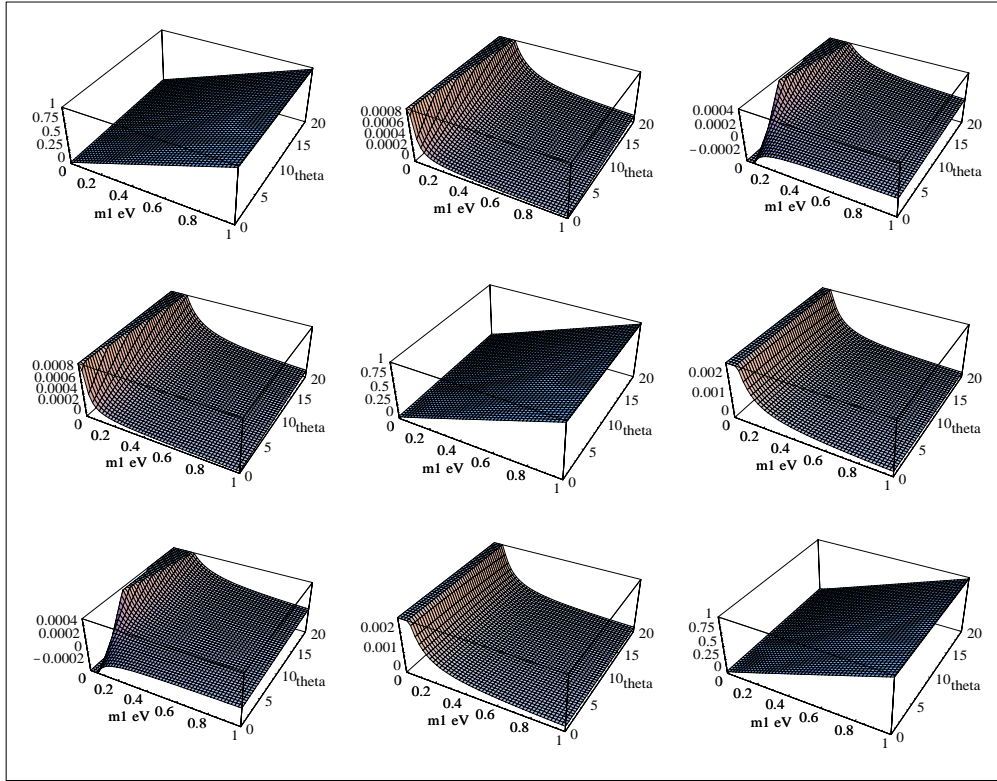


Abbildung 2.10: Matrixelemente der Neutrino Massenmatrix im Fall von $\theta_{12} = \theta_{13} = 45^\circ$ in Abhängigkeit von θ_{13} und m_1 .

Da an der Gültigkeit der Ergebnisse der LSND Kollaboration, auch aufgrund der Ortsverteilung der gefundenen Ereignisse, erhebliche Zweifel bestehen, ist es von Interesse, die Konsequenzen von Analysen im Rahmen von drei Familienanalysen unter Einbeziehung der LSND Daten auf die Oszillationsparameter zu untersuchen. Die Veränderung der Fitqualität soll dabei nicht berücksichtigt werden, sondern nur untersucht werden, wie sich die Massenmatrix verändert. Daher wurde untersucht, ob man prinzipiell die Konsequenzen von Analysen, die die LSND Ergebnisse miteinbeziehen (Tabelle 2.5), von Konsequenzen von Analysen, die die LSND Ergebnisse nicht berücksichtigen (Tabelle 2.5), in der Neutrinomassenmatrix unterscheiden kann.

Dazu ist die Neutrino Massenmatrix für positive CP -Phasen für verschiedene Fälle der kleinsten Masse m_1 berechnet worden. Da sowohl im Bereich der Analysen ohne LSND Daten, als auch bei Einbeziehung der LSND Daten, erhebliche Unterschiede bei den Ergebnissen der Analysen bestehen, wurden die berechne-

	ohne LSND	mit LSND
$m_1 = 0.00$ eV	$\begin{pmatrix} .006 & .012 & .007 \\ .012 & .109 & .099 \\ .007 & .099 & .111 \end{pmatrix}$ eV	$\begin{pmatrix} .026 & .064 & .072 \\ .064 & .292 & .339 \\ .072 & .339 & .457 \end{pmatrix}$ eV
$m_1 = 0.01$ eV	$\begin{pmatrix} .013 & .010 & .008 \\ .010 & .114 & .095 \\ .008 & .095 & .117 \end{pmatrix}$ eV	$\begin{pmatrix} .032 & .061 & .073 \\ .061 & .296 & .336 \\ .073 & .336 & .459 \end{pmatrix}$ eV
$m_1 = 0.10$ eV	$\begin{pmatrix} .101 & .005 & .005 \\ .005 & .181 & .076 \\ .005 & .076 & .186 \end{pmatrix}$ eV	$\begin{pmatrix} .115 & .050 & .067 \\ .050 & .354 & .301 \\ .067 & .301 & .496 \end{pmatrix}$ eV

Tabelle 2.6: Ergebnisse für die Neutrino Massenmatrix in der Basis der Wechselwirkungseigenzustände. Dargestellt sind die gemittelten Werte der Matrixelemente für die in Tabelle 2.4 und 2.5 vorgestellten Ergebnisse von Oszillationsdaten für $\lambda_j^{CP} = 1$. Die Einbeziehung der LSND Daten führt zu größeren Nebendiagonalelementen.

ten Werte der Elemente der Massenmatrizen gemittelt. Die gemittelten Werte der Elemente der Massenmatrix sind in Tabelle 2.6 für die Fälle $m_1 = 0.0, 0.01$ eV und $m_1 = 0.1$ eV dargestellt. Man sieht, daß die Differenz zwischen den beiden Analysen mit wachsendem m_1 abnimmt. Ab $m_1 = 1$ eV ist sie fast verschwunden. In der Neutrinomassenmatrix ist die verschiedene Struktur somit nur bei kleinen m_1 spürbar. Wenn man nun ein Modell für Neutrinomassen diskutiert und m_1 wirklich klein ist, kann man somit hoffen, durch Herstellung von Verbindungen zu anderen Prozessen eine Entscheidungshilfe zu erhalten, die es einem erlaubt, eine der beiden Analysearten auszuschließen.

Wenn man somit davon ausgehen kann, daß alle Neutrinooszillationsdaten mit drei Neutrinofamilien beschrieben werden können, ist es weiterhin wichtig, Obergrenzen für die einzelnen Einträge der Neutrinomassenmatrix zu erhalten. Dies erlaubt es dann, z.B. Kopplungskonstanten eines Modells für Neutrinomassen zu begrenzen. Da Neutrinooszillationsexperimente die Neutrinomassenmatrix nur bis auf einen Massenskala und die Vorzeichen der Masseneigenwerte bestimmen, benötigt man zur Berechnung von Obergrenzen zusätzliche Informationen. Dazu kann man die Obergrenze für die Elektronneutrinomasse miteinbeziehen. Diese liegt im Rahmen des Tritium Experiments aus Mainz bei $m_e < 2.6$ eV (95% C.L.)[2]. Wenn man die in Tabelle 2.4 und 2.5 dargestellten Ergebnisse der Analysen von Oszillationsdaten benutzt und alle Massenkombinationen und Vorzeichen der Masseneigenwerte durchspielt, die mit $m_e < 2.6$ eV verträglich sind, kann man den für jedes Matrixelement erlaubten größten Wert bestimmen. Die

Absolutbeträge der so gewonnenen Obergrenzen sind

$$|\mathcal{M}^{max}| < \begin{pmatrix} 2.6 & 2.5 & 2.6 \\ 2.5 & 2.7 & 2.7 \\ 2.6 & 2.7 & 2.8 \end{pmatrix} \text{ eV.} \quad (2.76)$$

Wenn man zusätzlich annimmt, daß das Neutrino ein Majoranateilchen ist, sollte der neutrinolose doppelte β Zerfall ($0\nu\beta\beta$) beobachtet werden. Der Mechanismus und eine Beschreibung der Kernstruktur für diesen Prozeß in einem analytisch lösbaren Modell wird im Teil 4 dieser Arbeit diskutiert. Eine wichtige Größe im $0\nu\beta\beta$ Zerfall ist die gemittelte Majoranaelektronneutrino­masse. Diese ist definiert als

$$\langle m_\nu \rangle = \sum_i m_i \zeta_i^{CP} U_{ei}^2. \quad (2.77)$$

Dabei sind die m_i die Beträge der Eigenwerte der Neutrinomassenmatrix, ζ_i^{CP} die CP -Phasen der einzelnen Neutrinos und U_{ei} die Elemente der Mischungsmatrix der Neutrinos. Da der $0\nu\beta\beta$ Zerfall bisher noch nicht beobachtet worden ist, konnte experimentell noch kein Wert für die gemittelte Majoranaelektronneutrino­masse bestimmt werden. Aus den experimentellen Daten wurden jedoch Untergrenzen für die Lebensdauern bezüglich des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls für verschiedene Kerne bestimmt. Aus diesen Untergrenzen kann man Obergrenzen für die gemittelte Majoranaelektronneutrino­masse gewinnen. Der aktuell beste Wert für die Lebensdauer von ${}^{76}\text{Ge}$ bezüglich des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls ist von der Heidelberg-Moskau Kollaboration bestimmt worden [55] zu

$${}^{76}\text{Ge} T_{1/2}^{0\nu\beta\beta}(0^+ \rightarrow 0^+) > 1.1 \times 10^{25} (90\% \text{C.L.}). \quad (2.78)$$

Die sich daraus ergebende Obergrenze für die gemittelte Majoranaelektronneutrino­masse ist [56]

$$|\langle m_\nu \rangle| < 0.62 \text{ eV.} \quad (2.79)$$

Wenn man diese zusätzliche Bedingung zur Berechnung der Obergrenzen der Matrixelemente der Neutrinomassenmatrix miteinbezieht, können die allgemein gültigen Werte aus Gleichung (2.76) noch zusätzlich eingeschränkt werden. Die so gewonnenen Obergrenzen sind

$$|M_{Majorana}^{max}| < \begin{pmatrix} .60 & .97 & .85 \\ .97 & .76 & .80 \\ .85 & .80 & 1.17 \end{pmatrix} \text{ eV.} \quad (2.80)$$

Man darf jedoch nicht vergessen, daß diese Grenzen nur für Majorananeutrinos gültig sind.

2.5 Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit wurde die allgemeine Struktur der Neutrinomassenmatrix untersucht. Da bis heute keine Neutrinomasse direkt gemessen worden ist, gibt es bisher von der experimentellen Seite nur Obergrenzen für die Massen der Wechselwirkungseigenzustände. Doch durch die neuesten Ergebnisse der Super-Kamiokande Kollaboration mit der gefundenen Zenitwinkelabhängigkeit der sub-GeV Myoneneutrinoereignisse, kann man davon ausgehen, daß Neutrinos oszillieren und damit massiv sind. Aus diesen Daten kann die Neutrinomassenmatrix aber nicht absolut bestimmt werden, sondern nur bis auf eine Skala der Massen und die Vorzeichen der Masseneigenwerte. Analysen mit drei mischenden Neutrinos finden eine große Unsicherheit bei dem Wert des Elektron-/Tauneutrinoermischungswinkel θ_{13} (siehe Gleichung (2.51)). Es ist daher die Struktur der 3×3 Neutrinomassenmatrix in Abhängigkeit von θ_{13} und der kleinsten Masse m_1 untersucht worden. Dabei ergab sich, daß bei wachsendem θ_{13} , das Gewicht der Nebendiagonalelemente zunimmt. Umgekehrt verhält es sich mit m_1 , wo man bei wachsendem m_1 eine Abnahme der Werte der Nebendiagonalelemente findet. Sobald also Verhältnisse von Matrixelementen bekannt sind, kann die Skala bei festem θ_{13} bestimmt werden.

Desweiteren ist bis heute strittig, ob man alle Neutrinooszillationsdaten durch eine Mischung von nur drei Neutrinos beschreiben kann. Seit kurzem gibt es jedoch neue globale Analysen aller Neutrinooszillationsexperimente, die diese mit einer Mischung von nur drei Neutrinos beschreiben. Es wurden deshalb die Konsequenzen verglichen, die sich für die Neutrinomassenmatrix aus Analysen von Oszillationsdaten ergaben, die alle Experimente einschließen und aus Analysen, die das umstrittene LSND Ergebnis ausschließen. In der Neutrinomassenmatrix findet man für kleine m_1 ($m_1 < 0.1$ eV) einen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Analysearten. Wenn somit mehr über die einzelnen Elemente der Neutrino Massenmatrix bekannt ist, kann man auf diesem Weg testen, ob das LSND Resultat mit einer Mischung von nur drei Neutrinofamilien verträglich ist.

Um die verschiedenen Modelle, die als Erweiterung des Standardmodells zur Beschreibung massiver Neutrinos in Betracht kommen, eventuell ausschließen zu können, wurden Obergrenzen für die einzelnen Elemente der Neutrinomassenmatrix berechnet. Als zusätzliche Bedingung wurde dazu die experimentell bestimm-

te Obergrenze der Masse des Elektronneutrinos von

$$m_{\nu_e} < 2.6 \text{ eV} [2] \quad (2.81)$$

verwendet. Die so gefundenen Obergrenzen der einzelnen Elemente der Neutrinomassenmatrix durch die Kombination von Neutrinooszillationsdaten und Obergrenze der Elektronneutrinomasse sind

$$|\mathcal{M}^{max}| < \begin{pmatrix} 2.6 & 2.5 & 2.6 \\ 2.5 & 2.7 & 2.7 \\ 2.6 & 2.7 & 2.8 \end{pmatrix} \text{ eV}, \quad (2.82)$$

$$\rightarrow m_{\nu_e} + m_{\nu_\mu} + m_{\nu_\tau} < 8.1 \text{ eV}. \quad (2.83)$$

Da das Neutrino aber nicht notwendigerweise ein Diraceteilchen ist, sondern auch ein Majoranateilchen sein kann, ergeben sich zusätzliche Einschränkungen. Wenn das Neutrino ein Majoranateilchen ist, sollte der $0\nu\beta\beta$ Zerfall auftreten. Die aus der bisherigen Nichtbeobachtung dieses Prozesses gewonnene Obergrenze für die gemittelte Elektronmajorananeutrinomasse von

$$|\langle m_\nu \rangle| < 0.62 \text{ eV} [56] \quad (2.84)$$

erlaubte es, die Obergrenzen der Majorananeutrinomassenmatrix zu bestimmen zu

$$|M_{Majorana}^{max}| < \begin{pmatrix} .60 & .97 & .85 \\ .97 & .76 & .80 \\ .85 & .80 & 1.17 \end{pmatrix} \text{ eV}, \quad (2.85)$$

$$\rightarrow |m_{\nu_e}| + |m_{\nu_\mu}| + |m_{\nu_\tau}| < 2.53 \text{ eV}. \quad (2.86)$$

Diese zusätzliche Einschränkung bewirkt somit eine drastische Reduktion der Obergrenzen für den Fall, daß das Neutrino ein Majoranateilchen ist.

Die beiden verschiedenen Obergrenzen für die Elemente der Neutrinomassenmatrix für Dirac- und Majorananeutrinos stellen einen indirekten Test der Natur der Neutrinos dar. Wenn man experimentell Werte für Neutrinomassen findet, die inkompatibel mit den Obergrenzen aus Gleichung (2.85) sind, müssen Neutrinos Diraceteilchen sein. Andererseits kann man die Grenzen aus Gleichung (2.85) verwenden, um Grenzwerte für Kopplungskonstanten in Modellen zu gewinnen, in denen Neutrinos Majoranateilchen sind. Dies wird in dieser Arbeit im Rahmen

des \mathcal{R}_p -MSSM in Abschnitt 3.2.3 getan und dabei für einige Kopplungskonstanten des betrachteten Modells eine erhebliche Verbesserung von Obergrenzen dieser Kopplungen erreicht.

Aus diesen Obergrenzen der Elemente der Neutrinomassenmatrix ergeben sich andererseits auch neue Grenzwerte für die Massen des Myon- und Tauneutrinos. Die Obergrenzen dieser Neutrinos waren experimentell bestimmt worden zu

$$\begin{aligned} m_{\nu_\mu} &< 170.0\text{keV}[3], \\ m_{\nu_\tau} &< 18.2\text{MeV}[3]. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Im Rahmen des hier betrachteten drei Familienmischungsbildes muß aber für die Masse des Myon- und Tauneutrinos gelten, daß sie im Fall von Diracneutrinos

$$m_{\mu,\tau} < 8.10 \text{ eV} \quad (\text{da } m_{\nu_e} + m_{\nu_\mu} + m_{\nu_\tau} < 8.1 \text{ eV}) \tag{2.88}$$

ist, und falls das Neutrino ein Majoranateilchen ist, gilt

$$m_{\mu,\tau} < 2.53 \text{ eV} \quad (\text{da } |m_{\nu_e}| + |m_{\nu_\mu}| + |m_{\nu_\tau}| < 2.53 \text{ eV, s. Gl. (2.86)}). \tag{2.89}$$

Diese Werte ergeben sich aus der Unabhängigkeit der Spur einer Matrix von der gewählten Basis. Die Kombination von Neutrinooszillationsanalysen und Obergrenzen für die Elektronneutrinomasse oder im Fall von Majorananeutrinos zusätzlich der gemittelten Majorananeutrinomasse führt somit auf deutlich kleinere Grenzen für die Massen der einzelnen Neutrinfamilien.

Kapitel 3

ν -Massen im Minimal supersymmetrischen Standardmodell

Im folgenden Kapitel dieser Arbeit wird zunächst ein Modell, das R-paritätsverletzende, minimal supersymmetrische Standardmodell (\mathcal{R}_p -MSSM), vorgestellt. Im Rahmen dieses Modells sind Neutrinos auf natürliche Weise massiv. Als erstes werden das Modell im Allgemeinen und anschließend die verschiedenen Beiträge zur Neutrinomassenmatrix im Rahmen dieses Modells diskutiert. Mit Hilfe der im letzten Abschnitt gefundenen Obergrenzen für die Elemente der Neutrinomassenmatrix werden verbesserte Werte für Obergrenzen von leptonenzahlverletzenden Kopplungskonstanten abgeleitet werden. Zum Schluß wird noch eine zusätzliche $U(1)_X$ Symmetrie miteinbezogen, um die Anzahl der Parameter im betrachteten Modell zu reduzieren. Dies wird es erlauben, ein eindeutiges Szenario für Neutrinomassen zu erhalten und somit die Werte der Neutrinomassen zu berechnen.

3.1 \mathcal{R}_p -MSSM

Zur Beschreibung der Elementarteilchen und deren Wechselwirkung wird heute das sehr erfolgreiche Standard Modell (SM) benutzt. Es ist eine lokale Eichtheorie basierend auf der Eichgruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. In vielen Bereichen ist eine hervorragende Übereinstimmung von theoretischer Vorhersage und experimentellen Ergebnissen gefunden worden. Von theoretischer Seite geht man jedoch davon aus, daß aufgrund der Vielzahl von Parametern eine noch fundamentalere Theorie existieren sollte. Diese enthält das SM als Grenzfall und ist daher eine Erweiterung des SM. Dieses ästhetische Argument stellt natürlich keinen Beweis dafür dar, daß das SM erweitert werden muß. Jedoch sind im SM Neutrinos wegen des Fehlens der rechtshändigen Isosingulettneutrinos masselos. Wie in Abschnitt 2.3.1 diskutiert wurde, kann man aber heute davon ausgehen, daß Neutrinos massiv sind. Damit muß das SM erweitert werden. Eine Möglichkeit dies zu tun sind supersymmetrische Modelle.

Zur Beschreibung der massiven Neutrinos wird in dieser Arbeit eine supersymmetrische Erweiterung des SM benutzt. Warum gerade diese? Für die Verwendung supersymmetrischer Modelle gibt es viele Argumente, die jedoch alle nicht zwingend sind. Die meist diskutierten dabei sind die folgenden. Supersymmetrie stellt einen natürlichen Weg dar, das SM zu erweitern, weil es einen schon vorhandenen Freiheitsgrad der Teilchen, den Spin, miteinander verbindet. Desweiteren treten in supersymmetrischen Modellen keine quadratischen Divergenzen mehr auf. Supersymmetrie löst damit das Hierarchie Problem [57]. Auch in Anbetracht der Vereinheitlichung der Gravitationswechselwirkung mit den anderen Wechselwirkungen kann Supersymmetrie in ihrer lokalen Version ein Ausweg sein [58, 59].

Da die Gravitation bisher noch in keiner großvereinheitlichten Theorie miteingebunden werden konnte, stellt dieses Argument einen attraktiven Grund dar. Zusätzlich löst Supersymmetrie das Natürlichkeitsproblem.

Anhand des Natürlichkeitsproblems wollen wir kurz zeigen, wie Supersymmetrie dieses löst. Das Natürlichkeitsproblem stellt sich im SM folgendermaßen. Man erwartet aufgrund der Konvergenz der elektromagnetischen, der schwachen und der Gluon-Quark-Kopplungskonstanten bei etwa der Skala $\Lambda \sim 10^{15}$ GeV der großen Vereinheitlichung bei noch höheren Energien “Neue Physik”. Dabei kann neben der Skala der großvereinheitlichten Theorie (GUT) von $\sim 10^{15}$ GeV auch die der noch fundamentaleren Planckskala von $\sim 10^{19}$ GeV die Schwelle dafür sein. Ein Problem ergibt sich im SM, da man im SM wegen der verschiedenen Isospinladung der rechts- und linkshändigen Fermionen keine direkten Massenterme einführen kann. Die Masse kann aber durch die Kopplung an ein elektrisch neutrales, skalares isodublett Feld mit nichtverschwindendem Vakuumerwartungswert, dem sogenannten Higgsfeld, erzeugt werden. Dabei darf der Vakuumerwartungswert $\langle H^0 \rangle$ des Higgsfelds nur maximal ~ 250 GeV groß sein. Bei größeren Werten wäre eine zu starke Kopplung des Higgs Sektors vorhanden. Dies würde den offensichtlichen Erfolg der Störungstheorie im Niederenergiebereich schwer verständlich machen. Die 1-Schleifenkorrigierte Higgsbosonenmasse ergibt sich zu [60] $\delta m_{H^0}^2 = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) \Lambda^2$ und würde im Fall von $\Lambda = \Lambda_{GUT}$ oder $\Lambda = \Lambda_{Planck}$ zu einer zu großen Higgsbosonen Masse führen. Im Rahmen von supersymmetrischen Theorien löst sich dieses Problem, da die 1-Schleifenkorrekturen der Fermionen durch die der supersymmetrischen Partner aufgehoben würden, falls Supersymmetrie eine exakte Symmetrie wäre. Da Supersymmetrie aber gebrochen sein muß, ergibt sich

$$\delta m_{H^0}^2 = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) |m_B^2 \Leftrightarrow m_F^2|. \quad (3.1)$$

Dabei ist α die Yukawakopplung des Higgsfelds an das Fermion-/Antifermionpaar mit Masse m_F und an dessen skalare Superpartner mit Masse m_B . Somit kann Supersymmetrie dieses Problem lösen, wenn die Massen der supersymmetrischen Teilchen unter 1 TeV liegen.

Nach diesen einleitenden Argumenten, die als Motivation für die Untersuchung von Supersymmetrischen Modellen gesehen werden sollen, wollen wir erläutern, was unter Supersymmetrie zu verstehen ist. Supersymmetrie stellt eine zusätzliche Symmetrie dar, die die rein quantenmechanischen Fermionen mit Bosonen, die auch einen klassischen Limes besitzen, verbindet. In Tabelle 3.1 sind einige grundlegende Eigenschaften von Fermionen und Bosonen zusammengestellt. Zur

BOSON	FERMION
Spin ganzzahlig	Spin halbzahlig
Tensor	Spinor
Kommutator-Relationen	Antikommutator-Relationen
Bose-Statistik	Pauli-Prinzip
Übermittler der Kräfte	Materieteilchen
klassischer Limes	reines Quantenobjekt

Tabelle 3.1: Eigenschaften von Bosonen und Fermionen

Erläuterung der grundlegenden Eigenschaften der Supersymmetrie beschränken wir uns auf den $N = 1$ Fall. N gibt dabei die Anzahl der Generatoren an, die Fermionen in Bosonen transformiert und umgekehrt. Für den Generator Q der Supersymmetrie muß also gelten

$$\begin{aligned} Q|Boson\rangle &\sim |Fermion\rangle, \\ Q|Fermion\rangle &\sim |Boson\rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dabei erfüllen die Komponenten der Generatoren Q und dessen hermitesch konjugierte Generators \bar{Q} folgende Algebra

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0, \\ \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 0, \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu, \\ [Q_\alpha, P_\mu] &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dabei sind $\sigma^\mu \equiv (1, \sigma^i)$ die Paulimatrizen und $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2$ die Weylspinorindizes. P_μ ist der Viererimpulsvektor, $\{A, B\} \equiv AB + BA$ der Antikommutator und $[A, B] \equiv AB - BA$ der Kommutator der Operatoren A und B . Allgemein kann gezeigt werden, daß für supersymmetrische Modelle immer gilt [61, 62]:

- Anzahl der Bosonen = Anzahl der Fermionen
- Bei exakter Supersymmetrie haben die durch Q aus einem Fermion F hervorgehenden Bosonen stets die gleiche Masse

Da keine Partner der bekannten SM Teilchen mit um $1/2$ verschiedenen Spin und gleicher Masse beobachtet worden sind, muß Supersymmetrie gebrochen sein. Diese Brechung führt dann zu einer höheren Masse der supersymmetrischen Partner.

Damit besteht kein Widerspruch zu den bisherigen experimentellen Beobachtungen.

Nach diesen grundlegenden Dingen über Supersymmetrie wollen wir auf das in dieser Arbeit betrachtete Modell eingehen. Der konkrete Weg, wie supersymmetrische Modelle konstruiert werden, ist z.B. in [59, 58, 61, 63] dargestellt. Zunächst werden wir die allgemeinen Eigenschaften des betrachteten Modells und einen einfachen Weg zur Konstruktion der Feynmangraphen darstellen. Anschließend wird die formale Definition des Modells gegeben.

In der hier betrachteten minimalen supersymmetrischen Erweiterung des SM führt man zu jedem SM Teilchen einen neuen supersymmetrischen Partner ein. Dafür ist nur ein Generator der Supersymmetrie nötig. Man spricht daher von $N = 1$ Supersymmetrie. Wenn Supersymmetrie exakt wäre, hätten die durch Q verbundenen Fermion-Bosonen Paare die gleiche Masse. In Tabelle 3.2 sind die im Modell enthaltenen Teilchen, ihr Spin und die Quantenzahlen bezüglich der Eichsymmetrien dargestellt. In der minimalen supersymmetrischen Erweiterung ist der Teilcheninhalt verdoppelt worden. Dabei muß man mindestens zwei Higgs Isodublettfelder einführen, um allen geladenen Fermionen eine Masse zu geben. Das zusätzliche Higgsfeld im Vergleich zum Standardmodell wird benötigt, da Hermiteschkonjugation des Higgsfelds nicht zu einem Feld führt, das die andere Quarkfamilie massiv macht. Insgesamt gilt aber, daß die Anzahl der Fermionen gleich die der Bosonen ist. Die möglichen Kopplungen in dieser Minimalen Erweiterung bei erhaltener Baryonen- und Leptonenzahl können aus den im SM bekannten Feynmangraphen konstruiert werden. Dazu geht man von einem SM Feynman Diagramm aus und ersetzt die SM Teilchen durch ihre supersymmetrischen Partner. Da diese einen um $1/2$ verschiedene Spin haben, muß man immer eine gerade Anzahl von SM Teilchen durch ihre supersymmetrischen Partner ersetzen. Dies ist schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt. Da somit immer eine gerade Anzahl von supersymmetrischen Teilchen in einem Prozeß vorkommt, können diese nur paarweise produziert werden. Das leichteste supersymmetrische Teilchen¹ ist in diesem Rahmen stabil. In der Kosmologie wird es häufig als Kandidat für die dunkle Materie diskutiert und intensiv nach ihm gesucht. Bei dieser Betrachtungsweise werden aber supersymmetrische Teilchen und SM Teilchen unterschiedlich behandelt und klar voneinander separiert. Formal kann dies durch die Erhaltung der sogenannten R-Parität beschrieben werden. Die R-Parität eines Teilchens ist definiert als $R = (\Leftrightarrow)^{3B+L+2S}$, wobei B die Baryonenzahl, L die Leptonenzahl und S der Spin des betrachteten Teilchens ist. Die R-Parität ist für alle SM Teilchen $+1$ und alle supersymmetrischen Partner -1 . Es gibt aber von

¹Lightest Supersymmetric Particle = LSP

Superfeld	Teilchen	Spin	Superpartner	Spin	$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
V_1	B_μ	1	\tilde{B}	1/2	(0,0,0)
V_2	W_μ^i	1	\tilde{W}^i	1/2	(0,1,0)
V_3	g_μ^a	1	\tilde{g}^a	1/2	(7/2,0,0)
Q	(u_L, d_L)	1/2	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	0	(1,1/2,1/3)
U^c	\bar{u}_R	1/2	\tilde{u}_R^*	0	(1,0,4/3)
D^c	\bar{d}_R	1/2	\tilde{d}_R^*	0	(1,0,-2/3)
L	$(\nu, e)_L$	1/2	$(\tilde{\nu}_L, \tilde{e}_L)$	0	(0,1/2,-1)
E^c	\bar{e}_R	1/2	\tilde{e}_R^*	0	(0,0,-2)
H_1	(H_1^0, H_1^-)	0	$(\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_1^-)$	1/2	(0,1/2,-1)
H_2	(H_2^+, H_2^0)	0	$(\tilde{H}_2^+, \tilde{H}_2^0)$	1/2	(0,1/2,1)

Tabelle 3.2: Felderinhalt des \mathbb{R}_p -MSSM und Ladungen bezüglich der Eichgruppe des SM (siehe z.B. [64]). Die Hyperladung Y der $U(1)$ ist definiert durch $Q = (T_3 + Y/2)$, wobei T_3 die dritte Komponente des Isospins und Q die elektrische Ladung des Felds ist.

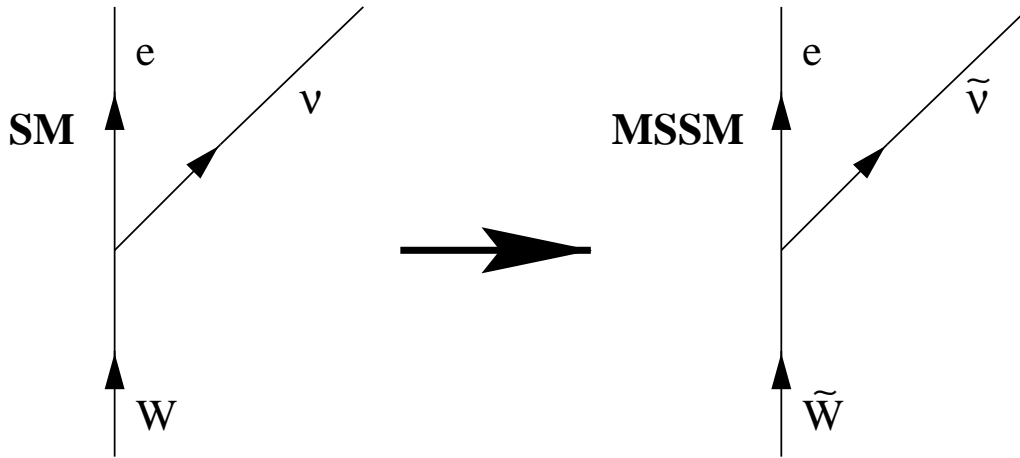


Abbildung 3.1: Konstruktion der erlaubten Kopplungen im MSSM mit erhaltener R-Parität aus den Feynman Diagrammen des SMs. Supersymmetrische Teilchen sind mit einem Tilde bezeichnet.

theoretischer Seite keine Gründe, warum die R-Parität erhalten sein sollte. Wenn sie aber verletzt ist, führt das zu neuen Kopplungen, wie sie z.B. in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Sobald die R-Parität verletzt ist, führt dies zu baryonenzahl- und leptonenzahlverletzenden Prozessen (siehe Abb. 3.2). Dieses minimal supersymmetrische SM mit expliziter R-Paritätsverletzung, \mathcal{R}_p -MSSM, ist in dieser Arbeit verwendet worden um massive Neutrinos zu beschreiben. Wir wollen nun zur formalen Beschreibung des betrachteten Modells kommen. Die im Modell enthaltenen Teilchen wurden schon in Tabelle 3.2 eingeführt. Um die Lagrange-funktion des betrachteten Modells zu erhalten ist es klar, daß die Eichwechselwirkung durch die Eichgruppe des SM, $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, gegeben ist. Die $SU(3)_c$ Gruppe beschreibt dabei die starke Wechselwirkung durch die Invarianz unter Rotationen im Farbraum und die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ die elektroschwache Wechselwirkung. Die für uns im folgenden interessanten Größen wie die Massen und Kopplungen werden durch das Superpotential W bestimmt. Durch die Wahl der Eichgruppe ergibt sich der R-paritätserhaltende Anteil des Superpotentials zu

$$W_R = \lambda_{ij}^E H_1 L_i E_j^c + \lambda_{ij}^D H_1 Q_i D_j^c + \lambda_{ij}^U H_2 Q_i U_j^c + \mu H_1 H_2. \quad (3.4)$$

Dabei ist Summation über die Generationenindizes nicht explizit aufgeführt. In jedem Term müssen die $SU(2)$ und $SU(3)$ Indizes kontrahiert werden. Speziell

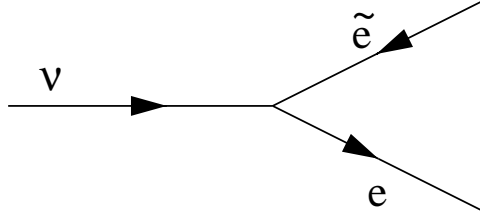


Abbildung 3.2: Kopplung der SM und supersymmetrischen Teilchen, die erst bei verletzter R-Parität erlaubt sind. In diesem Fall ist nicht nur eine ungerade Anzahl supersymmetrischer Teilchen beteiligt, sondern auch die Leptonenzahlerhaltung verletzt.

für $SU(2)$ ist dies z.B.

$$\begin{aligned} H_1 H_2 &= \varepsilon^{\alpha\beta} H_{1\alpha} H_{2\beta} \\ &= H_1^0 H_2^0 \Leftrightarrow H_1^- H_2^+. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\varepsilon^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ ist dabei ein total antisymmetrischer Tensor um die $SU(2)$ Isospinindizes zu kontrahieren. Analog kontrahiert man den $SU(3)$ Farbindex

$$H_1 Q D^c = \varepsilon^{\alpha\beta} H_{1\alpha} Q_\beta^a D_a^c, \quad a = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Die 3×3 Matrizen $\lambda_{ij}^E, \lambda_{ij}^D, \lambda_{ij}^U$ sind dimensionslose Yukawakopplungen, die zu den Quark- und Leptonenmassen führen. Der R-paritätsverletzende Anteil des Superpotentials ist

$$W_{\mathbb{R}p} = \lambda_{ijk} L_i L_j E_k^c + \lambda'_{ijk} L_i Q_j D_k^c + \mu_j L_j H_2 + \lambda''_{ijk} U_i^c D_j^c D_k^c. \quad (3.7)$$

Die Lagrangefunktion kann man aus Gleichung (3.4) und (3.7) durch die Beziehung [65]

$$\mathcal{L}_{SUSY} = \Leftrightarrow \left[\sum_{j,k} \frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_j \partial \Phi_k} \Psi_j \Psi_k + \text{h.c.} \right] \Leftrightarrow \sum \left| \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right|^2 \quad (3.8)$$

erhalten. Dabei sind Φ_i skalare und Ψ_j fermionische Felder. Der erste Term in Gleichung (3.8) beschreibt die Massen und Yukawawechselwirkung der Fermionen,

während der zweite die skalaren Massen und Wechselwirkungen beschreibt. Eine explizite Form des R-paritätserhaltenden Anteils von \mathcal{L}_{SUSY} findet man z.B. in [66]. Da experimentell keine Superpartner der SM Teilchen mit gleicher Masse beobachtet worden sind, muß Supersymmetrie in einem realistischen Modell gebrochen sein. Da der Mechanismus, der zur Brechung der Supersymmetrie führt, noch nicht verstanden ist, werden üblicherweise von Hand supersymmetriebrechende Terme in die Lagrangefunktion eingeführt. Dabei berücksichtigt man nur Terme, die die Supersymmetrie *sanft* brechen und zu keinen quadratischen Divergenzen führen. Die so einzubeziehenden Beiträge sind nun [67]

- Massenterme der supersymmetrischen Partner der Eichbosonen $\Leftrightarrow \frac{1}{2} M_a \bar{\lambda}_a \lambda_a$
- skalare Massenterme $\Leftrightarrow M_{\Phi_i} |\Phi_i|^2$
- trilineare skalare Wechselwirkungsterme $\Leftrightarrow A_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k$
- bilineare skalare Terme $\Leftrightarrow B_{ij} \Phi_i \Phi_j + \text{h.c.}$

Diese Beiträge führen im R-paritätsverletzenden Anteil des skalaren Potentials zu folgenden Termen

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathcal{L}_{R_p}^{soft} = & \Lambda_{ijk} \tilde{L}_i \tilde{L}_j \tilde{E}_k^c + \Lambda'_{ilk} \tilde{L}_i \tilde{Q}_j \tilde{D}_k^c + \Lambda''_{ijk} \tilde{U}_i^c \tilde{D}_j^c \tilde{D}_k^c + \tilde{\mu}_{2j}^2 \tilde{L}_j H_2 \\ & + \tilde{\mu}_{1j}^2 \tilde{L}_j H_1^\dagger + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (3.9)$$

und im R-paritätserhaltenden Teil zu

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathcal{L}_R^{soft} = & m_{H_1}^2 |H_1|^2 + m_{H_2}^2 |H_2|^2 + m_{\tilde{Q}}^2 |\tilde{q}_L|^2 + m_{\tilde{U}}^2 |\tilde{u}_R^c|^2 + m_{\tilde{D}}^2 |\tilde{d}_R^c|^2 \\ & + m_{\tilde{L}}^2 |\tilde{l}_L|^2 + m_{\tilde{E}}^2 |\tilde{e}_R^c|^2 + \lambda^E A^E H_1 \tilde{L} \tilde{E}^c + \lambda^D A^D H_1 \tilde{Q} \tilde{D}^c + \\ & + \lambda^U A^U H_2 \tilde{Q} \tilde{U}^c + \mu B H_1 H_2 + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hier sind $\lambda^U, \lambda^D, \lambda^E$ dimensionslose 3×3 Matrizen der Yukawakopplungen die zu den Quark- und geladenen Leptonenmassen führen. A^U, A^D, A^E sind ebenso 3×3 Matrizen. Sie beschreiben die Abweichung der hier auftretenden Terme von den üblichen Massentermen. Analoges gilt für B . Weiterhin führen die Massen der supersymmetrischen Partner der Eichbosonen des SM zu den Termen

$$\mathcal{L}_{GM} = \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^k \tilde{W}^k + M_3 \tilde{g}^a \tilde{g}^a \right] \Leftrightarrow \text{H.c.} \quad (3.11)$$

Im MSSM sind zwei Higgsfelder für die Erzeugung der Quark- und geladenen Leptonenmassen verantwortlich. Die nichtverschwindenden Vakuumerwartungswerte sind

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} v_1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Durch Redefinition der Phasen können v_1 und v_2 immer reell gewählt werden. Das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte wird meist definiert als

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}. \quad (3.13)$$

Um nicht eine zu kurze Protonenlebensdauer zu erhalten, machen wir die übliche Annahme, daß in Gleichung (3.10) und (3.7) $\lambda'' = \Lambda'' = 0$ ist. Bisher sind noch keine Massenterme der Neutrinos vorgekommen. Wie Neutrinos dennoch massiv werden wird nun dargestellt.

3.2 ν -Massen im \mathbb{R}_p -MSSM

Im Lagrangian sind in der gewählten Basis zunächst keine direkten Massenterme der Neutrinos enthalten. Neutrinos sind dennoch im allgemeinen im \mathbb{R}_p -MSSM massiv. Ein Neutrino erhält seine Masse bereits auf dem Baumniveau durch Mischung mit den fermionischen Superpartnern des B , W^3 , als auch mit den neutralen Higgsuperfeldern \tilde{H}_1^0 und \tilde{H}_2^0 . Dies wird im Abschnitt 3.2.1 diskutiert. Desweiteren ergeben sich durch R-paritätsverletzende Terme im Superpotential $W_{\mathbb{R}_p}$ zusätzlich 1-Schleifenkorrekturen zur Neutrinomassenmatrix. Dadurch erhalten die beiden anderen Neutrinos eine Masse. Deren Berechnung und Beitrag zur Massenmatrix wird in Abschnitt 3.2.2 beschrieben.

3.2.1 Baumniveau Neutrino Masse

Die bilinearen Terme in Gleichung (3.9) und (3.7) führen zu Termen im skalaren Potential, die linear in den Sneutrino-feldern $\tilde{\nu}_i$ sind. Analog zum Higgsmechanismus des Standardmodells führt die Mischung aus linearen und quadratischen Termen zu einem nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert (VEV) der Sneutrino-felder $\langle \tilde{\nu}_i \rangle \neq 0$. Die MSSM Vertizes $\tilde{B}^0 \nu \tilde{\nu}$ und $\tilde{W}^3 \nu \tilde{\nu}$ (oder $\tilde{\gamma}^0 \nu \tilde{\nu}$ und $\tilde{Z}^0 \nu \tilde{\nu}$) führen nun zu den Mischungsmassentermen $\tilde{B}^0 \nu \langle \tilde{\nu} \rangle$ und $\tilde{W}^3 \nu \langle \tilde{\nu} \rangle$, die

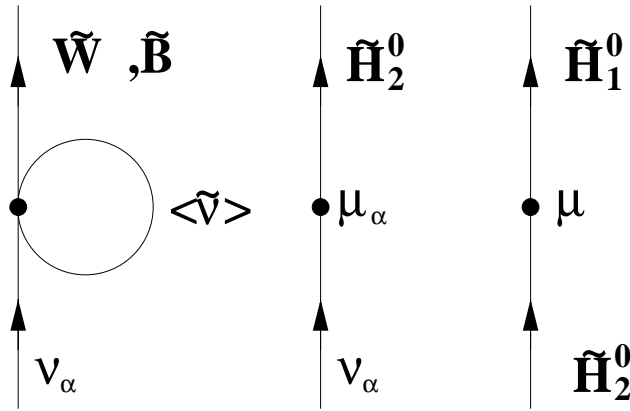


Abbildung 3.3: Mischung der Neutrinos mit den Neutralinos.

in Figur 3.3 links dargestellt sind. Zusammen mit der durch den Term $\mu_i L_i \tilde{H}_1$ des Superpotentials aus Gleichung (3.7) verursachten und in Figur 3.3 Mitte und rechts dargestellten Mischung erhalten wir eine 7×7 Massenmatrix der neutralen Fermionen. In der zweikomponentigen Weyl Basis

$$\Psi_{(0)}^{\prime T} = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \tilde{B}^0, \tilde{W}^3, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0), \quad (3.14)$$

ist der Massenterm der neutralen Fermionen

$$\mathcal{L}_{mass}^{(0)} = \Leftrightarrow \frac{1}{2} \Psi_{(0)}^{\prime T} M^{tree} \Psi'_{(0)} \Leftrightarrow \text{H.c.} \quad (3.15)$$

Dabei ist

$$M^{tree} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^T & M_\chi \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

wobei m die Nebendiagonale 3×4 Matrix (Basis $[(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \times (\tilde{B}^0, \tilde{W}^3, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0)]$)

$$m = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta u_1 & M_Z c_W c_\beta u_1 & 0 & \Leftrightarrow \mu_1 \\ \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta u_2 & M_Z c_W c_\beta u_2 & 0 & \Leftrightarrow \mu_2 \\ \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta u_3 & M_Z c_W c_\beta u_3 & 0 & \Leftrightarrow \mu_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

durch die bilinearen Terme aus dem R-paritätsverletzenden Teil des Superpotentials und des sanft SUSY brechenden Sektors stammen. M_χ ist die im MSSM

übliche Neutralinomasenmatrix, und in der gewählten Basis ergibt sie sich zu

$$M_\chi = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta & M_Z s_W s_\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_W c_\beta & \Leftrightarrow M_Z c_W s_\beta \\ \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta & M_Z c_W c_\beta & 0 & \Leftrightarrow \mu \\ M_Z s_W s_\beta & \Leftrightarrow M_Z c_W s_\beta & \Leftrightarrow \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

wobei $u_i = \langle \tilde{\nu}_i \rangle / \langle H_1^0 \rangle$, $\tan \beta = \langle H_2^0 \rangle / \langle H_1^0 \rangle$ und $s_W = \sin \theta_W$, $c_W = \cos \theta_W$, $s_\beta = \sin \beta$, $c_\beta = \cos \beta$ ist. θ_W ist der Weinberg Winkel, der die Mischung des B und W^0 beschreibt, M_1 und M_2 sind die Massen des \tilde{B} und \tilde{W}^0 und M_{Z^0} ist die Masse des Z^0 Bosons.

Durch die Struktur der 7×7 Matrix ergeben sich zwei Eigenwerte zu Null [68, 69]. Dies erkennt man bei der Betrachtung der ersten drei und sechsten Zeile von M^{tree} . Man sieht sofort, daß zumindest eine der Gleichungen von den anderen drei linear abhängig ist. Wenn man zusätzlich die Struktur der vierten und fünften Spalte dieser Zeilen betrachtet, findet man, daß von den vier Zeilen insgesamt nur zwei linear unabhängig sind. Daher sind zwei Eigenwerte gleich Null. Da die Felder \tilde{W}^0 , \tilde{B}^0 , \tilde{H}_1^0 und \tilde{H}_2^0 bisher noch nicht beobachtet worden sind, identifiziert man die leichtesten drei der beteiligten Teilchen mit den Neutrinos. Durch die Mischung mit den Neutralinos bleiben auf dem Baumniveau also zwei Neutrinos exakt masselos. Um eine handhabbarere Neutrinomasenmatrix zu erhalten, kann die 7×7 Matrix entwickelt werden und in Blockdiagonalform gebracht werden (siehe Appendix A). Dabei entwickelt man in den kleinen Größen $\langle \tilde{\nu}_i \rangle / M_{SUSY}$ und μ_i / M_{SUSY} , wobei M_{SUSY} die Supersymmetrie brechende Skala ist. Man erwartet, daß M_{SUSY} im Bereich von 100 GeV bis 1 TeV liegt. Die dabei erhaltene effektive 3×3 Neutrinomasenmatrix kann man schreiben als

$$M_{\alpha\beta}^{tree} = \mathcal{Z}_1 \Lambda_\alpha \Lambda_\beta, \quad \Lambda_\alpha = \mu \langle \tilde{\nu}_\alpha \rangle \Leftrightarrow \langle H_1 \rangle \mu_\alpha, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{Z}_1 = g_2^2 \left| \frac{M_1 + \tan^2 \theta_W M_2}{4(\sin 2\beta M_W^2 \mu (M_1 + \tan^2 \theta_W M_2) \Leftrightarrow M_1 M_2 \mu^2)} \right|.$$

Dabei sind g_2 die $SU(2)$ Eichkopplung und $M_{1,2}$ die sanft SUSY brechenden Massen des Zino und Wino aus Gleichung (3.11), sowie μ die Kopplung der beiden Higgsfelder aneinander. Man erwartet für diese Größen, daß sie im Bereich der charakteristischen SUSY brechenden Skala M_{SUSY} liegen.

In der Literatur wird dieser Beitrag zur Neutrinomasenmatrix häufig vernachlässigt. Das Argument in diesen Arbeiten ist, daß man den bilinearen Term im R-paritätsverletzenden Superpotential aus Gleichung (3.7) durch eine Neudefinition der Felder L_i zum Verschwinden bringen kann und alles in H_1 absorbiert.

Da jedoch im sanft supersymmetriebrechenden Potential aus Gleichung (3.10) auch bilineare Terme der gleichen Art enthalten sind, ist diese Rotation im Allgemeinen nicht möglich [60]. Somit muß für die Diskussion massiver Neutrinos im Rahmen des \mathcal{R}_p -MSSM auch der Baumniveaubetrag miteinbezogen werden. Da nach heutigem Kenntnisstand (siehe 2.3.1) zumindest zwei Neutrinos massiv sind, müssen für eine adäquate Beschreibung der Neutrinomassen im Rahmen des \mathcal{R}_p -MSSM auch höhere Korrekturen mitbetrachtet werden. Deren Berechnung wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

3.2.2 1-Schleifen-Korrekturen

Die R-paritätsverletzenden Terme $\lambda'_{ijl}L_iQ_jD_k^c$ und $\lambda_{ijk}L_iL_jE_k^c$ des Superpotentials aus Gleichung (3.7) führen zu Kopplungen der Neutrinos an Quark-Squark ($q\tilde{q}$) und Lepton-Slepton ($l\tilde{l}$) Paare. Die Amplitude für die in Figur 3.4 (b) dargestellten 1-Schleifen Diagramme ergibt sich mit den Feynmanregeln aus Anhang B für die Lepton-Slepton Schleife zu

$$i\mathcal{M}_{qm} = \sum_{lm} \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (\Leftrightarrow i\lambda_{qlp}\nu_q^c C^{-1} P_L V_{i2} \frac{i(q+m_l)}{q^2 \Leftrightarrow m_l^2} \cdot P_L V_{i1} \frac{i}{(q \Leftrightarrow p)^2 \Leftrightarrow M_{p_i}^2} i\lambda_{mpl}). \quad (3.20)$$

Dabei sind die in der Schleife propagierenden Sleptonen Massenzustände \tilde{l}_i , $i=1,2$, mit den Flavor Eigenzuständen verbunden durch

$$\tilde{l}_i = V_{i1}\tilde{l}_L + V_{i2}\tilde{l}_R. \quad (3.21)$$

Die Mischungsmatrix kann für reelle A Terme durch einen Winkel parametrisiert werden als

$$V = \begin{pmatrix} \cos \Phi_l & \sin \Phi_l \\ \Leftrightarrow \sin \Phi_l & \cos \Phi_l \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Der Mischungswinkel Φ_l wird durch Diagonalisieren der Massenmatrix der Sleptonen bestimmt und ist im Anhang B.3 abgeleitet. Da $M_{1,2} \gg m_l$ ist, ergibt sich für $p \rightarrow 0$ (siehe Anhang B) und einer Entwicklung in der Differenz der Massenquadrate der links- und rechtshändigen Sleptonen die Amplitude zu

$$i\mathcal{M}_{qm} = \Leftrightarrow i \sum_{l,p} \lambda_{qlp} \lambda_{mpl} \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_l m_p (A^E + \mu \tan \beta)}{M_l^2}. \quad (3.23)$$

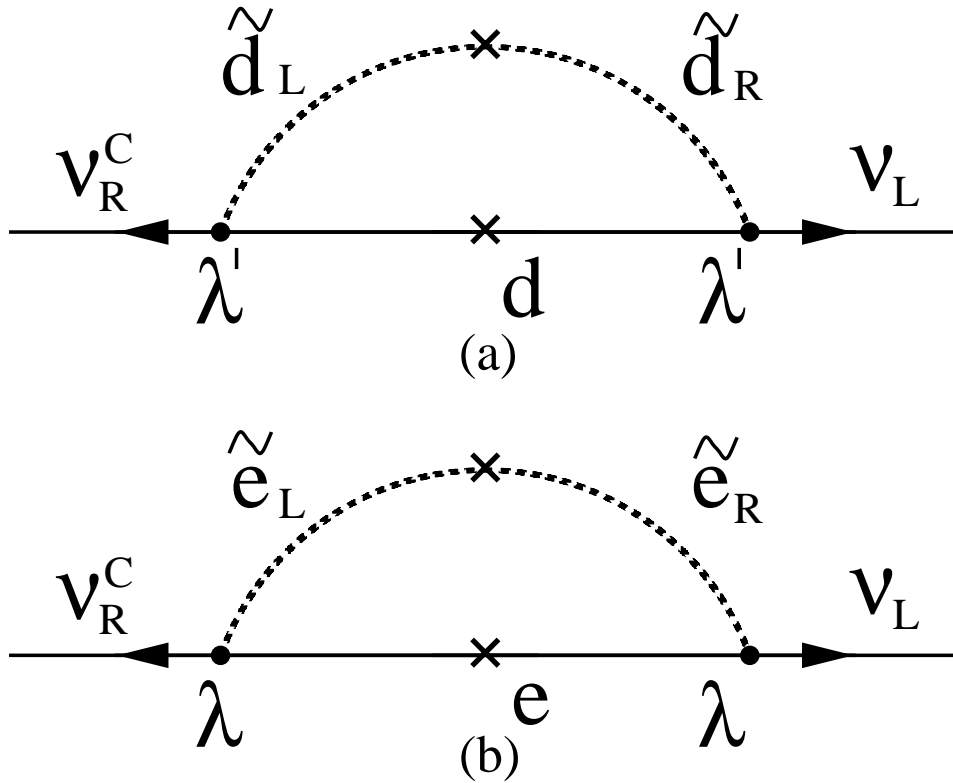


Abbildung 3.4: 1-Schleifen-Beiträge zur Neutrino Massenmatrix.

Der Beitrag zur Massenmatrix ist also proportional zum Quadrat der Massen der geladenen Leptonen. Da aber $m_\tau^2 \gg m_\mu^2 \gg m_e^2$ ist, kommt der dominante Beitrag der 1-Schleifen Lepton-Slepton Diagramme durch das $\tau\tilde{\tau}$ Paar in der Schleife. Der Beitrag zur Neutrino Massenmatrix kann also geschrieben werden als

$$M_{ij}^{l\tilde{l}} \simeq \frac{\lambda_{i33} \lambda_{j33} m_\tau^2 (A_\tau^E + \mu \tan \beta)}{8\pi^2 \tilde{m}_\tau^2} \equiv \mathcal{Z}_3 \lambda_{i33} \lambda_{j33}. \quad (3.24)$$

Analog erhält man für den 1-Schleifen Quark-Squark Beitrag

$$M_{ij}^{q\tilde{q}} \simeq \frac{3\lambda'_{i33} \lambda'_{j33} m_b^2 (A_b^D + \mu \tan \beta)}{8\pi^2 \tilde{m}_b^2} \equiv \mathcal{Z}_2 \lambda'_{i33} \lambda'_{j33}. \quad (3.25)$$

Der Faktor 3 erscheint aufgrund der Summation über die $SU(3)$ Farbfreiheitsgrade der Squarks und Quarks.

Die gesamte Neutrino Massenmatrix im \mathcal{R}_p -MSSM auf 1-Schleifen Niveau ergibt sich somit zu

$$\mathcal{M}^\nu = M^{tree} + M^{q\bar{q}} + M^{\tilde{l}\tilde{l}}. \quad (3.26)$$

Durch die Struktur der einzelnen Massenmatrizen ist es nicht möglich, alle drei Neutrinomassen verschieden von Null zu erhalten, wenn ein Beitrag weggelassen wird. Dies sieht man leicht, wenn man die einzelnen Beiträge jeweils als direktes Produkt eines Vektors mit sich selbst schreibt. Die Matrix aus Gleichung (3.26) kann man schreiben als

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^\nu = \sum_{i=1}^3 a_{i\alpha} a_{i\beta} \quad (3.27)$$

mit drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_i, i = 1, 2, 3$. Das Eigenwertproblem für die Neutrinomassen ist dann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{i\alpha} a_{i\beta} x_\beta &= m_\gamma x_\alpha \\ \text{oder} \quad \sum_{i=1}^3 a_{i\alpha} \sum_{\beta=1}^3 a_{i\beta} x_\beta &= m_\gamma x_\alpha \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hat man nur einen Vektor \vec{a}_i , so ist es klar, daß man dazu im \mathbb{R}^3 zwei orthogonale Vektoren \vec{x} finden kann und damit

$$\sum_{\beta=1}^3 a_{i\beta} x_\beta = m_\gamma x_\alpha = 0. \quad (3.29)$$

Zwei Neutrinomassen verschwinden in diesem Fall. Für $\mathcal{M}_{\alpha\beta}^\nu$ aufgebaut aus zwei Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 erhält man einen dazu orthogonalen Vektor \vec{x} und damit nur ein masseloses Neutrino.

Ziel ist es nun, alle drei Beiträge gleichzeitig zu analysieren und die Konsequenzen für die Neutrinomassen zu betrachten, wenn man die Analysen der Neutrinooszillationen miteinbezieht.

3.2.3 Neue Grenzen für Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$

Zunächst soll untersucht werden, in wieweit die Analysen der Neutrinooszillationsexperimente die Werte der Kopplungskonstanten einschränken. Insbesondere sollen Obergrenzen für die R-paritätsverletzenden Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$ gefunden werden. Diese sind von besonderem Interesse, da sie zu einer Vielzahl im SM verbotener Prozesse führen. Um dies zu tun, vergleichen wir die theoretische Neutrino Massenmatrix mit den Obergrenzen für die einzelnen Matrixelemente, die wir in Abschnitt 2.4 gefunden haben. Dabei ist es interessant, daß falls alle $\mathcal{Z}_1, i = 1, 2, 3$ das gleiche Vorzeichen haben, keine Dominanzannahmen für die Gewinnung der Grenzen gemacht werden müssen. Dieser Fall wird im Rahmen von vielen Renormierungsgruppenanalysen gefunden [70, 71]. Für verschiedene Vorzeichen geht man üblicherweise von der Annahme aus, daß einer der Beiträge zur Massenmatrix den dominanten Beitrag liefert. Dies ist im Bereich der Analyse supersymmetrischer Modelle eine gängige Praxis und wegen der Vielzahl der enthaltenen Kopplungskonstanten leider auch der einzig mögliche Weg, Obergrenzen zu bestimmen.

Als nächsten Schritt muß man Werte für die beteiligten Parameter des MSSM finden. Diese sind bisher unbekannt, aber sobald man experimentell die ersten SUSY Teilchen nachgewiesen hat, sind diese fixiert. Da bis heute noch keine SUSY Teilchen beobachtet worden sind, nehmen wir an, daß alle enthaltenen Parameter in den Beiträgen der 1-Schleifendiagramme von der gleichen Größenordnung sind, also $A \simeq \mu \simeq m_{\tilde{b}} \simeq m_{\tilde{\tau}} \simeq M_{SUSY}$ und $\tan\beta = 1$. Dabei ist M_{SUSY} die charakteristische Skala, an der Supersymmetrie gebrochen ist. Aufgrund des Natürlichkeitsargument und der Tatsache, daß noch keine SUSY Teilchen beobachtet worden sind, nimmt man an, daß M_{SUSY} im Bereich von 100 GeV bis 1 TeV liegt.

Mit diesen Annahmen und den Werten für die Obergrenzen der Matrixelemente aus Abschnitt 2.4 sind die in Tabelle 3.3 dargestellten Obergrenzen erhalten worden. Durch Vergleich mit den aus [72] entnommenen Werten sieht man, daß die so gewonnen Obergrenzen eine enorme Verbesserung darstellen. Für einzelne Kopplungskonstanten ist dies eine Verbesserung um bis zu drei Größenordnungen. Die Einbeziehung der Ergebnisse der Analysen der Neutrinooszillationsexperimente stellt somit ein sehr restriktives Mittel zur Eingrenzung des Parameterbereichs des \mathcal{R}_p -MSSM dar. Der Vergleich mit den Neutrinooszillationsdaten erlaubt es aber nicht, eine Vorhersage über die Größe der Neutrinomassen zu machen. Um ein Modell mit Vorhersagekraft zu gewinnen, soll nun im folgenden eine zusätzliche Symmetrie einbezogen werden. Diese Symmetrie war sehr erfolgreich bei der Beschreibung der Struktur der Fermionenmassenmatrizen. Die Symmetrie erlaubt

	neue Grenze	existierende Grenze (aus [72])
$\frac{\lambda_{133}}{M_{SUSY}/100\text{GeV}}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\lambda_{233}}{M_{SUSY}/100\text{GeV}}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\lambda_{133}}{M_{SUSY}/100\text{GeV}}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$
$\frac{\lambda_{233}}{M_{SUSY}/100\text{GeV}}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$.36
$\frac{\lambda_{333}}{M_{SUSY}/100\text{GeV}}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$.48

Tabelle 3.3: Obergrenzen für trilineare R -paritätsverletzende Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$. Die Werte wurden durch Vergleich mit den in Abschnitt 2.4 gefundenen Obergrenzen für die Einträge der Neutrino Massenmatrix und der Annahme $A \simeq \mu \simeq m_{\tilde{b}} \simeq m_{\tilde{\tau}} \simeq M_{SUSY}$, $\tan \beta = 1$ erhalten. Man erwartet, daß $100 \text{ GeV} \leq M_{SUSY} \leq 1 \text{ TeV}$ gilt.

es, viele Parameter des Modells miteinander zu korrelieren. Damit wird die Zahl der freien Parameter drastisch reduziert werden.

3.3 Massenmatrizen mit $U(1)_X$ Flavor Symmetrie

Im Standardmodell (SM) der Elementarteilchen sind die Massen der Teilchen Parameter der Modells. Im SM sind drei Leptonen Familien und ebensoviele up- und down-Quark Familien enthalten. Dies führt zusammen mit den Eichbosonmassen zu elf Massenparametern. Diese müssen experimentell bestimmt werden. Für die Verhältnisse der Massen der Familien einer Klasse findet man jeweils eine hierarchische Struktur,

$$m_3 \gg m_2 \gg m_1. \quad (3.30)$$

Die Vermutung liegt daher nahe, daß man diese Struktur durch eine versteckte und gebrochene Symmetrie erklären kann. Wie man dies tun kann, soll in den folgenden Abschnitten gezeigt werden. Im Anschluß daran werden die Konsequenzen für Parameter der \mathcal{R}_p -MSSM untersucht.

3.3.1 Texture Zeros und Symmetrien

Um die Massenmatrizen durch eine versteckte Symmetrie zu erklären, untersucht man zunächst die Struktur der up- und down-Quark Massenmatrizen. Da experi-

Lösung	Y_u	Y_d
1	$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\lambda^6 & 0 \\ \sqrt{2}\lambda^6 & \lambda^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda^4 & 0 \\ 2\lambda^4 & 2\lambda^3 & 4\lambda^3 \\ 0 & 4\lambda^3 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & \lambda^6 & 0 \\ \lambda^6 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda^4 & 0 \\ 2\lambda^4 & 2\lambda^3 & 2\lambda^3 \\ 0 & 2\lambda^3 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}\lambda^4 \\ 0 & \lambda^4 & 0 \\ \sqrt{2}\lambda^4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda^4 & 0 \\ 2\lambda^4 & 2\lambda^3 & 4\lambda^3 \\ 0 & 4\lambda^3 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\lambda^6 & 0 \\ \sqrt{2}\lambda^6 & \sqrt{3}\lambda^4 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda^4 & 0 \\ 2\lambda^4 & 2\lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^4 \\ 0 & \sqrt{2}\lambda^4 & \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}} \\ \lambda^4 & \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2\lambda^4 & 0 \\ 2\lambda^4 & 2\lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tabelle 3.4: *Struktur der up- und down-Quark Massenmatrizen mit fünf Nullen [74]. Der Entwicklungsparameter λ ist dabei das 12 Element der CKM-Matrix.*

mentell nur die Mischung des linkshändigen Sektors zugänglich ist, verlangt man, daß der links- und rechtshändige Sektor durch eine Symmetrie verbunden ist. Wir wollen uns auf rechts-links symmetrische Massenmatrizen beschränken. In diesem Fall kann man die Struktur der Massenmatrix bestimmen [73, 74]. Dabei legen die experimentell bestimmten Quark Massen und Mischungswinkel [3] die Massenmatrix fest. Um eine möglichst einfache Struktur zu erhalten, favorisiert man Lösungen mit einer möglichst großen Anzahl von Nullen. Für die maximal realisierbare Anzahl von fünf Nullen sind in Tabelle 3.4 alle möglichen Lösungen für die up- und down-Quarks dargestellt. Dabei ist der Entwicklungsparameter λ das 12 Element der CKM Matrix. Die in Tabelle 3.4 enthaltenen Nullen (*Texture zeros* [75]) stellen dabei keine exakten Nullen dar, sondern kleine Größen, die die Massen und Mischungswinkel nicht signifikant beeinflussen.

Da Symmetrien in fast allen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle spielen, hat man anschließend versucht, die Struktur der Massenmatrizen durch eine versteckte Symmetrie zu erklären. Diese Symmetrie ist durch Terme der Ordnung λ gebrochen. Solange diese Symmetrie exakt ist, ist nur die dritte Familie massiv. Das Brechen der Symmetrie generiert dann die restlichen Einträge der Massen-

	Q	u	d	L	e	H_2	H_1
$U(1)_{FD}$	α_i	α_i	α_i	a_i	a_i	$-2\alpha_3$	$w\alpha_3$

Tabelle 3.5: $U(1)_{FD}$ Ladungen. Q, L, H_1, H_2 sind die $SU(2)$ Dublettfelder und u, d, e die zugehörigen rechtshändigen $SU(2)$ Singulettfelder. Die Indizes $i = 1, 2, 3$ der $U(1)_{FD}$ Ladungen beziehen sich auf die einzelnen Generationen.

matrix. Der einfachste Weg eine zusätzliche Symmetrie in das SM zu integrieren, stellt eine horizontale $U(1)_X$ Symmetrie dar. Diese kann man aufspalten in

$$U(1)_X = U(1)_{FD} + U(1)_{FI}. \quad (3.31)$$

Dabei ist $U(1)_{FD}$ der familienabhängige Anteil und $U(1)_{FI}$ der familienunabhängige Anteil. Da wir symmetrische Massenmatrizen betrachtet haben, muß der familienabhängige Anteil $U(1)_{FD}$ in gleicher Weise auf rechts- und linkshändige Teilchen wirken. Für den Teilcheninhalt des MSSM kann man die in Tabelle 3.5 dargestellte Zuordnung der familienabhängigen $U(1)_{FD}$ Ladung verwenden [73, 74]. Q, L sind dabei die üblichen Quark und Leptonen isodublett Felder und u, d, e die zugehörigen isosingulett Felder. Dabei bewirkt die Forderung nach symmetrischen Matrizen, daß alle Quarks beziehungsweise Leptonen der i -ten Generation sich mit der gleichen Ladung transformieren. Der familienunabhängige Anteil $U(1)_{FI}$ kann nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit dazu verwendet werden, den familienabhängigen Anteil spurlos zu machen. Dies führt auf $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ und $a_1 = a_2 + a_3$. Mit dieser Einschränkung ergeben sich die $U(1)_{FD}$ Ladungen der Quark-Antiquark Paare zu

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 2\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

und die der geladenen Lepton-Antilepton Paare zu

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 2\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Solange die $U(1)$ Symmetrie exakt ist, kann somit nur jeweils ein Mitglied der Familie durch Kopplung an das zugehörige Higgsfeld massiv werden. Die restlichen Einträge der Massenmatrix werden generiert, wenn die Symmetrie gebrochen

wird. Dazu nehmen wir an, daß ein zusätzliches $SU(2)$ Singulettfeld θ und dessen konjugiertes Feld $\bar{\theta}$ existiert. Diese beiden Felder transformieren sich mit $U(1)_{fd}$ Ladung $-1,+1$. Die Brechung der Symmetrie geschieht, wenn dieses Feld einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert (v_{ev}) besitzt. Dadurch werden alle Einträge der Massenmatrix verschieden von Null. Der 32-Eintrag der up-Quark Massenmatrix ist dann wegen $U(1)_X$ Ladungserhaltung durch die Kopplung $c^c t H_2 \left(\frac{\theta}{M_2}\right)^{|\alpha_2 - \alpha_3|}$ gegeben. Dabei ist M_2 die Vereinheitlichungsskala. Die so generierten nicht verschwindenden Terme können durch verschiedene Mechanismen erzeugt werden [74]. Eine Möglichkeit ist die Mischung von leichten und schweren Higgszuständen. Dabei geht man von einer Stringkompaktifizierung aus, die zusätzlich zu H_1 und H_2 Higgs Multipletts $H_{1,2}^{a,b}$ leicht beläßt. Diese leichten Higgsfelder gewinnen an Masse, wenn die Eichsymmetrie nach der Kompaktifizierung spontan gebrochen wird durch Kopplung an das skalare Feld θ mit nicht verschwindendem Vakuumerwartungswert. Nach dieser spontanen Symmetriebrechung bei einer hohen Skala ist das leichte Higgsfeld eine Kombination der bisherigen Higgsfelder, die die gleichen $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Quantenzahlen tragen. Das leichte Higgsfeld kann somit durch den nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes θ eine Mischung von Termen mit verschiedenen $U(1)$ Ladungen sein, im einfachsten Fall von nur einem zusätzlichem Feld, also

$$H_{1,2}^{leicht} \simeq H_{1,2} + H_{1,2}^r \frac{\langle \theta \rangle^r}{M_{1,2}^r}. \quad (3.34)$$

Dabei trägt $H_{1,2}^r$ die $U(1)$ Ladung r . Dieses leichte Higgsfeld kann nun alle benötigten Einträge der Massenmatrix generieren. Die up-Quark Massenmatrix ergibt sich zu

$$M_u = \begin{pmatrix} \epsilon^{4\alpha_3 - 2\alpha_2} & \epsilon^{-3\alpha_3} & \epsilon^{2\alpha_3 - \alpha_2} \\ \epsilon^{-3\alpha_3} & \epsilon^{2(\alpha_2 - \alpha_1)} & \epsilon^{|\alpha_2 - \alpha_1|} \\ \epsilon^{2\alpha_3 - \alpha_2} & \epsilon^{|\alpha_2 - \alpha_1|} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Somit sind näherungsweise Nullen in den Elementen 13 und 11 korreliert, also mit den Lösungen 1,2 und 4 aus Tabelle 3.4 in Einklang. Mit $\alpha_2 = 2\alpha_3$ kann Lösung 2 und 4 reproduziert werden durch

$$M_u = \begin{pmatrix} \epsilon^8 & \epsilon^3 & \epsilon^4 \\ \epsilon^3 & \epsilon^2 & \epsilon \\ \epsilon^4 & \epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Wenn man nun annimmt, daß der Unterschied der Higgsmassen für den Unterschied zwischen up- und down-Quark Massen verantwortlich ist, erhält man für die down-Quark Massenmatrix

$$M_d = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^8 & \bar{\epsilon}^3 & \bar{\epsilon}^4 \\ \bar{\epsilon}^3 & \bar{\epsilon}^2 & \bar{\epsilon} \\ \bar{\epsilon}^4 & \bar{\epsilon} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Um die Leptonenmassenmatrix zu erhalten, muß man nun alle Parameter so wählen, daß man am Ende an der Vereinheitlichungsskala $m_b \sim m_\tau$ erhält. Daher muß $a_1 = \alpha_1$ sein. Die Leptonen Massenmatrix hat somit die Form

$$M_L = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^{|-4-2b|} & \bar{\epsilon}^{|-3b|} & \bar{\epsilon}^{|-b-2|} \\ \bar{\epsilon}^{|-3|} & \bar{\epsilon}^{|2(b-1)|} & \bar{\epsilon}^{|b-1|} \\ \bar{\epsilon}^{|-b-2|} & \bar{\epsilon}^{|b-1|} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Für $b > 1$ ist somit das 13 und 11 Element näherungsweise gleich Null. Diese führt zu der von Georgi [76] gefundenen Relation $Det(M_d) = Det(M_l)$. Für $\bar{\epsilon} = 0.23$ und $b = 3$ findet man gute Übereinstimmung mit den experimentellen Mischungswinkeln und Massen [74]. Die Leptonenmassenmatrix hat somit die gleiche Form wie die der down-Quarks.

Es ist somit möglich, die Massenmatrizen durch eine zusätzliche $U(1)$ Symmetrie zu beschreiben. Diese Idee von Ibáñez und Ross [74] wird nun auf den für uns interessanten Fall der Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$ übertragen und damit wird die Anzahl der Parameter in der Neutrinomassenmatrix im Rahmen unseres Modells reduziert.

3.3.2 $U(1)_X$ Flavor Symmetrie und $\lambda_{ijk}^{(l)}$

Wie in Abschnitt 3.3.1 diskutiert worden ist, ist die Einführung einer zusätzlichen $U(1)_X$ Symmetrie eine elegante Lösung, die vielen unabhängigen und experimentell zu bestimmenden Yukawakopplungskonstanten miteinander in Verbindung zu bringen. Man hat dadurch eine erhebliche Reduktion der freien Parameter erreicht. Ob diese diskutierte $U(1)_X$ Symmetrie nun wirklich in der Natur realisiert ist, muß getestet werden. Wenn sie eine relevante Symmetrie ist, muß sie auch für Verhältnisse anderer Kopplungskonstanten relevant sein. Für die von uns in Abschnitt 3.2.2 betrachteten Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$ also auch. Die Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$ verbinden analog zu den Yukawa Kopplungen jeweils

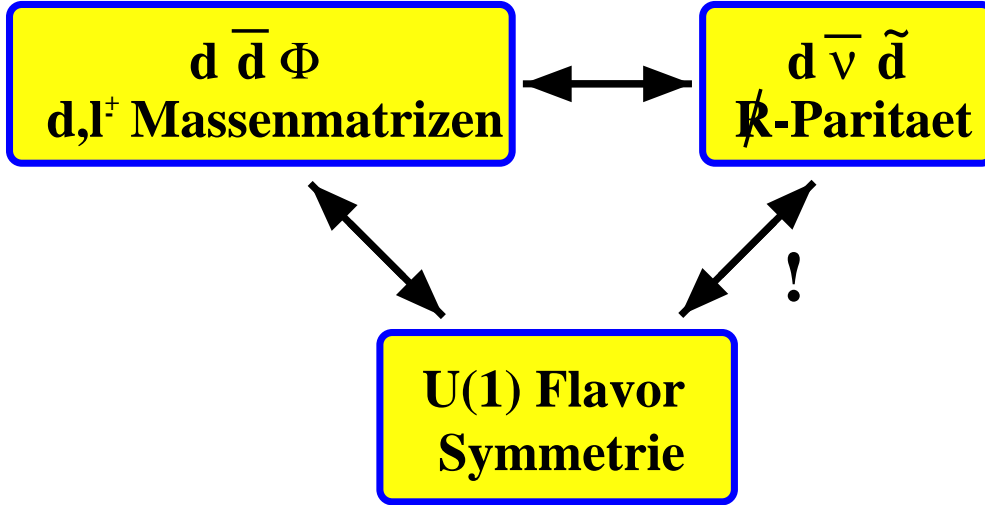


Abbildung 3.5: $U(1)$ Symmetrie für Massenmatrizen, also auch für trilineare Kopplungskonstanten $\lambda_{ijk}^{(l)}$.

α_1	α_2	α_3	a_1	a_2	a_3
-3	2	1	-3	2	1

Tabelle 3.6: Effektive Ladungen der Quark- (α_i) und Leptonenfelder (a_i).

zwei Fermionen und ein skalares Feld. Da wir hier die gleiche Struktur haben, ist die Übertragung der $U(1)_X$ auf die Kopplungen $\lambda_{i33}^{(l)}$ besonders einfach. Wir betrachten also im Folgenden ein um die $U(1)_X$ Symmetrie erweitertes, also eingeschränktes Modell. Dieses werden wir als \mathbb{R}_p -MSSM $U(1)_X$ -Modell bezeichnen. Die Anwendung der $U(1)_X$ Symmetrie auf die trilinearen Kopplungskonstanten $\lambda_{ijk}^{(l)}$ erfolgt analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.3.1. Bei den aus der Analyse der Massenmatrizen gewonnenen effektiven $U(1)_X$ Ladungen (siehe Tabelle 3.6) sind alle trilinearen Kopplungen verboten, solange die Symmetrie exakt ist. Die Existenz des isoskalaren skalaren Felds θ mit $U(1)$ Ladung -1 führt dann zu folgenden effektive Operatoren

$$L_i L_j E_k^c \left(\frac{\theta}{M_X} \right)^{l_i + l_j + e_k}, \quad L_i Q_j D_k^c \left(\frac{\theta}{M_X} \right)^{l_i + q_j + d_k}. \quad (3.39)$$

Dabei sind die $U(1)_X$ Ladungen der Felder L_i, E_j^c, Q_k, D_i^c gegeben als l_i, e_j, q_k, d_i und M_X ist die Skala, an der die $U(1)_X$ Symmetrie gebrochen wird. Die spontane Brechung der $U(1)_X$ Symmetrie durch einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert der Feldes θ führt zu den Kopplungen

$$L_i L_j E_k^c \lambda_{ijk}, \quad L_i Q_j D_k^c \lambda'_{ijk}, \quad (3.40)$$

wobei $\lambda_{ijk} \sim \left(\frac{\langle\theta\rangle}{M_X}\right)^{l_i+l_j+e_k}$ und $\lambda'_{ijk} \sim \left(\frac{\langle\theta\rangle}{M_X}\right)^{l_i+q_j+d_k}$ sind. Dies sind jedoch die $U(1)_X$ Ladungen an der Skala M_X . Diese wären im Niederenergiebereich im Rahmen des SM die gleichen. In der SUSY Erweiterung des SM tritt jedoch ein zusätzliches Higgsfeld H_1 auf. Dieses unterscheidet sich nicht durch Quantenzahlen von den linkshändigen Leptonenisodublett Feldern L_j . Die Festlegung, welches dieser Felder als Higgsfeld betrachtet werden soll, geschieht erst im Niederenergiebereich. Hier bezeichnet man dasjenige Feld als Higgsfeld, das als einziges einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert besitzt. Dies kann immer durch eine Rotation zwischen den vier Feldern erfolgen. Diese Rotation beeinflusst auch die trilinearen Kopplungskonstanten. Man findet für den Niederenergiebereich [77]

$$\lambda_{ijk} \sim \bar{\epsilon}^{a_i - a_{H_1}} \lambda_{jk}^E, \quad \lambda'_{ijk} \sim \bar{\epsilon}^{a_i - a_{H_1}} \lambda_{jk}^D. \quad (3.41)$$

Dabei sind die a_i die effektiven Ladungen des Niederenergiebereichs, die in Tabelle 3.6 angegeben sind und $\bar{\epsilon} = 0.23$. Da für uns nur Verhältnisse von trilinearen Kopplungskonstanten von Interesse sind, können wir die effektive Kopplung a_{H_1} eliminieren und erhalten mit $|a_1 \leftrightarrow a_3| = 4$ und $|a_2 \leftrightarrow a_3| = 1$

$$\lambda'_{i33} = \lambda'_{333} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^4 \\ \bar{\epsilon}^1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Für die Kopplungskonstante λ_{i33} ist dieses Verhältnis nicht so einfach zu gewinnen, da sie antisymmetrisch bezüglich Vertauschung der beiden ersten Indizes sind. Nach Gleichung (3.41) können sie geschrieben werden als

$$\lambda_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\bar{\epsilon}^{a_i - a_{H_1}} \lambda_{jk}^E \leftrightarrow \bar{\epsilon}^{a_j - a_{H_1}} \lambda_{ik}^E \right). \quad (3.43)$$

Division von λ_{i33} durch λ'_{i33} ergibt nun

$$\frac{\lambda_{i33}}{\lambda'_{i33}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{33}^E}{\lambda_{33}^D} \leftrightarrow \bar{\epsilon}^{a_i - a_j} \frac{\lambda_{i3}^E}{\lambda_{33}^D} \right). \quad (3.44)$$

Um das Verhältnis $\frac{\lambda_{i3}^E}{\lambda_{33}^D}$ abzuschätzen, muß die Rotation der Felder mit Hyperladung -1, also H_1 und L_i , betrachtet werden. Man kann zeigen, daß gilt [77, 78]

$$\frac{\lambda_{i3}^E}{\lambda_{33}^D} \simeq \Leftrightarrow 2. \quad (3.45)$$

Für die von uns benötigte Kopplung λ_{i33} erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \lambda_{i33} &= \frac{1}{2} (1 \Leftrightarrow \bar{\epsilon}^{|a_i - a_3|}) \cdot (\Leftrightarrow 2) \lambda'_{i33} \\ &= \begin{pmatrix} (\bar{\epsilon}^4 \Leftrightarrow 1) \bar{\epsilon}^4 \\ (\bar{\epsilon} \Leftrightarrow 1) \bar{\epsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \lambda'_{333}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Durch die Einführung der zusätzlichen $U(1)_X$ Symmetrie zusammen mit den Analysen der Massenmatrizen haben wir somit die Anzahl der freien Parameter bezüglich der in der Neutrino Massenmatrix vorkommenden trilinearen Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(i)}$ von ursprünglich fünf auf eine reduziert.

3.3.3 Neutrino Oszillationen und das $U(1)_X$ - \mathcal{R}_p -MSSM

Das $U(1)_X$ - \mathcal{R}_p -MSSM muß nun auf seine Konsistenz mit experimentellen Daten geprüft werden. Da bisher noch keine Untergrenzen für die Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(i)}$ existieren, ist ein Vergleich der einzelnen Kopplungen nicht möglich. Man kann jedoch Phänomene, wie massive Neutrinos, die durch Einbeziehung dieser Kopplungen erklärt werden können, zumindest als Konsistenztest verwenden. Wir wollen dafür die im Rahmen des \mathcal{R}_p -MSSM mit zusätzlicher $U(1)$ Symmetrie gefundene Neutrino Massenmatrix mit der in Abschnitt 2.4 gewonnenen vergleichen. Also untersuchen wir, ob im Rahmen dieses Modells

$$M_{Theorie} \stackrel{!}{=} M_{Pheno} \quad (3.47)$$

erfüllt werden kann. Das Problem auf der phänomenologischen Seite war, daß bisher noch keine Neutrinomassen direkt nachgewiesen wurden. Aufgrund der Neutrinooszillationsexperimente konnte aber die Mischungsmatrix zwischen den Neutrinomassen- und Flavorzuständen, sowie die Differenzen der Quadrate der Masseneigenwerte bestimmt werden. Die Neutrinomassenmatrix war somit aber nur bis auf eine Skala und die Vorzeichen der Massen bestimmt. Auf der phänomenologischen Seite existiert somit ein freier Parameter für gewählte Vorzeichen

der Neutrinomassen. Bei der Beschreibung massiver Neutrinos im Rahmen des \mathcal{R}_p -MSSM fanden wir bei den Beiträgen auf dem Baumniveau drei nur bis auf Obergrenzen bestimmte Größen $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ (aus Gleichung (3.19)) und fünf weitere auf dem 1-Schleifenniveau (siehe Gleichung (3.25)). Diese acht Parameter sind durch Einführung der zusätzlichen $U(1)_X$ Flavor Symmetrie auf vier reduziert worden. Von den vier restlichen Parametern stammen drei aus dem Baumniveau und einer aus den 1-Schleifenbeiträgen. Wenn man Übereinstimmung in Gleichung (3.47) fordert, erhält man aufgrund der Symmetrie der Matrix im Allgemeinen sechs linear unabhängige, nichtlineare Gleichungen mit insgesamt fünf Unbekannten. Dieses Gleichungssystem kann nun iterativ gelöst werden. Dabei kann man den Wert der kleinsten Masse einschränken durch [2]

$$\begin{aligned}
2.6 \text{ eV} &\geq |m_e| \\
&= \left| \sum_i U_{ei}^2 m_i \right| \\
&\geq \left| \sum_i U_{ei}^2 m_1 \right| \\
&\geq |m_1|.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

3.3.4 Ergebnisse

Das im vorherigen Abschnitt aus Gleichung 3.47 gewonnene Gleichungssystem für die Neutrino Massenmatrix wurde für jeden in Tabelle 2.4 und Tabelle 2.5 dargestellten Parametersatz von Mischungswinkeln und Massenquadratsdifferenzen gelöst. Um die in Tabelle 3.7 dargestellten Werte zu erhalten, wurde wie in Abschnitt 3.2.3 angenommen, daß $A^D \simeq A^E \simeq \mu \simeq m_{\tilde{b}} \simeq m_{\tilde{\tau}} \simeq M_{SUSY}$ und $\tan \beta = 1$ ist. Dabei ist M_{SUSY} die charakteristische Skala, an der Supersymmetrie gebrochen ist. Man vermutet, daß M_{SUSY} im Bereich von 100 GeV bis 1 TeV liegt. Die zur Gewinnung der in Tabelle 3.7 gemachten Annahmen beeinflussen jedoch die in Tabelle 3.8 dargestellten Masseneigenwerte der Neutrino Massenmatrix nicht. Diese sind nur von der Struktur der Massenmatrix abhängig. Die Struktur wird nur von den Ladungen der $U(1)_X$ Symmetrie bestimmt. Die Neutrinos im \mathcal{R}_p -MSSM sind Majoranateilchen. Die möglichen Vorzeichenkombinationen der Masseneigenwerte sind daher eingeschränkt (siehe Abschnitt 2.1.2). Es dürfen nie alle Massen das gleiche Vorzeichen haben. Diese Einschränkung ermöglicht es, einige Lösungen auszuschließen. Es wurde für jeden betrachteten Satz von Oszillationsparametern ein eindeutiger Satz von Masseneigenwerten gefunden. Die Masseneigenwerte sind jeweils hierarchisch angeordnet. Es gilt wie

$ \Lambda_1 [GeV^2]$	$ \Lambda_2 [GeV^2]$	$ \Lambda_3 [GeV^2]$	$ \lambda'_{333}/10^{-4} $	
.008	.012	.019	2.1	[48]
.008	.014	.016	2.4	[48]
.004	.004	.002	.7	[52]
.006	.013	.021	2.1	[54]
.004	.022	.022	3.0	[53]

Tabelle 3.7: Vorhersagen des \mathbb{R}_p -MSSM mit $U(1)_X$ Symmetrie für Kopplungskonstanten λ'_{333} und Λ_i . Die Werte für die restlichen trilinearen Kopplungen können mit Hilfe von Gleichung 3.42 und 3.46 gewonnen werden. Die Voraussetzungen sind die Gleichen wie in Abschnitt 3.2.3. Die Unterschiede in den einzelnen Spalten kommen von den verschiedenen Analysen der Neutrinooszillationsexperimente, die jeweils in der letzten Spalte zitiert sind.

bei den geladenen Leptonen

$$m_{\nu_3} \gg m_{\nu_2} \gg m_{\nu_1}. \quad (3.49)$$

Die Werte für die Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$ liegen weit unter den in Abschnitt 3.2.3 von uns gefundenen Obergrenzen.

Es ist somit gelungen, die fehlende Information auf der phänomenologischen Seite, die Massenskala und Vorzeichen der Massen, durch Vergleich mit der theoretischen Beschreibung der Neutrinomassenmatrix im Rahmen des \mathbb{R}_p -MSSM mit zusätzlicher $U(1)_X$ Symmetrie zu bestimmen. Die Struktur der Theorie hat das fehlende Wissen auf der experimentellen Seite im Rahmen des hier betrachteten Modells bestimmt (siehe Abbildung 3.6). Um das $U(1)_X$ \mathbb{R}_p -MSSM zu testen, kann man die gemittelte Majorana Neutrinomasse

$$\langle m_\nu \rangle = \sum_i \zeta_{CP}^{(i)} U_{ei}^2 m_i \quad (3.50)$$

betrachten. $\langle m \rangle$ spielt eine wichtige Rolle bei der Beschreibung des neutrinolosen Doppeltbetazerfalls ($0\nu\beta\beta$). Da der $0\nu\beta\beta$ noch nicht beobachtet worden ist, gibt es keine experimentellen Werte für $\langle m \rangle$. Aus der Nichtbeobachtung des $0\nu\beta\beta$ kann aber eine Untergrenze für die Lebensdauer von Kernen bezüglich des $0\nu\beta\beta$ bestimmt werden. Aus dieser kann man durch Modellrechnungen Obergrenzen für $\langle m \rangle$ berechnen. Der aktuell beste Wert für $\langle m \rangle$ ist [79, 56]

$$|\langle m_\nu \rangle| < 0.62eV. \quad (3.51)$$

$m_1[eV]$	$m_2[eV]$	$m_3[eV]$	$\zeta_{CP}^{(1)}$	$\zeta_{CP}^{(2)}$	$ \langle m_\nu \rangle $	
.003	.032	.549	+	-	.041	[48]
.018	.036	.549	-	-	.045	[48]
.001	.011	.030	-	+	.010	[52]
.000	.022	.633	-	-	.028	[54]
.013	.022	1.054	-	+	.009	[53]

Tabelle 3.8: Vorhersagen des \mathcal{R}_p -MSSM mit $U(1)_X$ Symmetrie für Neutrinomassen und die gemittelte Majorana Neutrinomasse $\langle m_\nu \rangle = \sum_i \zeta_{CP}^{(i)} U_{ei}^2 m_i$. Dabei ist $\zeta_{CP}^{(i)} = \text{sign}(m_1) \cdot \text{sign}(m_i)$, $i = 2, 3$ die CP Phase der Neutrino Masseneigenzuständen. Die Voraussetzungen sind die gleichen wie in Abschnitt 3.2.3. Die Unterschiede in den einzelnen Spalten kommen von den verschiedenen Analysen der Neutrinooszillationsexperimente, die jeweils in der letzten Spalte zitiert sind.

Die Werte für die gemittelte Majorana Neutrinomasse im betrachteten Modell liegen im Bereich $|\langle m_\nu \rangle| \sim 0.01\text{-}0.05$ eV. Damit gibt es zwischen den experimentellen Daten und den Ergebnissen im \mathcal{R}_p -MSSM keine Widersprüche. Zusätzlich liegt dieser Wert in einem Bereich, den die nächste Generation von $0\nu\beta\beta$ -Experimenten, z.B. das GENIUS Experiment [80, 81, 82], untersuchen wird. Ein positives experimentelles Ergebnis in dem vorhergesagten Bereich würde indirekt das betrachtete \mathcal{R}_p -MSSM mit zusätzlicher $U(1)$ Symmetrie bestätigen. Das betrachtete Modell stellt damit eine weitere Motivation für die Durchführung dieser Experimente dar. Umgekehrt werden die Ergebnisse ein Test für das $U(1)_X$ \mathcal{R}_p -MSSM Modell sein.

3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel ist mit dem \mathcal{R}_p -MSSM ein supersymmetrisches Modell benutzt worden, um massive Majorananeutrinos zu beschreiben. Es wurde gezeigt, daß im \mathcal{R}_p -MSSM im Allgemeinen alle drei Neutrinos massiv sind. Dazu sind sowohl das Baumniveau, als auch die $\tilde{l}\tilde{l}$ und $q\tilde{q}$ 1-Schleifenbeiträge miteinzubeziehen. Die Massenmatrix enthält reine Majoranamassenterme. Im \mathcal{R}_p -MSSM sind keine rechtshändigen isosingulett Neutrinos enthalten. Durch Vergleich der theoretischen Massenmatrix mit den in Abschnitt 2.4 gefundenen Obergrenzen für die Elemente der Neutrinomassenmatrix, konnten verbesserte Obergrenzen für die leptonenzahlverletzenden Kopplungskonstanten $\lambda_{33}^{(l)}$ gewonnen werden. Die

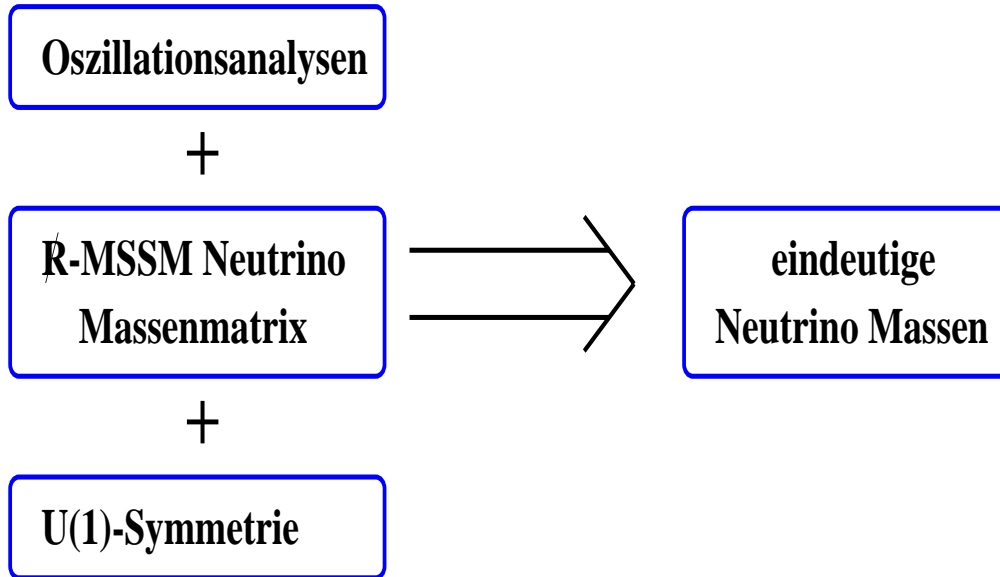


Abbildung 3.6: *Schema des Inputs für Berechnung der Neutrino Massenmatrix.*

Obergrenzen konnten dabei zum Teil um einen Faktor 10^3 verbessert werden.

Um ein Modell mit Vorhersagekraft für die Neutrinomassen zu erhalten, wurde eine zusätzliche $U(1)_X$ Symmetrie auf das Modell angewandt. Diese $U(1)_X$ Symmetrie war sehr erfolgreich bei der Beschreibung der Quark- und geladenen Leptonenmassenmatrizen. Die Ladungen bezüglich dieser $U(1)_X$, die in der Beschreibung der Quark- und geladenen Leptonenmassenmatrizen gefunden worden waren [74], sind auf die leptonenzahlverletzenden Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$ übertragen worden. Dadurch konnten diese Kopplungskonstanten miteinander korreliert werden und die Zahl der Parameter des Modells erheblich reduziert werden. In der theoretischen Neutrinomassenmatrix sind dann nur noch vier freie Parameter enthalten. Durch Vergleich der theoretischen Neutrinomassenmatrix mit der durch Neutrinooszillationsexperimente eingeschränkten Neutrinomassenmatrix ist ein System von sechs Gleichungen mit nur fünf Unbekannten gewinnen worden. Durch Lösung dieses Gleichungssystems konnten die Neutrinomassen und Kopplungskonstanten eindeutig bestimmt werden. Wie in Abschnitt 2.1.2 gezeigt wurde, sind für Majorananeutrinos nicht alle Vorzeichenkombinationen der Masseneigenwerte erlaubt. Dies wurde bei der Lösung des Gleichungssystems berücksichtigt und führte zum Ausschluß von Zweideutigkeiten. Um das Modell weiter zu untersuchen, wurde die gemittelte Majorananeutrinomasse $\langle m \rangle$ berech-

net. Es wurde für alle verwendeten Analysen der Neutrinooszillationsexperimente ein Wert von $\langle m \rangle \sim 0.01 \Leftrightarrow 0.04$ eV gefunden. Die aktuelle Obergrenze für $\langle m \rangle$ liegt bei

$$|\langle m \rangle| < 0.62 \text{ eV}. \tag{3.52}$$

Damit ist das betrachtete $U(1)_X$ \mathbb{R}_p -MSSM verträglich mit den Ergebnissen der $0\nu\beta\beta$ Experimente. Außerdem liegen die für $\langle m \rangle$ gefundenen Werte alle in einem Bereich, der mit der nächsten Generation von $0\nu\beta\beta$ Experimenten untersucht werden soll. Das betrachtete Modell ist damit in naher Zukunft falsifizierbar.

Kapitel 4

Semiklassische Methode zur Beschreibung des Doppelten-Betazerfalls

4.1 Einleitung

Der Ausgangspunkt zu dem in diesem Kapitel betrachteten Überlegungen ist der neutrinobegleitete doppelte β Zerfall($\beta\beta$). Dieser Prozeß zweiter Ordnung kann im Rahmen des Standard Modells (SM) als zwei nacheinander stattfindende β Zerfälle vorkommen. Der $\beta\beta$ Zerfall ist trotz der langen Lebensdauer der Kerne bereits beobachtet worden. Die Kerne, in denen der $\beta\beta$ beobachtet wurde, sind Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl (gg Kerne). Diese sind durch die Paarkraft stärker gebunden als ihre isobaren ug und gu Nachbarn. Sie sind daher stabil gegen den einfachen β Zerfall. Da es sich beim $\beta\beta$ Zerfall aber um einen Prozeß zweiter Ordnung handelt, sind die Lebensdauern der Kerne im Bereich 10^{20} Jahren (für eine Übersicht siehe z.B. [79]). In den meisten Erweiterungen des SM erwartet man außerdem das Auftreten des neutrinolosen $\beta\beta$ Zerfalls. Dessen Beobachtung würde eine wichtige Frage in der Physik über die Natur der Neutrinos beantworten. Sie müssen dann Majorananeutrinos sein (also bis auf eine Phase gleich ihre eigenen Antiteilchen, siehe Abschnitt 2.1.2). In Abbildung 4.1 ist der $0\nu\beta\beta$ schematisch dargestellt. Wie man in Abbildung

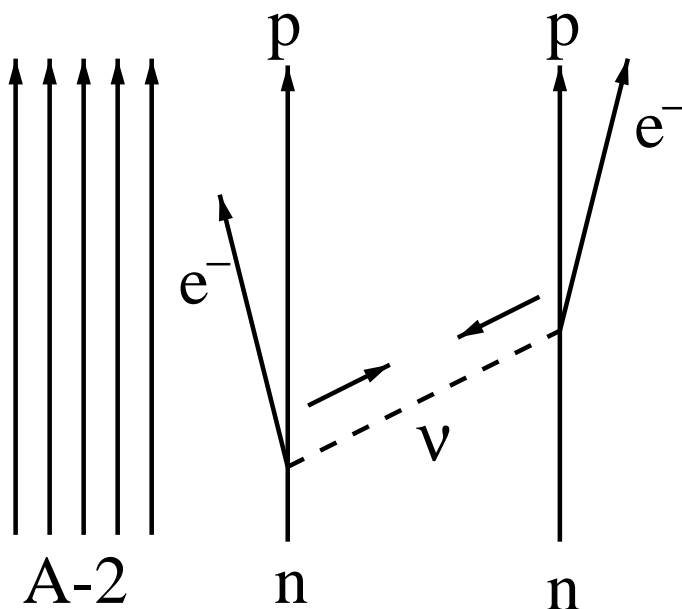


Abbildung 4.1: *Schema für Neutrinolosen Doppeltenbetazerfall durch Austausch eines massiven Majorana Neutrinos.*

4.1 erkennt, wird im ersten β Zerfall ein Neutrino mit positiver Helizität emittiert, das in der zweiten Stufe mit negativer Helizität absorbiert wird. Damit ein Überlapp von Zuständen positiver und negativer Helizität vorhanden ist, müssen Neutrinos für das Zustandekommen dieses Zerfalls massiv sein oder rechtshändige Ströme in der schwachen Wechselwirkung vorkommen. Weiterhin muß das Neutrino gleich seinem eigenen Antiteilchen sein, um am zweiten Vertex absorbiert werden zu können. Das Neutrino muß daher ein Majoranateilchen sein. Der $0\nu\beta\beta$ Zerfall ist bisher noch nicht beobachtet worden. Aber bereits aus seiner Nichtbeobachtung und den daraus gewonnen Untergrenzen für die Lebensdauer der betrachteten Kerne kann man wichtige Schlüsse für mögliche Erweiterungen des Standard Modells ziehen. Dabei ist es jedoch essentiell, eine zuverlässige Theorie für die Beschreibung dieses Prozesses zu haben.

Die theoretische Beschreibung der $\beta\beta$ Zerfälle kann man in zwei Teile untergliedern

- elementarer Zerfallsprozeß
- Vielteilchenstruktur

Der elementare Zerfallsprozeß für den Neutrino begleiteten $\beta\beta$ Zerfall ist bekannt, den des neutrinolosen kann man im Rahmen verschiedener Modelle betrachten. Um eine realistische Beschreibung der Vielteilchenstruktur zu erreichen, muß dies im Rahmen einer mikroskopischen Theorie geschehen. Dabei werden die im Kern relevanten Freiheitsgrade, die Nukleonen, berücksichtigt. Somit sollte man Schalenmodell Rechnungen für diese Kerne durchführen. Da der doppelte β Zerfall nur in schweren Kernen beobachtet wurde, ist diese Art der Beschreibung nicht möglich. In diesen Kernen sind zu viele Zustände in die Rechnung miteinzubeziehen. Dies sieht man leicht, wenn man die allgemeine Wellenfunktion eines Systems aus A Nukleonen betrachtet.

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_A} c_{i_1, \dots, i_A} a_1^\dagger \dots a_A^\dagger |0\rangle \quad (4.1)$$

Die insgesamt möglichen Zustände sind dann gegeben durch

$$\binom{N_c}{A} = \frac{N_c!}{A! \cdot (N_c \ominus A)!} \quad (4.2)$$

N_c ist dabei die Anzahl der möglichen Zustände eines Nukleons und A die Anzahl der Nukleonen. Man ist daher gezwungen Näherungsmethoden zur Beschreibung des Vielteilchenproblems zu verwenden. Eine in der Beschreibung der

$2\nu\beta\beta$ Prozesse sehr erfolgreiche Methode ist dabei die pn-QRPA¹. Ein Problem der pn-QRPA-Ergebnisse ist, daß die Matrixelemente der dominanten Gamow-Teller [83, 84] Übergänge sehr stark vom 1^+ Teilchen-Teilchen-Matrix-Element abhängen. Seine Stärke wird durch den Parameter g_{pp} charakterisiert. $g_{pp}=1$ bedeutet, daß man für dieses Matrixelement den Wert einer realistischen Wechselwirkung, z.B. die des Bonn-Potentials wählt. Man findet, daß für $g_{pp}=1$, was zu Übereinstimmung mit dem Experiment führt, man in der Nähe des Endes des Gültigkeitsbereichs der QRPA Methode liegt. Desweiteren wird durch die im Rahmen der QRPA Methode gemachten Näherungen das Pauli-Prinzip verletzt. Somit ist noch keine absolut befriedigende theoretische Beschreibung des Vielteilchenproblems für den $\beta\beta$ Zerfall gefunden worden. Im folgenden stellen wir eine andere Lösungsmethode vor und wenden diese auf ein analytisch lösbares Problem an. Dabei untersuchen wir verschiedene Näherungen und vergleichen diese mit der exakten Lösung. Die in diesem vereinfachten Modell erhaltenen Ergebnisse werden somit die experimentellen Daten nicht quantitativ beschreiben. Ziel der Untersuchung ist nur die qualitative Beschreibung der exakten Lösung des Modells durch die Näherungslösungen. Dazu berechnen wir die ersten beiden Anregungsenergien, die Betazerfallsamplituden und die Ikeda-Summenregel.

Im folgenden Abschnitt diskutieren wir die Methoden, die man zur Lösung des Modells benötigt und die Übergangsoperatoren des Betazerfalls. Im Abschnitt "semiklassische Lösungsmethode" stellen wir den betrachteten Modell Hamiltonoperator vor und erläutern das Vorgehen zur Berechnung der Anregungsenergien, Betazerfallsamplituden und der Ikeda-Summenregel. Am jeweiligen Ende der Abschnitte werten wir die so erhaltenen analytischen Ergebnisse für eine spezielle Wahl der Protonen- und Neutronenzahl aus und stellen die numerischen Ergebnisse vor. Im letzten Abschnitt folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse.

4.2 Paarkraft und Lösungsmethoden

4.2.1 Paarkräfte in der Kernphysik

In den einfacheren mikroskopischen Modellen wird von einer Einteilchenstruktur ausgegangen. Im Schalenmodell bewegen sich die Nukleonen dabei in einem effektiven Potential, das durch sie selbst erzeugt wird. Dieses sehr erfolgreiche Modell kann damit die magischen Zahlen der Protonen und Neutronen erklären. Bei der Betrachtung des Gesamtdrehimpulses von sphärischen Kernen ergeben

¹Quasiparticle Random Phase Approximation

sich jedoch Probleme [85]. In diesem Fall ist der Gesamtdrehimpuls jedes einzelnen Nukleons j eine gute Quantenzahl. Die Menge der Nukleonen mit gleichem j aber verschiedener Projektion $m = \Leftrightarrow j \dots j$ bilden dann eine Schale. Wenn nun alle Unterzustände der Projektionen m gefüllt sind, ist der Gesamtdrehimpuls automatisch Null, da der Raum der $m \Leftrightarrow$ Zustände invariant unter einer räumlichen Drehung ist. Falls aber nur ein Teil der j -Schale besetzt ist, können durch unterschiedliche Kopplung der einzelnen Drehimpulse verschiedene Werte des Gesamtdrehimpuls vorkommen. Im Rahmen eines Einteilchenmodells hängt die Gesamtenergie nicht von der Kopplung der einzelnen Drehimpulse ab. Somit sollte eine Entartung der symmetrischen Zustände mit verschiedenem Drehimpuls vorkommen. Diese Entartung wird durch eine Restwechselwirkung aufgehoben.

Experimentell wird eine solche Entartung des Grundzustandes mit verschiedenen Drehimpulsen aber nicht beobachtet. Statt dessen beobachtet man folgendes

- bei gg -Kernen besitzt der Grundzustand immer den Drehimpuls Null. Die Restwechselwirkung erniedrigt die Gesamtenergie dieses Zustands also bezüglich der anderen.
- gg -Kerne sind stärker gebunden als ug - und gu -Kerne.
- In gg -Kernen gibt es eine Energielücke von 1-2 MeV zwischen dem Grundzustand und der niedrigsten Einteilchenanregung.

Die Restwechselwirkung führt also zu einer besonders starken Bindung der Zustände mit Gesamtdrehimpuls $j_{ges} = 0$. Der Paarkraftformalismus ist ein Modellansatz der diese Eigenschaft besitzt.

Die Betrachtung einer Wellenfunktion eines Nukleonenpaares mit Gesamtdrehimpuls Null veranschaulicht, wie die Restwechselwirkung zu konstruieren ist. Wir betrachten ein zum Drehimpuls Null gekoppeltes Nukleonenpaar [85]:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \sum_{m_1, m_2} \langle jj, m_1, m_2 | 00 \rangle \Psi_{m_1}(\vec{r}_1) \Psi_{m_2}(\vec{r}_2) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m (\Leftrightarrow)^{j-m} \Psi_m(\vec{r}_1) \Psi_{-m}(\vec{r}_2).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Wenn man die Einteilchenwellenfunktion in Radial- und Winkelanteil zerlegt, also $\Psi(\vec{r}) = f(r)Y_{jm}(\Omega)$ verwendet, ergibt sich die Wellenfunktion des Nukleonenpaares

zu

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} f(r_1) f(r_2) \sum_m (\Leftrightarrow)^{j-m} Y_{jm}(\Omega_1) Y_{j-m}(\Omega_2) \\ &= \frac{(\Leftrightarrow)^j}{4\pi} \sqrt{2j+1} f(r_1) f(r_2) P_j(\cos \theta_{12}).\end{aligned}\quad (4.4)$$

Dabei ist θ_{12} der von den Raumrichtungen Ω_1 und Ω_2 eingeschlossene Winkel. Die Legendre-Polynome $P(x)$ haben ein deutliches Maximum bei 1. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, die beiden Nukleonen in der gleichen Richtung zu finden, am größten. Zusätzlich sind in der Gesamtwellenfunktion die Nukleonen mit Projektion m und $\Leftrightarrow m$ gepaart. Diese gehen durch Zeitumkehr auseinander hervor und haben daher eine ähnliche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Restwechselwirkung sollte daher attraktiv und kurzreichweitig sein. Idealisiert setzt man diese so an, daß nur der $j_{ges} = 0$ Zustand energetisch erniedrigt wird. Im Zweiteilchenfall ist dieser gegeben als

$$|j_{ges} = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (\Leftrightarrow)^{j-m} |jm\rangle |j \Leftrightarrow m\rangle. \quad (4.5)$$

Dieser Zustand wird in zweiter Quantisierung durch den Operator

$$A^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{m=-j}^j (\Leftrightarrow)^{j-m} a_m^\dagger a_{-m}^\dagger \quad (4.6)$$

erzeugt. Die Paarwechselwirkung setzt man nun als

$$\begin{aligned}V_P &= \Leftrightarrow G A^\dagger A \\ &= \Leftrightarrow \frac{1}{4} G \sum_{m, m'} a_{m'}^\dagger a_{-m'}^\dagger a_{-m} a_m\end{aligned}\quad (4.7)$$

mit $G > 0$ an. V_P ist analog dem Teilchenzahloperator definiert und zählt die Nukleonenpaare, die zu Drehimpuls Null gekoppelt sind. Das so konstruierte Potential erniedrigt also nur den Zustand mit Gesamtdrehimpuls $j_{ges} = 0$ um G .

Die so konstruierte Paarkraft spielt eine wichtige Rolle in der Beschreibung des $\beta\beta$ Zerfalls durch die Paarung von Protonen und Neutronen.

4.2.2 BCS-Näherung

Die im letzten Abschnitt vorgestellte Paarkraft kann im Fall teilweise gefüllter Schalen, also sphärischer Kerne, im Rahmen des Senioritäts- und Quasispinmodells gelöst werden [86, 85, 87]. In deformierten Kernen sind die Projektionen innerhalb einer j Schale nicht entartet. Es existieren aber auch hier entartete Paare von zueinander zeitumkehrkonjugierten Zuständen, die über kurzreichweitige Kräfte stark koppeln. Die 1957 von Bardeen, Cooper und Schrieffer [88] zur Beschreibung der Supraleitung in Festkörpern entwickelte Theorie geht von korrelierten Impulzzuständen mit Gesamtimpuls Null aus. Belyaev hat diese Theorie 1959 erstmal auf Kerne angewandt, wobei dann nicht korrelierte Paare mit entgegengesetztem Impuls, sondern mit entgegengesetzter Projektion m des Drehimpulses betrachtet wurden. Zur Darstellung dieser Theorie kann man von einem Hamiltonoperator mit reinem Einteilchenanteil und einer diagonalen konstanten Restwechselwirkung ausgehen, also

$$H = \sum_i \varepsilon_i^0 a_i^\dagger a_i \Leftrightarrow \frac{1}{4} G \sum_{k,k'} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger a_{-k'} a_{k'}. \quad (4.8)$$

Die zugehörige Schrödingergleichung kann nicht analytisch gelöst werden. Man kann aber eine Näherungslösung finden, die auf dem *BCS*-Zustand

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{k>0}^\infty \left(u_k + v_k a_k^\dagger a_{-k}^\dagger \right) |0\rangle \quad (4.9)$$

basiert. In diesem Zustand ist jedes Paar von Einteilchenniveaus mit Projektion k und $\Leftrightarrow k$ mit der Wahrscheinlichkeit $|v_k|^2$ besetzt und mit der Wahrscheinlichkeit $|u_k|^2$ leer.

Damit der BCS-Zustand normiert ist muß

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1. \quad (4.10)$$

gelten. Die Teilchenzahl ist im BCS Zustand keine gute Quantenzahl. Man fordert jedoch, daß sie im Mittel erhalten ist. Ihr Mittelwert ist gegeben als

$$\begin{aligned} N &= \langle \text{BCS} | \hat{N} | \text{BCS} \rangle \\ &= \sum_{k>0} 2v_k^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Unbestimmtheit der Teilchenzahl ist gegeben durch die mittlere quadratische Abweichung durch

$$\begin{aligned}\Delta N^2 &= \langle \text{BCS} | \hat{N}^2 | \text{BCS} \rangle \Leftrightarrow \left(\langle \text{BCS} | \hat{N} | \text{BCS} \rangle \right)^2 \\ &= 4 \sum_{k>0} u_k^2 v_k^2.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Sie ist somit nur für komplett besetzte oder unbesetzte Zustände gleich Null. Ansonsten vernachlässigt man die Abweichung für den Fall, daß $\Delta N \ll N$ gilt.

Da der BCS Zustand die Teilchenzahl verletzt, muß sie als Zwangsbedingung bei der Bestimmung der Koeffizienten u_k und v_k miteinbezogen werden. Diese werden dann aus dem Variationsprinzip

$$\delta \langle \text{BCS} | H \Leftrightarrow \lambda \hat{N} | \text{BCS} \rangle\tag{4.13}$$

bestimmt. Ausführen der Variation ergibt die Gap-Gleichung

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}}.\tag{4.14}$$

Dabei ist $\Delta = G \sum_{k>0} u_k v_k$ und $\varepsilon_k = \varepsilon_k^0 \Leftrightarrow \lambda \Leftrightarrow G v_k^2$. Gleichung (4.14) kann unter Berücksichtigung der Bedingung der gemittelten Gesamtteilchenzahl

$$\sum_{k>0} 2v_k^2 = N\tag{4.15}$$

iterativ gelöst werden. Die Koeffizienten u_k und v_k ergeben sich dann aus

$$\begin{aligned}v_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}} \right), \\ u_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}} \right).\end{aligned}\tag{4.16}$$

$\Delta = 0$ ist immer triviale Lösung der Gapgleichung. Sie kann aber nicht durch Erhöhung der Paarkraftstärke G stetig in die meist existierende, nichttriviale Lösung überführt werden. Man spricht daher von einem Phasenübergang zwischen den gepaarten und ungepaarten Zuständen des Kerns.

4.2.3 Bogoliubov-Transformation

Eine elegantere als die gerade beschriebene Methode ist die auf der BCS-Theorie zur Lösung der Paarkraft aufbauende Formulierung durch Quasiteilchen. Die Transformation auf diese neuen Teilchen wurde erstmals von N.N. Bogoliubov und J.G. Valatin eingeführt [89, 90, 91, 92]. Zusätzlich kann man im Rahmen der Quasiteilchen einfach die angeregten Zustände konstruieren. Die grundlegende Idee der Bogoliubov Transformation ist die Suche nach neuen Operatoren α_k für die der BCS Zustand das Vakuum darstellt, also

$$\alpha_k |\text{BCS}\rangle = 0 \quad (4.17)$$

gilt. Man findet, daß dies für die Transformation

$$\begin{aligned} \alpha_k &= u_k a_k \Leftrightarrow v_k a_{-k}^\dagger & \alpha_k^\dagger &= u_k a_k^\dagger \Leftrightarrow v_k a_{-k} \\ \alpha_{-k} &= u_k a_{-k} + v_k a_k^\dagger & \alpha_{-k}^\dagger &= u_k a_{-k}^\dagger + v_k a_k \end{aligned} \quad (4.18)$$

erfüllt ist. Durch die inverse Transformation muß nun der Hamiltonoperator

$$H = \sum_{k_1 k_2} t_{k_1 k_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2} + \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \bar{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_4} a_{k_3} \quad (4.19)$$

als Funktion der Quasiteilchenoperatoren geschrieben werden. In Gleichung (4.19) ist

$$\bar{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = v_{k_1 k_2 k_3 k_4} \Leftrightarrow v_{k_1 k_2 k_4 k_3} \quad (4.20)$$

das antisymmetrisierte Matricelement. Durch Umordnen der Quasiteilchenoperatoren in Normalform kann man die Terme nach Abzug der Zwangsbedingung für Teilchenzahlerhaltung folgendermaßen klassifizieren

$$H \Leftrightarrow \lambda \hat{N} = U + H_{11} + H_{20} + H_{40} + H_{31} + H_{22}. \quad (4.21)$$

Dabei ist H_{ij} der Anteil des Hamiltonoperator in Normalordnung mit i Quasiteilchenerzeugungs- und j Quasiteilchenvernichtungsoperatoren. U ist der Energieanteil des BCS Grundzustands ohne Quasiteilchen, H_{11} beinhaltet die Abhängigkeit der Energie von Quasiteilchen-Quasiloche Anregungen. Die Terme H_{40} , H_{31} und H_{22} enthalten Terme höhere Kopplungen und werden daher im Allgemeinen vernachlässigt. H_{20} verletzt die Quasiteilchenzahlerhaltung und impliziert, daß

$|\text{BCS}\rangle$ nicht der wahre Grundzustand ist. Zur Bestimmung der Koeffizienten u_k und v_k fordert man daher

$$H_{20} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.22)$$

Im Fall eines konstanten, diagonalen Paarkraftpotentials kann die Bedingung (4.22) geschrieben werden als

$$2\varepsilon_k u_k v_k \Leftrightarrow \Delta (u_k^2 \Leftrightarrow v_k^2). \quad (4.23)$$

Dabei ist wiederum $\Delta = G \sum_{k>0} u_k v_k$ und $\varepsilon_k = \delta_{kk'} \Leftrightarrow \lambda \Leftrightarrow G \sum_{k>0} v_k^2$. Die Lösung ist also identisch zu denen der BCS Theorie. H_{11} ergibt sich nun zu

$$H_{11} = \sum_{k>0} e_k \left(\alpha_k^\dagger \alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k} \right) \quad (4.24)$$

mit der Quasiteilchenenergie $e_k = \sqrt{\varepsilon_k + \Delta_k^2}$. H hat somit die Form eines Hamiltonoperators von nichtwechselwirkenden Quasiteilchen. In dieser Schreibweise sind somit die Korrelationen im Grundzustand enthalten.

4.2.4 Bosonenmapping

Kollektive Zustände der Kerne können in bestimmten Bereichen gut durch Bosonenanregungen beschrieben werden. Dies legt es nahe, anstatt der elementaren Fermionen nur die Bosonen zu betrachten und den Hilbertraum nicht in der fermionischen Basis sondern in der bosonischen zu lösen. Diese Methode ist bereits seit langem bekannt und vielfach in der Literatur diskutiert worden (siehe z.B. [93, 86]). Beim Übergang von der fermionischen Basis zur bosonischen muß man jedoch einige Dinge beachten. Zunächst sei daran erinnert, daß der vielfermionen Hilbertraum \mathcal{H}_F mit seinen Vektoren und Operatoren komplett durch das Vakuum und die Fermionenerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\alpha_k^\dagger, \alpha_l$ spezifiziert wird. Da Bosonen ganzzahligen Spin besitzen, ist es besonders einfach, eine Korrespondenz für bifermionische Operatoren zu finden, also Paare von fermionischen Operatoren $\alpha_k^\dagger \alpha_l^\dagger, \alpha_l \alpha_k, \alpha_l^\dagger \alpha_k$. Gesucht wird nun eine Vorschrift, die es erlaubt eine bijektive Abbildung des Fermionenraumes auf den Bosonenraum vorzunehmen:

$$\mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_B. \quad (4.25)$$

Dabei ist der Bosonenraum wiederum spezifiziert durch das Bosonenvakuum $|0\rangle$ und die Bosonenerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren B^\dagger, B . Damit muß nun

$$\begin{aligned} B_\mu |0\rangle &= 0 & [B_\mu, B_{\mu'}^\dagger] &= \delta_{\mu, \mu'} \\ [B_\mu, B_{\mu'}] &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

gelten. Ein Problem bei der Abbildung des Fermionenraums auf den Bosonenraum ist, daß im Fermionenraum durch das Pauli-Prinzip Zustände verboten sind. Der Bosonenraum ist also größer als der Fermionenraum, und eine eindeutige Abbildung kann nur erfolgen, wenn man den Bosonenraum auf geeignete Weise auf \mathcal{H}_{phys} einschränkt.

$$\mathcal{H}_F \leftrightarrow \mathcal{H}_{phys} \subset \mathcal{H}_B \quad (4.27)$$

Zur Konstruktion dieser Abbildung existieren zwei grundlegende Konzepte. Nach Belyaev und Zelevinskii [94] erfolgt das Mapping der Operatoren so, daß die Vertauschungsrelationen erhalten bleiben. Dabei geht man davon aus, daß alle wichtigen Operatoren aus einer kleinen Basis von Operatoren konstruiert werden können. Die Vertauschungsrelationen dieser Basisoperatoren bilden eine Algebra. Die grundlegenden Bosonenoperatoren werden so gewählt, daß sie die gleiche Algebra erfüllen. Die Konstruktion der übrigen Operatoren erfolgt im Bosonenraum analog zu der im Fermionenraum. Die Vektoren in den Hilberträumen erhält man durch Definition eines korrespondierenden Vakuums $|0\rangle$ im Bosonenraum zum Vakuum der Fermionenraums $|0\rangle$. Durch diese Konstruktion wird nur der physikalische Unterraum \mathcal{H}_{phys} aufgespannt.

Der zweite Weg zur Konstruktion des Bosonenbildes geht auf T. Marumori, M. Yamamura und A. Tokunaga zurück [95, 96]. Diese Autoren schlugen vor, die Vektoren des fermionischen Hilbertraums auf die des bosonischen Hilbertraums so abzubilden, daß die Matrixelemente erhalten bleiben. Die Operatoren müssen so definiert werden, daß dies erfüllt ist. Dabei startet man von einer orthonormierten Basis im Bosonenraum. Diese erfüllen

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'} \quad \sum_n |n\rangle \langle n| = 1_B. \quad (4.28)$$

Die Bosonenzustände $|0\rangle$ werden dann den Fermionenzuständen $|n\rangle$ zugeordnet. Das Bild des Operator O_F des Fermionenraums ist dann gegeben durch

$$O_F \rightarrow O_B = \sum_{nn'} \langle n | O_F | n' \rangle \cdot |n\rangle \langle n'|. \quad (4.29)$$

Das Matrixelement ist durch diese Vorschrift offensichtlich erhalten, aber das Verfahren ist nicht eindeutig.

Die beiden Konzepte der Abbildung der Operatoren nach Belyaev und Zelevinskii oder der Abbildung der Zustände nach Marumori ist in vielen Bereichen angewandt worden. Wir wollen nun noch explizit zwei Repräsentationen des Drehimpulsoperatoren angeben, die wir auch bei der semiklassischen Lösungsmethode anwenden. Die Drehimpulsoperatoren $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ und J_z erfüllen die Vertauschungsrelationen der $SU(2)$ Gruppe

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (4.30)$$

Der zugehörige Hilbertraum wird durch die Eigenvektoren $|IM\rangle$ der Operatoren \vec{J}^2 und J_z aufgespannt. Dieser Hilbertraum wird nun auf einen Bosonenraum abgebildet, der durch das Bosonenvakuum $|0\rangle$ und die Bosonenoperatoren B, B^\dagger aufgespannt wird. Diese haben wiederum die Eigenschaften aus Gleichung (4.26). Eine Möglichkeit, die Drehimpulsoperatoren J_i durch die Bosonenoperatoren auszudrücken, geht auf Holstein und Primakoff zurück [97]. Für eine bestimmte Wahl des Drehimpulses I kann man die Operatoren schreiben als

$$\begin{aligned} J_+ &\rightarrow (J_+)_B = \sqrt{2I} \cdot B^\dagger \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{1}{2I} \cdot B^\dagger B}, \\ J_- &\rightarrow (J_-)_B = \sqrt{2I} \cdot \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{1}{2I} \cdot B^\dagger B} \cdot B, \\ J_z &\rightarrow (J_z)_B = \Leftrightarrow I + B^\dagger B. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dabei sind die Wurzeln eine formale Abkürzung der zugehörigen Taylorentwicklung. Die so definierten Operatoren $(J_i)_B$ erfüllen die $SU(2)$ Algebra des Drehimpulses. Der Bosonenraum wird durch die Operatoren

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} B^{\dagger n} |0\rangle \quad (4.32)$$

mit $n = 0, 1, 2, \dots$ aufgespannt. Durch die Definition der Bosonenrepräsentation der Drehimpulsoperatoren ist der Bosonenraum durch die Bedingung $n \leq 2I$ auf $2I + 1$ Zustände beschränkt. Somit stellt das Mapping nach Holstein und Primakoff eine bijektive Abbildung des fermionischen Hilbertraums auf den physikalischen Bereich des Bosonenhilbertraums dar. Das Problem ist aber die unendliche Reihe der Taylorentwicklung. Wenn die Bosonenzahl klein ist im Vergleich zu $2I$, konvergiert sie schnell. Ansonsten muß man im Prinzip alle Terme mitnehmen

um die Algebra zu erhalten. Eine Lösung dieses Problems ist die von J.F. Dyson [98] vorgeschlagene Bosonenrepräsentation der Drehimpulsoperatoren

$$\begin{aligned} J_+ &\rightarrow (J_+)_B = \sqrt{2I} \cdot B^\dagger 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2I} \cdot B^\dagger B, \\ J_- &\rightarrow (J_-)_B = \sqrt{2I} \cdot B, \\ J_z &\rightarrow (J_z)_B = \Leftrightarrow I + B^\dagger B. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Die so konstruierten Bosonenbilder erfüllen wieder die $SU(2)$ Algebra des Drehimpulses, aber die Operatoren $(J_+)_B$ und $(J_-)_B$ sind nicht hermitesch konjugiert zueinander, was zu einem nicht hermiteschen Hamiltonoperator führt.

4.2.5 Die Random-Phase-Approximation

Die Beschreibung des Vielteilchenanteils im $\beta\beta$ Zerfall erfolgt meist im Rahmen der Random-Phase-Approximation (*RPA*) für Quasiteilchen. Wir wollen kurz dieses Verfahren vorstellen und anschließend auf Probleme eingehen, die sich bei der Beschreibung des $\beta\beta$ Zerfalls im Rahmen der RPA Methode ergeben.

In Erweiterung der Hartree-Fock-Methode enthalten Anregungen des RPA Grundzustands nicht nur Teilchen-Loch Anregungen der Form $a_i^\dagger a_m$ ², sondern auch Kombinationen der Form $a_m^\dagger a_i$. Bei der zweiten Art der Teilchen-Loch Erzeugung wird ein oberhalb der Fermienergie liegender besetzter Zustand vernichtet und ein unterhalb der Fermienergie liegender unbesetzter Zustand besetzt. Die Existenz dieser Zustände ergibt sich aus den im Grundzustand bereits enthaltenen Korrelationen. Die möglichen Anregungen sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Der Operator zur Erzeugung der angeregten Zustände hat damit die allgemeinere Form

$$Q_\nu = \sum_{mi} X_{mi}^\nu a_m^\dagger a_i \Leftrightarrow \sum_{mi} Y_{mi}^\nu a_m^\dagger a_i. \tag{4.34}$$

Er muß der Bedingung

$$Q_\nu |\text{RPA}\rangle = 0 \tag{4.35}$$

genügen. Aus dieser Bedingung ergeben sich in der Quasibosonennäherung die RPA-Gleichungen. In Matrixform haben diese die folgenden Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = (E_\nu \Leftrightarrow E_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

²dabei bezeichnen Indizes m, n Zustände oberhalb und i, j Zustände unterhalb der Fermienergie

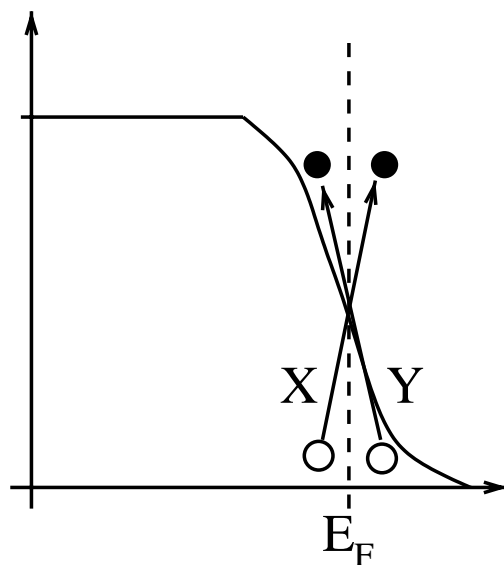


Abbildung 4.2: Mögliche angeregte Zustände der RPA Methode. Auf der Ordinate ist die Besetzungswahrscheinlichkeit aufgetragen. Diese ist bei $E = E_F$ gleich eins.

Dabei ist E_ν die Energie des angeregten Zustands und E_0 die des Grundzustands. X^ν und Y^ν sind die Matrizen der Koeffizienten aus Gleichung (4.34). A, B sind vom Hamiltonoperator abhängige Matrixelemente, die in Anhang C angegeben sind.

Die Lösung der RPA-Gleichungen ist aber nur stabil, wenn um ein Minimum der Grundzustandsenergie entwickelt wird. Die Lage des Minimums verschiebt sich jedoch mit zunehmender Stärke des Proton-Neutron- 1^+ -Matrixelements (Gamow-Teller-Korrelationen). Daher wird die Lösung ab einem bestimmten Wert des Proton-Neutron- 1^+ -Matrixelements instabil. Desweiteren wird durch die Quasibosonennäherung das Pauli-Prinzip verletzt. Diese beiden Probleme der RPA-Methode werden wir im Rahmen des im folgenden vorgestellten Verfahrens besonders untersuchen.

4.2.6 Betazerfallsamplituden

Betazerfall in Kernen tritt auf, wenn in einer Reihe von isobaren Kernen ein Nachbarkern mit einer geringeren Masse existiert. Dabei kann man die grundlegenden

β^- und β^+ Prozesse unterscheiden:

$$\begin{aligned}\beta^- \quad {}^A_Z X_N &\rightarrow {}^A_{Z+1} X_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e \\ \beta^+ \quad {}^A_Z X_N &\rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1} + e^+ + \nu_e\end{aligned}\quad (4.37)$$

Die Lebensdauern dieser Zerfälle liegen meist im Bereich von Sekunden bis Stunden, können aber auch wie z.B. im Fall des ${}^{115}\text{In}$ $4 \cdot 10^{14}$ Jahre betragen. Die dominanten Beiträge zu den Übergangsamplituden stammen von den sogenannten "erlaubten" Übergängen, bei denen kein Drehimpuls übertragen wird. Dabei kann man nun weiterhin zwei Arten von Übergängen unterscheiden:

- Fermi-Übergänge: dabei erfolgt kein Spinflip des zerfallenden Nukleons
- Gamow-Teller Übergänge: dabei wird der Spin des zerfallenden Nukleons um $1\hbar$ verändert

Die Beschreibung des Betazerfalls kann in einen Anteil, der nur die beteiligten Leptonen enthält, und einen hadronischen Anteil unterteilt werden. Da die Kernstruktur nur in den hadronischen Anteil eingeht, wollen wir nicht weiter auf den leptonischen Anteil eingehen. Der Betazerfallsoperator auf hadronischer Seite kann für Fermi-Übergänge geschrieben werden als [83]

$$\beta_{Fermi}^- = T^- \equiv \sum_i^A \tau(i), \quad (4.38)$$

wobei $\tau^- = 1/\sqrt{2}(\tau_1 \Leftrightarrow i\tau_2)$ ist und $\vec{\tau}(i)$ der auf das i -te Nukleon wirkende Isospinoperator ist. Für Gamow-Teller Übergänge erhält man

$$\beta_{GT}^- = Y^- \equiv \sum_{i=1}^A \vec{\sigma}(i)\tau^-(i). \quad (4.39)$$

Die β^+ -Zerfallsübergangsoperatoren können durch Hermiteschkonjugation der β^- Übergangsoperatoren erhalten werden.

4.2.7 Die Ikeda-Summenregel

Die Ikeda Summenregel verbindet die Übergangsamplituden des β^- - und β^+ -Zerfalls mit der Anzahl der Protonen und Neutronen des Ausgangskerns. Die Ikeda Summenregel kann in Ladungsaustauschmodellen aus Kommutator-Relationen

der von τ^+, τ^- abgeleiteten Operatoren hergeleitet werden. Für Gamow-Teller Übergänge findet man [83, 99]

$$\sum_f |\langle f | \beta^- | i \rangle|^2 \Leftrightarrow \sum_f |\langle f | \beta^+ | i \rangle|^2 = 3(N_i \Leftrightarrow Z_i). \quad (4.40)$$

Im Fall von Fermi-Übergängen gilt, wenn der Isospin eine gute Quantenzahl ist,

$$|\langle f | \beta^\pm | i \rangle|^2 = (T \mp T_3)(T \pm T_3 + 1) \quad (4.41)$$

und somit im Normalfall für $T = |T_3|$ [100, 101, 102]

$$\begin{aligned} S &\equiv |\langle f | \beta^- | i \rangle|^2 \Leftrightarrow |\langle f | \beta^+ | i \rangle|^2 \\ &= N_i \Leftrightarrow Z_i. \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.3 Semiklassische Lösungsmethode

Nachdem alle im weiteren benötigten Grundlagen dargestellt wurden, wird zunächst der Modell-Hamiltonoperator vorgestellt und damit das Modell definiert. Anschließend wird dieser mit der semiklassischen Lösungsmethode in verschiedenen Näherungen gelöst. Dabei werden die ersten beiden Anregungsenergien berechnet.

4.3.1 Modell Hamiltonoperator

Der Hamiltonoperator, den wir betrachten, beinhaltet Einteilchenterme, einen Paarkraftterm für Protonen und Neutronen und eine ladungsabhängige Restwechselwirkung, die Teilchen-Loch und Teilchen-Teilchen Kanäle beinhaltet. Im Rahmen der QRPA Methode sind die mit dieser Restwechselwirkung erhaltenen β Zerfalls- und $\beta\beta$ Zerfallsmatrixelemente bei Anpassung der Stärkeparameter so gut wie eine G-Matrix, die aus dem Bonn Ein-Boson-Austausch-Potential gewonnen wurde [103, 104, 105]. Der volle Hamiltonoperator ist gegeben als [106, 105, 107]:

$$H = H_p + H_n + H_{res}, \quad (4.43)$$

wobei

$$\begin{aligned}
 H_i &= \sum_m \varepsilon_i a_{im}^\dagger a_{im} \Leftrightarrow G_i S_i^\dagger S_i, \quad i = n, p \\
 H_{res} &= 2\chi N(\beta^- \beta^+) \Leftrightarrow 2\kappa N(P^- P^+) \\
 S_i^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_i a_i^\dagger a_i^\dagger \\
 \beta^- &= \sum_m a_{pm}^\dagger a_{nm} \\
 P^- &= \sum_m a_{pm}^\dagger a_{n\tilde{m}}^\dagger = \sum_m (\Leftrightarrow)^{j-m} a_{pm}^\dagger a_{n-m}^\dagger
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

ist. $N(x)$ ist das normalgeordnete Operatorprodukt und $a_p^\dagger = a_{j_p, m_p}^\dagger$ ist der Protonen Teilchenerzeugungsoperator, $a_{\tilde{p}}^\dagger = (\Leftrightarrow)^{j_p - m_p} a_{j_p, -m_p}^\dagger$ der korrespondierende zeitumkehrkonjugierte Operator. Der Parameter χ beschreibt die Stärke einer Proton-Neutron-Teilchen-Loch-Kraft, während κ die Stärke der Proton-Neutron-Paarkraft darstellt. Da wir ein analytisch lösbares Modell untersuchen wollen, machen wir weiterhin einige Einschränkungen. Wir betrachten nur Nukleonen in einer einzigen j -Schale. Diese ist für Protonen und Neutronen die gleiche. Eine Bogoliubov-Transformation auf Quasiteichen $\alpha_{i,m}$, $i = p, n$ (siehe Abschnitt 4.2.3) für Protonen der Form

$$\begin{aligned}
 \alpha_{pm}^\dagger &= u_p a_{pm}^\dagger \Leftrightarrow v_p a_{\tilde{p}m} \\
 \tilde{\alpha}_{pm} &= v_p a_{pm}^\dagger + u_p a_{\tilde{p}m}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

und analog für Neutronen bringt $H_{p,n}$ für $\varepsilon_i = (2j+1)G_i/4$ jetzt in Diagonalform.

$$H_p = \varepsilon_p \sum_{m_p} \alpha_{pm_p}^\dagger \alpha_{pm_p}, \quad H_n = \varepsilon_n \sum_{m_n} \alpha_{nm_n}^\dagger \alpha_{nm_n} \tag{4.46}$$

Dabei sind $\varepsilon_{p,n}$ die Quasiteilchenenergien. Der Beitrag der Restwechselwirkung ergibt sich nach dieser Bogoliubovtransformation zu

$$\begin{aligned}
 H_{res} &= 2\chi(2j+1) [(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) A^\dagger \cdot A + u_p v_p u_n v_n A^\dagger \cdot A^\dagger \\
 &\quad + u_n v_n u_p v_p A \cdot A] \Leftrightarrow 2\kappa(2j+1) [(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) A^\dagger \cdot A \\
 &\quad \Leftrightarrow u_p v_p u_n v_n A^\dagger \cdot A^\dagger \Leftrightarrow u_n v_n u_p v_p A \cdot A] \\
 A^\dagger &= [\alpha_p^\dagger \otimes \alpha_n^\dagger]_{00}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Wir nehmen weiterhin an, daß die Quasiteilchenenergien für Protonen und Neutronen gleich sind. Dadurch erhalten wir für den schematischen Hamiltonoperator, den wir untersuchen, die Form

$$H = C + \lambda_1 A^\dagger A + \lambda_2 (A^{\dagger 2} + A^2), \quad (4.48)$$

wobei

$$\begin{aligned} C &\equiv \varepsilon(\hat{N}_p + \hat{N}_n) \\ \lambda_1 &= 4\Omega [\chi(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2) \Leftrightarrow \kappa(u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2)] \\ \lambda_2 &= 4\Omega(\chi + \kappa)u_p v_p u_n v_n \\ \Omega &= (2j + 1)/2, \quad v_i = \sqrt{N_i/(2\Omega)}, \quad u_i = \sqrt{1 \Leftrightarrow N_i/(2\Omega)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ist. N_i ist die Zahl der Protonen und Neutronen. Eine detaillierte Herleitung der Koeffizienten u_i, v_i findet man z.B. in [86]. Der so erhaltene Hamiltonoperator ist im Fall von $\lambda_1 = 0$ gleich dem von Lipkin *et al* im Jahr 1965 [108] untersuchten Hamiltonoperator. Wir wollen den Modell Hamiltonoperator jedoch nicht weiter einschränken und den allgemeinen Fall von $\lambda_1 \neq 0$ miteinschließen.

4.3.2 Anregungsenergien

Um die Eigenschaften des Grundzustands des in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Hamiltonoperator zu untersuchen, lösen wir das zeitabhängige Variationsprinzip³

$$\delta \int_0^t \langle \Psi | H \Leftrightarrow i\partial_{t'} | \Psi \rangle dt'. \quad (4.50)$$

Wenn der Zustand $|\Psi\rangle$ den gesamten Hilbertraum des betrachteten Hamiltonoperator aufspannt, ist die Lösung des Variationsprinzips äquivalent zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Da wir aber nur an den Grundzustandseigenschaften und kleinen Abweichungen davon interessiert sind, beschränken wir uns auf zwei Klassen von Wellenfunktionen $|\Psi\rangle$. Für jede Klasse lösen wir das Variationsprinzip für zwei verschiedene Fälle. Der erste dabei zu untersuchende Fall beruht auf der Näherung, daß sich die bifermionischen Operatoren A und A^\dagger wie Bosonen verhalten, also

$$1) \quad [A, A^\dagger] = 1 \quad (4.51)$$

³hier und im weiteren werden wieder natürliche Einheiten, also $\hbar = c = 1$, verwendet

gilt. Alle anderen Kommutatoren werden nicht weiter genähert. Diesen Fall werden wir im Folgenden mit 1 bezeichnen. Im zweiten untersuchten Fall werden die bifermionischen Operatoren A und A^\dagger nicht mehr als Bosonen betrachtet und der volle Kommutator bei der Lösung des Variationsprinzips benutzt.

$$2) \quad [A, A^\dagger] = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\Omega} (\hat{N}_P + \hat{N}_N) \quad (4.52)$$

Diesen Fall werden wir als Fall 2 bezeichnen.

Die erste betrachtete Wellenfunktion hat die Form

$$A) \quad |\Psi(z, z^*)\rangle^A = \exp(zA^\dagger \Leftrightarrow z^*A) |0\rangle_q, \quad (4.53)$$

wobei z klassisch eine komplexe Funktion in der Zeit ist und z^* das konjugiert komplexe von z ist. $|0\rangle_q$ ist das Vakuum der Quasiteilchen. Diese Wellenfunktion wird im weiteren mit A bezeichnet. Im Fall 1 stellt die Wellenfunktion A einen kohärenten Zustand in Bezug auf die zur Weyl Gruppe assoziierte Algebra $\{A^\dagger, A, 1\}$ dar, während sie im Fall 2 ein kohärenter Zustand der $SU(2)$ Gruppe der Algebra A^\dagger, A, C ist. Die Verwendung von kohärenten Zuständen ist von besonderem Vorteil, da somit die Unschärfe der Ortskoordinaten und des linearen Impulses minimiert werden [109]. Die zweite betrachtete Wellenfunktion ist

$$\begin{aligned} B) \quad |\Psi(z, z^*)\rangle^B &= (zA^{\dagger 2} \Leftrightarrow z^*A^2) |0\rangle_q \\ &\equiv \exp S |0\rangle_q. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Dabei ist z wieder eine komplexe Funktion der Zeit. Die Operatoren im Exponenten der Wellenfunktion erfüllen im Fall 1 die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [A^2, A^{\dagger 2}] &= 2 + 4A^\dagger A \equiv D, \\ [A^2, D] &= 8A^2, \\ [A^{\dagger 2}, D] &= \Leftrightarrow 8A^{\dagger 2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

$\{A^{\dagger 2}, A^2, D\}$ sind also Generatoren einer $SU(1, 1)$ Algebra. Um das Variationsprinzip im Fall B.1 lösen zu können verwenden wir das Cambel-Hausdorf Theorem und schreiben die Wellenfunktion in der Form

$$|\Psi(z, z^*)\rangle^B = \exp \alpha A^{\dagger 2} \exp \beta C \exp \gamma A^2 |0\rangle_q. \quad (4.56)$$

Zur Definition der Operatoren siehe Gleichung (4.47) und (4.49). Die Faktoren α, β, γ sind Funktionen von z und können durch den Betrag ρ und die Phase Φ von $z = \rho e^{i\Phi}$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{e^{i\phi}}{2} \tanh(2\rho), \\ \beta &= \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln(\cosh(2\rho)), \\ \gamma &= \Leftrightarrow \frac{e^{-i\phi}}{2} \tanh(2\rho).\end{aligned}\tag{4.57}$$

Mit dieser Faktorisierung kann man die Wellenfunktion B letztlich schreiben als

$$|\psi\rangle^B = \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\rho)}} e^{\alpha A^{\dagger 2}} |0\rangle_q.\tag{4.58}$$

Im Fall der Betrachtung der exakten Vertauschungsrelationen ist diese Faktorisierung der Wellenfunktion B nicht mehr möglich. Um Probleme bei der Normalordnung zu umgehen wird die Wellenfunktion B in diesem Fall nur in Bezug auf $A^{\dagger 2}$ voll ausgeschrieben als

$$|\Psi\rangle^B = \mathcal{N} e^{z A^{\dagger 2}} |0\rangle_q,\tag{4.59}$$

wobei \mathcal{N} die Normierungskonstante des Zustands ist. Sie ist gegeben als

$$\mathcal{N}^{-2} = \sum_{n=0}^{\Omega} \left(\frac{\rho}{2\Omega}\right)^{2n} \frac{(2n)!(2j+1)!}{(n!)^2(2j \Leftrightarrow 2n+1)!}, \quad z = \rho e^{i\phi}.\tag{4.60}$$

Die verschiedene Fälle sind nochmals in Tabelle 4.1 zusammengestellt.

	$ \Psi(z, z^*)\rangle$	$[A, A^\dagger]$
A.1	$\exp\{z A^\dagger \Leftrightarrow z^* A\} BCS\rangle_\alpha$	1
A.2	$\exp\{z A^\dagger \Leftrightarrow z^* A\} BCS\rangle_\alpha$	$1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\Omega}(\hat{N}_p + \hat{N}_n)$
B.1	$\exp\{z A^{\dagger 2} \Leftrightarrow z^* A^2\} BCS\rangle_\alpha$	1
B.2	$\mathcal{N} \exp\{z A^{\dagger 2}\} BCS\rangle_\alpha$	$1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\Omega}(\hat{N}_p + \hat{N}_n)$

Tabelle 4.1: Mit semiklassischer Lösungsmethode untersuchte Wellenfunktionen

Für diese vier verschiedenen Fälle wird das zeitabhängige Variationsprinzips aus Gleichung (4.50) gelöst. Der Lösungsweg wird exemplarisch anhand von A.2

durchgeführt. Um das Variationsprinzip leichter lösen zu können, transformieren wir mit einer Bogoliubov Transformation auf Quasiteilchen. Da diese Transformation die pn Paarkraft diagonal machen soll, sind die neuen Quasiteilchen eine Superposition aus Protonen und Neutronen. Die Transformation auf die neuen Quasiteilchen lautet

$$\begin{aligned}
 e^T a_{pm}^\dagger e^{-T} &= U a_{pm}^\dagger \Leftrightarrow V a_{\widetilde{nm}} \equiv \alpha_{pm}^\dagger \\
 e^T a_{pm} e^{-T} &= U a_{pm} \Leftrightarrow V^* a_{\widetilde{nm}}^\dagger \equiv \alpha_{pm}, \\
 e^T a_{nm}^\dagger e^{-T} &= U a_{nm}^\dagger \Leftrightarrow V a_{\widetilde{mm}} \equiv \alpha_{nm}^\dagger, \\
 e^T a_{nm} e^{-T} &= U a_{nm} \Leftrightarrow V^* a_{\widetilde{pm}}^\dagger \equiv \alpha_{nm}.
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Dabei ist $a_{\widetilde{im}} = (\Leftrightarrow)^{j-m} a_{i-m}$ der zeitumkehrkonjugierte Zustand zu a_{im} . Weiter sind $U = \cos \rho$, $V = e^{-i\phi} \sin \rho$ mit $z = \rho e^{i\phi}$. Nach dieser Transformation ist die Wellenfunktion A.2 das Vakuum der neun Quasiteilchenvernichter α_{pm} und α_{nm} (siehe Abschnitt 4.2.3). Die aus dem Variationsprinzip so gewonnenen Differentialgleichungen sind jedoch nicht kanonisch, erfüllen also nicht die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Durch Transformation der Koordinaten z, z^* auf r, ϕ mit $z = \rho e^{i\phi}$ und $r = 2\Omega \sin^2 \rho$ findet man die klassischen Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip.

$$\Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, \quad \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}. \tag{4.62}$$

Dabei findet man für den Erwartungswert des Hamiltonoperator \mathcal{H} zwischen dem Zustand A.2

$$\mathcal{H} = 2\epsilon r + \lambda_1 \left[r \left(1 \Leftrightarrow \frac{r}{2\Omega} \right) + \frac{r^2}{4\Omega^2} \right] + 2\lambda_2 \frac{2\Omega \Leftrightarrow 1}{2\Omega} r \left(1 \Leftrightarrow \frac{r}{2\Omega} \right) \cos 2\phi. \tag{4.63}$$

Die so erhaltenen Bewegungsgleichungen sind nicht linear. Da wir nur an den Eigenschaften des Grundzustands und kleinen Abweichungen davon interessiert sind, linearisieren wir \mathcal{H} um sein Minimum. Um dieses zu finden, müssen wir zunächst die stationären Punkte mit den Ableitungen \dot{r} und $\dot{\phi}$ gleich Null finden. Die Werte für r und ϕ , für welche dies erfüllt ist, sind

$$\overset{\circ}{r} = \frac{2\Omega^2}{2\Omega \Leftrightarrow 1} \frac{2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}}{\lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}. \tag{4.64}$$

Das Minimum von \mathcal{H} existiert dabei nur, falls die Größen $\epsilon, \lambda_1, \lambda_2$ zu einem positiven Wert von $\overset{\circ}{r}$ führen. Durch Entwicklung um das so gefundene Minimum

bis zu Termen zweiter Ordnung erhält man dann zwei entkoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Als Lösung für die Anregungsfrequenz erhält man für den Fall A.2

$$\omega = \left[\frac{4\lambda_2}{\lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2} (2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}) (2\epsilon \Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_2}{\Omega}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.65)$$

Die Ergebnisse für die anderen Fälle, die man nach dem selben Schema erhält, sind in Tabelle 4.3.2 dargestellt. Die Berechnung der semiklassischen Lösung kann also abstrahiert dargestellt werden als

- Wahl geeigneter Testfunktion (Kohärente Zustände)
- Annahmen über Kommutator von A, A^\dagger
- Berechnen des zugehörigen Variationsprinzips
- Einführen von kanonischen Koordinaten
- Lösen der Bewegungsgleichungen
→ Anregungsenergien

→ **Klassische Lösung**

Da wir es mit einem quantenmechanischen System zu tun haben, wollen wir nun sehen, wie die klassischen Resultate mit den exakten Lösungen zusammenhängen. Dies wird wieder für den Fall A.2 diskutiert. Dazu quantisiert man die kanonisch konjugierten Variablen r, Φ . Um dies zu tun und die quantisierte Lösung mit der ursprünglichen in Verbindung bringen zu können, transformiert man die kanonisch konjugierten Variablen auf komplexe Koordinaten durch

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}(r + i\phi); \quad C^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(r \Leftrightarrow i\phi). \quad (4.66)$$

Dabei erfüllen die neuen komplexen Variablen

$$\{C^*, C\} = i, \quad \{C^*, \mathcal{H}\} = \dot{C}^*, \quad \{C, \mathcal{H}\} = \dot{C}. \quad (4.67)$$

Die Poissonklammer sind wie üblich als

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \quad (4.68)$$

Testfunktion	Klas. Energie \mathcal{H}	Kan. Koord.	Minimum	Anregungsenergie
A.1	$\frac{1}{2}(2e + \lambda_1)(\xi^2 + \eta^2) + \lambda_2(\xi^2 \Leftrightarrow \eta^2)$	$\xi = \sqrt{2} \operatorname{Re}(z),$ $\eta = \sqrt{2} \operatorname{Im}(z)$	(0,0)	$\sqrt{(2e + \lambda_1)^2 \Leftrightarrow 4\lambda_2^2}$
A.2	$2er + \lambda_1[r(1 \Leftrightarrow \frac{r}{2\Omega}) + \frac{r^2}{4\Omega^2}] + \lambda_2 \frac{2\Omega-1}{\Omega} r(1 \Leftrightarrow \frac{r}{2\Omega}) \cos(2\phi)$	$r = 2\Omega \sin^2 \rho,$ ϕ	$(\overset{\circ}{r}, \frac{\pi}{2})$	$[\frac{4\lambda_2}{\lambda_1 - 2\lambda_2} (2e + \lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}) \times (2e \Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Omega})]^{\frac{1}{2}}$
B.1	$\frac{\epsilon}{2} (\ln[1 + 4x \pm 2\sqrt{2x(1 + 2x)}])^2 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 \sqrt{2x(1 + 2x)} \cos \phi$	$x = \frac{1}{2} \sinh^2(2\rho),$ ϕ	$(\overset{\circ}{x}, \pi)$	$[\frac{4\lambda_2}{S^{\circ}} (2e + \lambda_1(1 + 4x^{\circ}) \Leftrightarrow 4\lambda_2 S^{\circ})]^{\frac{1}{2}}$
B.2	$(2e + \lambda_1)2x + 2\lambda_2 \frac{x}{\rho} \cos \phi$ $\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{2\Omega} (4x^2 \Leftrightarrow 2x + 2\rho \frac{dx}{d\rho})$	$x = \Leftrightarrow \rho \frac{\partial \ln N}{\partial \rho},$ ϕ	$(\overset{\circ}{x}, \pi)$	$[\Leftrightarrow 2\lambda_2 \frac{x^{\circ}}{\rho_0} (\frac{\lambda_1}{\Omega} G^{\circ}(x^{\circ}) + 2\lambda_2 F^{\circ}(x^{\circ}))]^{\frac{1}{2}}$

Tabelle 4.2: Ergebnisse der Anregungsenergien der betrachteten Fälle. Die klassische Energie ist der Mittelwert des Hamiltonoperator im jeweils betrachteten Fall. Die Anregungsenergie wurde durch Linearisierung um das Minimum berechnet.

definiert. Um nun die komplexen Variablen zu quantisieren, betrachten wir davor noch die Operatoren

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2}[\hat{N}_p + \hat{N}_n \Leftrightarrow 2\Omega], \quad \hat{S}_+ = \sqrt{2\Omega}A^\dagger, \quad \hat{S}_- = \sqrt{2\Omega}A. \quad (4.69)$$

Diese sind Generatoren einer $SU(2)$ Algebra und erfüllen

$$[\hat{S}_0, \hat{S}_\pm] = \pm 2\hat{S}_\pm, \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_0. \quad (4.70)$$

Der gesamte Hamiltonoperator kann aus diesen Generatoren aufgebaut werden. Um die exakte Lösung des Hamiltonoperators zu erhalten, wird dieser in seinem Bosonenbild gelöst (siehe Abschnitt 4.2.4). Um einen Zusammenhang des Lösung des Hamiltonoperator im fermionischen Hilbertraum, der korrespondierenden Lösung im bosonischen Hilbertraum und des semiklassisch erhalten Lösung herzustellen, betrachten wir die gemittelten Werte der Generatoren aus Gleichung (4.69). Diese sind

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{S}_0 | \psi \rangle &= 2\Omega |V|^2 \Leftrightarrow \Omega \equiv \mathcal{S}_0, \\ \langle \psi | \hat{S}_+ | \psi \rangle &= 2\Omega UV \equiv \mathcal{S}_+, \\ \langle \psi | \hat{S}_- | \psi \rangle &= 2\Omega UV^* \equiv \mathcal{S}_-. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Wenn man die Koeffizienten U und V durch die komplexen Koordinaten aus Gleichung (4.66) ausdrückt, kann man die Poissonklammern der Mittelwerte berechnen und erhält

$$i\{\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_\pm\} = \pm \mathcal{S}_\pm, \quad i\{\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_-\} = 2\mathcal{S}_0. \quad (4.72)$$

Die komplexen Funktionen \mathcal{S}_\pm und \mathcal{S}_0 sind somit Generatoren einer ‘klassischen’ $SU(2)$ Algebra. Durch das Theorem von Darboux [110] kann man weitere Paare komplexer Koordinaten finden. Diese erfüllen wiederum die Relationen aus Gleichung (4.67). Zwei weitere Paare komplexer Koordinaten, die man so findet, sind

$$\begin{aligned} C_1^* &= \sqrt{2\Omega}V; \quad C_1 = \sqrt{2\Omega}V^*, \\ C_2^* &= \sqrt{2\Omega}UV; \quad C_3 = \sqrt{2\Omega}\frac{V^*}{U}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Auch bei dieser Wahl der komplexen Koordinaten erfüllen die Mittelwerte der Generatoren der $SU(2)$ Algebra aus Gleichung (4.71) wieder die Poissonklammern aus Gleichung (4.72). Somit sind die Mittelwerte wieder Generatoren der ‘klassischen’ $SU(2)$ Algebra.

Betrachtet man nun explizit die Form der Mittelwerte der Generatoren in Bezug auf die komplexen Koordinaten C_1 und C_1^* , findet man für diese

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0^{(1)} &= C_1^* C_1 \Leftrightarrow \Omega, \\
 \mathcal{S}_+^{(1)} &= \sqrt{2\Omega} C_1^* \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{C_1^* C_1}{2\Omega}}, \\
 \mathcal{S}_-^{(1)} &= \sqrt{2\Omega} \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{C_1^* C_1}{2\Omega}} C_1.
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Zur Quantisierung dieser Generatoren betrachten man nun die Bosonenoperatoren B und B^\dagger . Diese erfüllen

$$[B, B^\dagger] = 1. \tag{4.75}$$

Die quantisierte $SU(2)$ Algebra erhält man nun durch das Mapping der komplexen Koordinaten auf die Bosonenoperatoren durch

$$(C_1, C_1^*; i\{\cdot, \cdot\}) \rightarrow (B, B^\dagger; [\cdot, \cdot]). \tag{4.76}$$

Die Generatoren in der Bosonendarstellung sind somit gegeben als

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0^{(HP)} &= B^\dagger B \Leftrightarrow \Omega, \\
 \mathcal{S}_+^{(HP)} &= \sqrt{2\Omega} B^\dagger \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{B^\dagger B}{2\Omega}}, \\
 \mathcal{S}_-^{(HP)} &= \sqrt{2\Omega} \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{B^\dagger B}{2\Omega}} B.
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Dabei steht der Index HP als Abkürzung für Holstein und Primakoff. Holstein und Primakoff haben diese Bosonendarstellung der ursprünglich betrachteten bifermionischen Operatoren \hat{S}_i zuerst gefunden [97] (siehe auch Abschnitt 4.2.4). Der so gefundene Weg zur Quantisierung der klassischen Koordinaten führt somit am Ende auf das Ergebnis, das man durch direkte Konstruktion des Bosonenbilds der bifermionischen Operatoren erhalten hätte. Der Zusammenhang ist diagrammatisch gegeben als:

$$\begin{array}{ccc}
 \{\hat{S}_k\} & , & [\cdot, \cdot] \Leftrightarrow \{\mathcal{S}_k^{(HP)}\}, [\cdot, \cdot] \\
 \downarrow & & \nearrow \\
 \{\mathcal{S}_k\} & , & i\{\cdot, \cdot\}
 \end{array} \tag{4.78}$$

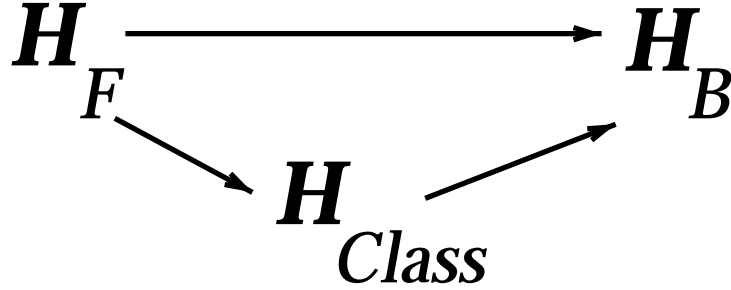


Abbildung 4.3: Zusammenhang von fermionischen, bosonischen und klassischen Hilbertraum.

Die semiklassische Lösung stellt somit einen Zwischenschritt auf dem Weg von der fermionischen zur bosonischen Basis dar. Dies ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Zum Vergleich der semiklassischen Lösung mit dem exakten Resultat betrachten wir die Holstein-Primakoff Bosonendarstellung des Hamiltonoperators aus Gleichung (4.48). Diese ist gegeben als

$$\begin{aligned}
 H_B^{(HP)} = & 2\epsilon B^\dagger B + \lambda_1 (B^\dagger B \Leftrightarrow \frac{1}{2\Omega} B^{+2} B^2) \\
 & + \lambda_2 [B^{+2} \sqrt{(1 \Leftrightarrow \frac{\hat{N} + 1}{2\Omega})(1 \Leftrightarrow \frac{\hat{N}}{2\Omega})} \\
 & + \sqrt{(1 \Leftrightarrow \frac{\hat{N} + 1}{2\Omega})(1 \Leftrightarrow \frac{\hat{N}}{2\Omega})} B^2].
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Dabei ist $\hat{N} = B^\dagger B$ der Bosonenzahloperator. Dessen Eigenwerte werden durch Diagonalisierung in der Basis

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} B^{+n} |0\rangle, \tag{4.80}$$

berechnet. Die Matrixelemente sind in Anhang D angegeben. Im Grenzfall großer Ω kann der Holstein-Primakoff Hamiltonoperator durch

$$\tilde{H}_B^{(HP)} = (2\epsilon + \lambda_1) B^\dagger B + \lambda_2 (B^{\dagger 2} + B^2) \tag{4.81}$$

beschrieben werden.

Als nächstes betrachten wir die gemittelten Werte der Generatoren der $SU(2)$ Algebra in den komplexen Koordinaten C_2^* und C_3 .

$$\mathcal{S}_0^{(2)} = C_2^* C_3 \Leftrightarrow \Omega, \quad \mathcal{S}_+^{(2)} = \sqrt{2\Omega} C_2^*, \quad \mathcal{S}_-^{(2)} = \sqrt{2\Omega} \left(1 \Leftrightarrow \frac{C_2^* C_3}{2\Omega}\right) C_3. \quad (4.82)$$

Durch das Mapping

$$(C_3, C_2^*; i\{.\}) \rightarrow (b, b^\dagger; [,]), \quad (4.83)$$

erhält man die Operatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^{(D)} &= b^\dagger b \Leftrightarrow \Omega, \\ \mathcal{S}_+^{(D)} &= \sqrt{2\Omega} b^\dagger, \\ \mathcal{S}_-^{(D)} &= \sqrt{2\Omega} \left(1 \Leftrightarrow \frac{b^\dagger b}{2\Omega}\right) b. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Dabei sind b und b^\dagger wiederum Bosonen. Diese Bosonenalgebra ist identisch zu der von Dyson [98] gefundenen Bosonendarstellung der $SU(2)$ Algebra aus Gleichung (4.69) (siehe auch Abschnitt 4.2.4). Dabei ist der so erhaltene Bosonen Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} H_B^{(D)} &= (2\epsilon + \lambda_1 \left(1 + \frac{1}{2\Omega}\right)) \hat{N} \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{2\Omega} \hat{N}^2 \\ &+ \lambda_2 [b^{\dagger 2} + \left(1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\Omega} + \left(\Leftrightarrow \frac{1}{\Omega} + \frac{1}{4\Omega^2}\right) \hat{N} + \frac{\hat{N}^2}{4\Omega^2}\right) b^2], \end{aligned} \quad (4.85)$$

mit $\hat{N} = b^\dagger b$, nicht mehr hermitesch. Die durch Diagonalisierung der in Anhang D angegebenen nichtsymmetrischen Matrix sind dennoch reell. In zwei Fällen stimmen die Bosonendarstellungen der Hamiltonoperatoren nach Holstein-Primakoff und nach Dyson überein. Dies ist der Fall für $\lambda_2 = 0$ oder im Limes $\Omega \rightarrow \infty$.

Die analytischen Ergebnisse werden für den speziellen Fall von einer $j = 19/2$ Schale mit $N = 14$ Neutronen und $Z = 6$ Protonen untersucht. Um die in der Literatur üblichen Variablen [107] zu benutzen, skalieren wir die Parameter χ und κ und definieren

$$\begin{aligned} \chi' &\equiv 2\Omega\chi, \\ \kappa' &\equiv 2\Omega\kappa. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Die Rechnungen werden für eine Teilchen-Loch Stärke $\chi' = 0$ und $\chi' = 0.5$ durchgeführt. Die Proton-Neutron Paarkraftstärke κ' wurde im Intervall von 0.0 bis 3.0 variiert.

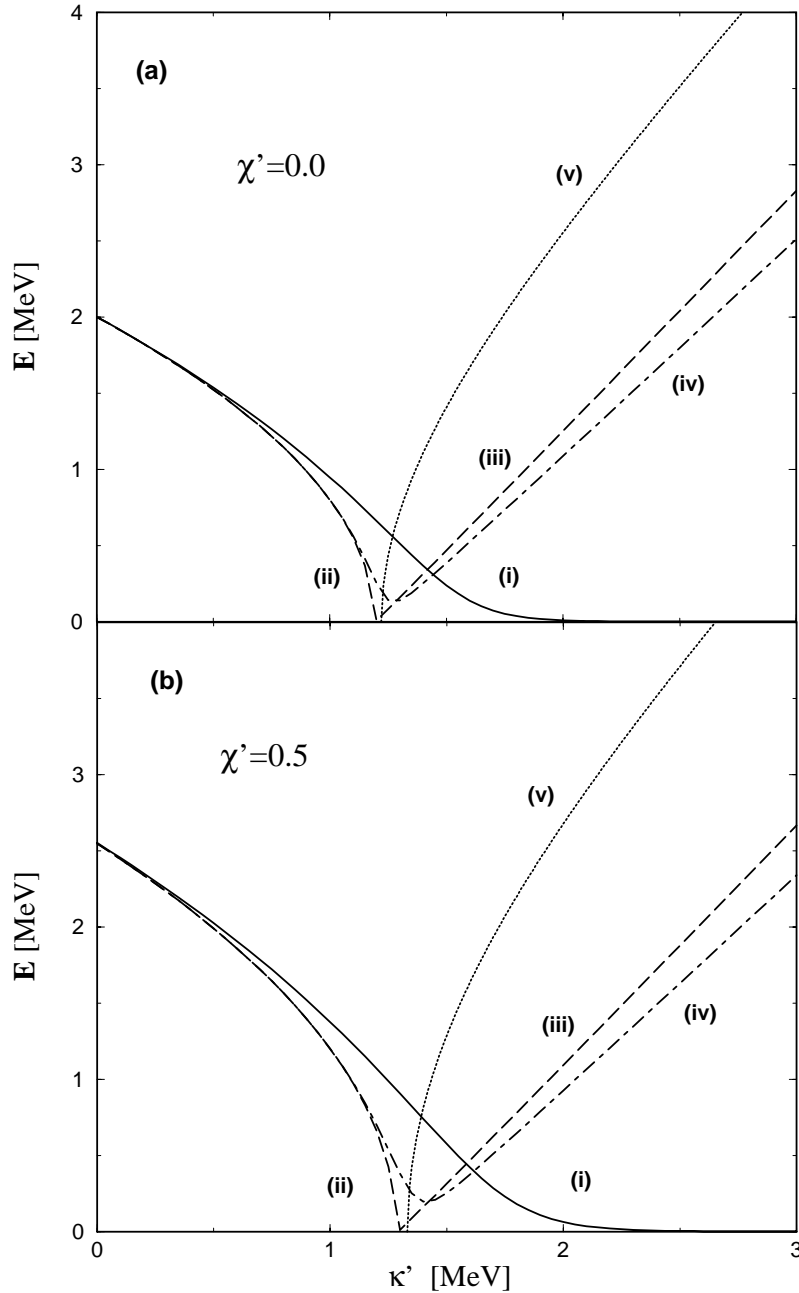


Abbildung 4.4: Anregungsenergien des Testwellenfunktion A als Funktion der Proton-Neutron-Paarkraftstärke $\kappa' = 2\Omega\kappa$ definiert in Gleichung (4.44) und (4.86). (i) ist die erste Anregungsenergie die durch Diagonalisierung des Hamiltonoperators im Holstein-Primakoff Bosonenbild gewonnen wurde. (ii) ist die im Rahmen der semiklassischen Lösungsmethode erhaltene Energie für $A.1$ und (v) die für $A.2$. Die Kurven (iii) und (iv) sind durch Diagonalisierung der genäherten Holstein-Primakoff Hamiltonoperators aus Gleichung (4.81) für eine kleine Basis (10 Zustände) und eine große Basis (20 Zustände) erhalten worden.

Die so erhaltenen Energien für die Testfunktion A sind in Abbildung 4.4 (a) für $\chi' = 0.0$ und in (b) für $\chi' = 0.5$ dargestellt. Die im Rahmen der semiklassischen Lösungsmethode erhaltenen Energien aus Tabelle 4.3.2 für A.1 und Gleichung A.2 sind durch die Kurven (ii) und (v) dargestellt. Die beiden Lösungen beschreiben verschiedenen Anregungen, also zwei verschiedenen Phasen des Kerns. Dabei hat die gemittelte Energie \mathcal{H} im Fall A.1 ihr Minimum am Ursprung in Bezug auf die kanonischen Koordinaten ζ und η . Im Fall A.2 hat \mathcal{H} sein Minimum, wie in Abbildung 4.5 dargestellt, bei einem nichtverschwindenden Wert von r und bei $\phi = \pi/2$. Die Verläufe der Kurven (ii) und (v) in Abbildung 4.4 (b) sind sehr

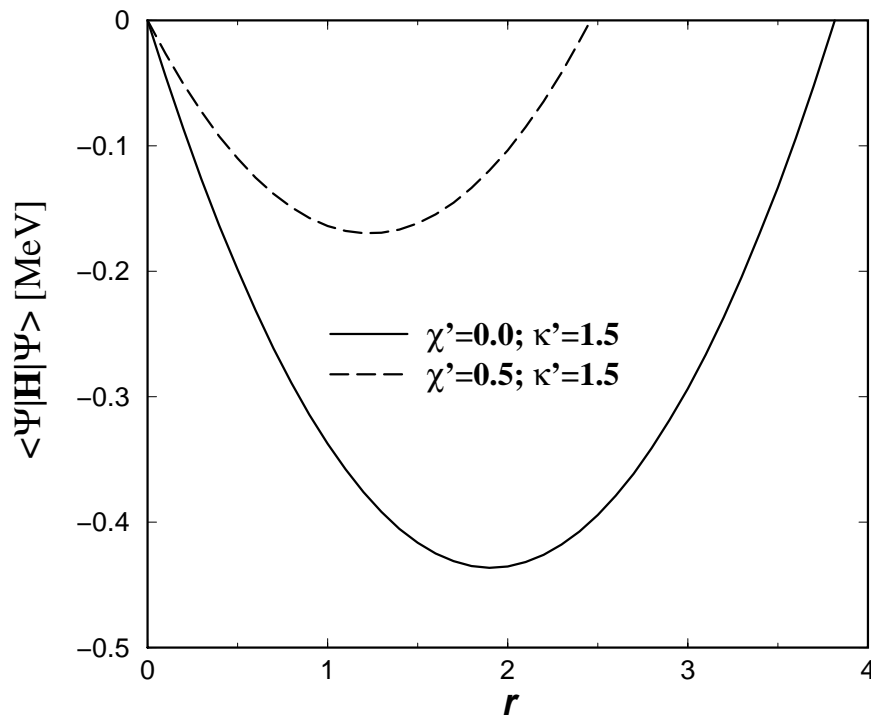


Abbildung 4.5: Minimum von \mathcal{H} in Abhängigkeit der “Ortskoordinate” r (Definition bei Gleichung (4.62)) für einen “Impuls” von $\Phi = \pi/2$, $\kappa' = 1.5$ und $\chi' = 0.0$ und $\chi' = 0.0$.

ähnlich zu denen aus Abbildung 4.4 (a). In den Abbildungen ist weiterhin ist die erste Anregungsenergie des Hamiltonoperators im Holstein-Primakoff Bosonenbild durch die Kurve (i) dargestellt. Diese ist identisch zu der des fermionischen Hamiltonoperator [111, 112]. Die Diagonalisierung des Hamiltonoperators im Bosonenbild nach Dyson führt ebenso zu einem identischen Ergebnis. Interessant ist das Ergebnis des Holstein-Primakoff Hamiltonoperators im Fall von großen Ω oder Entwicklung der Wurzel bis zur zweiten Ordnung. Wenn man die erste Anregungsenergie in der vollen Basis berechnet, erhält man die Kurve (ii) und (iii).

In dieser Näherung findet also ein Phasenübergang statt. Von Sambataro und Suhonen wurde in [107] ein Minimum der Anregungsenergie bei gleichem κ' gefunden. Wenn man in unserem Fall die Basis für die Diagonalisierung verkleinert und nur zehn Zustände einbezieht, findet man ein analoges Resultat. Diese ist die mit (iv) bezeichnete Kurve. Die Lösung (ii) und (iii) des Holstein-Primakoff Hamiltonoperators in zweiter Ordnung ist qualitativ in Einklang mit den beiden Lösungen des semiklassischen Verfahrens.

Die zweite betrachtete Wellenfunktion hat eine RPA ähnliche Struktur und ist quadratisch in den Operatoren A^\dagger und A . Durch diese Struktur erhält man in der semiklassischen Beschreibung den zwei Phononenzustand. Dieser ist für die gleiche Wahl der Parameter von $N = 14$ Neutronen und $Z = 6$ Protonen in einer $j = 19/2$ Schale untersucht worden. Die Ergebnisse für die Fälle B.1 und B.2 sind in Figur 4.6 zusammen mit der zweiten Anregungsenergie des Holstein-Primakoff Bosonen-Hamiltonoperator dargestellt.

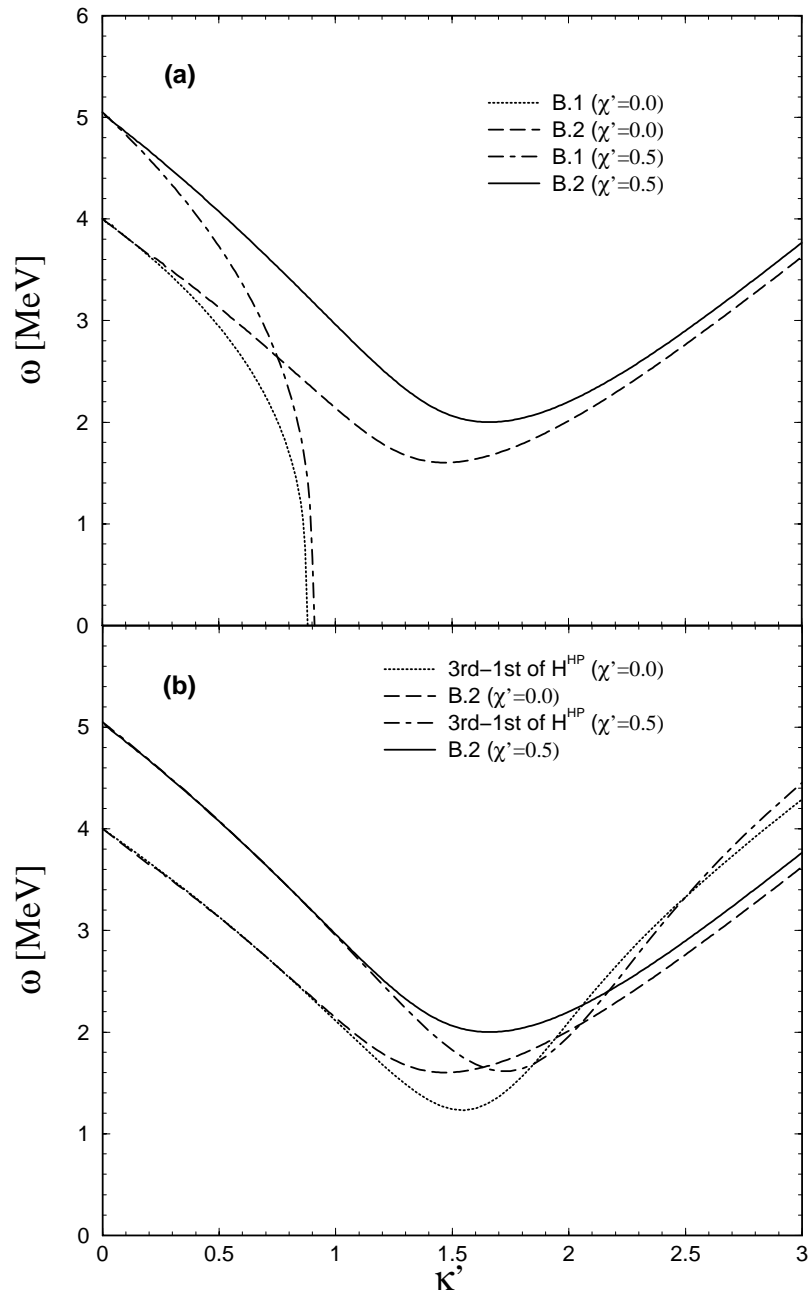


Abbildung 4.6: Anregungsenergien des Testwellenfunktion B . In (a) sind die Ansätze $B.1$ und $B.2$ dargestellt. In (b) ist der Ansatz $B.2$ im Vergleich mit dem exakten Resultat gezeigt.

4.3.3 Grundzustandskorrelationen

Ein Maß für die Grundzustandskorrelationen ist der Mittelwert der Protonen- und Neutronenquasiteilchen. Wir wollen diese für den Fall der Testwellenfunktion A berechnen, da diese Testwellenfunktion die ersten Anregungsenergien beschreibt. Die ersten Anregungsenergien sind wichtig für die noch betrachteten β Übergangsamplituden.

Da die Mittelwerte des Quasiteilchen zeitabhängig sind, betrachten wir das Zeitmittel dieser Operatoren, also

$$\frac{1}{2} \overline{\langle \psi | \hat{N}_p + \hat{N}_n | \psi \rangle} = \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) dt. \quad (4.87)$$

Aus den Bewegungsgleichungen (4.62) findet man für den Fall A.1

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos(\omega t + \phi_0), \\ \eta &= \frac{\xi_0 \omega}{2\xi + \lambda_1 \leftrightarrow 2\lambda_2} \sin(\omega t + \phi_0). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Da keine Anfangsbedingungen bekannt sind, bestimmen wir die Konstanten ξ_0 durch eine Quantisierungsbedingung. ϕ_0 hat keinen Einfluß auf die von uns betrachtete Größe und wird daher nicht bestimmt. Mit der Bohr-Sommerfeld Quantisierungsbedingung

$$\int_0^T \mathcal{A} dt = 2\pi n \quad (4.89)$$

findet man für $n=1$

$$\xi_0^2 = \frac{2(2\epsilon + \lambda_1 \leftrightarrow 2\lambda_2)}{\omega}. \quad (4.90)$$

Der Mittelwert der Quasiteilchen ergibt sich damit zu

$$\frac{1}{2} \overline{\langle \psi | \hat{N}_p + \hat{N}_n | \psi \rangle} = \frac{2\epsilon + \lambda_1 \leftrightarrow 2\lambda_2}{2\omega}. \quad (4.91)$$

Die Konstante C ist in Anhang E definiert.

Im Fall A.2 erhält man aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} r &= \overset{\circ}{r} + R \cos(\omega t + \phi_0), \\ \phi &= \Leftrightarrow \frac{2C}{\omega} R \sin(\omega t + \phi_0). \end{aligned} \quad (4.92)$$

und mit Hilfe der Quantisierungsbedingung erhält man

$$R^2 = \frac{\omega}{C}. \quad (4.93)$$

Der Mittelwert der Quasiteilchen ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{\langle \psi | \hat{N}_p + \hat{N}_n | \psi \rangle} &= \frac{2\Omega^2}{2\Omega \Leftrightarrow 1} \frac{2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{\Omega}}{\lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2} \\ &= \overset{\circ}{r}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Um einen Vergleich mit der exakten Lösung zu erhalten, betrachten wir nun noch den Holstein-Primakoff Fall. Der Grundzustand, der aus der Diagonalisierung des Holstein-Primakoff Bosonen Hamiltonoperators gewonnen wird, kann in der verwendeten Oszillatorbasis geschrieben werden als

$$|GZ\rangle = \sum_{m=0}^{2\Omega} C_m^{(g)} |m\rangle, \quad |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} (B^\dagger)^m |0\rangle. \quad (4.95)$$

Der gemittelte Quasiteilchenoperator für die Wellenfunktion A im Fall 2 kann in komplexen Koordinaten C, C^* beschrieben werden als

$$\langle \psi | \hat{N}_p + \hat{N}_n | \psi \rangle = 4\Omega V V^* = 2C^* C. \quad (4.96)$$

Quantisierung der komplexen Koordinaten ergibt nun im Holstein-Primakoff Fall für den gemittelten Erwartungswert der Quasiteilchen

$$\frac{1}{2} \overline{\hat{N}_p + \hat{N}_n} = \sum_{m=0}^{2\Omega} (C_m^{(g)})^2 m. \quad (4.97)$$

Die analytischen Ergebnisse sind wiederum für den Fall von $j = 19/2$ mit $N = 14$ Neutronen und $Z = 6$ Protonen untersucht worden. Die Rechnungen wurden für eine Teilchen-Loch Stärke $\chi' = 0$ und $\chi' = 0.5$ durchgeführt. Die Proton-Neutron Paarkraftstärke κ' wurde im Intervall von 0.0 bis 3.0 variiert. Die so erhaltenen

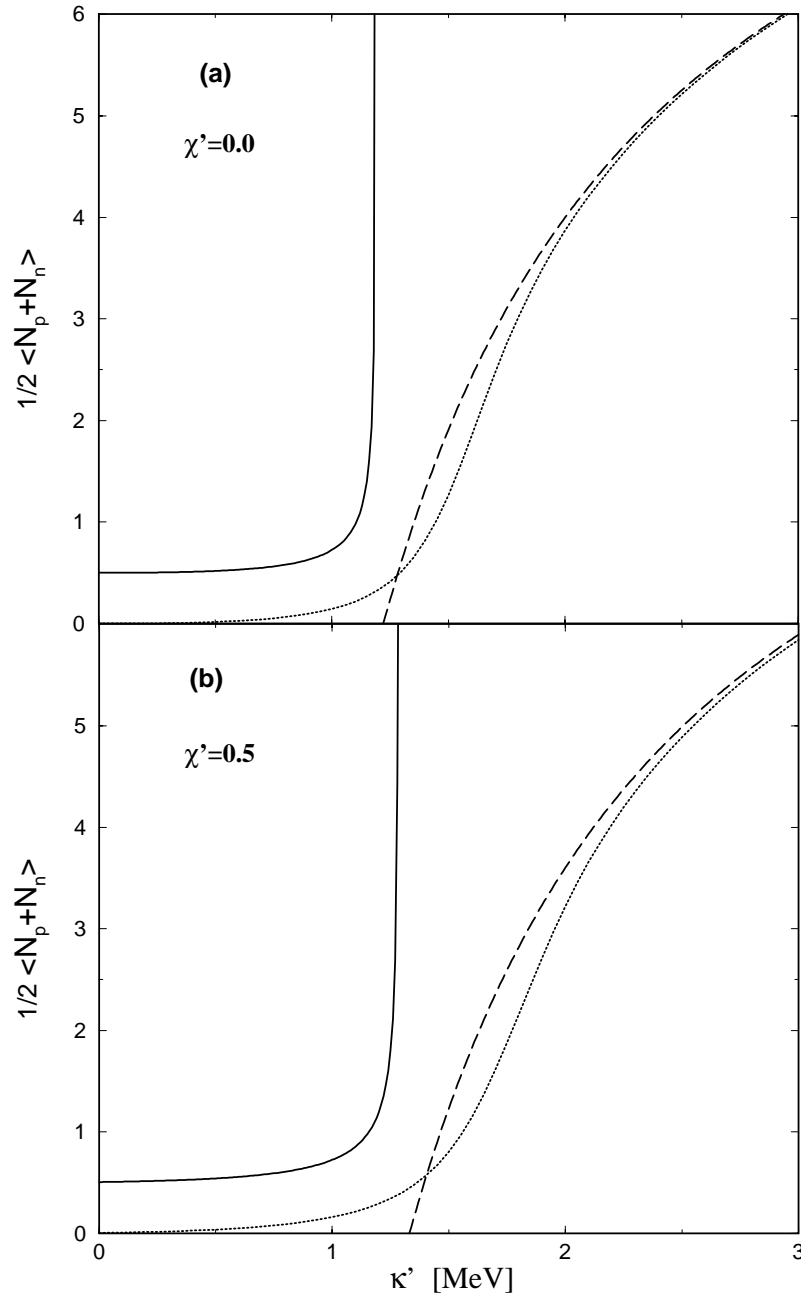


Abbildung 4.7: Gemittelte Erwartungswerte der Quasiteilchen. Die durchgezogene Kurve repräsentiert den Fall A.1, die gestrichelte den Fall A.2 und die gepunktete Kurve den gemittelten Erwartungswert der Quasiteilchen in der Holstein-Primakoff Bosonenrepräsentation.

Ergebnisse sind in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Holstein-Primakoff Bosonenrepräsentation ergibt im Vergleich mit A.2 sehr ähnliche Ergebnisse. Qualitativ ist der Verlauf von A.1 gleich dem der Holstein-Primakoff Kurve bis zu dem Punkt,

an welchem die Methode zusammenbricht. Die Werte der gemittelten Erwartungswerte der Quasiteilchen rechtfertigen auch die in A.1 gemachte Näherung. Die Bosonennäherung ist im Gültigkeitsbereich von A.1 um 5 % verletzt.

4.3.4 β -Übergangsamplituden

In diesem Teil werden die β Übergangsamplituden berechnet. Dazu muß, sowohl der betrachtete Zustand, als auch der Übergangoperator quantisiert werden. Für den Fall A.1 ist exemplarisch das Vorgehen in Anhang E dargestellt. Das so erhaltene Ergebnis für A.1 ist

$$\begin{aligned} |\langle 0_1 | \beta^- | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} (U_p V_n X \Leftrightarrow V_p U_n Y), \\ |\langle 0_1 | \beta^+ | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} (U_n V_p X \Leftrightarrow V_n U_p Y). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Dabei ist $|0_1\rangle$ der erste angeregte 0^+ Zustand und

$$X = [1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow \omega}{2\lambda_2} \right)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad Y = \frac{2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow \omega}{2\lambda_2} X. \quad (4.99)$$

U_n und V_n sind in Gleichung (4.49) definiert.

Im Fall A.2 erhält man analog

$$\begin{aligned} |\langle 0_1 | \beta^- | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} \left[U_p V_n \left(T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + V_p U_n \left(\Leftrightarrow T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right], \\ |\langle 0_1 | \beta^+ | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} \left[U_p V_n \left(\Leftrightarrow T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + V_p U_n \left(T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

mit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2\Omega} \frac{\Omega \Leftrightarrow \overset{\circ}{r}}{\sqrt{\overset{\circ}{r}} (1 \Leftrightarrow \frac{\overset{\circ}{r}}{2\Omega})}, \\ S &= \sqrt{\overset{\circ}{r}} (1 \Leftrightarrow \frac{\overset{\circ}{r}}{2\Omega}), \\ X &= [1 \Leftrightarrow \left(\frac{B + C \Leftrightarrow \omega}{B \Leftrightarrow C} \right)^2]^{-\frac{1}{2}}, \\ Y &= \Leftrightarrow \frac{B + C \Leftrightarrow \omega}{B \Leftrightarrow C} X, \\ B &= \Leftrightarrow \frac{4\lambda_2}{2\Omega \Leftrightarrow 1} \frac{2\Omega^2 (2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega}) (2\epsilon \Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Omega})}{(\lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2)^2}, \\ C &= \frac{2\Omega \Leftrightarrow 1}{4\Omega^2} (\Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Im Fall des Holstein-Primakoff Bosonen-Hamiltonoperators sind die Zustände durch Diagonalisierung des Hamiltonoperators zu berechnen. Um konsistent zu sein, müssen für die Übergangsoperatoren die exakten Bosonenbilder verwendet werden. Diese sind durch

$$\begin{aligned}
 \beta^- &= \sqrt{2\Omega} \left[U_p V_n B^\dagger \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{B^\dagger B}{2\Omega}} + \right. \\
 &\quad \left. V_p U_n \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{B^\dagger B}{2\Omega}} B + (V_p V_n \Leftrightarrow U_p U_n) \frac{B^\dagger B}{\sqrt{2\Omega}} \right], \\
 \beta^+ &= \sqrt{2\Omega} \left[U_p V_n \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{B^\dagger B}{2\Omega}} B + V_p U_n B^\dagger \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{B^\dagger B}{2\Omega}} \right. \\
 &\quad \left. + (V_p V_n \Leftrightarrow U_p U_n) \frac{B^\dagger B}{2\Omega} \right]
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

gegeben. Mit der Notation $C_n^{(k)}$ als die Amplitude des Basisvektors $|n\rangle$ des k -ten angeregten 0^+ Zustands, kann die β Übergangsamplitude vom Grundzustand in den k -ten angeregten 0^+ Zustand geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
 \langle 0_1 | \beta^- | 0_g \rangle &= \sum_{n=0}^{2\Omega} n (V_p V_n \Leftrightarrow U_p U_n) C_n^{(1)} C_n^{(g)} \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{2\Omega} \sqrt{(n+1)(2\Omega \Leftrightarrow n)} (C_{n+1}^{(1)} C_n^{(g)} U_p V_n + C_n^{(1)} C_{n+1}^{(g)} V_p U_n), \\
 \langle 0_1 | \beta^+ | 0_g \rangle &= \sum_{n=0}^{2\Omega} n (V_p V_n \Leftrightarrow U_p U_n) C_n^{(1)} C_n^{(g)} \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{2\Omega} \sqrt{(n+1)(2\Omega \Leftrightarrow n)} \\
 &\quad \cdot (C_{n+1}^{(1)} C_n^{(g)} V_p U_n + C_n^{(1)} C_{n+1}^{(g)} U_p V_n).
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

Die analytischen Ergebnisse werden wieder für den Fall von $j = 19/2$ mit $N = 14$ Neutronen und $Z = 6$ Protonen untersucht. Die Rechnungen sind für eine Teilchen-Loch Stärke $\chi' = 0$ und $\chi' = 0.5$ durchgeführt. Die Proton-Neutron Paarkraftstärke κ' wird im Intervall von 0.0 bis 3.0 variiert. Die so erhaltenen Ergebnisse sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Bei kleiner Proton-Neutron Paarkraftstärke findet man eine sehr gute Übereinstimmung von Holstein-Primakoff und A.1. Bei größeren Werten der Paarkraftstärke ist im Fall der β^+ Amplitude ein ähnlicher Verlauf zu beobachten. Bei der β^- Amplitude ist eine Abweichung von weniger als 15% zu beobachten für $\kappa' < 2$.

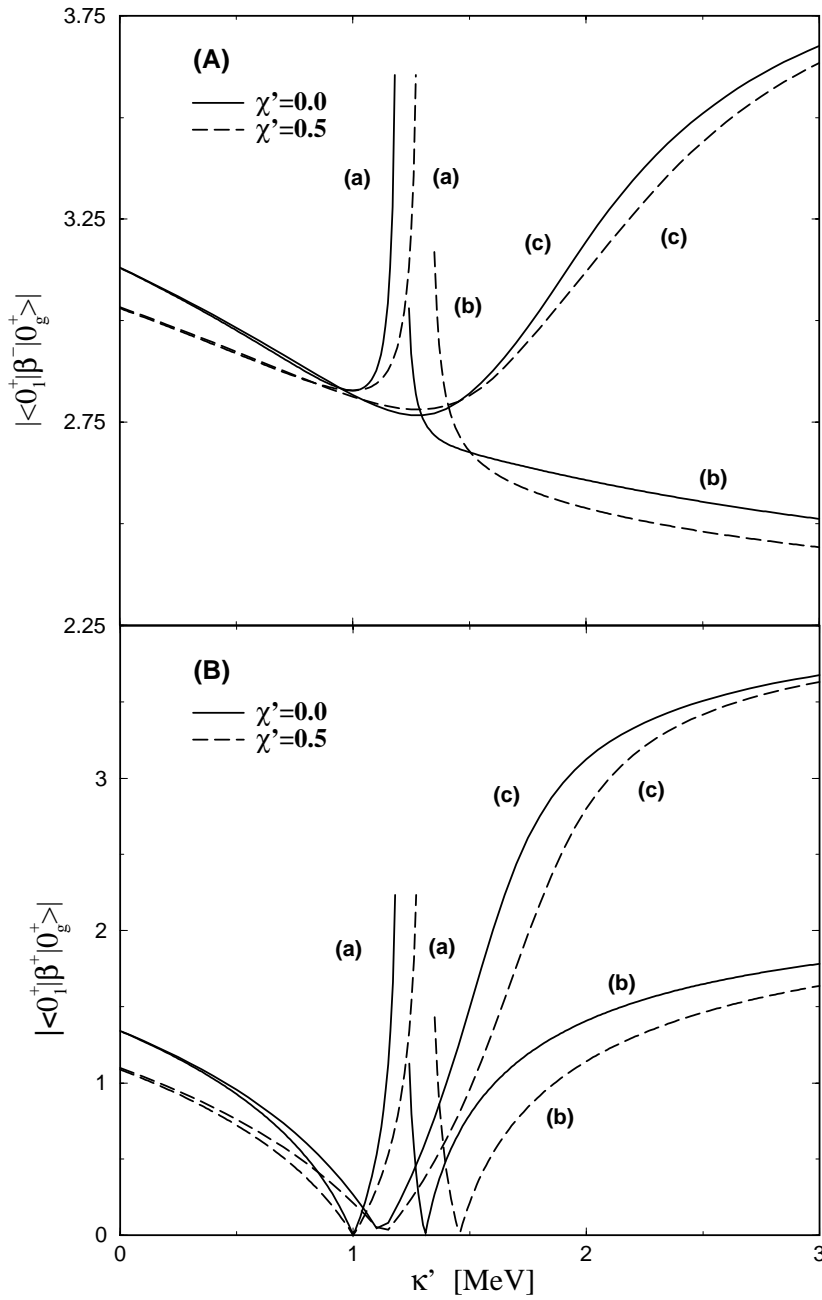


Abbildung 4.8: β Übergangsamplituden für die Fälle A.1 (a), A.2 (b) und Holstein-Primakoff (c). Im Oberen Teil sind die β^- Amplituden gezeigt und im unteren Teil die β^+ Amplituden.

4.3.5 Ikeda-Summenregel

In den beiden betrachteten Fällen der Testwellenfunktion A ist nur ein angeregter Zustand bei der Berechnung der β Übergangsamplituden eingegangen. Die korrespondierende Ikeda-Summenregel kann nun leicht berechnet werden, und man erhält

$$\begin{aligned}
 S_{A.1} &\equiv |\langle 0_1 | \beta^- | 0_g \rangle|^2 \Leftrightarrow |\langle 0_1 | \beta^+ | 0_g \rangle|^2 = N \Leftrightarrow Z, \\
 S_{A.2} &\equiv |\langle 0_1 | \beta^- | 0_g \rangle|^2 \Leftrightarrow |\langle 0_1 | \beta^+ | 0_g \rangle|^2 = (1 \Leftrightarrow \frac{\overset{\circ}{r}}{\Omega})(N \Leftrightarrow Z).
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

Dabei ist N die Neutronenzahl und P die Protonenzahl des betrachteten Anfangskerns. Im Fall der Holstein-Primakoff Bosonenabbildung sind mehrere angeregte Zustände beteiligt. Die Ikeda-Summenregel kann damit geschrieben werden als

$$S_{HP} = \sum_{k=0}^{2\Omega} |\langle 0_k | \beta^- | 0_g \rangle|^2 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2\Omega} |\langle 0_k | \beta^+ | 0_g \rangle|^2. \tag{4.105}$$

Die Matrixelemente sind in Gleichung (4.103) angegeben worden.

Die analytischen Ergebnisse werden wieder für den Fall von $j = 19/2$ mit $N = 14$ Neutronen und $Z = 6$ Protonen untersucht. Die Rechnungen werden für eine Teilchen-Loch Stärke $\chi' = 0$ und $\chi' = 0.5$ durchgeführt. Die Proton-Neutron Paarkraftstärke κ' wird im Intervall von 0.0 bis 3.0 variiert. Die so erhaltenen Ergebnisse sind in Abbildung 4.9 dargestellt. Über den gesamten gezeigten Bereich findet man eine sehr gute Übereinstimmung der semiklassischen Ergebnisse und der Ergebnisse im Holstein-Primakoff Bosonenbild. Die Ikeda Summenregel ist jedoch ab $\kappa = 1.3$ verletzt.

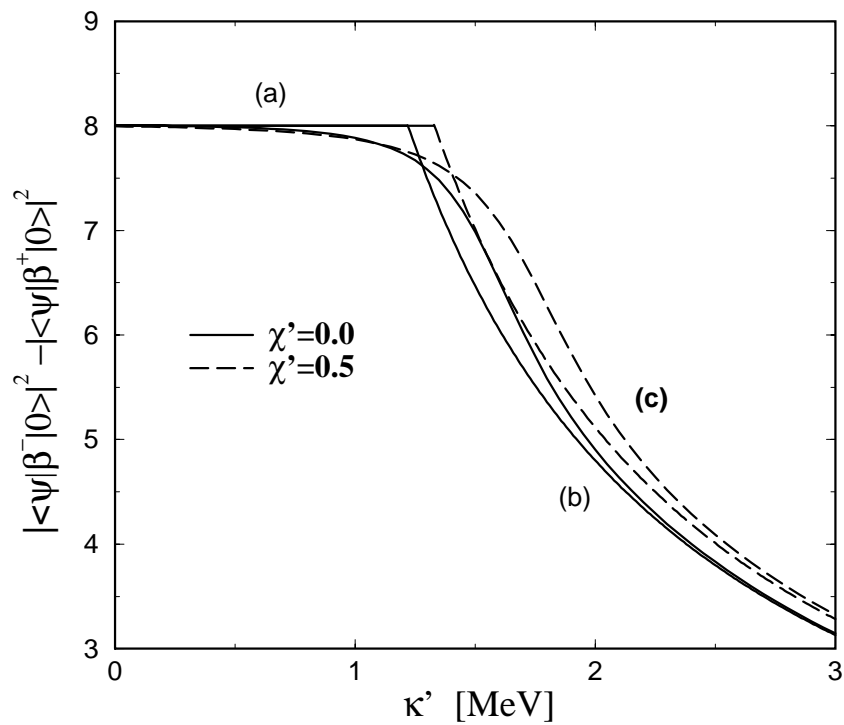


Abbildung 4.9: Ergebnisse der Ikeda Summenregel. Dargestellt sind die Fälle A.1 (a), A.2 (b) und das Holstein-Primakoff Bosonenbild (c) für jeweils $\chi' = 0$ und $\chi' = 0.5$.

4.4 Zusammenfassung

Im letzten Abschnitt wurden die beiden niedrigsten Anregungsenergien eines Modell Hamiltonoperators semiklassisch untersucht und mit den exakten Lösungen verglichen. Dazu wurde für den Modell Hamiltonoperator ein zeitabhängiges Variationsprinzip bezüglich zweier Testwellenfunktionen formuliert. Dabei war eine Wellenfunktion linear in den zwei Quasiteilchenoperatoren A^\dagger und A und eine quadratisch. Jedes Variationsprinzip wurde sowohl für den Fall, daß sich A und A^\dagger wie Bosonen verhalten, als auch bei Betrachtung der exakten Vertauschungsrelationen berechnet. Die in A und A^\dagger lineare Wellenfunktion stellt in den beiden Fällen 1 und 2 einen kohärenten Zustand bezüglich der Weyl und $SU(2)$ Gruppe dar. Für die in A und A^\dagger lineare Wellenfunktion wurden in der Bosonennäherung Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip gefunden, die exakt lösbar waren. Die Lösung dieser Bewegungsgleichungen ist identisch mit der Lösung für die Anregungsenergie im RPA Formalismus und existiert nur bis zu einer bestimmten pn -Paarkraftstärke. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen unter Verwendung der exakten Vertauschungsrelationen ergab sich diese in einer nichtlinearen Form. Daher wurde zunächst das Minimum des Erwartungswerts der Energie bestimmt und die Bewegungsgleichungen um dieses Minimum bis zum linearen Glied entwickelt und gelöst. Das Minimum existiert nur für Werte der pn -Paarkraftstärke, die größer als der kritische Wert sind, bei dem die Anregungsenergie in der Bosonennäherung verschwindet. Diese Methode bietet somit eine Möglichkeit, den Bereich der pn -Paarkraftstärke zu beschreiben, bei dem die RPA Methode nicht anwendbar ist.

Der zweite angeregte Zustand wurde durch die in den bifermionischen Operatoren quadratische Wellenfunktion beschrieben. Hier war sowohl in der Bosonennäherung, als auch bei Betrachtung der exakten Vertauschungsrelationen der Operatoren A und A^\dagger keine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen möglich. Im Gegensatz zur Wellenfunktion A bricht die Anregungsenergie in der Bosonennäherung für einen kleineren Wert der pn -Paarkraftstärke zusammen. Dies hat seine Ursache wahrscheinlich darin, daß im Fall der Testwellenfunktion B mehr anharmonische Effekte berücksichtigt worden sind. Die Anregungsenergie bei Betrachtung der exakten Kommutatoren ist für alle Werte der pn -Paarkraftstärke κ' gültig. Sie stimmt für kleinere κ' sehr gut mit dem exakten Resultat überein und gibt bei großen κ' den Verlauf der exakten Kurve wieder. Die exakten Resultate konnten dabei durch die Quantisierung der aus dem Variationsprinzip erhaltenen klassischen Variablen der in A und A^\dagger linearen Testfunktion reproduziert werden. Der so gewonnene Bosonen Hamiltonoperator entspricht je nach Wahl der komplexen klassischen Koordinaten den Bosonenbilder nach Holstein und Primakoff

oder Dyson des ursprünglichen fermionischen Hamiltonoperators.

Weiterhin wurden die Fermi-Betaübergangsamplituden bezüglich der in A und A^\dagger linearen Wellenfunktion berechnet. Da der dem Holstein-Primakoff entsprechende Bosonen Hamiltonoperator die gleichen Anregungsenergien wie der ursprüngliche fermionische Hamiltonoperator besitzt, wurde für diesen ebenso die Fermi-Übergangsamplituden berechnet und mit den anderen verglichen. Im Fall der β^+ Übergänge folgten die durch das Variationsprinzip erhaltenen Amplituden über den gesamten betrachteten Bereich der pn -Paarkraftstärke κ' qualitativ der im Holstein-Primakoff Bosonenbild erhaltenen Kurve. Im Fall der β^- Übergänge ist der Verlauf nur für $\kappa' < 1.5$ gleich, aber die Abweichung auch bei $\kappa' = 2$ kleiner als 15 %.

Für die Ikeda-Summenregel findet man über den gesamten betrachteten Bereich eine gute Übereinstimmung der aus dem Variationsprinzip erhaltenen Ergebnisse und der im Holstein-Primakoff Bosonenbild erhaltenen. Ab $\kappa' = 1.3$ ist die Ikeda-Summenregel jedoch verletzt.

Insgesamt findet man eine gute Übereinstimmung der Näherungen und exakten Lösungen der β Übergangsamplituden. Bei der Betrachtung der ersten beiden Anregungsenergien stellt die betrachtete Methode eine Möglichkeit zur Beschreibung von Bereichen der pn -Paarkraftstärke dar, die der RPA Methode nicht zugänglich sind. Für die Zukunft stellt das betrachtete Verfahren somit eine interessante Möglichkeit zur Beschreibung des $\beta\beta$ Zerfalls dar.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit sind verschiedene Aspekte auf dem Gebiet der Neutrinophysik untersucht worden.

Im ersten Teil wurde die allgemeine Struktur der Neutrinomassenmatrix untersucht. Da bis heute keine Neutrinomassen direkt gemessen worden sind, gibt es bisher von der experimentellen Seite nur Obergrenzen für die Massen der Wechselwirkungseigenzustände [3]. Vor allem durch die neuesten Ergebnisse der Super-Kamiokande Kollaboration mit der gefundenen Zenitwinkelabhängigkeit der sub-GeV Myonneutrinoereignisse, kann man davon ausgehen, daß Neutrinos oszillieren und damit massiv sind [29]. Aus diesen Daten kann die Neutrinomassenmatrix aber nicht absolut bestimmt werden, sondern nur bis auf eine Skala der Massen und die Vorzeichen der Masseneigenwerte.

Da es bis heute strittig ist, ob man alle Neutrinooszillationsdaten durch eine Mischung von nur drei Neutrinos beschreiben kann, wurden die Konsequenzen, die sich für die Neutrinomassenmatrix aus Analysen von Oszillationsdaten, die alle Experimente einschließen und Analysen, die das umstrittene LSND Ergebnis ausschließen, ergaben, verglichen. In der Neutrinomassenmatrix wurde nur für kleine m_1 ($m_1 < 0.1$ eV) ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Analysearten gefunden. Sobald daher von der experimentellen Seite mehr über die Elemente der Neutrinomassenmatrix bekannt ist, kann dies ein indirekter Test für die Gültigkeit der LSND Ergebnisse sein.

Durch Kombination der Einschränkungen, die sich aus den Analysen von Neutrinooszillationsexperimenten ergaben, mit dem experimentellen Maximalwert für die Elektronneutrinomasse von $m_{\nu_e} < 2.6$ eV [2], wurden Obergrenzen für die Elemente der allgemeinen 3×3 Neutrinomassenmatrix für sowohl Dirac-, als auch Majorananeutrinos bestimmt. Diese ergaben sich zu

$$|\mathcal{M}^{max}| < \begin{pmatrix} 2.6 & 2.5 & 2.6 \\ 2.5 & 2.7 & 2.7 \\ 2.6 & 2.7 & 2.8 \end{pmatrix} \text{ eV.} \quad (5.1)$$

Diese allgemein gültigen Werte konnten durch die Einbeziehung der Resultate aus der Suche nach dem für Majorananeutrinos erlaubten doppelten β Zerfalls weiter eingeschränkt werden. Die Werte der Obergrenzen für die Elemente der Neutrinomassenmatrix unter Berücksichtigung des eingeschränkten Wertebereichs für die gemittelte Majorananeutrinomasse von $|\langle m_\nu \rangle| < 0.62$ eV [56], ergaben sich zu

$$|M_{Majorana}^{max}| < \begin{pmatrix} .60 & .97 & .85 \\ .97 & .76 & .80 \\ .85 & .80 & 1.17 \end{pmatrix} \text{ eV.} \quad (5.2)$$

Die beiden verschiedenen Obergrenzen für die Elemente der Neutrinomassenmatrix für Dirac- und Majorananeutrinos stellen einen indirekten Test für die Natur der Neutrinos dar. Wenn man experimentell Werte für Neutrinomassen findet, die inkompatibel mit den Obergrenzen der Majorananeutrinos sind, müssen Neutrinos Diraceteilchen sein.

Aus diesen Obergrenzen der Elemente der Neutrinomassenmatrix ergeben sich Obergrenzen für die Massen des Myon- und Tauneutrinos. Im Fall von Diracneutrinos muß $m_{\mu,\tau} < 8.10$ eV sein. Falls Neutrinos Majoranateilchen sind, muß $m_{\mu,\tau} < 2.53$ eV gelten.

Diese Werte liegen um mindestens fünf Größenordnungen unter den experimentellen Obergrenzen von $m_{\nu_\mu} < 170.0$ keV und $m_{\nu_\tau} < 18.2$ MeV [3].

Die Kombination von Neutrinooszillationsanalysen und Obergrenzen für die Elektronneutrinomasse oder im Fall von Majorananeutrinos zusätzlich der gemittelten Majorananeutrinomasse führte somit auf deutlich restriktivere Grenzen für die Massen der einzelnen Neutrinofamilien und der Elemente der Neutrinomassenmatrix.

In zweiten Teil dieser Arbeit wurde mit dem \mathcal{R}_p -MSSM ein supersymmetrisches Modell benutzt, um massive Majorananeutrinos zu beschreiben. Es wurde gezeigt, daß im \mathcal{R}_p -MSSM im Allgemeinen alle drei Neutrinos massiv sind. Dazu sind sowohl das Baumniveau, als auch die \tilde{l} und $q\tilde{q}$ 1-Schleifenbeiträge miteinzubeziehen. Die Massenmatrix enthält reine Majoranamassenterme. Im \mathcal{R}_p -MSSM sind keine rechtshändigen isosingulett Neutrinos enthalten. Durch Vergleich der theoretischen Massenmatrix mit den im ersten Teil gefundenen Einschränkungen für die Elemente der Massenmatrix für Majorananeutrinos, konnten verbesserte Obergrenzen für die leptonenzahlverletzenden Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(i)}$ gewonnen werden. Diese konnten dabei zum Teil um einen Faktor 10^3 verbessert werden. Diese neuen Obergrenzen stellen einen Test des \mathcal{R}_p -MSSM auch in anderen Bereichen leptonenzahlverletzender Prozesse, wie dem elektrischen Dipolmoment des Elektrons [113], dar.

Um ein Modell mit Vorhersagekraft für die Neutrinomassen zu erhalten, wurde eine zusätzliche $U(1)_X$ Symmetrie auf das Modell angewandt. Diese $U(1)_X$ Symmetrie war sehr erfolgreich bei der Beschreibung der Quark- und geladenen Leptonenmassenmatrizen. Die Ladungen, bezüglich dieser $U(1)_X$, die von Ibáñez und Ross [74] in der Beschreibung der Quark- und geladenen Leptonenmassenmatrizen gefunden worden waren, sind auf die leptonenzahlverletzenden Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(i)}$ übertragen worden. Dadurch konnten diese Kopplungskonstanten miteinander korreliert und die Zahl der Parameter des Modells erheblich

reduziert werden. Durch Vergleich der theoretischen Neutrinomassenmatrix mit der durch Neutrinooszillationsexperimente eingeschränkten Neutrinomassenmatrix wurde ein System von sechs Gleichungen mit nur fünf Unbekannten gewonnen. Durch Lösung dieses Gleichungssystems für einen gegebenen Satz von Mischungswinkeln und Massenquadratsdifferenzen konnten die Neutrinomasseneigenwerte und Kopplungskonstanten eindeutig bestimmt werden. Bei der Lösung des Gleichungssystems wurden nur die Vorzeichenkombinationen der Masseneigenwerte verwendet, die mit dem von der CHARM II [16] Kollaboration gefundenen Wert für die Vektorkopplung von Majorananeutrinos in Einklang sind.

Um das Modell weiter zu untersuchen, wurde die gemittelte Majorananeutrinomasse $\langle m \rangle_\nu$ berechnet. Die gemittelte Majorananeutrinomasse spielt eine wichtige Rolle in der Beschreibung des $0\nu\beta\beta$ Zerfalls [79, 56]. Dieser Prozeß sollte für die im \mathbb{R}_p -MSSM betrachteten Majorananeutrinos auftreten. Im \mathbb{R}_p -MSSM mit zusätzlicher $U(1)_X$ Symmetrie ergab sich bei der Verwendung der verschiedenen Oszillationsanalysen ein Wert von $\langle m_\nu \rangle \simeq 0.01 \Leftrightarrow 0.04$ eV. Dieser Wert steht nicht im Widerspruch mit der experimentellen Obergrenze von $|\langle m_\nu \rangle| < 0.62$ eV [56]. Er liegt in einem Bereich, der von der nächsten Generation von $0\nu\beta\beta$ Zerfallsexperimenten, wie dem GENIUS Experiment [82], untersucht werden wird. Das betrachtete Modell ist damit in naher Zukunft falsifizierbar.

Im letzten Teil dieser Arbeit wurde eine semiklassische Methode zur Beschreibung der Kernstruktur im $\beta\beta$ Zerfall untersucht. Ein Problem der hierzu üblicherweise verwendeten RPA Methode ist das Zusammenbrechen der Methode in der Nähe des physikalisch relevanten pn -Paarkraftstärken. Um die neue Methode zu testen, sind die beiden niedrigsten Anregungsenergien eines Modell Hamiltonoperators semiklassisch berechnet und mit den exakten Lösungen verglichen worden

Für die erste Anregungsenergie wurde in der Bosonennäherung eine zur RPA Methode identische Lösung gefunden. Bei der exakten Behandlung der auftretenden Operatoren wurde durch Linearisierung der analytischen Lösung um das Minimum der klassischen Energie eine Beschreibung für Bereiche der pn -Paarkraftstärke gefunden, für den die RPA Methode nicht gültig ist.

Für die zweite Anregungsenergie wurde in der Bosonennäherung ein verschwinden der Anregungsenergie für kleinere Werte der pn -Paarkraftstärke κ' als in der RPA Methode gefunden. Im Rahmen der exakten Behandlung der auftretenden Operatoren wurde eine für alle Werte vom κ' gültige Anregungsenergie gefunden. Für kleinere Werte von κ' wurde für die so gefundene Anregungsenergie eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung gefunden, für größere Werte von κ' ergab sich ein ähnlicher Verlauf.

Weiterhin wurden die Fermi-Betaübergangsamplituden berechnet. Im Fall der β^+ Übergänge wurde für die im semiklassischen Verfahren erhaltenen Amplituden über den gesamten betrachteten Bereich der pn -Paarkraftstärke κ' qualitativ eine gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung gefunden. Im Fall der β^- Übergänge wurde nur für $\kappa' < 1.5$ ein gleicher Verlauf, aber auch bei $\kappa' = 2$ eine Abweichung von weniger als 15 % von der exakten Lösung gefunden.

Für die Ikeda-Summenregel wurde über den gesamten betrachteten Bereich eine gute Übereinstimmung der im semiklassischen Verfahren erhaltenen Lösung und der exakten gefunden. Ab $\kappa' = 1.3$ ist die Ikeda-Summenregel jedoch verletzt.

Insgesamt wurde gute Übereinstimmung der Näherungen und exakten Lösungen der β Übergangsamplituden gefunden. Bei der Betrachtung der ersten beiden Anregungsenergie stellt die betrachtete Methode eine Möglichkeit dar zur Beschreibung von Bereichen der pn -Paarkraftstärke, die der RPA Methode nicht zugänglich sind. Für die Zukunft stellt das betrachtete Verfahren somit eine interessante Möglichkeit zur Beschreibung der Kernstruktur des $\beta\beta$ Zerfalls dar.

Vor allem aufgrund der neuesten Ergebnisse der Super-Kamiokande Kollaboration kann man davon ausgehen, daß Neutrinos oszillieren und damit massiv sind. Da Neutrinos im Standardmodell masselos sind, stellen diese Resultate Evidenz von der experimentellen Seite dafür dar, daß das Standardmodell erweitert werden muß. Wie im Jahr 1930 — in der Hypothese der Neutrinos durch W. Pauli — sind Neutrinos damit wieder ein Wegweiser, wie das heutige Verständnis der Physik erweitert werden muß. In dieser Arbeit ist eine mögliche Erweiterung des Standardmodells untersucht worden. Durch die Vorhersagekraft des Modells und die Testbarkeit der Ergebnisse in der nahen Zukunft ist diese besonders attraktiv.

Anhang A

Effektive 3×3 Neutrinomassenmatrix auf dem Baumniveau

Die effektive 3×3 Neutrino Massenmatrix auf dem Baumniveau erhält man aus der 7×7 Massenmatrix

$$M^{tree} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^T & M_\chi \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

wobei die Nebendiagonale 3×4 Matrix m durch

$$m = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta u_1 & M_Z c_W c_\beta u_1 & 0 & \Leftrightarrow \mu_1 \\ \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta u_2 & M_Z c_W c_\beta u_2 & 0 & \Leftrightarrow \mu_2 \\ \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta u_3 & M_Z c_W c_\beta u_3 & 0 & \Leftrightarrow \mu_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

und die Neutralino 4×4 Matrix M_χ durch

$$M_\chi = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta & M_Z s_W s_\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_W c_\beta & \Leftrightarrow M_Z c_W s_\beta \\ \Leftrightarrow M_Z s_W c_\beta & M_Z c_W c_\beta & 0 & \Leftrightarrow \mu \\ M_Z s_W s_\beta & \Leftrightarrow M_Z c_W s_\beta & \Leftrightarrow \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

gegeben ist. Experimentell findet man, daß $(M_\chi)_{ij} \gg m_{ij}$ ist [69]. Man kann die 7×7 Massenmatrix deshalb näherungsweise diagonalisieren. Dazu bringt man

die Massenmatrix zunächst auf Blockdiagonalform und diagonalisiert dann die einzelnen Unterräume. Als Entwicklungsparameter wählen wir

$$\xi = m M_\chi^{-1}. \quad (\text{A.4})$$

Als rotierte Basis für die effektive Neutrino Massenmatrix wählen wir nach [69, 68, 114]

$$\Psi_{0i} = \Xi_{ij} \Psi'_{0j}, \quad (\text{A.5})$$

und erhalten für die Massenmatrix

$$\Xi M^{tree} \Xi^\dagger = \hat{M}^{tree}. \quad (\text{A.6})$$

Die unitäre Transformation Ξ kann beschrieben werden als

$$\Xi = \begin{pmatrix} V_\nu^T & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \xi \xi^\dagger & \Leftrightarrow \xi \\ \xi^\dagger & 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \xi^\dagger \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Wenn man nur Terme bis zur ersten Ordnung im kleinen Entwicklungsparameter ξ berücksichtigt, bringt der zweite Teil der Transformation die Massenmatrix auf Blockdiagonalform, und der erste Teil diagonalisiert diesen. Für die effektive 3×3 Neutrino Massenmatrix erhält man durch diese zweite Transformation

$$M_{3 \times 3}^{tree} = \Leftrightarrow m M_\chi^{-1} m^T = \mathcal{Z} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_e^2 & \Lambda_e \Lambda_\mu & \Lambda_e \Lambda_\tau \\ \Lambda_e \Lambda_\mu & \Lambda_\mu^2 & \Lambda_\mu \Lambda_\tau \\ \Lambda_e \Lambda_\tau & \Lambda_\mu \Lambda_\tau & \Lambda_\tau^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Dabei ist

$$\mathcal{Z} = g_2^2 \frac{M_1 + \tan^2 \theta_W M_2}{4 \text{Det} M_\chi}, \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Det} M_\chi = \sin 2\beta M_W^2 \mu (M_1 + \tan \theta_W M_2) \Leftrightarrow \mu^2 M_1 M_2, \quad (\text{A.10})$$

$$\Lambda_i = \mu \langle \nu_i \rangle \Leftrightarrow \langle H_1 \rangle \mu_i. \quad (\text{A.11})$$

Anhang B

1-Schleifen Beiträge zur Neutrino Massenmatrix

Die Berechnung des Beitrags der 1-Schleifen Diagramme ist im Folgenden für den Slepton-Lepton Fall dargestellt. Für die Quark-Squark Beiträge ist der Rechnung analog.

Um die Amplitude der Einschleifen Diagramme zu erhalten, benötigen wir die Kopplung der Neutrinos an Slepton-Lepton Paare. Die dafür relevanten Feynman Regeln sind nach [115, 58] in Figur B.1 dargestellt. Einsetzen der Propagatoren [116, 1] ergibt dann für den in Figur 3.4 (a) dargestellten Graphen folgenden Beitrag

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{qm} &= \sum_{lm} \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (\Leftrightarrow i\lambda_{qlp}\nu_q^c C^{-1} P_L V_{i2} \frac{i(q+m_l)}{q^2 \Leftrightarrow m_l^2} \\
 &\quad \cdot P_L V_{i1} \frac{i}{(q \Leftrightarrow p)^2 \Leftrightarrow M_{p_i}^2} i\lambda_{mpl}.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Dabei sind die \tilde{l}_i die Masseneigenzustände der Slepionen, die durch

$$\tilde{l}_i = V_{i1}\tilde{l}_L + V_{i2}\tilde{l}_R \tag{B.2}$$

mit den Flavor Eigenzuständen verbunden sind. Die Elemente der Mischungsmatrix V_{ij} können durch einen Winkel parametrisiert werden als

$$V = \begin{pmatrix} \cos \Phi_l & \sin \Phi_l \\ \Leftrightarrow \sin \Phi_l & \cos \Phi_l \end{pmatrix}. \tag{B.3}$$

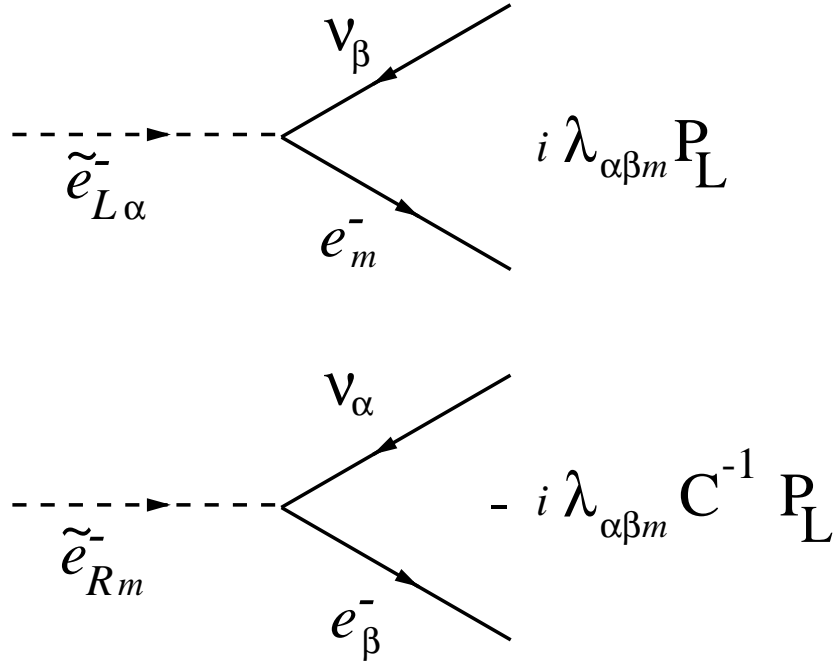


Abbildung B.1: Feynman Regeln für relevante Kopplungen.

Φ ergibt sich durch Diagonalisieren der Sleptonen Massenmatrix [115]

$$M_{\tilde{l}} = \begin{pmatrix} \mu_L^2 + m_l^2 & m_l(A + \mu \tan \beta) \\ m_l(A + \mu \tan \beta) & \mu_R^2 + m_l^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Die Massen der Masseneigenzustände sind

$$M_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\mu_L^2 + \mu_R^2 + 2m_l^2 \pm \sqrt{(\mu_L^2 \Leftrightarrow \mu_R^2)^2 + 4m_l^2(A + \mu \tan \beta)^2} \right) \quad (\text{B.5})$$

und der Mischungswinkel Φ ergibt sich zu

$$\sin 2\Phi_l = \frac{2(A + \mu \tan \beta)m_l}{\sqrt{(\mu_L^2 \Leftrightarrow \mu_R^2)^2 + 4(A + \mu \tan \beta)^2 m_l^2}} \quad (\text{B.6})$$

Um das Integral in der Amplitude auf die wesentlichen Beiträge zu reduzieren, splitten wir es auf in einen Teil, der im Zähler die Terme mit q und einen Teil, der den Massenterm enthält. Zunächst zeigen wir, daß der Term proportional q

im Grenzfall $p \rightarrow 0$ verschwindet. Um den Nenner quadratisch in der Integrationsvariablen zu schreiben, führen wir Feynman Parameter ein [116]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{[(q \Leftrightarrow p)^2 \Leftrightarrow M_{l_i}](q^2 \Leftrightarrow m_l)} \\
 = & \int_0^1 \frac{1}{[xq^2 \Leftrightarrow 2xpq + xp^2 \Leftrightarrow xM_{l_i} + q^2 \Leftrightarrow xq^2 \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow x)m_l^2]} \\
 = & \int_0^1 \frac{1}{l^2 \Leftrightarrow xM_{l_i}^2 \Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow x)m_l^2} dx
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Dabei ist $l = q \Leftrightarrow xp$. Für den Zähler erhält man

$$q + m_l = l + xp + m_l. \tag{B.8}$$

Terme proportional zu l verschwinden aus Symmetriegründen. Im interessanten Fall von $p \rightarrow 0$ überlebt somit nur der Term proportional zu m_l . In diesem Grenzfall können wir die Amplitude mit der Definition der Schleifenintegralfunktionen

$$B_0(p^2, m^2, M^2) = \Leftrightarrow i 16\pi^2 \int \frac{d^n q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 \Leftrightarrow m^2) [(q \Leftrightarrow p)^2 \Leftrightarrow M^2]} \tag{B.9}$$

und einsetzen der Mischungsmatrixelemente V_{ij} aus Gleichung (B.3) schreiben als

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{qm} &= \Leftrightarrow i \sum_{lm} \frac{1}{32\pi^2} \lambda_{qlp} \lambda_{mpl} m_l \sin(2\phi_p) \\
 &\cdot (B_0(0, m_p^2, M_{l_1}^2) \Leftrightarrow B_0(0, m_p^2, M_{l_2}^2)).
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Im betrachteten Fall $p \rightarrow 0$ ist die Differenz der Funktionen B_0 gerade [115]

$$\begin{aligned}
 B(0, M_1^2, m^2) \Leftrightarrow B_0(0, M_2^2, m^2) &= \frac{M_2^2}{m^2 \Leftrightarrow M_2^2} \ln \left(\frac{m^2}{M_2^2} \right) \\
 &\Leftrightarrow \frac{M_1^2}{m^2 \Leftrightarrow M_1^2} \ln \left(\frac{m^2}{M_1^2} \right).
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Experimentell finden wir, daß $M_{l_i} \gg m_l$. Somit ist

$$\begin{aligned}
 B(0, M_1^2, m^2) \Leftrightarrow B_0(0, M_2^2, m^2) &= \ln \left(\frac{M_2^2}{M_1^2} \right) \\
 &= \left(\frac{M_1^2}{M_1^2} + \frac{\Delta M^2}{M_1^2} \right) \\
 &\simeq \frac{\sqrt{(\mu_L^2 \Leftrightarrow \mu_R^2)^2 + 4m_l^2 (A = \mu \tan \beta)^2}}{M_1^2} \\
 &\quad \cdot \frac{\Delta M^2}{M_1^2} \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Differenz der quadrierten Eigenwerte der Sleptonenmassenmatrix aus Gleichung (B.4) eingesetzt. Die Amplitude kann somit geschrieben werden als

$$i\mathcal{M}_{qm} = \Leftrightarrow i \sum_{lm} \frac{1}{16\pi^2} \lambda_{qlp} \lambda_{mpl} \frac{m_l m_p (A + \mu \tan \beta)}{M_1^2}. \tag{B.13}$$

Anhang C

RPA Matrixelemente

Unter Bosonennäherung versteht man die Annahme, daß sich die bifermionischen Operatoren $a_i^\dagger a_m$ und $a_n^\dagger a_j$ im Mittel wie Bosonen verhalten, also

$$\begin{aligned} & \langle \text{RPA} | [a_i^\dagger a_m, a_n^\dagger a_j] | \text{RPA} \rangle \\ &= \delta_{ij} \delta_{mn} \Leftrightarrow \delta_{mn} \langle \text{RPA} | a_j a_i^\dagger | \text{RPA} \rangle \Leftrightarrow \delta_{ij} \langle \text{RPA} | a_n a_m^\dagger | \text{RPA} \rangle \sim \delta_{ij} \delta_{mn} \\ &= \langle \text{HF} | [a_i^\dagger a_m, a_n^\dagger a_j] | \text{RPA} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

in guter Näherung erfüllt ist. Hierbei ist $|\text{HF}\rangle$ der Hartree-Fock Grundzustand. Die Elemente der Matrizen A und B sind

$$\begin{aligned} A_{mi,nj} &= \langle \text{HF} | [a_i^\dagger a_m, [H, a_n^\dagger a_j]] | \text{HF} \rangle \\ B_{mi,nj} &= \Leftrightarrow \langle \text{HF} | [a_i^\dagger a_m, [H, a_j^\dagger a_n]] | \text{HF} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Anhang D

Matrixelemente der Bosonenrepräsentationen

Die nicht verschwindenden Matrixelemente des Holstein-Primakoff Bosonenbilds des Modell Hamiltonoperators $H_B^{(HP)}$ sind:

$$\begin{aligned}\langle n|H_B^{(HP)}|n\rangle &= n(2\epsilon + \lambda_1 \frac{2\Omega \Leftrightarrow n + 1}{2\Omega}), \\ \langle n + 2|H_B^{(HP)}|n\rangle &= \lambda_2[(n + 1)(n + 2)(1 \Leftrightarrow \frac{n + 1}{2\Omega})(1 \Leftrightarrow \frac{n}{2\Omega})]^{\frac{1}{2}}, \\ \langle n|H_B^{(HP)}|n + 2\rangle &= \langle n + 2|H_B^{(HP)}|n\rangle.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Die nicht verschwindenden Matrixelemente des Dyson Bosonenbilds sind:

$$\begin{aligned}\langle n|H_B^{(D)}|n\rangle &= n(2\epsilon + \frac{2\Omega \Leftrightarrow n + 1}{2\Omega}), \\ \langle n + 2|H_B^{(D)}|n\rangle &= \lambda_2[(n + 1)(n + 2)]^{\frac{1}{2}}, \\ \langle n|H_B^{(D)}|n + 2\rangle &= \lambda_2[(n + 1)(n + 2)]^{\frac{1}{2}} \\ &\times [1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\Omega} + (\Leftrightarrow \frac{1}{\Omega} + \frac{1}{4\Omega^2})n + \frac{n^2}{4\Omega^2}].\end{aligned}\tag{D.2}$$

Die Basiszustände sind dabei gegeben durch

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^\dagger)^n |0\rangle_b,\tag{D.3}$$

Anhang E

β Übergangsamplituden

Zur Berechnung der β Übergangsamplituden geht man folgendermaßen vor. Explizit werden die Schritte für den Fall A.1 dargestellt. Zunächst werden die Bewegungsgleichungen in Standard RPA Form geschrieben. Ausgehend von den in 4.3.2 gefundenen kanonischen Koordinaten führt dies zu

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ Z & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

Dabei sollen die neuen Koordinaten

$$\dot{P} = \Leftrightarrow \omega Q, \quad \dot{Q} = \omega P, \quad \{Q, P\} = 1 \quad (\text{E.2})$$

erfüllen. Durch Einbeziehung dieser Bedingungen kann man zwei der Transformationskoeffizienten eliminieren. Diese Bedingungen führen auf

$$Z = \Leftrightarrow \tilde{X}, \quad W = \tilde{Y}. \quad (\text{E.3})$$

Betrachten wir (\tilde{X}, \tilde{Y}) als unabhängige Variablen, kann man durch die Transformation

$$X = \frac{1}{2}(\tilde{X} + \tilde{Y}), \quad Y = \frac{1}{2}(\tilde{X} \Leftrightarrow \tilde{Y}), \quad (\text{E.4})$$

die Bewegungsgleichungen schreiben als

$$\begin{pmatrix} 2\epsilon + \lambda_1 & \Leftrightarrow 2\lambda_2 \\ 2\lambda_2 & \Leftrightarrow (2\epsilon + \lambda_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

Die Bedingung der Poissonklammern aus Gleichung E.2 liefert die Normierung

$$X^2 \Leftrightarrow Y^2 = 1. \quad (\text{E.6})$$

Somit ergeben sich die Transformationskoeffizienten X und Y zu

$$X = [1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow \omega}{2\lambda_2} \right)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad Y = \frac{2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow \omega}{2\lambda_2} X. \quad (\text{E.7})$$

Die so gefundenen Koordinaten müssen nun noch quantisiert werden. Dazu gehen wir analog zu Abschnitt 4.3.2 vor und definieren die komplexen Koordinaten

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP), \quad C^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q \Leftrightarrow iP). \quad (\text{E.8})$$

Diese kann man in den ursprünglichen Koordinaten (z, z^*) schreiben als

$$C = \frac{1 \Leftrightarrow i}{\sqrt{2}}(Xz + Yz^*), \quad C^* = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}(Xz^* + Yz). \quad (\text{E.9})$$

Die Quantisierung erfolgt durch Ersetzen der komplexen Koordinaten (C, C^*) durch die Bosonen (B, B^\dagger) . Der β Übergangoperator in Quasiteilchendarstellung ist gegeben als

$$\begin{aligned} \beta^- &= \sqrt{2\Omega}(U_p V_n A^\dagger + V_p U_n A), \\ \beta^+ &= \sqrt{2\Omega}(U_n V_p A + V_n U_p A^\dagger). \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Gemittelt durch die Testfunktion A unter der Annahme 1 ergibt sich

$$\begin{aligned} |\langle 0_1 | \beta^- | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega}(U_p V_n X \Leftrightarrow V_p U_n Y), \\ |\langle 0_1 | \beta^+ | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega}(U_n V_p X \Leftrightarrow V_n U_p Y). \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Ersetzen von (z, z^*) durch C, C^* und Quantisierung durch Bosonen ergibt für Übergänge vom Grundzustand

$$B|0\rangle = 0 \quad (\text{E.12})$$

zum ersten angeregten Zustand

$$|0_1\rangle = B^+|0\rangle \quad (\text{E.13})$$

für die β Zerfallsamplituden

$$\begin{aligned} |\langle 0_1 | \beta^- | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} (U_p V_n X \Leftrightarrow V_p U_n Y), \\ |\langle 0_1 | \beta^+ | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} (U_n V_p X \Leftrightarrow V_n U_p Y). \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Analog geht man für den Fall 2 der Wellenfunktion A vor. Die dabei erhaltenen Variablen sind

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q + p), \quad q = r \Leftrightarrow \overset{\circ}{r}, \quad p = \phi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}, \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q \Leftrightarrow p). \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Die Bewegungsgleichung hat dabei die Form

$$\begin{pmatrix} B + C & B \Leftrightarrow C \\ \Leftrightarrow(B \Leftrightarrow C) & \Leftrightarrow(B + C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (\text{E.16})$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} B &= \Leftrightarrow \frac{4\lambda_2}{2\Omega \Leftrightarrow 1} \frac{2\Omega^2(2\epsilon + \lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{\Omega})(2\epsilon \Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\Omega})}{(\lambda_1 \Leftrightarrow 2\lambda_2)^2}, \\ C &= \frac{2\Omega \Leftrightarrow 1}{4\Omega^2} (\Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2). \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Die normierten Lösungen der Bewegungsgleichung sind

$$\begin{aligned} X &= [1 \Leftrightarrow \left(\frac{B + C \Leftrightarrow \omega}{B \Leftrightarrow C} \right)^2]^{-\frac{1}{2}}, \\ Y &= \Leftrightarrow \frac{B + C \Leftrightarrow \omega}{B \Leftrightarrow C} X. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Die zu quantisierenden komplexen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} C \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) &= \frac{1 \Leftrightarrow i}{\sqrt{2}} \left(X \frac{q + ip}{\sqrt{2}} + Y \frac{q \Leftrightarrow ip}{\sqrt{2}} \right), \\ C^* \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q \Leftrightarrow iP) &= \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \left(X \frac{q \Leftrightarrow ip}{\sqrt{2}} + Y \frac{q + ip}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Da der gemittelte Übergangoperator nicht linear in den Koordinaten (r, ϕ) ist, linearisieren wir ihn um sein Minimum. Man erhält

$$\begin{aligned}\langle \psi | A^\dagger | \psi \rangle &= \Leftrightarrow (iqT + pS), \\ \langle \psi | A | \psi \rangle &= iqT \Leftrightarrow pS,\end{aligned}\tag{E.20}$$

mit

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2\Omega} \frac{\Omega \Leftrightarrow \dot{r}}{\sqrt{\dot{r} (1 \Leftrightarrow \frac{\dot{r}}{2\Omega})}}, \\ S &= \sqrt{\dot{r} (1 \Leftrightarrow \frac{\dot{r}}{2\Omega})}.\end{aligned}\tag{E.21}$$

Die β Übergangsamplituden vom Grundzustand zum ersten angeregten Zustand der quantisierten Zustände sind dann

$$\begin{aligned}|\langle 0_1 | \beta^- | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} \left[U_p V_n \left(T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + V_p U_n \left(\Leftrightarrow T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right], \\ |\langle 0_1 | \beta^+ | 0 \rangle| &= \sqrt{2\Omega} \left[U_p V_n \left(\Leftrightarrow T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + V_p U_n \left(T \frac{X \Leftrightarrow Y}{\sqrt{2}} + S \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \right) \right].\end{aligned}\tag{E.22}$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schema für Neutrinolosen Doppeltenbetazerfall.	9
2.1	Zustände für Dirac und Majorana Neutrinos.	13
2.2	pp Zyklus der Fusionsprozesse in der Sonne.	26
2.3	CNO-Zyklus der Fusion in der Sonne.	27
2.4	Winkelverteilung der sub-GeV μ -ähnlichen Ereignisse im Super-Kamiokande Experiment.	30
2.5	Zenitwinkel θ und Einfallsrichtung der Neutrinos in den Super-Kamiokande-Detektor (SK).	31
2.6	Neutrino Wechselwirkungsprozeß in Materie. In normaler Materie können nur Elektronneutrinos durch W^\pm Austausch wechselwirken, es können jedoch alle Neutrinos in normaler Materie durch Z^0 Austausch wechselwirken.	38
2.7	Effektive Neutrinomassen in Materie in Abhängigkeit von der Dichte des Mediums. Es wurde dabei $V_C > V_N $ angenommen. . .	39
2.8	Effektiver Mischungswinkel der Neutrinos in Materie für eine Mischung von nur zwei Neutrinofamilien in Abhängigkeit von der Dichte des Mediums.	40
2.9	Summe der Experimente mit Evidenz für Neutrinooszillationen. .	42
2.10	Matrixelemente der Neutrino Massenmatrix im Fall von $\theta_{12} = \theta_{13} = 45^\circ$ in Abhängigkeit von θ_{13} und m_1	44
3.1	Konstruktion der erlaubten Kopplungen im MSSM mit erhaltener R-Parität aus den Feynman Diagrammen des SMs. Supersymmetrische Teilchen sind mit einem Tilde bezeichnet.	57

3.2	Kopplung der SM und supersymmetrischen Teilchen, die erst bei verletzter R-Parität erlaubt sind. In diesem Fall ist nicht nur eine ungerade Anzahl supersymmetrischer Teilchen beteiligt, sondern auch die Leptonenzahlerhaltung verletzt.	58
3.3	Mischung der Neutrinos mit den Neutralinos.	61
3.4	1-Schleifen-Beiträge zur Neutrino Massenmatrix.	64
3.5	$U(1)$ Symmetrie für Massenmatrizen, also auch für trilineare Kopplungskonstanten $\lambda_{ijk}^{(l)}$	72
3.6	Schema des Inputs für Berechnung der Neutrino Massenmatrix.	78
4.1	Schema für Neutrinolosen Doppeltenbetazerfall durch Austausch eines massiven Majorana Neutrinos.	82
4.2	Angeregte Zustände der RPA Methode.	94
4.3	Zusammenhang von fermionischen, bosonischen und klassischen Hilbertraum.	106
4.4	Anregungsenergien der Testwellenfunktion A.	108
4.5	Minimum von \mathcal{H} für A.2	109
4.6	Anregungsenergien des Testwellenfunktion B.	111
4.7	Gemittelte Erwartungswerte der Quasiteilchen.	114
4.8	β Übergangsamplituden	118
4.9	Ergebnisse der Ikeda-Summenregel	120
B.1	Feynman Regeln für relevante Kopplungen.	132

Tabellenverzeichnis

2.1	Quellen, Energien und Fluß der Elektronneutrinos aus der Sonne.	25
2.2	Ergebnisse solarer Neutrinoexperimente und Vergleich mit Vorhersagen des SSMS.	28
2.3	Ergebnisse der solaren Neutrinoexperimente und Vergleich mit den im Rahmen des Standard Sonnenmodells gefundenen Werten. . .	29
2.4	Ergebnisse von Neutrinooszillationsanalysen im Rahmen von drei Neutrinofamilien unter Einbeziehung von solaren und atmosphärischen Neutrinoexperimenten.	43
2.5	Ergebnisse von Neutrinooszillationsanalysen im Rahmen von drei Neutrinofamilien unter Einbeziehung von solaren und atmosphärischen Neutrinoexperimenten und den LSND Daten.	43
2.6	Vergleich der Ergebnisse für die Neutrinomassenmatrix für verschiedene Werte von m_1 im Fall von Neutrinooszillationsanalysen mit und ohne Einbeziehung der LSND Ergebnisse.	45
3.1	Eigenschaften von Bosonen und Fermionen	54
3.2	Felderinhalt des \mathcal{R}_p -MSSM und Ladungen bezüglich der Eichgruppe des SM (siehe z.B. [64]). Die Hyperladung Y der $U(1)$ ist definiert durch $Q = (T_3 + Y/2)$, wobei T_3 die dritte Komponente des Isospins und Q die elektrische Ladung des Felds ist.	56
3.3	Obergrenzen für trilineare R-paritätsverletzende Kopplungskonstanten $\lambda_{i33}^{(l)}$	67
3.4	Struktur der up- und down-Quark Massenmatrizen mit fünf Nullen.	68
3.5	$U(1)_{FD}$ Ladungen.	69
3.6	Effektive Ladungen der Quark- (α_i) und Leptonenfelder (a_i). . . .	72

TABELLENVERZEICHNIS

3.7	Vorhersagen des \mathbb{R}_p -MSSM mit $U(1)_X$ Symmetrie für Kopplungskonstanten λ'_{333} und Λ_i	76
3.8	Vorhersagen des \mathbb{R}_p -MSSM mit $U(1)_X$ Symmetrie für Neutrinomassen und die gemittelte Majorana Neutrinomasse.	77
4.1	Mit semiklassischer Lösungsmethode untersuchte Wellenfunktionen.	100
4.2	Ergebnisse der Anregungsenergien der betrachteten Fälle.	103

Literaturverzeichnis

- [1] F. Mandl and G. Shaw, *Quantenfeldtheorie* (AUAL-Verlag GmbH, Wiesbaden, 1993).
- [2] C. Weinheimer *et al.*, Phys. Lett. **B460**, 219 (1999).
- [3] C. Caso *et al.*, Eur. Phys. J. **C3**, 1 (1998).
- [4] B. T. Cleveland *et al.*, Astrophys. J. **496**, 505 (1998).
- [5] J. Raymond Davis, D. S. Harmer, and K. C. Hoffman, Phys. Rev. Lett. **20**, 1205 (1968).
- [6] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1683 (1996).
- [7] W. Hampel *et al.*, Phys. Lett. **B388**, 384 (1996).
- [8] C. Athanassopoulos *et al.*, Phys. Rev. **C58**, 2489 (1998).
- [9] C. Athanassopoulos *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1774 (1998).
- [10] E. Majorana, Nuovo Cim. **14**, 171 (1937).
- [11] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (Mc Graw-Hill, New York, 1964).
- [12] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 1671 (1957).
- [13] A. Salam, Nuovo Cim. **5**, 299 (1957).
- [14] L. Landau, Nucl. Phys. **3**, 127 (1957).
- [15] C. W. Kim and A. Pevsner, *Neutrinos in Physics and Astrophysics* (harwood academic publishers, Baltimore, Maryland, USA, 1993).
- [16] P. Vilain *et al.*, Phys. Lett. **B335**, 246 (1994).

- [17] R. Plaga, A demonstration that the observed neutrinos are not Majorana particles, 1996, hep-ph/9610545.
- [18] J. D. Vergados, Phys. Rept. **133**, 1 (1986).
- [19] S. M. Bilenkii, C. Giunti, and W. Grimus, Prog. Part. Nucl. Phys. **43**, 1 (1999).
- [20] T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **64**, 1103 (1980).
- [21] C. Sutton, *Spaceship Neutrino* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [22] J. N. Bahcall *et al.*, Phys. Rev. **C54**, 411 (1996).
- [23] J. N. Bahcall, Phys. Rev. **C56**, 3391 (1997).
- [24] J. N. Bahcall, S. Basu, and M. H. Pinsonneault, Phys. Lett. **B433**, 1 (1998).
- [25] J. N. Bahcall, Phys. Rev. **D49**, 3923 (1994).
- [26] J. N. Bahcall, Phys. Rev. **D44**, 1644 (1991).
- [27] J. N. Bahcall, S. Basu, and M. H. Pinsonneault, Phys. Lett. **B433**, 1 (1998).
- [28] D. N. Abdurashitov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4708 (1996).
- [29] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. **B467**, 185 (1999).
- [30] M. Honda, T. Kajita, K. Kasahara, and S. Midorikawa, Phys. Rev. **D52**, 4985 (1995).
- [31] T. K. Gaiser, *Cosmic Rays and Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [32] K. Daum, Z. Phys. **C66**, 417 (1995).
- [33] M. Aglietta *et al.*, Europhys. Lett. **8**, 611 (1989).
- [34] T. Kafka, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **70**, 340 (1999).
- [35] W. W. M. Allison *et al.*, Phys. Lett. **B391**, 491 (1997).
- [36] R. Becker-Szendy *et al.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **38**, 331 (1995).
- [37] R. Becker-Szendy *et al.*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1010 (1992).

- [38] R. Clark *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79**, 345 (1997).
- [39] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. **B335**, 237 (1994).
- [40] K. S. Hirata *et al.*, Phys. Lett. **B205**, 416 (1988).
- [41] K. S. Hirata *et al.*, Phys. Lett. **B280**, 146 (1992).
- [42] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [43] E. Kearns, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **70**, 315 (1999).
- [44] C. Athanassopoulos *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3082 (1996).
- [45] H. Gemmeke *et al.*, Nucl. Instrum. Meth. **A289**, 490 (1990).
- [46] G. Drexlin, Prog. Part. Nucl. Phys. **32**, 375 (1994).
- [47] K. Eitel *et al.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77**, 212 (1999).
- [48] G. Barenboim and F. Scheck, Physics Letters B **440**, 322 (1998).
- [49] L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D17**, 2369 (1978).
- [50] T. Sakai and T. Teshima, Prog. Theor. Phys. **102**, 629 (1999).
- [51] T. Teshima and T. Sakai, Prog. Theor. Phys. **101**, 147 (1999).
- [52] G.L.Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and G. Scioscia, Physical Review D **59**, 033001 (1999).
- [53] T. Ohlsson and H. Snellman, Phys. Rev. **D60**, 093007 (1999).
- [54] R. P. Thun and S. McKee, Physics Letters B **439**, 123 (1998).
- [55] L. Baudis *et al.*, Phys. Lett. **B407**, 219 (1997).
- [56] F. Simkovic, G. Pantis, J. D. Vergados, and A. Faessler, Phys. Rev. **C60**, 055502 (1999).
- [57] H. Dreiner, Hide and seek with supersymmetry, 1998, hep-ph/9902347.
- [58] H. E. Haber and G. L. Kane, Phys. Rept. **117**, 75 (1985).
- [59] H. P. Nilles, Physics Reports **110**, 1 (1984).
- [60] J. C. Romao, Supersymmetric theories with R-parity violation, 1998, hep-ph/9811454.

- [61] S. Weinberg, *The Quantum Theorie of Fields III* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [62] H. Kalka and G. Soff, *Supersymmetrie* (Teubner, Stuttgart, 1997).
- [63] M. Drees, An introduction to supersymmetry, 1996, hep-ph/9611409.
- [64] J. F. Gunion and H. E. Haber, Nucl. Phys. **B272**, 1 (1986).
- [65] S. Kraml, Stop and sbottom phenomenology in the MSSM, 1999, hep-ph/9903257.
- [66] M. Kuroda, Complete Lagrangian of MSSM, 1999, hep-ph/9902340.
- [67] L. Girardello and M. T. Grisaru, Nucl. Phys. **B194**, 65 (1982).
- [68] V. Bednyakov, A. Faessler, and S. Kovalenko, Phys. Lett. **B442**, 203 (1998).
- [69] M. Nowakowski and A. Pilaftsis, Nuclear Physics B **461**, 19 (1996).
- [70] D. J. Castaño *et al.*, Physical Review D **49**, 4882 (1994).
- [71] G. L. Kane, C. Kolda, L. Roszkowski, and J. D. Wells, Phys. Rev. **D49**, 6173 (1994).
- [72] S. Rakshit, G. Bhattacharyya, and A. Raychaudhuri, Phys. Rev. **D59**, 091701 (1999).
- [73] P. Ramond, R. G. Roberts, and G. G. Ross, Nucl. Phys. **B406**, 19 (1993).
- [74] L. Ibáñez and G. G. Ross, Physics Letters B **332**, 100 (1994).
- [75] S. Lola and J. D. Vergados, Progress in Particle and Nuclear Physics **40**, 71 (1998).
- [76] H. Georgi and C. Jarlskog, Phys. Lett. **B86**, 297 (1979).
- [77] P. Binétruy, E. Dudas, S. Lavignac, and C. A. Savoy, Physics Letters B **442**, 171 (1998).
- [78] R. Barbier *et al.*, Report of the group on the R parity violation, 1998, hep-ph/9810232.
- [79] A. Faessler and F. Simkovic, J. Phys. **G24**, 2139 (1998).
- [80] H. V. Klapdor-Kleingrothaus and M. Hirsch, Z. Phys. **A359**, 361 (1997).

- [81] J. Hellmig and H. V. Klapdor-Kleingrothaus, *Z. Phys.* **A359**, 351 (1997).
- [82] L. Baudis *et al.*, *Phys. Rept.* **307**, 301 (1998).
- [83] K. Grotz and H. Klapdor, *Die schwache Wechselwirkung in Kern-, Teilchen- und Astrophysik* (Teubner, Stuttgart, 1989).
- [84] K. Grotz, H. V. Klapdor, and J. Metzinger, *J. Phys. G* **G9**, L169 (1983).
- [85] W. Greiner and J. Maruhn, *Kernmodelle* (Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1995).
- [86] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [87] D. J. Rowe, *Nuclear Collective Motion* (Butler and Tanner Ltd, Frome and London, 1970).
- [88] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [89] N. Bogoliubov, *Soviet Physics JETP* **34**, 41 (1958).
- [90] N. Bogoliubov, *Soviet Physics Usp.* **67**, 236 (1959).
- [91] N. Bogoliubov and B. Solovev, *Soviet Physics Doklady* **4**, 143 (1959).
- [92] J. Valatin, *Phys. Rev.* **122**, 1012 (1961).
- [93] P. Garbaczewski, *Phys. Rept.* **36**, 65 (1978).
- [94] S. Beliaev and V. Zelevinskii, *Nuclear Physics* **39**, 582 (1962).
- [95] T. Marumori, M. Yamamura, and A. Tokunaga, *Progress of Theoretical Physics* **31**, 1009 (1964).
- [96] T. Marumori, M. Yamamura, A. Tokunaga, and K. Takada, *Progress of Theoretical Physics* **32**, 726 (1964).
- [97] T. Holstein and H. Primakoff, *Physical Review* **58**, 1098 (1940).
- [98] F. J. Dyson, *Physical Review* **102**, 1217 (1956).
- [99] K. Ikeda, S. Fujii, and F. Fujita, *Phys. Lett.* **3**, 271 (1963).
- [100] K. Ikeda, S. Fujii, and F. Fujita, *Phys. Lett.* **2**, 169 (1962).
- [101] K. Ikeda, *Prog. Theor. Phys.* **31**, 434 (1964).

- [102] P. Vogel, M. Ericson, and J. D. Vergados, Phys. Lett. **B212**, 259 (1988).
- [103] O. Civitarese, J. Suhonen, and A. Faessler, Nucl. Phys. **A591**, 195 (1995).
- [104] O. Civitarese and J. Suhonen, Nucl. Phys. **A578**, 62 (1994).
- [105] O. Civitarese and J. Suhonen, J. Phys. G **G20**, 1441 (1994).
- [106] V. A. Kuzmin and V. G. Solovev, Nucl. Phys. **A486**, 118 (1988).
- [107] M. Sambataro and J. Suhonen, Phys. Rev. **C56**, 782 (1997).
- [108] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and S. Glick, Nucl. Phys. **A62**, 188 (1965).
- [109] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [110] E. Cartan, Lecon sur invariants integraux, 1922, herman, Paris,1922.
- [111] A. Raduta, O. Haug, F. Simkovic, and A. Faessler, Nucl. Phys. **A671**, 255 (2000).
- [112] A. Raduta, O. Haug, F. Simkovic, and A. Faessler, J. Phys. G **G26**, 1327 (2000).
- [113] M. Frank and H. Hamidian, J. Phys. G **G24**, 2203 (1998).
- [114] A. Faessler, S. Kovalenko, and F. Simkovic, Phys. Rev. **D58**, 055004 (1998).
- [115] Y. Grossman and H. E. Haber, Phys. Rev. **D59**, 093008 (1999).
- [116] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1996).

Publikationsliste

Ich bin Autor bzw. Mitautor der folgenden Veröffentlichungen:

- O. Haug, J.D. Vergados, Amand Faessler and S. Kovalenko: “Neutrino masses originating from SUSY R-parity violating terms with $U(1)$ flavor symmetry”, to appear in Proc. Int. Conf. on Non-Accelerator New Physics (NANP’99), Dubna, Russia, 1999, Phys. of Atomic Nuclei.
- O. Haug, J.D. Vergados, Amand Faessler and S. Kovalenko: “Neutrino oscillations and R-parity violating supersymmetry”, Nucl. Phys. **B565**, 38 (2000).
- O. Haug, J.D. Vergados, Amand Faessler and S. Kovalenko: “Neutrino Oscillations and Consequences for coupling constants $\lambda_{i33}^{(i)}$ of the R_p -Minimal Supersymmetric Standard Model”, Prog. Part. Nucl. Phys. **44**, 467 (2000), Erice 1999 Conference Proceedings.
- A.A. Raduta, O. Haug, F. Šimkovic, and A. Faessler: “Semiclassical description of a proton neutron interacting system”, Nucl. Phys. **A671**, 255 (2000).
- A. A. Raduta, O. Haug, F. Šimkovic and A. Faessler: “New collective modes for a many-body system with proton-neutron interaction”, J. Phys. **G26**, 1327 (2000).
- O. Haug, Amand Faessler and J.D. Vergados: “Can LSND be included in a 3-Neutrino framework?”, submitted to Phys. Rev. **D**.
- O. Haug, Amand Faessler and J.D. Vergados: “Supersymmetry and neutrino oscillations”, to appear in Proceedings of NATO Advanced Study Institute, Predeal, Romania, 2000.

Danksagung

An erster Stelle gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Amand Fäßler, der mir die Gelegenheit gab, diese Dissertation auf dem Gebiet der Neutrinophysik durchzuführen. Ich danke ihm für seine andauernde Unterstützung und Motivation. Sein starkes Interesse am Fortgang meiner fachlichen Untersuchungen, die Gespräche und Diskussionen haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Fäßler verdanke ich die Teilnahme an mehreren Konferenzen und Sommerschulen, die mir einen Einblick in verschiedene Gebiete der Kern- und Teilchenphysik gaben. Die durch ihn initiierten Forschungsaufenthalte an der Maria Curie-Skłodowska Universität in Lublin/Polen und am IPNE in Bukarest/Rumänien trugen zur Erweiterung meines physikalischen Horizonts bei.

Herrn Priv.-Doz. Dr. Thomas Gutsche möchte ich herzlich für die vielen Gespräche und Diskussionen während der letzten Jahre danken. Die angenehme Diskussionsatmosphäre in seinem Zimmer hat sich fruchtbar auf meine Arbeit ausgewirkt.

Ebenfalls gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr. John D. Vergados, der mir während seiner teils längeren Besuche in Tübingen ein geduldiger Lehrer auf dem Gebiet der Neutrinophysik war. Von seiner Erfahrung und seinen inspirierenden Ideen habe ich sehr profitiert.

Herrn Prof. A.A. Raduta danke ich für die interessante Zusammenarbeit auf dem Gebiet des Doppeltenbetazerfalls. Seine Aufenthalte in Tübingen und meine Besuche in Bukarest führten stets zu produktiven Treffen.

Dem Vergabeausschuß des Graduiertenkollegs "Struktur und Wechselwirkung von Hadronen und Kernen" danke ich für die Gewährung eines Promotionsstipendiums für einen Teil der Dauer meiner Doktorarbeit. Insbesondere gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Herbert Müther, der in seiner Eigenschaft als Sprecher des Kollegs eine Reihe interessanter Veranstaltungen organisiert hat.

Meinem ehemaligen Zimmergenossen Dr. Ralf Hofmann danke ich für die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre und die vielen fachlichen Diskussionen. Für die mittäglichen Gespräche bei Kirschtäschchen und Nougatringen danke ich Nicole, Sabine, Christian, Clemens, Daniel und Erdmann.

Danke möchte ich meinen Eltern, die mich während meines Studiums auf so vielfältige Art und Weise unterstützt haben. Insbesondere die Fahrten um fünf Uhr früh an den Flughafen werde ich nicht vergessen.

Am Ende, aber nicht zuletzt, bedanke ich mich bei meiner Frau Barbara. Sie hat durch ihre moralische Unterstützung und ihr Verständnis für Physiker sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.