Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ – Untersuchungen zu mathematikbezogenen Überzeugungen und zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis

Dissertation
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Lisa Hilken
aus Schorndorf

Tübingen
2021

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:	30.07.2021
Dekan:	Prof. Dr. Thilo Stehle
1. Berichterstatterin:	Prof. Dr. Carla Cederbaum
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Walther Paravicini

Liste der eigenen Artikel:

Artikel mit Peer-Review:

– Hilken, Lisa (2020). Praktische und mathematische Zugänge zum Krümmungsbegriff. In: *Der Mathematikunterricht (MU)* 66(6), S. 28–35.
Dieser Artikel überschneidet sich inhaltlich mit den Abschnitten 2.4.1, 2.5.1 und S. 9.

– Cederbaum, Carla und Lisa Hilken (2021). Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen: ein Hands-on-Seminar für Lehramtsstudierende. In: *Professionsorientierte Fachwissenschaft – Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium.* Hrsg. von Viktor Isaev, Andreas Eichler und Frank Loose.
Dieser Artikel überschneidet sich inhaltlich mit den Abschnitten 2.1.1, 2.2 und 2.5.5.
Wiederverwertung in dieser Arbeit mit freundlicher Genehmigung von Springer Nature.

– Hilken, Lisa und Carla Cederbaum und Taiga Brahm (in Planung). Strengthening pre-service teachers' availing mathematics-related beliefs: evaluating an intervention.
Dieser Artikel überschneidet sich inhaltlich mit den Abschnitten 3.1 und 3.2.

kürzere Konferenzbeiträge:

– Hilken, Lisa und Carla Cederbaum (2018). Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen: Ein Seminar für Lehramtsstudierende mit konstruktiven, instruktiven und praktischen Anteilen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, S. 791–794. Münster: WTM-Verlag.

– Hilken, Lisa und Carla Cederbaum (2019). Veränderung des Bildes von Mathematik im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen". In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019*, S. 1355. Münster: WTM-Verlag.

– Hilken, Lisa und Carla Cederbaum (2020). Mathematikbezogene Überzeugungen in einem Hands-on-Mathematiksemina. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020*, S. 429–432. Münster: WTM-Verlag.

Danksagung

Ohne die Unterstützung verschiedenster Personen wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen.

Ich danke Carla Cederbaum für die Idee zu diesem Projekt und für all die Unterstützung in der Promotionszeit: aufmunternde Worte, inhaltliche Ideen, konstruktive Rückmeldungen, die gemeinsamen Seminare und vieles mehr.

Ich danke Taiga Brahm, die mir besonders bei allen methodischen Fragen und mit konstruktiven Rückmeldungen sehr weitergeholfen und geduldig alle Fragen beantwortet hat.

Ich danke Walther Paravicini, der mich zu verschiedenen Fragen der didaktischen Forschung beraten hat.

Ich danke Stefan Keppeler für die Vermittlung dieses Dissertationsprojektes und ihm und Elmar Teufl für die Unterstützung des Projektes.

Ich danke Carla Cederbaum, Stefan Keppeler, Elmar Teufl, Frank Loose und Walther Paravicini für die Zusammenarbeit im Rahmen der Tutorenschulung „Mathematik Lehren Lernen“.

Ich danke meinen Kollegen und Kolleginnen Julien Sessler, Sophia Jahns, Anja Fetzer, Christian Fingerhut, Malte Ring und Marina Pumptow für die vielfältige Hilfe, etwa bei Formulierungs- und Strukturierungsfragen, in Motivationslöchern, bei mathematischen Fragen und vielem mehr. Und vielen Dank für die gute Verpflegung und die schöne, gemeinsame Zeit! Ein besonderer Dank geht dabei an Julien Sessler, meinem direkten Kollegen in der Tutorenschulung. Danke für alles!

Ich danke allen, die mir bei Konferenzen oder anderen Gelegenheiten hilfreiche Rückmeldungen gegeben haben, besonders Holger Wuschke, Joerg Zender, Silke Neuhaus und Elisa Lankeit. Danke, dass ihr mich freundlich aufgenommen und an mein Projekt geglaubt habt. Ich danke auch Rudolf Sträßer und Ulrike Franke für ihre Rückmeldungen.

Ich danke der/dem LEAD Graduate School & Research Network und den Mitgliedern für die Unterstützung und die interessanten Einblicke in andere Forschungsgebiete.

Ich danke den studentischen Hilfskräften Anja Fetzer, Tim Gammerdinger und Theresa Brendle für ihre Hilfe bei der Auswertung der Daten und Axel Fehrenbach und Olivia Vičánek Martínez für die Erstellung von TikZ-Abbildungen.

Ich danke allen TeilnehmerInnen des Seminars, die sich auf ein für uns alle spannendes Abenteuer eingelassen haben. Ohne die engagierte Mitarbeit und die spannenden mathematischen Ideen der TeilnehmerInnen wäre aus diesem Projekt nichts geworden. Ich danke Lea Lange, dass sie sich Zeit genommen hat, im Seminar über ihre Erfahrungen im Schulunterricht zu sprechen. Ich danke Madeleine Schnell, Anna-Maria Schneider und Tim Gammerdinger, die in ihren Zulassungsarbeiten Themen aus dem Seminar aufgegriffen und weiterentwickelt haben.

Ich danke meinen Eltern für ihre Unterstützung auf dem Weg zur Promotion und meiner Mutter fürs Korrekturlesen.

Vielen Dank auch allen anderen, die mich unterstützt haben und die hier nicht namentlich genannt sind!

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Inquiry, sense making, and exploring how things fit together are, in my opinion, key parts of what mathematical thinking (and practices) are all about.
A. Schoenfeld [1]

Wenn das Erforschen und Untersuchen von Sachverhalten und das Erkennen sinnstiftender Zusammenhängen wesentliche Bestandteile des Mathematiktreibens sind, sollten diese Elemente in jedem Mathematikunterricht in der Schule oder an der Universität eine große Rolle spielen. Lehrkräfte für die Schule müssen also entsprechend ausgebildet werden. Dies ist jedoch häufig nicht der Fall: Die StudentInnen sind „damit beschäftigt, all die wunderbaren Definitionen, Konzepte und Sätze zu verdauen, die wir, die Lehrenden, ihnen in den Vorlesungen vorführen“ (Grieser 2016, S. 662). Die StudentInnen bekommen keine ausreichende Gelegenheit, ein Bewusstsein dafür zu entwickeln, aus welchen Problemen die mathematischen Theorien entstanden sind und wie viel Kreativität das Mathematiktreiben erfordert (Grieser 2016, S. 662).

Worin die Schwierigkeiten bei der Ausbildung von LehrerInnen liegen und wie die Ausbildung (in der ersten Phase) aussehen müsste, wird seit langem diskutiert. Einen wichtigen und frühen Beitrag leistete Felix Klein, der den Begriff der doppelten Diskontinuität etablierte (Klein 1908). Mit diesem Begriff wird die Erfahrung von LehramtsstudentInnen beschrieben, dass die Übergänge von der Schule zur Universität und von der Universität zurück zur Schule schwierig sind. Beispielsweise nehmen viele LehramtsstudentInnen Schul- und Hochschulmathematik als weitgehend unzusammenhängend wahr (vgl. Gueudet u. a. 2016). Seit Kleins Problemanalyse sind mehr als hundert Jahre vergangen, doch die Diskontinuitäten existieren noch immer (Gueudet u. a. 2016, S. 11), wenn auch unter anderen Rahmenbedingungen: Studienanteile wie die erziehungswissenschaftliche und die fachdidaktische Komponente werden heute anders gewichtet oder wurden neu eingeführt. Aber „das Ziel einer allseits zufriedenstellenden Berufsvorbereitung wurde mit dieser Strukturreform nicht unbedingt erreicht“ (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 2).

Welche Inhalte angehende LehrerInnen heute im Studium lernen und welche Fähigkeiten und Denkweisen sie erwerben sollten, beschreibt Hefendehl-Hebeker (2013, S. 12-13) mit einigen „Wunschvorstellungen“. Beispielsweise sollen angehende LehrerInnen eine reichhaltige Wissensbasis und ein Bewusstsein für das Werden des Wissens haben (also dafür, dass mathematisches Wissen sich sowohl historisch als auch individuell *entwickelt*). Beutelspacher u. a. (2011) halten es außerdem für wichtig, dass angehende LehrerInnen ein gültiges Bild von Mathematik haben (S. 2). Dazu gehört eine prozessorientierte Sicht auf die Mathematik (S. 25), die auch deren historische Entwicklung im Blick hat (Körner 2015, S. 207), und ein Verständnis von Mathematik als diskursiver Wissenschaft (Beutelspacher u. a. 2011, S. 17). Wichtig ist auch ein mathematisches Selbstvertrauen (Selbstwirksamkeitserwartung). Dies sollte in der Zeit an der Universität gestärkt und nicht etwa, wie es häufig der Fall zu sein scheint, geschwächt werden (Grieser 2016; Bungartz und Wynands 1998).

[1] Deutsch: „Das Untersuchen, die Sinnbildung und das Erforschen, wie die Dinge zusammenpassen, sind meiner Meinung nach die wichtigsten Bestandteile des mathematischen Denkens (und der mathematischen Praxis).“ Schoenfeld (2020, S. 1167)

Eine Grundlage für eine reichhaltige mathematische Wissensbasis ist das Vernetzen von Konzepten. Leikin und Levav-Waynberg (2007, S. 350) sehen mathematische Zusammenhänge als einen essenziellen Teil mathematischen Verständnisses an. Eli, Mohr-Schroeder und Lee (2013, S. 121) beschreiben ein tiefes, konzeptuelles Verständnis und die Fähigkeit zum Vernetzen mathematischer Inhalte als eine generelle Voraussetzung für effektives Unterrichten. Bisherige Untersuchungen zeigen jedoch, dass im Mathematikunterricht wenig vernetzt wird und dass das Vernetzungswissen von LehrerInnen nicht so stark ausgeprägt ist, wie es wünschenswert wäre (Leikin und Levav-Waynberg 2007; Businskas 2008).

Wie die verschiedenen Ziele und „Wunschvorstellungen" am besten erreicht werden können, ist noch Gegenstand der Diskussion. Ein wiederkehrender Vorschlag ist, die LehramtsstudentInnen erleben zu lassen, was sie lernen und später umsetzen sollen (z. B. Smith 2007): Um ein angemessenes Bild von Mathematik und ein Bewusstsein für das Werden des Wissens zu entwickeln und die kreative Seite der Mathematik kennen zu lernen, wurden Lehrveranstaltungen entwickelt, in denen die StudentInnen am Prozess der Entwicklung von Mathematik beteiligt sind, siehe beispielsweise Grieser (2016) und Fischer (2013). Auch zur Unterstützung des Vernetzens verschiedener Bereiche wurden Lehrformate entwickelt, beispielsweise Schnittstellenaufgaben zur Verknüpfung von Schul- und Hochschulmathematik (Bauer 2013).

Das in dieser Arbeit vorgestellte Mathematikseminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" ist darauf ausgerichtet, LehramtsstudentInnen mathematische Begriffe möglichst eigenständig entwickeln zu lassen. Zu diesem Zweck wird zu Beginn jedes Themas eine Frage aufgeworfen, beispielsweise was Krümmung ebener Kurven ist. Die StudentInnen bearbeiten diese Fragen in Gruppen. Um ihnen den Einstieg zu erleichtern und ihre Intuition und ihr Vorstellungsvermögen zu unterstützen, werden den StudentInnen Hands-on-Materialien zur Verfügung gestellt. Zum Beispiel können sie beim Thema „Krümmung ebener Kurven" mit einem City-Roller oder Fahrrad auf dem Campus Kurven abfahren, um sich des Zusammenhangs zwischen Radius und Krümmung eines Kreises bewusst zu werden. Ihre anschaulichen Ideen arbeiten die StudentInnen zu mathematisch präzisen Definitionen aus. Zum Abschluss des Themas stellt ein(e) StudentIn aus jeder Gruppe die Ergebnisse vor und zwei StudentInnen jeder Gruppe schreiben einen Beitrag für das Seminarskript. Das Seminar besteht aus vier solcher Themenblöcke. Im Laufe des Semesters verfassen die StudentInnen außerdem zwei schriftliche Reflexionen zu ihrem Lernprozess.

Die genannten Kernelemente des Seminars sind auch Kernelemente von in der Literatur beschriebenen Interventionen, mit denen die mathematikbezogenen Überzeugungen der TeilnehmerInnen positiv beeinflusst werden sollten (siehe Abschnitt 3.1.3): Offene Aufgaben bieten den TeilnehmerInnen die Möglichkeit, eigene Lösungswege zu beschreiten und die Erfahrung zu machen, dass sie selbst mathematische Theorien entwickeln können. Dadurch kann die Überzeugung, dass man in Mathematik vieles selbst herausfinden kann ebenso wie die mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung der TeilnehmerInnen gestärkt werden. Außerdem erleben sie, wie sich mathematisches Wissen entwickelt. Die TeilnehmerInnen haben zudem oft verschiedene Ideen, wie die Aufgaben gelöst werden können, sodass die Überzeugung, dass es in Mathematik häufig verschiedene Wege gibt, ein Problem zu lösen, gestärkt werden kann. Durch die Gruppenarbeit müssen die TeilnehmerInnen viel mit einander kommunizieren und sich in die Gedankenwelt der Kommilitonen eindenken. Dabei erleben sie Mathematik als diskursive Wissenschaft. In motivational oder emotional schwierigen Phasen können sie sich gegenseitig unterstützen und auch die Dozentinnen gehen auf entsprechende Äußerungen ein. Dadurch können sie diese Phasen überwinden und erleben, dass sie auch schwierige Probleme lösen können (*mastery experience*). Zusätzlich müssen die TeilnehmerInnen schriftlich ihr Lernen reflektieren, was die Änderung von Überzeugungen begünstigt. Ob sich die mathematikbezogenen Überzeugungen und die Selbstwirksamkeit der StudentInnen während des Seminars veränderten, wurde mit einer Prä-Post-Studie untersucht, siehe Abschnitt 3.2. Welche Elemente des Seminars zu einer Veränderung beigetragen haben könnten, wurde mit einer Analyse der schriftlichen Reflexionen der TeilnehmerInnen untersucht, siehe Abschnitt 3.3.

Das Seminar soll außerdem dazu beitragen, dass die StudentInnen eine reichhaltige Wissensbasis ausbilden. Dazu gehört, dass sie die Grundvorlesungen Lineare Algebra und Analysis miteinander vernetzen, da diese Vorlesungen die Grundlage für fast alle weiteren Vorlesungen bilden. Zudem sind diese Themen auch im Curriculum der Schule verankert. Vielen StudentInnen fällt diese Vernetzung erfahrungsgemäß jedoch schwer. In der elementaren Differentialgeometrie werden viele Konzepte sowohl aus der Linearen Algebra als auch aus der Analysis benötigt. Die SeminarteilnehmerInnen mussten daher immer wieder Konzepte aus beiden Bereichen zugleich verwenden, um Probleme lösen zu können. Das Seminar hat darum das Potenzial, den StudentInnen beim Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis zu helfen. Untersucht wurde zunächst, ob sich die Erfahrung empirisch bestätigen lässt, dass es den StudentInnen tatsächlich schwer fällt, Aufgaben zu lösen, die Inhalte aus Linearer Algebra und Analysis einbeziehen, siehe Abschnitt 4.2. Anschließend wurde untersucht, ob die StudentInnen Verbindungen zwischen der Linearen Algebra und der Analysis erkennen und welche Verbindungen das sind. Diese Frage wurde zuerst allgemein und anschließend mit Bezug auf das Seminar untersucht, siehe Abschnitt 4.3 und 4.4.

Da das Problemlösen, Entwickeln und Vernetzen im Seminar nicht an elementaren Inhalten geübt wird sondern an fortgeschrittenen mathematischen Themen, kann das Seminar leicht als reguläres Mathematikseminar ins Curriculum integriert werden. Dadurch kann das Seminar zu einem Praxistransfer von Forschungsergebnissen beitragen.

2. Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“

In den folgenden Abschnitten wird das Seminar mit seinen Zielen, Inhalten und Methoden näher beschrieben. Außerdem werden einige von StudentInnen entwickelte Ergebnisse präsentiert.

2.1. Die doppelte Diskontinuität

Die Übergänge von der Schule zur Universität und von der Universität zurück zur Schule gestalten sich für viele LehramtsstudentInnen als schwierig (Gueudet u. a. 2016, S. 11). Die Problematik wird unter dem Begriff der doppelten Diskontinuität zusammengefasst, der von Felix Klein geprägt wurde (Klein 1908). Seit Kleins Problemanalyse sind mehr als hundert Jahre vergangen, doch die Diskontinuitäten existieren noch immer (Gueudet u. a. 2016, S. 11), wenn auch unter anderen Rahmenbedingungen: Studienanteile wie die erziehungswissenschaftliche und die fachdidaktische Komponente werden heute anders gewichtet oder wurden neu eingeführt. Aber „das Ziel einer allseits zufriedenstellenden Berufsvorbereitung wurde mit dieser Strukturreform nicht unbedingt erreicht“ (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 2).

Ein großer Teil der Schwierigkeiten an den Übergängen kann auf die in Schule und Universität unterschiedlichen Normen (Reiss und Nagel 2017, S. 444) oder Paradigmen (Gueudet u. a. 2016, S. 11) zurückgeführt werden. Die Unterschiede der Normen zeigen sich auf verschiedenen Ebenen, beispielsweise auf der sprachlichen Ebene. Während in der Schule die Alltagssprache dominiert, wird an der Universität gleich in der ersten Vorlesung eine mathematische Sprache eingeführt, die logisch präzise Aussagen ermöglicht und auf der Mengenlehre basiert(Reiss und Nagel 2017; Grieser 2016).

Große Unterschiede zeigen sich auch in den Argumentationsweisen: In der Schule wird häufig empirisch mit Beispielen und heuristischen Strategien argumentiert, während an der Universität im Allgemeinen nur formale Argumente und logisch vollständige, kohärente Beweise akzeptiert werden (Reiss und Nagel 2017; Bauer und Partheil 2009). Ein konkretes Beispiel dazu beschreibt Körner (2015, S. 207): „‚Bilder sind verboten.‘ ist ein in Seminaren des Autors oft gehörter Satz von Studierenden, wie sie ihn in Fachveranstaltungen wohl immer wieder hören. Wenn diese Studierenden dann nach dem Studium ins Referendariat gehen, lernen sie als erstes, dass Visualisierungen essentiell für gelingendes Lernen von Mathematik sind.“

Die unterschiedlichen Argumentationsweisen hängen eng damit zusammen, dass die Mathematik an der Universität deduktiv und axiomatisch aufgebaut werden soll, was kein Ziel für den Mathematikunterricht in der Schule ist (Grieser 2016; Bauer und Partheil 2009). Damit einher gehen auch Unterschiede bei der Einführung neuer Begriffe. An der Universität geschieht dies mittels formal präziser Definitionen, zu denen im Anschluss einzelne Beispiele gegeben werden. Für den Unterricht in der Schule sollten LehrerInnen jedoch mit weiteren Möglichkeiten vertraut sein (Halverscheid und Müller 2013, S. 118), wie Begriffe eingeführt und Begriffbildungsprozesse begleitet werden können, auch um einschätzen zu können, wann eine weniger präzise Charakterisierung eines Objektes oder Konzeptes Probleme bereiten kann oder vielleicht für den Lernprozess sogar nützlicher ist (vgl. Körner 2015, S. 207).

Eine weitere Schwierigkeit bei den Übergängen zwischen Schule und Hochschule liegt darin, dass die LehramtsstudentInnen wenig Zusammenhänge zwischen den Inhalten an Schule und Universität erkennen (Gueudet u. a. 2016; Bauer und Partheil 2009; Bungartz und Wynands 1998). In Vorlesungen wird kaum darauf eingegangen, wozu die Inhalte, die über den Schulstoff hinausgehen, bei der Gestaltung von Schulunterricht nützlich sein können oder welche Fertigkeiten und Denkhaltungen in einer Vorlesung oder im Mathematikstudium allgemein erlernt werden sollen.

Verbunden wird die Klage über zu abstrakte, unnötige Mathematikvorlesungen seitens der StudentInnen häufig mit der Forderung nach mehr Praxis. Die Studie von Wenzl, Wernet und Kollmer (2018, S. 2) zeigt jedoch, dass dieser Forderung „weder eine in sich stimmige noch eine realitätstüchtige Vorstellungswelt einer alternativen universitären Lehre zu Grunde liegt“, sodass daraus keine Konzepte zur Verbesserung des Lehramtsstudiums in Mathematik abgeleitet werden können.

Zur Milderung der Diskontinuitäten wurden schon einige Konzepte entwickelt, teilweise ganz neue Veranstaltungen, teilweise Ergänzungen zu bestehenden Vorlesungen. Am Anfang des Studiums angesiedelt und damit eher die erste Diskontinuität betreffend sind beispielsweise die Schnittstellenmodule und -aufgaben von Bauer und Partheil (2009) und Bauer (2013), der Kurs zum Problemlösen und Beweisen von Grieser (2016), die Hildesheimer Mathehütte von Wiljes, Hamann und Schmidt-Thieme (2016) sowie die Ergänzungen zu den Grundvorlesungen von Nagel, Quiring, Deiser und Reiss (2016). Zur Schwächung der zweiten Diskontinuität finden sich weniger Vorschläge (Gueudet u. a. 2016, S. 15). Zu nennen wäre hier beispielsweise die Vorlesung „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ von Klein (1908) (vgl. Gueudet u. a. 2016, S. 15) und der Einsatz von Unterrichtsmomenten als Lernanlässe von Prediger (2013). Für beide Diskontinuitäten, besonders aber für die zweite, bedarf es weiterer Konzepte zur Milderung der Diskontinuität. Auch eine breitere Verwendung der schon entwickelten Konzepte wäre zu begrüßen.

Zwischen den beiden Übergängen verbringen die StudentInnen mehrere Jahre an der Universität. Für diese Zeit haben verschiedene Akteure verschiedene Wünsche, Vorschläge oder Forderungen, was LehramtsstudentInnen im Studium lernen sollten und wie das Studium dazu aufgebaut sein sollte. Schon erwähnt wurde der Wunsch vieler StudentInnen nach mehr Praxis, der der Studie von Wenzl, Wernet und Kollmer (2018) zufolge jedoch meist nicht auf tragfähigen Vorstellungen, wie diese Praxis aussehen könnte, basiert. Der allgemeine Praxiswunsch kann daher kaum die Grundlage der Konzeption einer neuen Veranstaltung bilden. Konkretere Vorschläge finden sich in der Literatur. Beispielsweise gibt Hefendehl-Hebeker (2013, S. 12-13) eine Liste von „Wunschvorstellungen“ an, was angehende Lehrkräfte am Ende ihres Studiums idealerweise haben oder können sollten. Ähnliche Wünsche finden sich auch bei anderen AutorInnen.

- Mathematisches Interesse: Interesse am eigenen Fach ist notwendig, um SchülerInnen für das Fach begeistern zu können (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 12). Das Studium sollte vorhandene Begeisterung nutzen und verstärken, statt sie zu dämpfen (Grieser 2016, S. 664).

- Mathematische Stilsicherheit: LehrerInnen sollten für ihre SchülerInnen ein Vorbild sein, wie mathematische Aussagen und Argumentationen strukturiert, formuliert und notiert werden sollten (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 13).

- Ästhetisches Gefühl: „Dazu gehört das Fasziniert-Sein von der Vollkommenheit und Schönheit mathematischer Muster und Strukturen, dem inneren Zusammenhang der Teildisziplinen und der Eleganz von Schlüssen und Beweisen“ (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 13).

- Bewusstsein für Stufen der Strenge und der Abstraktion: Viele Themen können für Lernende auf verschiedenen Stufen der kognitiven Entwicklung und mit unterschiedlichem Vorwissen gewinnbringend unterrichtet werden. Dazu benötigen die LehrerInnen ein Bewusstsein dafür, wie das Thema mehr oder weniger abstrakt und mehr oder weniger formal behandelt werden kann (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 13).

- Bewusstsein für das Werden des Wissens: Jedes mathematische Thema durchläuft eine Entwicklung von ersten, intuitiven Ideen bis zu einer exakten Formulierung und Beschreibung. Eine solche Entwicklung findet auch im individuellen Lernprozess statt. LehrerInnen brauchen ein Bewusstsein dafür, um Ideen der SchülerInnen mit „Interesse und Wertschätzung“ begegnen zu können (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 13) und um Begriffsbildungsprozesse angemessen unterstützen zu können (Körner 2015, S. 207). Es ist dazu keineswegs nötig, dass die StudentInnen alle schon bekannten mathematischen Tatsachen noch einmal erfinden. Es ist jedoch kritisch, wenn sie die Wissenschaft nicht als Prozess wahrnehmen können und nicht „in den Zustand der kritischen Auseinandersetzung gebracht werden“ (Link und Schnieder 2016, S. 163).

- Bewusstsein von der Rolle, die Mathematik heute in der Welt spielt: LehrerInnen sollten Kenntnisse über einige der vielfältigen Anwendungen der Mathematik in den Natur- und Ingenieurwissenschaften haben und in den Unterricht einfließen lassen (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 13).

- Eine reichhaltige Wissensbasis: Um „gute und beziehungsreiche Aufgaben“ einsetzen und ggf. auch entwickeln zu können, brauchen LehrerInnen ein reichhaltiges Wissen, dass über den Schulstoff hinausgeht (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 13). Zum Fachwissen gehören dabei auch präformale Vorstellungen und wie diese verallgemeinert und formalisiert werden können (Körner 2015) (siehe auch „Bewusstsein für Stufen der Strenge und der Abstraktion“).

Das Bewusstsein für die Stufen der Strenge und Abstraktion und das Bewusstsein für das Werden des Wissens hängen eng zusammen mit einem Verständnis dafür, „wie mathematische Wissensbildung geschieht“ (Danckwerts, Prediger und Vasarhelyi 2004, S. 1) und wie dies im Unterricht umgesetzt werden kann (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 5). Beutelspacher u. a. (2011) benennen drei weitere Wunschvorstellungen. Zum einen sollten angehende LehrerInnen ein gültiges Bild von Mathematik haben (S. 2). Dazu gehört eine prozessorientierte Sicht auf die Mathematik (S. 25), die auch die historische Entwicklung der Mathematik im Blick hat (vgl. „Bewusstsein für das Werden des Wissens“) (Körner 2015, S. 207), und ein Verständnis von Mathematik als diskursiver Wissenschaft (Beutelspacher u. a. 2011, S. 18+151). Die angehenden LehrerInnen sollen außerdem den Bildungswert der Mathematik ermessen können (Beutelspacher u. a. 2011, S. 200), um Unterrichtsziele bestimmen und begründen zu können. LehramtsstudentInnen sollten außerdem lernen, über Mathematik zu sprechen, da dies zentral ist für das Lernen und Betreiben von Mathematik (Beutelspacher u. a. 2011, S. 17). Grieser (2016, S. 662) betont außerdem, dass LehramtsstudentInnen auch die kreative Seite der Mathematik kennen lernen sollten, um SchülerInnen später beim Entdecken von

Mathematik kompetent begleiten zu können. Dazu gehören auch Erfahrungen mit Begriffsbildungsprozessen. Das Begriffsbilden ist ein wesentlicher Teil des mathematischen Arbeitens und Lernens (Büchter und Leuders 2005, S. 60), ohne den StudentInnen nur schwer ein adäquates Bild von der Mathematik entwickeln können.

Ein wiederkehrender Vorschlag, wie mehrere dieser Wunschvorstellungen erreicht werden können, ist, die LehramtsstudentInnen erleben zu lassen, was sie später umsetzen sollen (z. B. Smith 2007). Nach Danckwerts, Prediger und Vasarhelyi (2004, S. 1) besteht guter Mathematikunterricht aus einer ausbalancierten Mischung von Instruktion und eigenaktiven Phasen. Das Fachstudium sollte die Möglichkeit bieten, verschiedene Lehrweisen selbst zu erleben (Buchholtz und Kaiser 2017). Das eröffnet auch die Möglichkeit, den eigenen Lernprozess zu reflektieren und sich bewusst zu werden, wie das Lernen von Mathematik geschieht. Heuristische Fähigkeiten und Beispiele für aktiv-entdeckendes Lernen können LehramtsstudentInnen in Modellierungs- oder Problemlöseseminaren erwerben bzw. kennen lernen.

Auch um ein angemessenes Bild von Mathematik zu entwickeln und die kreative Seite der Mathematik kennen zu lernen, werden Lehrveranstaltungen vorgeschlagen, in denen die StudentInnen am Prozess der Entwicklung von Mathematik beteiligt sind, beispielsweise von Grieser (2016), und vgl. Körner (2015), Beutelspacher u. a. (2011, S. 188). Während solcher Lehrveranstaltungen kann es auch gelingen, „die Lehramtsstudierenden als Teilnehmer an der ‚scientific community‘ zu adressieren“ (Wenzl, Wernet und Kollmer 2018, S. 90) und so in den „universitären Handlungsraum“ (Wenzl, Wernet und Kollmer 2018, S. 90) zu integrieren.

Verbindungen von Schulmathematik und Mathematik als Wissenschaft sowie von Fachdidaktik und Fachwissenschaft knüpfen die StudentInnen kaum von selbst und müssen daher in Lehrveranstaltungen explizit thematisiert werden (Bauer und Partheil 2009, S. 88). Dies schließt die Verknüpfung formaler Formulierungen mit präformalen Vorstellungen ebenso ein wie auch das Bereitstellen von Veranstaltungen, die relevantes Hintergrundwissen für schulische Inhalte behandeln (auch zu Themen, die nicht standardmäßig in den Grundvorlesungen behandelt werden) (Körner 2015).

2.1.1. Ziele des Seminars

Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ kann zu mehreren der genannten Punkte einen Beitrag leisten. Da das Seminar in der zweiten Hälfte des Studiums angesiedelt ist, kann es mehr zur Verringerung der zweiten als der ersten Diskontinuität beitragen. Zu doppelten Diskontinuität tragen die unterschiedlichen Normen in Schule und Hochschule bei. Daher soll eine Verringerung der Diskontinuität dadurch erreicht werden, dass im Seminar andere Normen etabliert werden als in traditionellen Veranstaltungen. Beispielsweise werden im Seminar mathematische Konzepte aus anschaulichen Ideen heraus entwickelt. Dies schafft eine Verbindung zwischen dem Gebrauch von Alltagssprache wie in der Schule und den an der Universität üblichen formalen, logisch präzisen Aussagen.

Auch auf der Ebene der Argumentation ergibt sich eine solche Verbindung, da sich die StudentInnen beim Entwickeln der Konzepte häufig zunächst Beispiele anschauen, aus denen sie dann Hypothesen ableiten oder die sie verallgemeinern. Es wird hier also kein deduktiv-axiomatischer Zugang verfolgt, sondern ein empirisch-praktischer. Dabei spielen auch die Hands-on-Materialien und Zeichnungen der StudentInnen eine große Rolle, sodass die StudentInnen erleben können, wie hilfreich Visualisierungen sein können und dass sie in der Mathematik keineswegs „verboten“ sind (siehe auch Abschnitt 2.2.1, vgl. Körner (2015)). Das eigenständige Entwickeln von Konzepten lässt die StudentInnen außerdem eine Möglichkeit zur Einführung neuer Begriffe erleben: Statt von der formalen Definition auszugehen und einzelne Beispiele anzuschließen, werden Definitionen im Seminar aus der Anschauung heraus entwickelt.

Einige Seminarthemen, besonders „Krümmung ebener Kurven“ und „Rotationsflächen“, schließen direkt an schulische Inhalte an und sollten zum Hintergrundwissen von LehrerInnen gehören (vgl. Körner 2015). Um die inhaltlichen Verbindungen deutlicher werden zu lassen und eine Reflexion des methodischen Vorgehens im Hinblick auf eine Übertragung in den Schulunterricht anzuregen, wurde in die letzte Seminarstunde eine Lehrerin eingeladen, die von ihren Erfahrungen berichtete und der die StudentInnen Fragen stellen konnten.

Mit dem Seminar werden auch manche der „Wunschvorstellungen“ aufgegriffen. Zum Erreichen einiger der Wunschvorstellungen wird vorgeschlagen, die LehramtsstudentInnen entsprechende Erfahrungen machen zu lassen. Im Seminar soll dies dadurch erreicht werden, dass die StudentInnen selbst mathematische Konzepte entwickeln. Dies soll zu einem Bewusstsein für das Werden des Wissens beitragen: In ihren Gruppen können sie beobachten, wie nach und nach eine mathematische Definition entsteht und ggf. zu einer leichter handhabbaren Formel weiterentwickelt wird. Zur Vorbereitung des Vortrags oder Skriptbeitrages müssen sie ihren Weg reflektieren, um die Argumentationsstruktur und die Darstellung an die Normen der universitären Mathematik anpassen. Die StudentInnen erleben also an sich selbst, wie mathematische Begriffe entstehen können und wie sie sich von anschaulichen Ideen zu formalen Definitionen entwickeln.

Dabei „durchlaufen die Studierenden einen aus fünf Phasen bestehenden Begriffsbildungsprozess, wie ihn Büchter und Leuders (2005) modellieren. Die Studierenden sammeln an den praktischen Stationen Erfahrungen (erste Phase), die ihre ‚Vorerfahrungen einschließen‘ und ‚den Boden für die Begriffsbildung bereiten‘ (ibid., S. 64). Das Arbeitsblatt hilft in der zweiten Phase, nämlich beim Strukturieren der Beobachtungen und beim Präzisieren der Intuition und der Lösungsideen. Dies geht fließend über in die dritte Phase, in der Krümmung noch mit deutlichem Bezug zu den anschaulichen Ideen definiert wird [...]. Diese Definition wird zur Herleitung einer handlicheren Formel für die Krümmung verwendet, die wiederum an einigen Beispielen daraufhin überprüft wird, ob sie die Erwartungen aus vorherigen Überlegungen erfüllt. Dies gehört zur vierten Phase. Durch die Präsentationen der KommilitonInnen können die Studierenden ihren eigenen Zugang mit den anderen vergleichen, etwa welcher Zugang welche Schwierigkeiten und Vorteile hat, wie praktikabel die Ergebnisse sind (nur für Graphen oder nur für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven einsetzbar?) und wie die Zugänge zusammenhängen. Außerdem tauchen weiterführende Fragen auf, etwa wie die Ergebnisse für Raumkurven oder Flächen weiterverwendet werden können (fünfte Phase).“ (Hilken 2020, S. 33)

Beim Erarbeiten der Konzepte soll den StudentInnen auch bewusst werden, dass in Mathematik Kreativität eine wichtige Rolle spielt, gerade bei Definitionen, durch die gewissermaßen etwas Neues erschaffen wird. Indem die StudentInnen (wie beschrieben) Begriffe zunächst anschaulich erarbeiten und dann in eine formale Formulierung überführen, können sie ihr Bewusstsein für verschiedene Stufen der Strenge und Abstraktion stärken. Beispielsweise kann man das Konzept der Krümmung ebener Kurven anschaulich mit Hilfe von Schmiegekreisen verstehen, ohne eine konkrete Berechnungsmethode zu kennen. Expliziter thematisiert wurden Stufen der Strenge und Abstraktion im Gespräch mit der Lehrerin in der letzten Seminarstunde. Diese berichtete davon, welche der Seminarthemen sie schon mit SchülerInnen behandelt hatte und wie konkret oder formal sie dabei vorgegangen war.

Durch das Seminar soll auch das Bild der StudentInnen von Mathematik verändert werden. Die Überzeugungen, dass Mathematik ein Prozess ist und eine kreative und eine empirische Seite hat, sollen verstärkt werden. Dies soll durch die im Vergleich zu traditionellen Lehrveranstaltungen veränderten Normen erreicht werden. Siehe zu dieser Thematik Kapitel 3. Durch die Gruppenarbeit und die Präsentationen müssen die StudentInnen außerdem viel über Mathematik sprechen, müssen argumentieren und zuhören. So können sie Mathematik als diskursive Wissenschaft erleben.

Das Seminar soll zudem zu einer reichhaltigen Wissensbasis beitragen. Zum einen lernen die StudentInnen neue Inhalte, von denen viele einen Bezug zur Schulmathematik haben (siehe oben). Zum anderen wiederholen die StudentInnen für ihre Ausarbeitungen viele Inhalte aus den Grundvorlesungen und wenden sie in einem neuen Kontext an. Dadurch können sie ihr Wissensnetz um neue Verknüpfungen erweitern, beispielsweise Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis (siehe dazu Kapitel 4).

Zu den Skriptbeiträgen, die die StudentInnen über ihre Ergebnisse schreiben, erhalten sie Rückmeldungen beispielsweise dazu, wo ein ausformulierter Satz angebrachter wäre als eine symbolische Formulierung. Dadurch kann ihre mathematische Stilsicherheit verbessert werden.

Das Seminar hat also das Potenzial, zu einigen der Wunschvorstellungen etwas beizutragen. Die folgenden Aspekte standen für uns bei der Konzeption und Durchführung im Vordergrund (vgl. Cederbaum und Hilken 2021):

- Die StudentInnen sollen die neuen mathematischen Inhalte, Konzepte und Objekte kennen lernen, verstehen und mit ihnen umzugehen lernen.
- Die StudentInnen sollen „verstehen, wie Mathematik entsteht und dass dies ein kreativer Prozess ist.“ (Cederbaum und Hilken 2021)
- Die StudentInnen sollen erfahren, dass sie selbst mathematische Ideen entwickeln und ausarbeiten können.
- Die StudentInnen sollen üben, anschauliche Ideen mathematisch zu modellieren.
- Die StudentInnen „sollen die erlebte Unterrichtsmethode sowohl im Hinblick auf die eigene Lernerfahrung als auch im Hinblick auf den möglichen Einsatz in der Schule“ (Cederbaum und Hilken 2021) reflektieren.
- Die prozessorientierten Überzeugungen der StudentInnen zu Mathematik sollen gestärkt werden.

Inwieweit das letztgenannte Ziel erreicht werden konnte, wurde in einer Studie untersucht, siehe Kapitel 3. Inwieweit die übrigen Ziele erreicht werden konnten, wurde nicht systematisch untersucht. Die schriftlichen Reflexionen der StudentInnen geben jedoch einige Hinweise. Die StudentInnen scheinen erlebt zu haben, dass sie selbst mathematische Konzepte entwickeln können, da die meisten von ihnen „wir“ verwenden, wenn sie in der Reflexion über die Vorgehensweise ihrer Gruppe schreiben. Siehe dazu auch die Kategorie „Selber finden“ in Abschnitt 4.4. Manche StudentInnen schreiben explizit, dass sie sich nun besser vorstellen können, wie man mathematisch forscht. Diese StudentInnen scheinen also etwas darüber gelernt zu haben, wie Mathematik entsteht. Das Modellieren wurde durch die Themenwahl und die Aufgabenstellungen von den StudentInnen gefordert. Ob die StudentInnen die mathematischen Inhalte und das Modellieren in diesem Seminar besser lernen als in einem klassischen Seminar oder einer Vorlesung, könnte in einer zukünftigen Studie untersucht werden. Zum Reflektieren der Unterrichtsmethode werden die StudentInnen durch die schriftlichen Reflexionsaufgaben angeregt und durch ein Gespräch mit einer Lehrerin in der letzten Seminarstunde.

Das Seminar basiert auf einem von Carla Cederbaum für die Deutsche SchülerAkademie 2008 entwickelten Kurs. Zum Thema der Krümmung ebener Kurven wurde Material von jenem Kurs übernommen. Bei den weiteren Themen waren größere Änderungen und Neuentwicklungen nötig, da die StudentInnen durch ihr Mathematikstudium ein größeres Vorwissen hatten als die Schüler der Deutschen SchülerAkademie.

2.2. Kernelemente des Seminars

Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ enthält einige Elemente, die in klassischen Mathematikseminaren oder -vorlesungen kaum eine Rolle spielen: Die StudentInnen arbeiten in Gruppen zusammen, bekommen Hands-on-Materialien zur Verfügung gestellt und müssen mathematische Konzepte selbst entwickeln (forschungsähnliches Lernen). Wie in klassischen Seminaren müssen sie zudem einen Vortrag halten und schriftliche Ausarbeitungen (Skriptbeiträge) der Themen erstellen. Im Unterschied zu den klassischen literaturbasierten Seminaren müssen sich die StudentInnen in diesem Seminar die Struktur des Vortrags bzw. der Skriptbeiträge vollständig selbst überlegen. Die Skriptbeiträge fallen zudem länger aus als das übliche Handout in Seminaren.

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die Kernelemente Hands-on-Materialien, forschungsähnliches Lernen und Gruppenarbeit gegeben.[1]

2.2.1. Hands-on-Materialien

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ werden bei jedem Thema Hands-on-Materialien verwendet oder Hands-on-Aktivitäten durchgeführt. Als Hands-on-Materialien werden im Folgenden konkrete Objekte verstanden, die der Anschauung dienen, beispielsweise Wasserbälle oder gehäkelte Tori, oder Materialien, mit denen je nach Bedarf Objekte erstellt werden können, beispielsweise Draht und Pappe. Hands-on-Aktivitäten sind Handlungen mit konkreten Objekten, beispielsweise Fahrradfahren. „Hands-on“ ist hier also enger gefasst als die mögliche Übersetzung des englischen Begriffs mit „praxisnah“.

Im Folgenden wird ein Überblick über einige Aspekte im Zusammenhang mit Hands-on-Materialien gegeben. Dieser Überblick erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und stellt kein systematisches Review und keine Meta-Analyse dar.

Der Verwendung von Hands-on-Materialien (engl. *concrete manipulatives*) werden verschiedene positive Effekte zugeschrieben. Ein Effekt ist, dass Hands-on-Materialien wie andere externe Repräsentationen dazu beitragen können, die kognitive Belastung (engl. *cognitive load*) zu verringern (Kirsh 2010; Pouw, Gog und Paas 2014). Das heißt, man muss sich nicht alles merken, sondern kann bestimmte Informationen in Gegenständen oder mit Notizen „speichern“ und bei Bedarf wieder abrufen. Menschen machen von dieser Strategie natürlicherweise Gebrauch, wenn das Abrufen der Informationen aus den externen Repräsentationen ausreichend einfach ist (Pouw, Gog und Paas 2014, S. 54). Hands-on-Materialien können dabei besonders in Situationen, in denen räumliches Denken erforderlich ist, hilfreich sein, wie beispielsweise Stull, Hegarty, Dixon und Stieff (2012) in Bezug auf das Zeichnen von Molekülen zeigten.

Nach Kirsh (2010) hilft die Interaktion mit externen Repräsentationen noch aus weiteren Gründen. Beispielsweise können die natürlichen Beschränkungen der realen Welt auf relevante Punkte aufmerksam machen. Ebenso macht es eine externe Repräsentation möglich,

[1] Dies ist eine ausführlichere Version der entsprechenden Abschnitte in Cederbaum und Hilken (2021).

Gedankenobjekte zwischen verschiedenen Menschen auszutauschen, da die externe Repräsentation eine gemeinsame Referenz darstellt. Auch Ryve, Nilsson und Pettersson (2013, S. 511) ziehen aus ihrer Untersuchung den Schluss, dass visuelle Vermittler für eine effektive Kommunikation in einer Gruppe wichtig sind. Visuelle Vermittler können Zeichnungen, Geschriebenes oder eben Hands-on-Materialien sein.

Diese Aspekte lassen sich am Beispiel der Helix verdeutlichen. Ohne externe Repräsentation erscheint es manchen StudentInnen als möglich, dass um einen Punkt herum ein Stück der Helix in einer Ebene liegt. Mit einer Helix aus Draht als externer Repräsentation vor Augen und mit einem Stück Pappe als Ebene kommen sie dieser Fehlvorstellung selbst auf die Spur. Mit Hilfe der externen Repräsentation lassen sich außerdem Fragen mit anderen leichter diskutieren, da konkrete Punkte auf der Helix abgesprochen werden können und alle die Lage der Pappebene sehen und verändern können. Ohne eine externe Repräsentation müsste dies alles mit Worten beschrieben werden, was ungleich schwieriger wäre. Aus diesen Beispielen ist auch ersichtlich, dass im Fall der elementaren Differentialgeometrie Hands-on-Materialien oft nützlichere Repräsentationen sind als Zeichnungen, da Zeichnungen zu vielen Beschränkungen unterliegen. In einer gezeichneten Helix sind mangels einer dritten Raumdimension nicht alle relevanten Eigenschaften einer Helix repräsentiert. Dadurch gibt eine Zeichnung keine Hinweise für die Frage, ob ein Stück der Helix in einer Ebene liegt. Auch die Verständigung wird durch eine Zeichnung nicht in gleichem Maße erleichtert wie durch Hands-on-Materialien, da etwa die Spannvektoren von Ebenen nicht eindeutig zu zeichnen sind.

Hands-on-Materialien können das Lernen außerdem dadurch unterstützen, dass sie einen Kontext bieten, in dem Wissen über die reale Welt aktiviert wird (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014, S. 10). Besonders wenn die Lernenden noch wenig über den Lerngegenstand wissen, können Hands-on-Materialien, über die Alltagswissen vorhanden ist, als Ausgangspunkt dienen, um abstraktes Wissen zu konstruieren (Carbonneau, Marley und Selig 2013, S. 381). Dadurch, dass Hands-on-Materialien zu physischen oder gedanklichen Handlungen anregen, können sie die Merkfähigkeit und auch das Verständnis unterstützen (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014, S. 10). Durch die physischen Handlungen kann das Wissen nämlich auf zwei Arten gespeichert werden: im verbalen und im nonverbalen Gedächtnis. Beim Abrufen der verbalen Informationen werden die nonverbalen ebenfalls aktiviert und umgekehrt (Carbonneau, Marley und Selig 2013, S. 382).

Solche Zusammenhänge zwischen physischen Aktivitäten und dem Lernen werden im Rahmen der Theorie zur *embodied cognition* erforscht. Eine Grundannahme dieser Theorie ist, dass alles Denken, Wahrnehmen und Erkennen mit dem Körper und seinen Bewegungen und Bewegungsmöglichkeiten zusammenhängt (Foglia und Wilson 2013, S. 1). Es erscheint daher sinnvoll, beim Lernen passende Bewegungen und Objekte einzusetzen (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014, S. 13). Aus den Ergebnissen der bisherigen Forschung zu *embodied cognition* lassen sich jedoch noch keine klaren Designprinzipien ableiten, anhand derer Lernumgebungen in Bezug auf *embodied cognition* optimiert werden könnten (Pouw, Gog und Paas 2014, S. 67).

Wann und wie Hands-on-Materialien das Lernen in Bezug auf Wissenserwerb und Konzeptverständnis, Problemlösefähigkeiten und Transfer verbessern, ist noch nicht vollständig erforscht. Insgesamt scheinen Hands-on-Materialien jedoch einen eher positiven Effekt zu haben (Carbonneau, Marley und Selig 2013), wenn man sie mit der Verwendung von nur abstrakten Symbolen vergleicht.

Zudem haben sich einige Faktoren herauskristallisiert, die die Wirksamkeit von Hands-on-Materialien beeinflussen.

Ein Faktor ist der Detailreichtum oder die Menge an Oberflächeninformationen (*perceptual richness*), den bzw. die das Material enthält. Zu viele Oberflächeninformationen können das Lernen behindern (Carbonneau, Marley und Selig 2013, S. 395), indem sie vom eigentlichen Lernziel ablenken, beispielsweise weil sie nicht zielführende Kontexte aktivieren können (Brown, McNeil und Glenberg 2009, S. 160-161). Detailreichtum muss aber nicht hinderlich sein (Pouw, Gog und Paas 2014, S. 59). Wenn er zum Lernziel passt, ist er unter Umständen sogar förderlich. Carbonneau, Marley und Selig (2013, S. 59) fanden eine leicht positive Korrelation zwischen Detailreichtum und Transfer von Gelerntem.

Ein weiterer Faktor ist, wie stark das Lernen mit den Hands-on-Materialien angeleitet und vorgegeben wird. Vom bloßen Zur-Verfügung-Stellen der Materialien ohne Anleitung bis zur genauen Vorgabe der mit den Materialien auszuführenden Handlungen sind viele Varianten möglich. Die beiden Extreme wirken sich nicht positiv auf den Lernerfolg aus (Brown, McNeil und Glenberg 2009, S. 161-162); stattdessen ist ein gewisses Mittelmaß sinnvoll. Carbonneau, Marley und Selig (2013) stellten fest, dass mehr Anleitung tendenziell die Problemlösefähigkeiten stärkt und die langfristige Speicherung der Lerninhalte begünstigt, während weniger Anleitung eher den Transfer unterstützt. Sie erklären dies damit, dass mehr Anleitung die Aufmerksamkeit verstärkt auf die relevanten Aspekte der Hands-on-Materialien lenkt und hilft, diese zu ordnen, während weniger Anleitung dazu beiträgt, dass Lernende eigene Interpretationen entwickeln. Die optimale Menge an Anleitung für eine konkrete Unterrichtssituation zu finden, heißt, ein „empfindliches Gleichgewicht“[2] zwischen den Kosten und Vorteilen von Struktur und Freiheit zu finden, je nach den Unterrichtszielen und den kognitiven und verhaltensbezogenen Stärken und Schwächen der Lernenden (Brown, McNeil und Glenberg 2009, S. 162). Dies ist eine Parallele zum forschungsähnlichen Lernen, siehe Abschnitt 2.2.2.

Neben der Menge der Anleitung spielt auch die Art derselben eine Rolle. Belenky und Nokes (2009) untersuchten auf dem Gebiet der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, ob StudentInnen mit Hands-on-Materialien besser lernen, wenn sie eine metakognitive Aufgabenstellung erhalten oder eine auf das Problem fokussierte Aufgabenstellung oder keines von beidem. Die metakognitive Aufgabenstellung korrelierte mit besseren Lernergebnissen als Hands-on-Materialien mit auf das Problem fokussierter oder ohne Aufgabenstellung (Belenky und Nokes 2009, S. 122).

Brown, McNeil und Glenberg (2009, S. 162-163) weisen außerdem darauf hin, dass die Lehrkraft die Verbindungen zwischen den Hands-on-Materialien und den abstrakten Repräsentationen klar herausstellen muss, da Lernende diese Verbindungen oft nicht von alleine wahrnehmen.

Die EIS-Methode

Eine verbreitete Methode, bei der Hands-on-Materialien bewusst eingesetzt werden, ist die EIS-Methode oder *concreteness fading*. EIS steht dabei für enaktiv, ikonisch und symbolisch und beschreibt die jeweils verwendeten Lernmittel (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014). In der enaktiven Phase werden konkrete, anfassbare Materialien verwendet, mit denen sich der Lerninhalt darstellen lässt. In der ikonischen Phase werden bildliche Darstellungen verwendet, um den Lernprozess zu unterstützen. In der symbolischen Phase werden schließlich abstrakte Darstellungen verwendet. So kann beispielsweise eine Helix zunächst aus Draht gebastelt oder im Gewinde einer Schraube erkannt werden, dann auf Papier gezeichnet und

[2] „Overall, educators need to strike a delicate balance by weighing the costs and benefits of structure versus freedom depending on both the goals of their lessons and the cognitive and behavioral strengths and weaknesses of their students.“ (Brown, McNeil und Glenberg 2009, S. 162)

schließlich parametrisch definiert werden. Die Theorie geht zurück auf Bruner (1966).

Nach Fyfe, McNeil, Son und Goldstone (2014, S. 9-10) sollen bei EIS konkrete und abstrakte Materialien nicht ausschließend gegenübergestellt werden, sondern die Vorteile von beiden genutzt und die jeweiligen Nachteile dadurch ausgeglichen werden. Zu den konkreten Materialien gehören insbesondere Hands-on-Materialien. Fyfe, McNeil, Son und Goldstone (2014) nennen vier Vorteile von konkreten Materialien (die im vorhergehenden Text schon erwähnt wurden). Zum einen kann durch konkrete Materialien Wissen über die reale Welt aktiviert werden. Zum anderen können konkrete Materialien das Erinnerungsvermögen und das Verständnis verbessern. Zum dritten können Lernende durch konkrete Materialien eigenes Wissen konstruieren und zum vierten können durch konkrete Materialien bestimmte Hirnregionen angeregt werden, etwa der große Bereich zur Verarbeitung visueller Informationen.

Nachteile konkreter Materialien sehen Fyfe, McNeil, Son und Goldstone (2014, S. 10) darin, dass Lernende möglicherweise durch irrelevante Details von den abstrakten Konzepten abgelenkt werden, die erlernt werden sollen. Außerdem können irrelevante Details konkreter Materialien nach Fyfe, McNeil, Son und Goldstone (2014) den Transfer behindern. Carbonneau, Marley und Selig (2013, S. 59) hingegen fanden eine leicht positive Korrelation zwischen Detailreichtum und Transfer von Gelerntem.

Diese Nachteile sollen bei der EIS-Methode durch die zusätzliche Verwendung von abstrakten Materialien ausgeglichen werden. Als Vorteile von abstrakten Materialien nennen Fyfe, McNeil, Son und Goldstone (2014, S. 10), dass sie besser generalisierbar und transferierbar seien und dass die Aufmerksamkeit der Lernenden dadurch mehr auf zugrundeliegende Strukturen gelenkt würde. Nachteile abstrakter Materialien sehen Fyfe, McNeil, Son und Goldstone (2014) darin, dass das Lösen von Problemen in abstrakter Form häufig ineffiziente Lösungswege hervorrufe, Gelerntes unflexibel angewendet würde, dass logische Fehler gemacht werden und dass sie die Manipulation von Symbolen ohne Verständnis fördern können.

Die Vorteile konkreter und abstrakter Materialien sollen bei der EIS-Methode einander ergänzend wirken. Die verschiedenen Repräsentationen in den drei Phasen sollen sich als gegenseitige Repräsentanten stützen. Die ikonische Phase ist dabei wichtig als Verbindung zwischen dem Konkreten der enaktiven Phase und dem Abstrakten der symbolischen Phase. Blieben die enaktive und die symbolische Phase getrennt von einander, würden sich ihre jeweiligen Vorteile weniger gut ergänzen. Durch konkrete Materialien können also Lernende eine Sammlung von Bildern aufbauen, die sie – vermittelt durch die ikonische Phase – beim Umgang mit abstrakten Symbolen unterstützend nutzen können (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014, S. 13). Die drei Phasen enaktiv-ikonisch-symbolisch verlaufen dabei in der EIS-Methode nicht parallel, sondern nacheinander. Dadurch soll eine Überforderung der Lernenden verhindert werden, die auftreten kann, wenn mehrere Repräsentationen gleichzeitig präsentiert oder angeboten werden (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014, S. 11).

Die EIS-Methode wurde in verschiedenen Varianten untersucht: mit nur einer oder zwei Phasen und mit unterschiedlichen Reihenfolgen der Phasen. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass alle drei Phasen zusammen in der Reihenfolge enaktiv-ikonisch-symbolisch am wirksamsten sind (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014; Fyfe, McNeil und Borjas 2015).

An der Trennung der Phasen gibt es allerdings auch Kritik. Francis, Khan und Davis (2016) beobachteten Kinder beim Programmieren von Robotern und stellten fest, dass häufig zwei oder sogar alle drei Stufen gleichzeitig auftraten. Eine mögliche Erklärung liegt darin, dass die EIS-Methode häufig im Zusammenhang mit eng umrissenen Aufgaben untersucht wird. Beispielsweise sollten die Kinder in der Studie von Fyfe, McNeil und Borjas (2015) lernen, Aufgaben mit dem Schema $a + b = a + \_\_$ zu lösen. In der Studie von Francis, Khan und Davis (2016) hingegen lernten die Kinder, Roboter im Raum zu steuern und gewisse Aufgaben ausführen zu lassen. Die Aufgaben und Lösungswege waren hier deutlich weniger klar vorgegeben als in der Studie von Fyfe, McNeil und Borjas (2015). Daraus lässt sich die Vermutung ableiten, dass in offeneren Lernumgebungen die drei Phasen natürlicherweise parallel und mit einander verwoben auftreten, in stärker vorgegebenen Lernumgebungen eine Trennung der Phasen jedoch hilfreich ist.

Umsetzung im Seminar

Die Forschung zum Einsatz von Hands-on-Materialien in der Mathematiklehre konzentriert sich auf SchülerInnen (z. B. Carbonneau, Marley und Selig 2013), häufig aus der Primarstufe (z. B. Fyfe, McNeil und Borjas 2015). Studien mit StudentInnen sind vereinzelt vorhanden (z. B. Belenky und Nokes 2009), kommen zum Teil aber aus anderen Fächern (z. B. Stull, Hegarty, Dixon und Stieff 2012, aus der Chemie). Eine Recherche in der Datenbank JSTOR und im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) ergab keine Artikel, die die Auswirkung von Hands-on-Materialien auf das Lernen von MathematikstudentInnen untersuchten.

Gesucht wurde mit den Begriffen „mathematics“ und entweder „concrete manipulatives“ oder „hands-on“ oder „physical manipulatives“ sowie entweder „tertiary education“ oder „higher education“. Bei den beiden Suchen in JSTOR mit „hands-on“ wurden die Ergebnisse anschließend mit dem angebotenen Filter „Mathematics“ gefiltert, um irrelevante Artikel auszuschließen. Bei JSTOR ergaben sich so insgesamt 187 Artikel, im ZDM 21, wobei manche Artikel mit mehreren Suchen gefunden wurden, hier also doppelt gezählt sind. Keiner der Artikel untersuchte die Auswirkung von Hands-on-Materialien auf das Lernen von MathematikstudentInnen. Zwei Artikel beschreiben eine Lehrveranstaltung mit Hands-on-Materialien an der Universität bzw. am College: Barger und McCoy (2009) berichten über einen Kurs am College für StudentInnen, die Mathematik nicht als Hauptfach studieren. Strømskag (2017) beschreibt eine Einheit in einer Veranstaltung für LehramtsstudentInnen im Master. In beiden Kursen geht es um mathematisch elementare Inhalte. Andere bei der Suche gefundene Artikel beschreiben den Einsatz digitaler Werkzeuge (z. B. Cory und Garofalo 2011) und wieder andere untersuchen den Einsatz von Hands-on-Materialien in anderen Fächern als Mathematik (z. B. Bruck 2016; Hadjiachilleos, Avraamidou und Papastavrou 2013).

Neben dem Alter der Zielgruppe unterscheidet sich auch die Art des Unterrichts und des Lernziels in vielen Studien von dem bzw. der im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“. In den Artikeln sollen die SchülerInnen häufig lernen, Aufgaben eines bestimmten Typs zu lösen, beispielsweise in der Studie von Fyfe, McNeil und Borjas (2015) Aufgaben mit dem Schema $a + b = a + \_\_$, oder es soll ein Konzept auf einem vorgegebenen Weg erlernt werden (Bruck 2016, z. B.).

Es ist daher empirisch nicht klar, welche der Ergebnisse sich auf ein Seminar mit forschungsähnlichem Lernen an der Universität übertragen lassen. Es lassen sich jedoch einige Vermutungen aufstellen.

Als ein möglicher Vorteil von Hands-on-Materialien wurde die Verringerung der kognitiven Belastung beim Lösen von Aufgaben beschrieben. Dieser Vorteil erscheint auch für StudentInnen plausibel, gerade im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“, in dem wie in der Studie von Stull, Hegarty, Dixon und Stieff (2012) viel räumliches Vorstellungsvermögen gefragt ist. Beispielsweise dürfte es das Vorstellungsvermögen und Arbeitsgedächtnis der meisten StudentInnen überfordern, sich eine (gekrümmte) Fläche und verschiedene Schnitte derselben mit Normalenebenen vorzustellen.

Auch die von Kirsh (2010) und Ryve, Nilsson und Pettersson (2013) genannten Vorteile (nützliche Beschränkungen durch die reale Welt, Austausch von Gedankenobjekten, Unterstützung der Kommunikation in der Gruppe) erscheinen für die TeilnehmerInnen des Seminars plausibel, wie schon oben an einem Beispiel verdeutlicht wurde. Die im Seminar gemachten (unsystematischen) Beobachtungen unterstützen diese Vermutung.

Dass Hands-on-Materialien einen Kontext bieten können, in dem Lernende auf Wissen aus der realen Welt zurückgreifen können (Fyfe, McNeil, Son und Goldstone 2014), erscheint für das Seminar ebenfalls schlüssig, da bei allen Themen (idealisierte) Objekte der realen Welt beschrieben werden. Beim Thema der Krümmung ebener Kurven kommen noch das Rollerfahren und das Ablaufen von Kurven hinzu. Beispielsweise sollte allen StudentInnen zumindest intuitiv klar sein, dass man, wenn man einen Kreis fahren möchte, den Lenkereinschlag konstant halten sollte, was mit der konstanten Krümmung von Kreisen zusammenhängt. Die Hands-on-Materialien können so einen hilfreichen Kontext herstellen und sollen bei den StudentInnen Ideen und Ansätze zur Bearbeitung der aufgeworfenen Fragen entstehen lassen.

Die Materialien, die im Seminar zur Verfügung gestellt werden, sind unterschiedlich detailreich. Einige Materialien sind eher detailarm wie Drähte und Pappen, andere haben mehr Details wie Wasserbälle mit Globusaufdruck oder sind haptisch detailreich wie die gehäkelten Flächen. Die Wasserbälle wurden mit Globusaufdruck statt einfarbig gewählt, um den StudentInnen bei den Themen Geodäten und Längen-, Flächen-, Winkeltreue zu helfen, nützliches Wissen aus der realen Welt zu aktivieren. Außerdem soll dadurch die Kommunikation in den Gruppen erleichtert werden: „Wenn wir von Berlin nach New York fliegen, welche Route nehmen wir da?“ Zudem lassen sich Routen auf Landkarten besser mit Routen auf einem Globus vergleichen als mit Routen auf einem einfarbigen Ball. Im Seminar werden also nicht nur detailarme Hands-on-Materialien verwendet, obwohl diese sich in einigen Studien als effektiver herausgestellt hatten, auch bei College-StudentInnen (Carbonneau, Wong und Borysenko 2020). Bei den Wasserbällen kann der detailreichtum wie beschrieben aber auch hilfreich sein. Zudem zeigten Carbonneau, Wong und Borysenko (2020), dass der Nachteil von detailreichen Hands-on-Materialien, dass die StudentInnen (in Einzelarbeit) weniger beharrlich arbeiteten, durch Gruppenarbeit ausgeglichen werden konnte. Da die SeminarteilnehmerInnen in Gruppen zusammenarbeiten, können eventuelle Nachteile durch den Detailreichtum mancher Materialien also möglicherweise durch die Gruppenarbeit ausgeglichen werden.

Der Umfang der Anleitung spielt vermutlich auch bei StudentInnen eine wichtige Rolle. Bei zu wenig Anleitung werden zur Verfügung gestellte Hands-on-Materialien möglicherweise nicht effektiv oder auch gar nicht genutzt, wie es bei einigen ProbandInnen von Stull, Hegarty, Dixon und Stieff (2012) der Fall war. Zu viel Anleitung ist, gerade wenn forschungsähnlich gelernt werden soll, kontraproduktiv, da die StudentInnen dann kaum gefordert sind, eigene Wege zu entwickeln (vgl. Abschnitt 2.2.2 zu forschungsähnlichem Lernen). Im Seminar wird beim ersten Thema durch das Arbeitsblatt mehr Anleitung zu den Hans-on-Materialien und -Aktivitäten gegeben als bei den folgenden Themen, denn beim ersten Thema sollen die StudentInnen mit der für sie ungewohnten Arbeitsweise vertraut gemacht werden. Bei den späteren Themen werden verschiedene Hands-on-Materialien zur Verfügung gestellt und teilweise in den Aufgabenstellungen angesprochen. Genauere Anweisungen zur Verwendung der Materialien fehlen jedoch meist. Sollten die StudentInnen nicht von sich aus zu hilfreichen Materialien greifen, können entsprechende Aufforderungen durch die DozentInnen in den Gruppenphasen mündlich erfolgen. Eine gewisse Menge an Anleitung ist somit stets vorhanden.[3]

Die Art der Anleitung als Faktor für die Wirksamkeit von Hands-on-Materialien wurde von Belenky und Nokes (2009) anhand von StudentInnen untersucht, sodass hier von einer Relevanz auszugehen ist. Im Seminar werden sowohl metakognitive als auch auf das Problem fokussierte Hinweise gegeben.

Zwei Studien mit StudentInnen machen auf einen weiteren Punkt aufmerksam. Belenky und Nokes (2009) fanden entgegen ihrer Erwartung keinen Zusammenhang zwischen dem angebotenen Material (Hands-on-, abstrakte oder keine Materialien) und damit, wie tief sich die StudentInnen nach eigener Einschätzung mit den Aufgaben beschäftigten. Die Autoren vermuten, dass die StudentInnen die Hands-on-Materialien nicht für nützlich hielten, obwohl sie die Aufgaben ohne die Hands-on-Materialien nicht vollständig lösen konnten.

Auch in der Studie von Stull, Hegarty, Dixon und Stieff (2012) nutzte nur ein Teil der StudentInnen das angebotene Hands-on-Material, je nach Versuchsaufbau 23% bis 54%. Auf Nachfrage gaben die StudentInnen verschiedene Erklärungen, warum sie das Material nicht genutzt hatten. Manche hielten das Material nicht für nützlich, andere meinten, sie bräuchten es nicht und wieder andere wollten sich nicht darauf verlassen, weil in der Klausur auch kein Hands-on-Material zur Verfügung stehen würde.

Diese beiden Studien deuten damit ein Problem an, das sich bei der Nutzung von Hands-on-Materialien in Lehrveranstaltungen für StudentInnen ergeben kann, nämlich dass die StudentInnen die Materialien als nicht hilfreich ansehen und gar nicht ausprobieren. Gerade im Mathematikstudium werden Hands-on-Materialien eher selten genutzt,[4] sodass die StudentInnen dies nicht gewohnt sind und möglicherweise als seltsam oder „unmathematisch" empfinden. Im Seminar wird dieser Problematik „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" dadurch begegnet, dass alle TeilnehmerInnen beim ersten Thema dazu angehalten werden, die Hands-on-Aktivitäten zu nutzen. Jede Gruppe muss jede der vier Stationen (siehe Abschnitt 2.4.1) absolvieren. Wenn die TeilnehmerInnen hierbei merken, dass die Hands-on-Aktivitäten hilfreich sind, greifen sie vermutlich auch bei den folgenden Themen eher zu den Hands-on-Materialien.

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" sollen StudentInnen ausgehend von konkreten Materialien und der Anschauung mathematische Begriffe entwickeln und formal präzise definieren. Grundsätzlich ist somit bei jedem Thema ein Ablauf gemäß der EIS-Methode zu beobachten: Die StudentInnen nutzen zunächst Hands-on-Materialien, um ein Grundverständnis und Ideen zu entwickeln, gehen über zu Zeichnungen und entwickeln schließlich formale Beschreibungen. Wie in der ebenfalls offen gestalteten Unterrichtsumgebung in der Studie von Francis, Khan und Davis (2016) ist jedoch zu vermuten, dass die StudentInnen auch im Seminar die Phasen nicht sequenziell durchlaufen, sondern dass die Phasen sich überschneiden, parallel verlaufen oder sich wiederholen. Gemäß Francis, Khan und Davis (2016, S. 18) ist dies jedoch nicht als negativ zu bewerten, sondern im Gegenteil sogar wünschenswert.

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" wurden bisher nur Hands-on-Materialien im wörtlichen Sinne zur Verfügung gestellt, keine virtuellen Objekte. Nur beim Thema „Längen-, Flächen- und Winkeltreue" kam ein Computerprogramm zur Darstel-

[3] Wir hoffen, auf diese Weise das „empfindliche Gleichgewicht" (Brown, McNeil und Glenberg 2009) einigermaßen zu treffen.

[4] Die Verwendung von Hands-on-Materialien und Anschauungsobjekten hat an Universitäten eine gewisse Tradition, wie verschiedene Sammlungen mathematischer Modelle zeigen (siehe z. B. Seidl, Loose und Bierende 2018). Solche Materialien kommen heute aber eher selten zum Einsatz. Ein paar moderne Bücher zur Differentialgeometrie bzw. Geometrie regen aber dazu an, Hands-on-Materialien zu erstellen und zu nutzen: Henderson und Taimina (2005), Henderson (2013) und Casey (1996).

lung verschiedener Projektionen der Erdoberfläche zum Einsatz. Die Einschränkung auf reale Objekte hat verschiedene Gründe. Zum einen können Objekte im dreidimensionalen Raum (Flächen und Raumkurven) auf Bildschirmen nur als Projektion dargestellt werden, was beispielsweise für die Verringerung der kognitiven Belastung kontraproduktiv sein könnte, da der Betrachter sich die dritte Dimension selbst hinzudenken muss. Zum anderen waren die Hands-on-Materialien leichter zu herzustellen bzw. zu beschaffen als entsprechende virtuelle Materialien. Zudem waren die Hands-on-Materialien auch leichter einzusetzen, da beispielsweise die Internetverbindung in den von uns genutzten Unterrichtsräumen nur schwach oder gar nicht vorhanden war.

Bei einer Weiterentwicklung des Seminars sollte dennoch das Potenzial virtueller Materialien bedacht und genutzt werden. Die TeilnehmerInnen des Seminars griffen an einigen Stellen von sich aus auf digitale Hilfsmittel wie Geogebra (2020) zurück, vor allem um ihre Ideen im Vortrag und Skript gut darstellen zu können. Digital können beispielsweise Schnitte von Flächen mit Ebenen besser dargestellt werden. Grenzübergänge wie etwa zum Schmiegekreis bei ebenen Kurven oder zur Schmiegeebene bei Raumkurven lassen sich gut dynamisch veranschaulichen. Weitere spannende Möglichkeiten bieten *virtual reality* und *augmented reality*, siehe beispielsweise Kaufmann (2009). Zu beachten ist gerade bei digitalen Hilfsmitteln, dass die Aufgaben offen bleiben und von den StudentInnen nicht erwartet wird, dass sie „erraten“ müssen, was der/die DozentIn möchte (vgl. Kollosche 2017, S. 221): Wenn beispielsweise eine Krümmungsfunktion digital implementiert ist, die die StudentInnen auf verschiedene Kurven anwenden sollen, um etwas über die Krümmung herauszufinden, dann ist es für sie mehr ein Nacherfinden und erraten, was schon jemand anders implementiert hat. Im Seminar hingegen ist das Ziel transparent und verständlich und beim Weg dorthin muss nichts erraten werden, sondern es kommt auf eigene Ideen an.

2.2.2. Forschungsähnliches Lernen

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ sollen die StudentInnen verstehen, wie Mathematik entsteht und dass dies ein kreativer Prozess ist. Sie sollen außerdem erfahren, dass sie selbst mathematische Konzepte entwickeln können. Deshalb wurde für das Seminar das forschungsähnliche Lernen als Methode gewählt.

Im Folgenden wird ein Überblick über einige Aspekte im Zusammenhang mit forschungsähnlichem Lernen gegeben. Dieser Überblick erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und stellt kein systematisches Review und keine Meta-Analyse dar.

Als forschungsähnliches Lernen wird im Folgenden eine Lernform bezeichnet, bei der die Lernenden mehrere für den (mathematischen) Forschungsprozess typische Phasen durchlaufen. Sie erhalten dabei Unterstützung von den DozentInnen.

Für das forschungsähnliche Lernen und verwandte Lernformen gibt es verschiedene Begriffe, die teilweise synonym gebraucht werden, teilweise aber auch sehr Unterschiedliches bezeichnen. Verwendete Begriffe sind unter anderem forschendes Lernen (Link und Schnieder 2016; Messner 2012), entdeckendes Lernen (Winter 1989), Nacherfindung unter Führung (Freudenthal 1979), *inquriy based learning* (Loyens und Rikers 2016) und *discovery learning* (Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum 2011). Eine etwas klarer umrissene Variante mit einigen Untervarianten wird Moore-Methode genannt (siehe Coppin, Mahavier, May und Parker 2009). Huber (2014) macht einen Vorschlag zur Differenzierung der Begriffe des forschungsbasierten, des forschungsorientierten und des forschenden Lernens. Alle drei Formen haben bei Huber einen Bezug zur aktuellen Forschung in der entsprechenden Disziplin.

Nach Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011) ist der Begriff *discovery learning* nicht klar definiert. Es kann sich beispielsweise um das Erkennen von Mustern, um das Hervorrufen von Erklärungen, um das Durcharbeiten von Manualen oder um das Durchführen von Simulationen handeln. Man könnte sagen, dass alles, was nicht „der üblichen Unterrichtsform“ entspricht, schon als *discovery learning* bezeichnet wurde. Loyens und Rikers (2016) weisen darauf hin, dass manchmal alle Formen schülerzentrierten Unterrichts als *inquiry based instruction* bezeichnet werden.

Für die vorliegende Arbeit wurde der Begriff des forschungsähnlichen Lernens gewählt. Dafür gibt es mehrere Gründe. Zum einen kommt in diesem Begriff besser als in manchen anderen das Ziel zum Ausdruck, dass die TeilnehmerInnen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ erfahren sollen, wie Mathematik entsteht, also wie in der Mathematik geforscht wird. Zum anderen basiert der Begriff anders als der des entdeckenden Lernens nicht auf dem problematischen platonischen Weltbild von Mathematik (vgl. Kollosche 2017, S. 218ff): Wenn mathematische Konzepte „entdeckt“ werden können oder sollen, müssen sie als von den Menschen unabhängige Wahrheiten existieren. Diese Vorstellung steht im Widerspruch zu konstruktivistischen Theorien zum Lernen von Mathematik.

Die Wahl des Begriffes des forschungsähnlichen gegenüber dem des forschenden Lernens lässt sich damit begründen, dass in Mathematik die StudentInnen (oder SchülerInnen) im Allgemeinen keine für die mathematische Gemeinschaft neuen Erkenntnisse entwickeln (Link und Schnieder 2016, S. 163).[5] Vielmehr geht es darum, die StudentInnen an den Forschungsprozess heranzuführen und sie entsprechende Fähigkeiten erwerben zu lassen (Link und Schnieder 2016, S. 163), auch wenn manche Aspekte von Forschung bei dieser Art des Lernens eventuell fehlen. Beispielsweise sind die TeilnehmerInnen des Seminars nicht völlig frei in der Wahl der Fragestellung.

Messner (2012, S. 338) modelliert den Prozess des forschenden Lernens mit fünf Schritten. Im ersten Schritt muss ein Problem gefunden und eine Frage formuliert werden. Diese Frage wird den Lernenden häufig vorgegeben. Im zweiten Schritt werden Lösungsansätze entwickelt und Hypothesen aufgestellt. Im dritten Schritt werden die Lösungsansätze auf ihre Tauglichkeit überprüft. Im vierten Schritt sollen die Lernenden ihre Lösungsansätze austauschen und mit einander diskutieren. Im fünften Schritt werden die Ergebnisse dokumentiert.

Mathematische Forschung und damit auch forschungsähnliches Lernen sind allerdings keine linearen Prozesse, wie diese Abfolge von Schritten suggerieren könnte. Vielmehr muss man immer wieder Rückschläge hinnehmen und mit Frustration umgehen können (Link und Schnieder 2016; Mason, Burton und Stacey 2008). Dementsprechend werden der zweite und dritte Schritt von Messner (2012) meist mehrfach durchlaufen.

Dem forschungsähnlichen Lernen werden verschiedene Vorteile gegenüber anderen Lernformen zugeschrieben, vor allem gegenüber Expositionslernen (Kollosche 2017). Einige dieser Vorteile sind die folgenden:

- Forschungsähnliches Lernen ist motivierender als andere Lernformen, da die Lernenden ihrer Neugier folgen können (Kollosche 2017, S. 213).

- Durch forschungsähnliches Lernen kann das erworbene Wissen besser auf neue Anwendungen übertragen werden (Kollosche 2017, S. 213).

- Inhalte, die Lernende selbst entwickeln, bleiben lange im Gedächtnis (Kollosche 2017, S. 213).

[5] Es kann aber durchaus vorkommen, vgl. Schoenfeld (2020, S. 1170).

- Die Lernenden können durch forschungsähnliches Lernen ein Problembewusstsein entwickeln, das heißt, sie erfahren, aus welchen Problemen heraus mathematische Theorien entstanden sind und wo dabei Schwierigkeiten liegen (Grieser 2015, S. 88).
- Die Lernenden bekommen ein adäquateres Bild von Mathematik, nehmen beispielsweise die kreative Seite der Mathematik wahr (Grieser 2015, S. 88).
- Forschungsähnliches Lernen fördert Fähigkeiten, die zum Forschen nötig sind (Link und Schnieder 2016, S. 164).

Forschungsähnliches Lernen bietet sich demnach an, um drei von Schoenfeld (2020, S. 1172-1173) hervorgehobenen Aspekten in Lehrveranstaltungen mehr Raum zu geben: Mathematik kann als Disziplin des Erkundens und der Sinnstiftung erlebbar gemacht werden, der Unterricht kann große Ideen thematisieren (da das Ziel immer wieder ins Auge gefasst und manchmal verändert werden muss) und das Denken der StudentInnen (oder SchülerInnen) kann in den Mittelpunkt gestellt werden.

Inwieweit forschungsähnliches Lernen und ähnliche Lernformen die oben beschriebenen Vorteile tatsächlich mit sich bringen und wie die Lernumgebung dazu gegebenenfalls ausgestaltet sein muss, ist noch Gegenstand der Forschung.

Ein wesentlicher Faktor, der die Wirksamkeit und den Charakter forschungsähnlichen Lernens beeinflusst, hat sich jedoch inzwischen herauskristallisiert: wie viel Anleitung die Lernenden erhalten, hat einen großen Einfluss darauf, was und wie viel sie lernen. Von keiner Anleitung bis hin zu vielen klaren Vorgaben ist dabei alles möglich. Bruder und Prescott (2013, S. 812) und Loyens und Rikers (2016, S. 409-410) teilen die verschiedenen Ausprägungen (von *inquiry based learning*) in drei Kategorien ein: Bei der strukturierten Untersuchung (*structured inquiry*) werden die zu lösende Frage oder das Problem und die Lösungsmethode vorgegeben. Bei der angeleiteten Untersuchung (*guided inquiry*) wird die Frage vorgegeben, aber einen Lösungsweg müssen die Lernenden selbst finden. Bei der offenen Untersuchung (*open inquiry*) müssen die Lernenden sich sowohl ein Problem als auch einen Lösungsweg selbst suchen.

Die Anleitung kann verschiedene Formen annehmen (Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum 2011; Kollosche 2017). Die Lehrkraft kann beispielsweise direkte, explizite Hinweise und Erklärungen geben, sie kann Rückmeldungen geben, Frustration vermindern oder das Potenzial von Lösungsansätzen beurteilen. Das zur Verfügung gestellte Material kann Lösungsbeispiele (engl. *worked examples*), Anregungen zum metakognitiven Denken oder strukturierende Elemente enthalten.

Wie viel Anleitung die Lernenden erhalten, wirkt sich auf ihren Lernerfolg aus. Erhalten die Lernenden wenig oder keine Anleitung, bleibt der Lernerfolg im Allgemeinen hinter den Erwartungen zurück (Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum 2011; Bruder und Prescott 2013; Kirschner, Sweller und Clark 2006). Wird forschungsähnliches oder entdeckendes Lernen mit einer gewissen Menge an Anleitung verbunden, wirkt sich dies positiv auf den Lernerfolg aus (Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum 2011; Bruder und Prescott 2013). Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011) untersuchten in einer Metaanalyse Studien zu verschiedenen Varianten von entdeckendem Lernen auf verschiedenen fachlichen Gebieten. Hierbei zeigte angeleitetes entdeckendes Lernen bessere Ergebnisse als unangeleitetes entdeckendes Lernen und auch bessere als direktes Lehren (S. 11). Loyens und Rikers (2016) vermuten ebenfalls einen positiven Effekt von *inquiry based learning*, halten allerdings die Datenlage bei dieser im Gegensatz zu Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011) enger umrissenen Variante von entdeckendem Lernen für zu gering für abschließende Folgerungen.

Von den von Loyens und Rikers (2016, S. 415-416) zitierten Studien fand eine keinen Effekt. In einer zweiten Studie nahm die Menge der Diskussionsbeiträge im Unterricht zu und in einer dritten Studie gab es einen positiven Effekt auf das konzeptuelle Verständnis und die Fähigkeiten im wissenschaftlichen Prozess. Mehrere von Hattie (2009, S. 208-210) einbezogene Metaanalysen zeigten ebenfalls positive Effekte, vor allem in Bezug auf Prozessfähigkeiten gegenüber der Zunahme an inhaltlichem Wissen. Sie zeigten auch, dass das kritische Denken gefördert werden kann.

Wie viel Anleitung für das Lernen von Vorteil ist, hängt gemäß Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011) auch mit dem Alter der Lernenden zusammen. Erwachsene scheinen von angeleitetem entdeckendem Lernen mehr zu profitieren als Kinder oder Jugendliche, während Jugendliche mehr von direkter Instruktion zu profitieren scheinen.

Am entdeckenden Lernen und ähnlichen Lernformen wie dem forschungsähnlichen Lernen gibt es auch Kritik. Kirschner, Sweller und Clark (2006, S. 77) weisen darauf hin, dass das Problemlösen viel Kapazität des Arbeitsgedächtnisses brauche, was das Lernen negativ beeinflussen könne. Wenn Lernende wenig Feedback erhalten, seien sie außerdem leicht frustriert und gingen zu viele Irrwege (ibid., S. 79). Ein weiterer Kritikpunkt ist, dass der Weg, auf dem Experten einer Disziplin neues Wissen schaffen (forschen), keineswegs der Weg sein muss, auf dem Novizen Wissen aus der Disziplin am besten erlernen können (ibid., S. 78). Hierbei wird jedoch nicht zwischen verschiedenen Lernzielen differenziert. Je nach dem, ob hauptsächlich inhaltliches Wissen erworben werden soll oder ob auch das Ausbilden von für das Forschen nötigen Fähigkeiten ein Lernziel ist, könnten verschiedene Lernformen zielführend sein. Wie könnten Novizen sonst je zu Experten werden, wenn nicht (auch) dadurch, dass sie das Forschen unter Anleitung üben? Die Frage nach den Lernzielen stellt sich bei allen Untersuchungen zu forschungsähnlichem Lernen: „If we want students who are able to understand mathematics, enjoy mathematics and have an ability to work through problems to a conclusion then IBL [inquiry based learning] with guidance could be thought successful—but how do we measure that? However, if our aim is for students to be able to achieve high marks in standardized knowledge-based tests then IBL is sometimes less successful—but what are we measuring in standardized tests?“[6] (Bruder und Prescott 2013, S. 820)

Lösungsbeispiele werden als eine Möglichkeit entdeckenden Lernens dargestellt, einige der Nachteile zu verringern (Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum 2011, S. 11). Es ist jedoch fraglich, was daran entdeckendes oder forschendes Lernen ist (vgl. Kollosche 2017, S. 221), wenn die gestellten Probleme einander so ähnlich sind, dass Lösungsbeispiele helfen, oder wenn die Aufgaben mit Hilfe gewisser Schemata aus den Lösungsbeispielen gelöst werden können. Nach Kirschner, Sweller und Clark (2006, S. 80) sind Lösungsbeispiele außerdem bei erfahrenen Lernenden weniger effektiv (es kann sogar ein negativer Effekt auftreten), während Problemlösen bei erfahrenen Lernenden effektiver ist als bei unerfahrenen.

Aus den geschilderten Befunden lassen sich ein paar Komponenten ableiten, die eine Lernumgebung beim forschungsähnlichen Lernen enthalten sollte, um das Lernen zu fördern. Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011, S. 13) nennen drei Komponenten, von denen mindestens eine gegeben sein sollte, damit das forschungsähnliche (entdeckende) Lernen erfolgreich ist. Als eine Komponente sollten die Lernenden angeleitet werden und Struktu-

[6] Übersetzung: Wenn wir uns SchülerInnen wünschen, die in der Lage sind, Mathematik zu verstehen, die Spaß an der Mathematik haben und die Probleme bis zu einem Abschluss durcharbeiten können, dann könnte IBL mit Anleitung als erfolgreich angesehen werden – aber wie messen wir das? Wenn unser Ziel jedoch darin besteht, dass die SchülerInnen in standardisierten wissensbasierten Tests gute Noten erzielen können, ist IBL manchmal weniger erfolgreich – aber was messen wir mit standardisierten Tests?

((Mathematik)	AND ((„forschendes Lernen“) OR („forschungsähnliches Lernen“) OR („entdeckendes Lernen“)))	
((mathematics)	AND ((„inquiry learning“) OR („inquiry based learning“) OR („enquiry learning“) OR („enquiry based learning“)))[a]	
((mathematics)	AND (tertiary education)	AND („discovery learning“))
((mathematics)	AND („higher education“)	AND („discovery learning“))[a]
((mathematics)	AND („higher education“)	AND („moore method“))

[a] Bei der Suche in JSTOR wurden die Ergebnisse anschließend mit dem angebotenen Filter „mathematics“ gefiltert.

Tabelle 2.1.: Verwendete Suchbegriffe zum forschungsähnlichen Lernen

rierungshilfen erhalten (*scaffolding*). Eine zweite Komponente ist, die Lernenden dazu zu bringen, ihre Ideen zu erklären, und ihnen zeitnah Rückmeldung dazu zu geben. Eine dritte Komponente stellen Lösungsbeispiele dar.

Kollosche (2017, S. 226) fügt hinzu, dass das forschungsähnliche (entdeckende) Lernen durch vorausgehende Expositionsphasen ergänzt werden sollte, die inhaltlich und methodisch strukturierend wirken. Wichtig sind zudem die verschiedenen Aufgaben der Lehrkraft: Wo nötig, sollte sie Freiheitsgrade reduzieren, damit die Aufgabe für die Lernenden zu bewältigen ist. Sie sollte den Lernenden helfen, eine zielführende Richtung beizubehalten. Die Lehrkraft sollte wesentliche Eigenschaften der untersuchten Objekte oder Situationen herausstellen und Frustration vermindern. In Gruppenarbeiten können diese Aufgaben auch teilweise von den Gruppenmitgliedern übernommen werden (ibid., S. 227). Kwon, Bae und Oh (2015, S. 999) ergänzt, dass die Lehrkraft die Beiträge und Argumentationen der Lernenden interpretieren und analysieren und die Ideen auf ihr Potenzial hin beurteilen sollte. Link und Schnieder (2016, S. 168) sehen eine weitere Anforderung an den/die DozentIn darin, „Freiheit sowie Vertrauen in den Lösungsprozess zuzulassen, ohne sich auch selbst zu überfordern“.

Umsetzung im Seminar

In der Hochschullehre wurde und wird forschungsähnliches Lernen in verschiedenen Varianten eingesetzt. Siehe dazu beispielsweise Maher (2005), Coppin, Mahavier, May und Parker (2009), Bernack-Schüler (2018) und Kaisari und Patronis (2010). Empirische Forschung zu den Gelingensbedingungen forschungsähnlichen Lernens in der Mathematiklehre an der Hochschule ist allerdings noch weniger vorhanden als zu forschungsähnlichem Lernen in der Schule. Beispielsweise wurden nur in vierzehn der von Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011) einbezogenen Artikel Erwachsene im Zusammenhang mit mathematischen Aufgaben oder Problemlöseaufgaben untersucht. Die meisten Problemlöseaufgaben waren nicht mathematischer Art. Bei den mathematischen Aufgaben ging es meist darum, Muster zu erkennen. Bei keiner der mathematischen Aufgaben sollten die ProbandInnen selbst mathematische Konzepte entwickeln, wie es im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ der Fall ist.

Auch eine Suche in der Datenbank JSTOR und im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) lieferte keine entsprechenden Studien. Die verwendeten Suchbegriffe sind Tabelle 2.1 zu entnehmen. Für die Konzeption von Lernumgebungen mit forschungsähnlichem Lernen kann darum nur auf Studien wie die oben beschriebenen zurückgegriffen werden, die nicht mit StudentInnen oder in einem anderen Fach durchgeführt wurden.

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ sollen die StudentInnen selbst mathematische Konzepte entwickeln. Den StudentInnen wird ein Zielkonzept vorgegeben oder es wird eine Frage aufgeworfen (Schritt 1 bei Messner (2012)). Die StudentInnen suchen nach Lösungsansätzen, stellen Hypothesen auf und überprüfen, ob die Lösungsansätze zielführend sind (Schritte 2 und 3 Messner (2012)). Diese Schritte wiederholen sie mehrfach, bis sie zu einer Lösung gelangen. Da die StudentInnen in Gruppen zusammenarbeiten, ist Messners vierter Schritt – Lösungsansätze austauschen und diskutieren – im Seminar in die Schritte 2 und 3 integriert. Zum Schluss werden die Ergebnisse in Form eines Skriptbeitrags und einer Präsentation dokumentiert (Schritt 5 bei Messner (2012)).

Zu allen Zielkonzepten haben die StudentInnen schon intuitive Vorstellungen aus dem Alltag oder kennen das Konzept aus einem anderen Kontext innerhalb der Mathematik. Beispielsweise hat jeder Vorstellungen zum Begriff „Krümmung“ aus dem Alltag und kann unterscheiden, wo ein Gegenstand stärker und wo er schwächer gekrümmt ist. Aus dem Schulunterricht ist zudem den meisten eine qualitative Beschreibung der Krümmung von Funktionsgraphen bekannt (links- und rechtsgekrümmt). Die Aufgabe der StudentInnen ist es, diese Vorstellungen zu mathematisieren und mathematisch präzise Definitionen zu entwickeln. Welchen Weg sie dazu beschreiten, ist ihnen freigestellt. Die StudentInnen kennen also stets das Ziel und müssen nicht „erraten“, was entdeckt oder gelernt werden soll (vgl. Kollosche 2017, S. 221).

Die StudentInnen müssen bei der Entwicklung der Definitionen immer aus verschiedenen Möglichkeiten eine auswählen. Um zu einer Entscheidung zu gelangen, können (und sollen) sie in den meisten Fällen Gründe für eine der Möglichkeiten finden (vgl. Bruder und Prescott 2013, S. 813). Beispielsweise stehen die Gruppen vor der Frage, ob sie für die Krümmung ebener Kurve negative Werte zulassen oder nicht. Eine Entscheidung für das Zulassen negativer Werte könnten sie damit begründen, dass die Definition auch die Information über Rechts- und Linkskrümmung enthalten sollte. Einzelne Entscheidungen können die StudentInnen jedoch kaum begründet treffen. Beispielsweise können die StudentInnen ohne Kenntnisse über die zweite Fundamentalform kaum entscheiden, ob die Krümmung einer Fläche durch eine Zahl oder einen Vektor oder unendlich viele Zahlen repräsentiert werden sollte (siehe Abschnitt 2.5.5) und welche der jeweils mehreren Möglichkeiten sich besonders eignet. An diesen Stellen muss der/die DozentIn den StudentInnen entsprechende Informationen geben. Falls die StudentInnen Definitionen entwickeln, die nicht mit den üblichen Definitionen übereinstimmen, ergänzen die DozentInnen die übliche Definition und die Vor- und Nachteile der verschiedenen Definitionen werden diskutiert.[7]

Wie oben dargestellt, ist es bei forschungsähnlichem Lernen wichtig, dass die Lernenden ausreichend Anleitung erhalten. Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ geschieht dies auf verschiedene Weisen. Zu Beginn jedes Themas erhalten die StudentInnen ein Arbeitsblatt, auf dem die zu bearbeitende Frage dargelegt wird. Die meisten Arbeitsblätter enthalten ein oder zwei weitere Fragen, die den StudentInnen Denkanstöße bieten. Das erste Thema ist zudem stärker strukturiert als die späteren Themen: Die StudentInnen durchlaufen zuerst vier Stationen mit praktischen Aufgaben, bei denen sie Ideen sammeln können. Das anschließende Arbeitsblatt enthält mehr und konkretere Fragen als die Arbeitsblätter bei späteren Themen. Auf diese Weise sollen die StudentInnen an die für sie ungewohnte Arbeitsweise herangeführt werden.

Während der Seminarstunden erhalten die StudentInnen außerdem Hilfe von den DozentInnen. Wie es von Alfieri, Brooks, Aldrich und Tenenbaum (2011), Kollosche (2017) und

[7] Bei den beiden bisherigen Durchführungen des Seminars beschränkten sich die Unterschiede zwischen den studentischen und den üblichen Definitionen auf Vorfaktoren und Vorzeichen. Fundamental andere Definitionen kamen nicht vor.

Kwon, Bae und Oh (2015) nahegelegt wird, geben die DozentInnen zeitnah Feedback auf verschiedenen Ebenen (Ebene der Aufgabe, des Prozesses, der Selbstregulation (Hattie, Gan und Brooks 2016)) und helfen den StudentInnen, einen zielführenden Weg zu verfolgen, indem sie das Potenzial der Ideen beurteilen. Wo nötig geben die DozentInnen Anleitung für den nächsten Schritt, beispielsweise indem sie wichtige Eigenschaften von Objekten oder Konzepten herausstellen und Verbindungen zu bekannten mathematischen Sachverhalten aufzeigen. Wie oben beschrieben, müssen die Dozenten an einzelnen Stellen auch normativ eingreifen, wenn die StudentInnen Entscheidungen nicht selbst begründet treffen können. Auch Frustration soll durch die DozentInnen vermindert werden. Frustration kann und soll beim forschungsähnlichen Lernen nicht völlig vermieden werden, aber die DozentInnen sollten darauf achten, dass die StudentInnen nicht bei frustrierenden Erlebnissen stehen bleiben. Motivation durch eigene Entdeckungen/Entwicklungen kann nur entstehen, wenn diese Entdeckungen auch gelingen (Kollosche 2017, S. 223). Da die StudentInnen in Gruppen zusammenarbeiten, werden diese verschiedenen Hilfen nicht nur von den DozentInnen gegeben, sondern die StudentInnen helfen sich in ihren Gruppen auch gegenseitig.

Da beim Problemlösen die kognitive Belastung sehr hoch ist, erhalten die StudentInnen bei allen Themen Hands-on-Materialien (siehe Abschnitt 2.2.1). Mit diesen kann die das räumliche Vorstellungsvermögen betreffende kognitive Belastung verringert werden, um so dem Problemlösen möglichst viel Kapazität im Arbeitsgedächtnis zur Verfügung stellen zu können.

Das forschungsähnliche Lernen wird im Seminar durch Expositionsphasen ergänzt: Am Ende jedes Themas stellt jede Gruppe ihre Ergebnisse vor. Die zuhörenden StudentInnen lernen bei diesen Vorträgen auch Inhalte, die in ihrer eigenen Arbeit nicht vorkamen. Bei den folgenden Themen können sie auf die Ergebnisse der anderen Gruppen zurückgreifen, müssen also nicht alles selbst entwickeln oder „entdecken“. Anschließend an die Vorträge können die DozentInnen außerdem Verbindungen zwischen den Vorträgen und zu Inhalten aus anderen Vorlesungen aufzeigen.

2.2.3. Gruppenarbeit

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ arbeiten die StudentInnen fast die ganze Zeit in Vierergruppen zusammen. Im Folgenden wird ein Überblick über einige Aspekte im Zusammenhang mit Gruppenarbeit gegeben. Dieser Überblick erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und stellt kein systematisches Review und keine Meta-Analyse dar.

Wie jede Lern- und Arbeitsform hat Gruppenarbeit gewisse Vor- und Nachteile und es gibt Bedingungen, unter denen Gruppenarbeit besser gelingt als unter anderen. Hattie (2009, S. 212-214) fand insgesamt einen positiven Effekt kooperativer Lernformen. Wann jedoch eine Gruppenarbeit sinnvoll ist und wie sie gestaltet sein sollte, hängt von den Lernzielen und der Aufgabe ab. Beispielsweise verglichen Retnowati, Ayres und Sweller (2017) die Effektivität von Lösungsbeispielen in Einzel- und in Gruppenarbeit. Die SchülerInnen, die alleine mit den Lösungsbeispielen gearbeitet hatten, schnitten im Test besser ab als diejenigen, die in Gruppen gearbeitet hatten. Bekamen die SchülerInnen jedoch keine Lösungsbeispiele, sondern sollten direkt mathematische Probleme lösen, schnitten die SchülerInnen aus den Gruppenarbeiten besser ab. Ob Gruppenarbeit eine effektive Methode ist, hängt also von den Lernzielen ab, und die Gestaltung der Gruppenarbeit muss auf die Lernziele abgestimmt werden. Als eine notwendige Bedingung für das Gelingen von Gruppenarbeit nennt Slavin (2016, S. 401-402) die gegenseitige Abhängigkeit der Gruppenmitglieder. Das heißt, dass kein Gruppenmitglied das Gefühl haben sollte, das gesteckte Ziel alleine genau so gut oder sogar besser erreichen zu können als mit der Gruppe. Solche Personen würden sich aus der Gruppenarbeit heraushalten und alleine arbeiten, sodass die Gruppenarbeit dann keine Gruppenarbeit mehr wäre.

Der Hauptunterschied zwischen Gruppenarbeit und anderen Lernformen sind die Möglichkeiten der Lernenden, miteinander zu interagieren. Solche Möglichkeiten bestehen bei Einzelarbeit nicht. Bei anderen Formaten wie Plenumsdiskussionen gibt es zwar Interaktionsmöglichkeiten, aber es sind meist weniger als in einer kleinen Gruppe, da die zur Verfügung stehende Zeit bei Plenumsdiskussionen unter mehr Lernenden aufgeteilt werden muss. Es ist daher davon auszugehen, dass mögliche Vorteile von Gruppenarbeiten auf diesen Interaktionsmöglichkeiten basieren.

Verschiedene Arten von Interaktionen können verschiedene Lernziele unterstützen (Cohen 1994, S. 4). Ein mögliches Lernziel kann sein, algorithmisch orientierte Aufgaben mit eindeutigen Lösungen zu bearbeiten, also bestimmte Lösungsprozeduren einzuüben. In einer Gruppenarbeit sollen sich die Lernenden dann gegenseitig erklären, wie die Lösungsprozedur funktioniert. Das heißt, sie sollen wiederholen, was die Lehrkraft oder das Lehrbuch schon erklärt hat. Für diese Fälle sind Gruppenarbeiten effektiv, bei denen die Leistung jedes Einzelnen für das Gruppenergebnis verwendet wird und bei denen für besonders gute Gruppenleistungen Belohnungen ausgelobt werden (Slavin 2016). Dies kann beispielsweise dadurch erreicht werden, dass alle Gruppenmitglieder nach der Gruppenarbeit einzeln einen Test schreiben müssen. Die Testergebnisse aller Gruppenmitglieder werden zum Gruppenergebnis verrechnet und die beste Gruppe der Klasse oder des Kurses bekommt eine Belohnung. Die stärkeren Gruppenmitglieder werden hierbei dazu angeregt, den schwächeren Gruppenmitgliedern zu helfen, damit diese sich verbessern und dadurch die Gruppe insgesamt ein gutes Ergebnis erzielt. Durch diese Methode wird eine gegenseitige Abhängigkeit hergestellt.

Werden jedoch nicht-wohlgestellte Aufgaben (*ill-structured problems*) verwendet, um konzeptuelles Lernen zu fördern, wird der Austausch von Ideen, Hypothesen und Strategien effektiver sein (Cohen 1994, S. 4). Bei dieser Art von Gruppenarbeit sind Interaktionen notwendig, um die Aufgabe überhaupt lösen zu können, d. h. jeder kann und muss etwas beitragen, damit die Gruppe die Aufgabe lösen kann. Bei der zuvor beschriebenen Art von Gruppenarbeit ist das nicht so. Die stärkeren Gruppenmitglieder könnten ihre Aufgaben auch alleine lösen, ohne sich um die anderen zu kümmern. Die gegenseitige Abhängigkeit der Gruppenmitglieder liegt also nicht in der Aufgabe, sondern in den Rahmenbedingungen. Dementsprechend definiert Cohen eine Gruppenaufgabe als eine Aufgabe, deren Lösung Mittel wie Wissen und Problemlösestrategien erfordert, die kein Gruppenmitglied allesamt hat, sodass es unwahrscheinlich ist, dass ein Gruppenmitglied die Aufgabe alleine lösen kann (Cohen 1994, S. 8). Damit eine Gruppenarbeit mit einer solchen Gruppenaufgabe effektiv sein kann, muss die Aufgabe an sich interessant sein und die Lösung muss Beiträge von allen Gruppenmitgliedern nötig machen. Dann ist das Bearbeiten und Lösen der Aufgabe gewissermaßen Belohnung genug und die von Slavin (2016) herausgestellte gegenseitige Abhängigkeit ist durch die Komplexität der Aufgabe sichergestellt (Cohen 1994, S. 15).

Dass Gruppenarbeit gegenüber anderen Lernformen vorteilhaft sein kann, hat verschiedene Gründe. Clark, James und Montelle (2014) zeigten, dass die Gruppenmitglieder einander in verschiedener Weise unterstützen können, etwa durch Wissen, Ermutigung, Fragen und Antworten. Dadurch können in einer Gruppe Synergien entstehen und Prozesse vorkommen, die in Einzelarbeiten oder in lehrerzentrierten Lehrformen nicht möglich sind, und wodurch die Gruppe schwierigere Probleme lösen kann als die einzelnen Personen.

Ein weiterer Grund ist, dass durch die Diskussionen in den Gruppen die Planung und Ausführung von Lösungsschritten den Gruppenmitgliedern bewusster wird als in Einzelarbeit, da sie in der Gruppe darüber sprechen müssen, um zu einer Lösung zu kommen. Pläne und Lösungsstrategien müssen also expliziert werden. Verschiedene Studien konnten zeigen, dass Gruppen, in denen sich die Mitglieder gut über ihren Lösungsprozess austauschen, die Argumente anderer anhören und diskutieren, in anschließenden Tests zum Problemlösen oder Argumentieren besser abschneiden als Gruppen, in denen ein solcher Prozess weniger stattfindet (Webb 2009, S. 4-5). Dass dies nicht bei allen Gruppen gleichermaßen der Fall ist, deutet allerdings auch Schwierigkeiten von Gruppenarbeiten an, auf die unten eingegangen wird. Gruppendiskussionen mit einem Diskurs auf einer höheren Ebene (*high level discourse*), in denen beispielsweise Hypothesen getestet werden und metakognitive Reflexionen stattfinden, können besonders das dauerhafte Lernen befördern (Nussbaum 2008).

In den Gruppen müssen zudem Repräsentationen gewisser Objekte oder Sachverhalte ausgehandelt werden, was den Lernenden beim Abstrahieren hilft (Cohen 1994, S. 6). Außerdem bietet eine Gruppenarbeit häufig Gelegenheiten, einander etwas zu erklären oder gemeinsam Lösungen zu entwickeln. Das gegenseitige Erklären hilft sowohl dem Zuhörer als auch dem Erklärer. Das gemeinsame Entwickeln von Lösungen, indem die Ideen der Partner aufgenommen und fortgeführt werden, unterstützt die Problemlösefähigkeiten (Hausmann, Chi und Roy 2004).

Wie die Mitglieder einer Gruppe interagieren, hängt von verschiedenen Faktoren ab, etwa von der Aufgabengestaltung, von den sozialen Fähigkeiten der Gruppenmitglieder und von ihren individuellen Merkmalen wie ihrem Geschlecht und ihrem sozialen Status. Dies weist auf mögliche Schwierigkeiten bei der Umsetzung von Gruppenarbeiten hin. Beispielsweise werden von den Gruppenmitgliedern gute soziale und kommunikative Fähigkeiten verlangt (Cohen 1994, S. 5). Sie müssen mit Konflikten umgehen können, verschiedene Standpunkte vergleichen und integrieren können und den Lösungsprozess gemeinsam regeln. Besonders die kommunikativen Fähigkeiten wie erklären und argumentieren lassen sich vorab trainieren. Dadurch wird die Qualität der Diskussionen in den Gruppen verbessert und häufig auch die Leistung der Gruppen oder der einzelnen Gruppenmitglieder (Webb 2009, S. 7). Für eine effektive Kommunikation in der Gruppe ist es außerdem günstig, wenn die Gruppenmitglieder Fachbegriffe und visuelle Vermittler wie Zeichnungen, Hands-on-Materialien oder Geschriebenes verwenden (Ryve, Nilsson und Pettersson 2013, S. 511). Durch die Vermittlung wichtiger Fachbegriffe und das Bereitstellen visueller Vermittler kann daher die Kommunikation in den Gruppen unterstützt werden.

Neben den kommunikativen Anforderungen besteht eine andere Schwierigkeit bei Gruppenarbeiten darin, dass sich häufig nicht alle Gruppenmitglieder gleichermaßen einbringen: Gruppenmitglieder mit einem hohen Status beteiligen sich mehr, solche mit einem niedrigen weniger. Der Status basiert auf der bisherigen Leistung, der Beliebtheit sowie individuellen Merkmalen wie Geschlecht und ethnischer Zugehörigkeit (Webb 2009, S. 7). So übernehmen etwa diejenigen mit bisher besseren Leistungen eher die Leitungsrolle und werden in dieser auch eher akzeptiert (Cohen 1994, S. 23). Wer zu einer gesellschaftlichen Gruppe gehört, über die es verbreitete negative Vorurteile gibt, bringt sich in der Gruppenarbeit eher weniger ein (Cohen 1994, S. 24). Durch Interventionen, in denen die TeilnehmerInnen überzeugt werden, dass in einer Gruppenarbeit ganz verschiedene Fähigkeiten benötigt werden und dass jeder mindestens eine und keiner alle diese Fähigkeiten hat, können die Unterschiede in der Beteiligung verringert werden (Cohen 1994, S. 24-25). Auch die Verwendung von nicht-wohlgestellten Aufgaben kann dazu beitragen, dass sich alle beteiligen. Nicht-wohlgestellte Aufgaben alleine sind aber nicht immer hinreichend für eine gleichmäßige Beteiligung aller. Es kommt etwa vor, dass ein Gruppenmitglied sich für einen Experten hält und allen anderen diktiert, was zu tun sei, um das Problem zu lösen (Webb 2009, S. 11). Durch die zuvor angesprochenen Interventionen sollten sich solche Fälle jedoch verringern und das Potenzial von nicht-wohlgestellten Aufgaben besser ausschöpfen lassen.

Eine weitere Schwierigkeit ist, dass sich ein Diskurs auf einer höheren Ebene oft nicht von alleine entwickelt. Das heißt, die Gespräche der Gruppe bleiben auf einer niedrigeren, weniger reflektierten Ebene. Ein Diskurs auf einer höheren Ebene kann durch Hilfen zur Strukturierung des Gesprächs gefördert werden (Cohen 1994, S. 22). Beispielsweise können die Gruppenmitglieder zu Erklärungen aufgefordert werden: Problemlösestrategien erklären, Antworten begründen oder Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Aufgaben finden und erläutern (Webb 2009, S. 9). Eine andere Strukturierungshilfe ist die Aufforderung, sich gegenseitig Fragen mit „wie“ und „warum“ zu stellen, die auf eine höhere Ebene führen, zum Beispiel „Warum ist ... wichtig?“ (Webb 2009, S. 9). Ebenso können Rollen verteilt werden (z. B. Erklärer und aktiver Zuhörer, (Webb 2009, S. 10)) oder gewisse Prozesse vorgegeben werden. Dabei gilt es allerdings eine Balance zu wahren: Bei zu wenig Unterstützung erreichen die Diskussionen keine höhere Ebene, bei zu viel Unterstützung aber auch nicht. Denn wenn Lösungsschritte vorgegeben werden oder die Rollen zu eng gefasst sind, bleibt kein Platz für die Ideen und eigenen Beiträge der Gruppenmitglieder (Cohen 1994, S. 22).

Ein weiterer Punkt, auf den man als Lehrkraft achten muss, ist das eigene Verhalten. Gruppen zeigen ein unterschiedliches Verhalten, je nach dem ob die Lehrkraft ihnen gerade zuhört oder nicht (Cohen 1994, S. 28-29). Hört die Lehrkraft als Autoritätsperson zu, wird in der Gruppe weniger frei gesprochen werden. Greift die Lehrkraft zusätzlich mit direkten Instruktionen ein, nimmt sie der Gruppe die Verantwortung, selbst eine Lösung zu finden und die Zusammenarbeit in der Gruppe wird verringert. Außerdem geben Lehrkräfte direkte Anweisungen häufig dann, wenn sie der Gruppe zuvor nicht zugehört haben und somit nicht wissen, wo die Gruppe gerade steht. Die Anweisungen sind dann oft nicht hilfreich für die Gruppen. Hört die Lehrkraft jedoch zunächst zu, um herauszufinden, welche Ideen und Ansätze die Gruppe hat und ob es Missverständnisse gibt, gibt sie fast automatisch weniger direkte Anweisungen und versucht, ihre Hinweise an die Gruppe anzupassen (Webb 2009, S. 13). Die Lehrkraft sollte also Autorität abgeben, nicht jeden Lösungs- und Lernprozess zu kontrollieren versuchen und stattdessen die oben genannten Strukturierungshilfen bieten.

Umsetzung im Seminar

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ sollen die StudentInnen ein konzeptuelles Verständnis für einige Begriffe der Differentialgeometrie entwickeln und die Konzepte untereinander und mit Konzepten aus anderen Veranstaltungen vernetzen. Außerdem sollen sie das formale mathematische Modellieren anschaulicher Ideen üben. Dazu bekommen sie offene Aufgabenstellungen.

Für diese Lernziele sind Gruppenarbeiten im Sinne von Cohen (1994) passend. Im Seminar arbeiten die StudentInnen das ganze Semester hindurch in festen Vierergruppen, die sie zu Anfang selbst einteilen dürfen. Die verwendeten Aufgaben (siehe Abschnitt 2.4) sind nicht-wohlgestellte Aufgaben, da sie zwar ein Ziel vorgeben, der Weg dorthin aber völlig offen ist. Bei manchen Aufgaben ist selbst das Ziel nicht ganz klar, etwa bei den Themen Krümmung von Raumkurven und Krümmung von Flächen, da es bei Raumkurven und Flächen verschiedene Krümmungsbegriffe gibt. Welchen der Begriffe die StudentInnen entwickeln – oder ob sich gar etwas ganz Neues überlegen – bleibt ihnen überlassen. Das Thema Geodäten hat eine andere Eigenschaft nicht-wohlgestellter Aufgaben, da sie in gewissem Sinne nicht lösbar ist. Die StudentInnen können eine Möglichkeit finden, wie sie eine gegebene Kurve daraufhin überprüfen können, ob sie eine Geodäte sein könnte, jedoch werden sie keine Möglichkeit finden, wie sie auf einer beliebigen Fläche zu zwei beliebigen Punkten eine Geodäte bestimmen können.

Die Aufgaben sind außerdem so schwer, dass es höchst unwahrscheinlich ist, dass ein Student oder eine Studentin sie alleine lösen kann. So mag zwar der eine schnell einen guten Ansatz finden, aber dann in der Durchführung stecken bleiben, wo die anderen weiterhelfen können. Die StudentInnen sind also von einander abhängig. Die Motivation, sich zu beteiligen, wird zudem dadurch erhöht, dass jedes Gruppenmitglied bei drei der vier Themen die Ergebnisse mündlich oder schriftlich präsentieren muss als Leistung für die Endnote.

Da die TeilnehmerInnen des Seminars keine Kinder oder Jugendlichen sind, sondern LehramtsstudentInnen in höheren Semestern, ist davon auszugehen, dass sie gewisse soziale und kommunikative Fähigkeiten mitbringen. Von einem speziellen Training dieser Fähigkeiten vor Beginn des Seminars wurde darum bisher abgesehen. Zur Unterstützung der Kommunikation wurden aber Hands-on-Materialien als visuelle Vermittler bereitgestellt und zu Beginn wurde eine kurze Einführung gegeben, um die zu Anfang benötigten Fachbegriffe zu vermitteln.

Die DozentInnen gehen während der Arbeitszeit im Seminar von Gruppe zu Gruppe, um ihnen weiterzuhelfen. Um die negativen Auswirkungen des Hinzukommens einer Autoritätsperson zu verringern, ist es hilfreich, dies gleich zu Beginn explizit anzusprechen. Man kann den StudentInnen sagen, dass man komme, um ihnen zu helfen, dass man das aber nur könne, wenn sie weiterhin frei miteinander (und dem/der DozentIn) sprechen. Während des ganzen Seminars ist es essenziell, den StudentInnen gut zuzuhören, um ihre Ideen und Ansätze zu verstehen. Darauf aufbauend können die DozentInnen Hilfen zur Strukturierung der Gruppenarbeit oder auch inhaltlicher Art geben, wie es Cohen (1994) und Webb (2009) beschreiben. Die DozentInnen können also Fragen stellen, damit die StudentInnen ihre Ideen oder Probleme genauer erklären. Sie können Argumentationen der StudentInnen aufgreifen und weiterführen, um die StudentInnen Widersprüche oder Fallstricke erkennen zu lassen. Sie können StudentInnen, die sich weniger beteiligen, nach ihren Ansichten fragen, um sie mehr einzubinden. Die DozentInnen können immer wieder darauf hinweisen, dass jeder seine Zweifel äußern solle, denn das decke entweder Ungereimtheiten auf oder es gebe allen, den Erklärern und den Zuhörern, die Gelegenheit, mehr zu lernen. Die DozentInnen können strategische Hinweise geben, etwa Vorgehensweisen zu vergleichen oder sich Beispiele anzuschauen. Dies alles erfordert von den DozentInnen eine Haltung des Zuhörens und die Bereitschaft, sich auf unbekannte Wege, die die StudentInnen vorschlagen, einzulassen.

In den bisherigen Durchführungen des Seminars erwiesen sich diese spontanen Hilfestellungen als ausreichend, damit die Gruppen gute Ergebnisse erlangen. Für andere Zusammensetzungen an TeilnehmerInnen, vielleicht mit StudentInnen in niedrigeren Semestern, könnte es hilfreich sein, zusätzlich eine Intervention zu Kommunikationsfähigkeiten oder der Vielfalt an Fähigkeiten innerhalb einer Kleingruppe durchzuführen. Auch die zeitlich begrenzte Einführung von Rollen in einer Gruppe könnte den Argumentationsprozess der Gruppe voranbringen.

2.3. Ablauf und Struktur des Seminars

Das Seminar ist unterteilt in vier Themenblöcke. Der Ablauf aller Themenblöcke ist gleich. Zunächst werden die Themen verteilt. Die Gruppen können sich ein Thema aussuchen. Falls zu viele Gruppen ein Thema bearbeiten wollen, wird ausgelost. Anschließend fangen die Gruppen während der Seminarzeit an, ihr Thema zu bearbeiten. Sie bekommen dazu ein Arbeitsblatt mit ein paar Fragen oder Hinweisen. Dadurch steht das Ziel bei jedem Thema fest, aber den Weg dahin müssen die Gruppen selbst suchen. Während der Gruppenarbeitsphase gehen die DozentInnen von Gruppe zu Gruppe, hören zu, stellen Fragen und helfen den Gruppen, einen gangbaren Weg zu finden. Bis zur nächsten Seminarstunde treffen sich die Gruppen idealerweise noch mal außerhalb der Seminarzeit, um an ihrem Thema weiterzuarbeiten. Selbstverständlich dürfen die StudentInnen auch außerhalb der Seminarstunden mit Fragen zu den DozentInnen kommen. Die folgende Sitzung hindurch können die Gruppen weiter an ihrem Thema arbeiten und die DozentInnen helfen bei Fragen weiter. Am Ende dieser Sitzung sollte mindestens der Weg zum Ziel klar sein, denn in der folgenden Sitzung stellt ein Mitglied jeder Gruppe die Ergebnisse der Gruppe vor. Diese Präsentationen dauern jeweils gut 20 Minuten. Durch die Präsentationen lernen alle SeminarteilnehmerInnen auch die Ergebnisse und Wege der anderen Gruppen kennen, sodass mit den folgenden Themen darauf aufgebaut werden kann. Außerdem schreiben zwei StudentInnen aus jeder Gruppe die Ergebnisse und Herleitungen ihrer Gruppe auf, sodass nach und nach ein Skript entsteht, in welchem jeder auch die Ideen anderer Gruppen nachvollziehen kann.[8] Nach den Präsentationen werden die nächsten Themen verteilt.

In die letzte Seminarstunde wurde in den bisherigen Durchführungen ein Gespräch mit einer Lehrerin integriert, die Erfahrungen mit dem Einsatz von Hands-on-Materialien und offenen Aufgaben in der Schule hat, beispielsweise zum Thema der Krümmung von Funktionsgraphen. Die Lehrerin berichtete zunächst von ihren Erfahrungen (siehe auch Hilken 2020, S. 34). Anschließend konnten die SeminarteilnehmerInnen Fragen stellen.

Das Seminar umfasst zwei Semesterwochenstunden Präsenzzeit und 90h Selbststudium, also 4 ECTS-Punkte.[9] Im Wintersemester 17/18 fand das Seminar alle zwei Wochen statt und dauerte dann jeweils vier Stunden. Im Wintersemester 18/19 dauerten die Treffen immer abwechselnd vier bzw. zwei Stunden. In den ersten fünf Wochen fanden die Treffen wöchentlich statt, anschließend alle zwei Wochen. Eine detailliertere Stundenverteilung ist Tabelle 2.2 zu entnehmen. Der Ablauf wurde zur zweiten Durchführung leicht verändert, da im Wintersemester 17/18 beim dritten und vierten Thema keine weitere Gruppenarbeit in Anwesenheit der Dozentinnen stattfand, was die PräsentatorInnen der dritten und vierten Themen möglicherweise benachteiligte. Die Stundenverteilung aus dem Wintersemester 18/19 ist fairer. Die Skripte mussten im Wintersemester 17/18 zwei Wochen nach dem zugehörigen Vortrag abgegeben werden. Im Wintersemester 18/19 wurde die Frist auf eine Woche verkürzt, um die Skriptbeiträge den StudentInnen schneller zur Verfügung stellen zu können. So konnten die StudentInnen bei nachfolgenden Themen bei Bedarf im Skript nachschauen und mussten sich nicht auf ihre Erinnerung oder ihre Notizen zu den Vorträgen verlassen. Für die Skriptbeiträge wird den StudentInnen eine LaTeX-Vorlage zur Verfügung gestellt.

Empfehlenswert für den Ablauf des Seminars erscheint aus unseren Erfahrungen die zweite Variante mit einer gleichmäßigeren Verteilung der Treffen: in der ersten Woche vier Stunden mit dem Beginn des Themas, in der folgenden Woche zwei Stunden, in denen die Gruppenarbeit das Thema weiter bearbeiten, dann eine Woche Pause und anschließend wieder vier Stunden mit der Präsentation und dem Beginn des nächsten Themas. Dadurch haben die StudentInnen, die die Ergebnisse der Gruppe präsentieren, immer gleich viel Zeit zur Vorbereitung des Vortrags. Außerdem ist der Semesterbeginn auf diese Weise für alle Beteiligten weniger gedrängt als in der oben beschriebenen Variante.

Da die StudentInnen im Seminar mathematische Konzepte selbst entwickeln sollen, wäre es hinderlich, wenn sie diese in Lehrbüchern nachschlagen würden. Ihnen wird daher in

[8] Die Skripten werden auf Nachfrage gerne zur Verfügung gestellt.

[9] Die TeilnehmerInnen studierten alle nach der GymPO, derzufolge Seminare 4 ECTS-Punkte umfassen sollten).

Semester-woche	**Wintersemester 17/18** Stunden	Thema	**Wintersemester 18/19** Stunden	Thema
1	–	–	4	Beginn Thema 1
2	4	Beginn Thema 1	2	Gruppenarbeit Thema 1
3	–	–	4	Präsentation Thema 1 und Beginn Thema 2
4	4	Gruppenarbeit Thema 1	2	Gruppenarbeit Thema 2 (Abgabe Skript 1)
5	–	–	4	Präsentation Thema 2 und Beginn Thema 3
6	4	Präsentation Thema 1 und Beginn Thema 2	–	(Abgabe Skript 2)
7	–	–	2	Gruppenarbeit Thema 3
8	4	Gruppenarbeit Thema 2 (Abgabe Skript 1)	–	–
9	–		4	Präsentation Thema 3 und Beginn Thema 4
10	4	Präsentation Thema 2 und Beginn Thema 3	–	(Abgabe Skript 3)
11	–	–	2	Gruppenarbeit Thema 4
12	2	Beginn Thema 4 (Abgabe Skript 2)	–	–
13	2	Präsentation Thema 3	4	Präsentation Thema 4
14	4	Präsentation Thema 4	–	(Abgabe Skript 4)
15	–	(Abgabe Skript 3)	–	–
16	–	(Abgabe Skript 4)	–	–

Tabelle 2.2.: Zeitlicher Ablauf des Seminars

der ersten Stunde das Konzept des Seminars erklärt und sie werden gebeten, nicht in die entsprechenden Lehrbücher oder im Internet zu schauen. Die beschriebene Stundenaufteilung trägt dazu bei, dass die StudentInnen diese Vereinbarung einhalten (können). Zum einen wird jedes Thema direkt vor Ort in der Seminarstunde begonnen, sodass die StudentInnen schon Lösungsideen haben, bevor sie zu Hause am Thema arbeiten. Außerdem sollten die DozentInnen darauf achten, dass jede Gruppe am Ende der Seminarstunde weiß, wie sie weiterarbeiten kann. Die Gruppen sollten nicht in einer Sackgasse stecken (ob gefühlt oder tatsächlich), wenn sie den Seminarraum verlassen. Falls eine Gruppe doch nachschlagen sollte, wie an anderer Stelle Krümmung oder ein anderer Begriff definiert wird, müsste sie wahrscheinlich trotzdem noch viel selbst entwickeln, da in Lehrbüchern die Anschauung oft nur knapp dargestellt wird und bei anschaulichen Erklärungen eher popularwissenschaftlicher Art die Formalisierung fehlt. Inhalte, die nicht direkt ein zu entwickelndes Konzept betreffen, dürfen und sollen die StudentInnen natürlich in der Literatur nachschauen, beispielsweise wenn ihnen Inhalte aus den Grundvorlesungen nicht mehr präsent sind.[10]

Die StudentInnen bekommen für die Präsentation und für ihre beiden Skriptbeiträge jeweils eine Note. Die Gesamtnote ist das Mittel dieser drei Noten. Die Präsentationen und die Skripte werden mit Hilfe von Feedbackbögen bewertet, die den StudentInnen vorab ausgehändigt werden, damit sie sich auf die Erwartungen einstellen können. Sollten zwei StudentInnen, die einen gemeinsamen Skriptbeitrag verfassen, unabhängige Noten wünschen, können sie im Beitrag kennzeichnen, wer welchen Teil geschrieben hat.

2.3.1. Die Rolle der DozentInnen

Die Rolle des/der DozentIn ist im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ hauptsächlich eine unterstützende. Wie der/die DozentIn diese Rolle ausfüllen kann, wurde schon in den drei Unterabschnitten des Abschnitts 2.2 beschrieben und wird hier zusammengefasst.

Die meisten Aufgaben lassen sich ins Modell der *cognitive apprenticeship* (Collins, Brown und Newman 1986, S. 22-24) einordnen. Dieses Modell umfasst sechs Methoden: *modelling*, *coaching*, *scaffolding*, *articulation*, *reflection*, *exploration*. Für das Seminar sind besonders *coaching*, *scaffolding* und *articulation* relevant. Beim *coaching* beobachtet der/die DozentIn die StudentInnen beim Bearbeiten der Aufgaben und gibt ihnen Hinweise und Feedback, strukturiert und ruft in Erinnerung. Dazu ist es vor allem wichtig, den StudentInnen gut zuzuhören, um ihre Ideen und Probleme zu verstehen (Webb 2009, S. 13). Darauf aufbauend kann der/die DozentIn die Argumentationen der StudentInnen aufgreifen und weiterführen, um die StudentInnen Widersprüche oder Fallstricke erkennen zu lassen (Webb 2009, S. 14). Der/Die DozentIn kann den StudentInnen außerdem helfen, eine zielführende Richtung beizubehalten und kann an Inhalte aus früheren Vorlesungen erinnern.

Beim *scaffolding* gibt der/die DozentIn den StudentInnen die Hilfe, die sie benötigen, um die Aufgaben lösen zu können. Der/Die DozentIn führt dabei Teile der Aufgabe aus, die die StudentInnen noch nicht alleine können. Dazu kann der/die DozentIn Freiheitsgrade reduzieren oder wesentliche Eigenschaften der untersuchten Objekte oder Situationen herausstellen (Kollosche 2017, S. 227).

Bei *articulation* bringt der/die DozentIn die StudentInnen dazu, ihr Wissen, ihre Argumentation und ihre Problemlöseprozesse zu artikulieren. Dazu kann der/die DozentIn Fragen stellen, damit die StudentInnen ihre Ideen und Probleme genauer erklären, Aussagen begründen und Problemlösestrategien explizieren (Webb 2009, S. 9).

Die drei Methoden überschneiden sich mit dem Prinzip der minimalen Hilfe und lassen sich damit in konkretere Handlungsleitlinien umsetzen. Beim Prinzip der minimalen Hilfe geht es darum, den StudentInnen gerade so viel Hilfe zukommen zu lassen, wie sie benötigen, um ein Problem zu lösen (Trebing 2015). Nach Zech (1996) gibt es fünf Stufen der Hilfestellungen: Motivationshilfen, Rückmeldungshilfen („Ihr seid auf einem guten Weg.“), allgemein-strategische Hilfen („Kennst du die Definition aller auftretenden Begriffe?“), inhaltsorientierte strategische Hilfen („Welche physikalische Einheit würde man für das Ergebnis erwarten?“) und inhaltliche Hilfen. Durch aktives Zuhören können die DozentInnen einschätzen, auf welcher Stufe die StudentInnen Hilfe benötigen, und dann entsprechend reagieren (Trebing 2015).

[10] In den beiden bisherigen Durchläufen hatten wir nie den Eindruck, dass eine Gruppe ihre Ideen nicht selbst entwickelt hatte. Nachgeschlagen wurden beispielsweise Inhalte aus den Grundvorlesungen (z. B. Satz von der impliziten Funktion) oder nützliche Formeln für das Rechnen mit Kreuzprodukten oder Integralen.

Auch die Methode *reflection* kommt im Seminar vor: Die DozentInnen können die StudentInnen dazu anregen, Vorgehensweisen zu vergleichen oder sich Beispiele anzuschauen. Bei Collins, Brown und Newman (1986) geht die Methode allerdings darüber hinaus. Sie empfehlen genauere Vergleiche der Vorgehensweisen von Anfängern und Experten, indem nach dem Lösungsprozess das jeweilige Vorgehen analysiert und reflektiert wird, beispielsweise mit Hilfe von Videoaufzeichnungen.

Darüber hinaus hat der/die DozentIn weitere Aufgaben eher motivationaler oder sozialer Natur. Der/Die DozentIn sollte die Gruppenarbeiten unterstützen, indem er/sie die StudentInnen, die sich weniger einbringen, einbezieht. Auch die Kommunikation in der Gruppe kann unterstützt werden, beispielsweise durch das Einführen von Fachbegriffen. Außerdem sollte der/die DozentIn den StudentInnen helfen, Phasen der Frustration, die beim forschungsähnlichen Lernen auftreten, zu überwinden (Kollosche 2017, S. 227).

Dies alles erfordert von den DozentInnen eine Haltung des Zuhörens und die Bereitschaft, sich auf unbekannte Wege, die die StudentInnen vorschlagen, einzulassen und dabei eine Balance zwischen zu wenig und zu viel Unterstützung zu finden.

2.4. Die Themen – Zusammenfassung und Materialien

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ geht es, wie der Name schon sagt, um Elementare Differentialgeometrie. Dieses Thema eignet sich besonders gut für ein Seminar mit den genannten Zielen: „Mit Kurven und Flächen werden in der Elementaren Differentialgeometrie anschauliche Objekte untersucht, an denen der Übergang zwischen Anschauung und mathematischer Modellierung gut geübt werden kann. Viele Objekte und Konzepte können zudem mit Hands-on-Materialien dargestellt werden. Gleichzeitig werden verschiedene Themenbereiche verknüpft, in erste Linie die Grundvorlesungen in Analysis und Linearer Algebra; weitere Voraussetzung bestehen dann auch nicht. Dadurch können alle Lehramtsstudierenden prinzipiell nach dem Grundstudium am Seminar teilnehmen. Außerdem knüpft die Elementare Differentialgeometrie teilweise an den Schulstoff an, sodass auch hier eine Vernetzung stattfinden kann.

Auch andere Themen wie etwa Eindimensionale Variationsrechnung, Geometrie oder Stochastik ließen sich in einem forschungsähnlichen Seminar umsetzen. Die Elementare Differentialgeometrie bietet hier über die angesprochenen Aspekte hinaus auch den Vorteil, kaum inhaltliche Überschneidungen mit anderen Lehrveranstaltungen des Lehramtsstudiums zu haben.“ (Cederbaum und Hilken 2021)

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ werden folgende Themen bearbeitet: Krümmung ebener Kurven, Krümmung von Raumkurven, Beschreibung und Flächeninhalt gekrümmter Flächen, Abstände auf gekrümmten Flächen (Geodäten), Krümmung von Flächen, Rotationsflächen und längen-, flächen- und winkeltreue Abbildungen, siehe auch Abbildung 2.1. Je nach dem, wie umfassend das Thema der Krümmung von Flächen im dritten Block bearbeitet wird, wird dieses Thema im vierten Block passend weitergeführt oder es kann noch ein weiteres Thema hinzugefügt werden.[11]

Das Thema der Krümmung ebener Kurven im ersten Block wird von allen Gruppen bearbeitet. Die Themen „Rotationsflächen“, „längen-, flächen- und winkeltreue Abbildungen“ und gegebenenfalls weitere Themen im vierten Block werden nur von einer Gruppe bearbeitet.

[11] Im Wintersemester 17/18 gab es außerdem noch die isoperimetrische Ungleichung in der Ebene als ein Thema, aber dies erwies sich als eher ungeeignet, weshalb es im Wintersemester 18/19 nicht verwendet wurde.

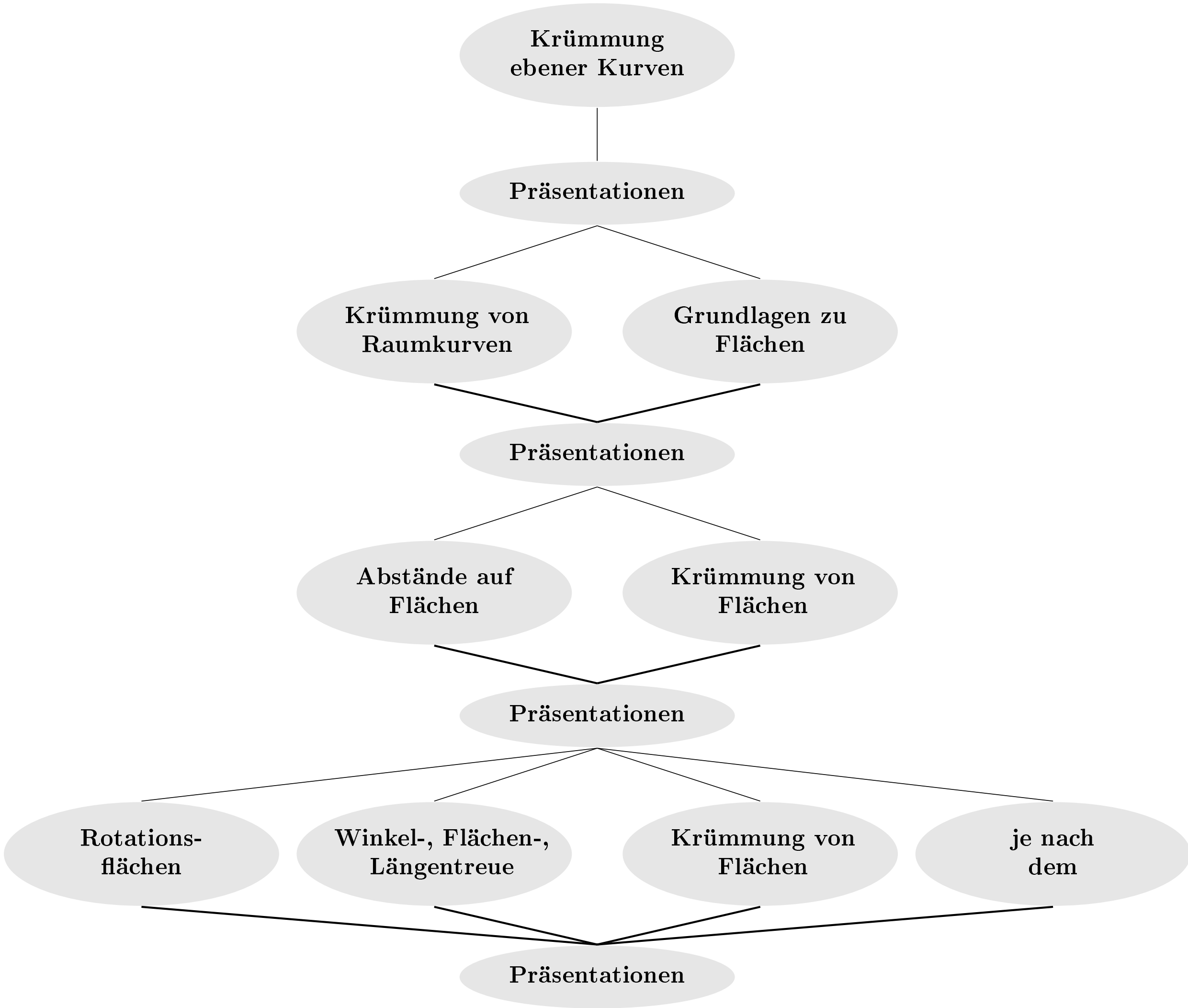


Abbildung 2.1.: Übersicht über die Themeneinheiten

Alle weiteren Themen werden von zwei Gruppen bearbeitet.

2.4.1. Krümmung ebener Kurven

Beim Thema „Krümmung ebener Kurven"[12] ist das Ziel, die Krümmung ebener Kurven quantitativ zu erfassen, also eine Definition oder Formel für die Krümmung herzuleiten. Aus der Schule kennen die StudentInnen die qualitativen Begriffe rechts- und linksgekrümmt. Eine quantitative Beschreibung der Krümmung wird jedoch sowohl in der Schule als auch im Grundstudium an der Universität nur selten behandelt.

Die TeilnehmerInnen durchlaufen in ihren Gruppen zum Einstieg vier Stationen, an denen sie ganz praktisch etwas ausprobieren können. Ein Arbeitsblatt (siehe Anhang S. 148) enthält zu jeder Station Denkanstöße in Form von Fragen, um die Aufmerksamkeit der TeilnehmerInnen auf die relevanten Punkte zu lenken. Die Stationen können von den TeilnehmerInnen in einer beliebigen Reihenfolge besucht werden.

An der Station „City-Roller" können die TeilnehmerInnen mit einem Fahrrad oder City-

[12] Die folgende Beschreibung der Einheit „Krümmung ebener Kurven" ist angelehnt an den entsprechenden Abschnitt in Hilken (2020).

Roller Kurven fahren. Mit Kreide können sie auch Kurven auf den Boden zeichnen, um das Abfahren bestimmter Kurven zu erleichtern und verschiedenen Kurven besser vergleichen zu können. Das Arbeitsblatt regt dazu an, zu beobachten, wann der City-Roller beim Fahren aufrecht ist und wann nicht, wann er ganz gerade ist und wann nicht. Die StudentInnen haben an dieser Station die Gelegenheit, bewusst wahrzunehmen, dass man bei Kreisen den Lenker, wenn er einmal eingeschlagen ist, nicht mehr bewegen muss und darf. Auch eine Abhängigkeit zwischen dem Einschlagwinkel des Lenkers und dem Radius des gefahrenen Kreises lässt sich hier feststellen. Zudem können sich die StudentInnen die Bedeutung eines Wendepunktes an dieser Station ganz praktisch vergegenwärtigen.

An der Station „Ball“ werfen sich die TeilnehmerInnen Bälle zu und beobachten, an welcher Stelle die Flugbahn am stärksten gekrümmt ist und wo am wenigsten. Die TeilnehmerInnen können dabei darauf aufmerksam werden, dass die Krümmung einer Kurve an verschiedenen Punkten unterschiedlich stark sein kann, also eher eine lokale als eine globale Eigenschaft ist.

An der Station „Kreide“ malen die TeilnehmerInnen mit Kreide Kurven auf den Boden und laufen diese ab. Dabei geht ein Fuß rechts an der Kurve entlang und der andere links. Wenn die Kurve gekrümmt ist, legen die Füße dabei unterschiedlich weite Wege zurück. Die StudentInnen können dabei erfahren, dass sich „Parallelkurven“ in ihrer Länge unterscheiden und zwar um so mehr, je stärker die Krümmung ist.

An der Station „Gegenstände“ gehen die TeilnehmerInnen auf die Suche nach Gegenständen, die man mit etwas Abstraktion als eindimensional bezeichnen könnte und die gekrümmt sind, beispielsweise Türklinken, Bananen oder der Rand einer Stuhllehne. Dabei können sie, wie an der Station „Ball“, darauf aufmerksam werden, dass Krümmung eine lokale Eigenschaft ist. Des Weiteren können die StudentInnen einen gewissen Alltagsbezug herstellen, da Krümmung ein Phänomen ist, welches sich überall in der Umwelt beobachten lässt.

Die DozentInnen gehen während dieser Phase zwischen den Stationen hin und her und hören sich die Ideen aufmerksam an, um die StudentInnen später bei der konkreten Ideenfindung und Ausarbeitung gegebenenfalls an ihre eigenen Erfahrungen erinnern zu können.

Wenn alle Gruppen alle Stationen besucht haben, versammeln sich alle wieder im Seminarraum. Die TeilnehmerInnen erhalten nun die Möglichkeit, kurz ihre Beobachtungen und Eindrücke den anderen mitzuteilen. Anschließend wird das zweite Arbeitsblatt (siehe Anhang S. 150) verteilt. Die Aufgaben enthalten einige Plots von glatten, regulär parametrisierten Kurven, die ein breites Spektrum abdecken: die Gerade als Kurve ohne Krümmung, der Kreis als Kurve konstanter Krümmung, Kurven mit eindeutigem Krümmungsmaximum oder -minimum, Funktionsgraphen und Nicht-Funktionsgraphen... Die TeilnehmerInnen markieren Punkte auf den Kurven, an denen die Krümmung anschaulich besonders groß oder besonders klein ist. Sie überlegen, welche Krümmungswerte eine Methode zur Berechnung der Krümmung sinnvollerweise für eine Gerade oder einen Kreis ausgeben sollte. Außerdem begründen sie, ob und warum bei Funktionsgraphen die zweite Ableitung der Funktion (k)ein Maß für die Krümmung sein könnte. Anschließend versuchen sie, eine Definition für die Krümmung zu finden. Die DozentInnen unterstützen hierbei und können die Gruppen dabei behutsam in unterschiedliche Richtungen lenken. Denn oft werden in jeder Gruppe verschiedene Ideen diskutiert, sodass man die eine Gruppe beispielsweise in Richtung der Winkeländerung und eine andere in Richtung Schmiegekreise lenken kann, ohne einer Gruppe eine Idee vorzugeben, die gar nicht von der Gruppe kommt. Dass verschiedene Gruppen unterschiedliche Ansätze nutzen, ist nicht notwendig, kann die spätere Präsentation der Ergebnisse aber abwechslungsreicher und interessanter machen.

Während der Gruppenarbeitsphase in der ersten oder zweiten Stunde werden vier Zusatzaufgaben an die Gruppen verteilt (Anhang S. 152). Die Zusatzaufgaben sind die Entwicklung einer Formel für die Länge einer Kurve, Überlegungen zur Parametrisierung nach Bogenlänge, die Frage nach verschiedenen Beschreibungsmöglichkeiten von ebenen Kurven und die Frage, ob eine Kurve durch ihre Krümmung eindeutig bestimmt ist. Sinnvollerweise werden die ersten beiden Zusatzaufgaben Gruppen gegeben, die einen Zugang gewählt haben, bei dem sie die Länge von Kurven berechnen müssen bzw. bei dem das Parametrisieren nach Bogenlänge hilfreich sein kann. Den anderen Gruppen kann die Formel zur Berechnung der Länge von Kurven bei Bedarf ausgehändigt werden, um ihnen Arbeit zu ersparen. Die Frage nach der Eindeutigkeit der Kurve kann mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf beantwortet oder direkt nachgerechnet werden.

2.4.2. Raumkurven

Beim Thema Raumkurven ist das Ziel, sich zu überlegen, was Krümmung bei Raumkurven ist und wie man sie beschreiben könnte (siehe Anhang S. 153). Den TeilnehmerInnen stehen verschiedene Materialien wie Draht, Knete, Strohhalme, ein Spielzeugflugzeug, Pappe und Reepschnüre zur Verfügung. Mit einer Reepschnur oder einem Stück Draht können sie sich Raumkurven basteln und ihre Ideen gut veranschaulichen, vielleicht sogar bis zu einem gewissen Grad ausprobieren. Mit dem Flugzeug kann man sich gut die Tangente und mittels der Tragflächen und der Seitenflosse sogar Normale und Binormale vorstellen. Dies hilft bei Diskussionen über Normalen oder die Schmiegeebene. Ein Dreibein kann auch mit Knete und Strohhalmen erstellt werden. Die Pappen können als Schmiege- oder Normalenebenen dienen. Die Materialsammlung enthält zudem einen zu einem Kreis geschlossenen Nylonfaden, dessen Größe verändert werden kann. Dieser Nylonkreis kann als „Krümmungsmesser“ bei ebenen Kurven dienen und bei Raumkurven die Schmiegeebene verdeutlichen.

Das Arbeitsblatt enthält weniger Arbeitsaufträge als die Arbeitsblätter beim ersten Thema, da die StudentInnen mit der Arbeitsweise nun schon vertrauter sind.

2.4.3. Flächen und Flächeninhalt

Beim Thema Flächen ist das Ziel, Möglichkeiten zur Beschreibung von Flächen zu entwickeln und Tangenten an Kurven zu Tangentialebenen an Flächen zu verallgemeinern. Außerdem soll eine Möglichkeit gefunden werden, den Flächeninhalt eines gekrümmten Flächenstückes zu berechnen (siehe Anhang S. 154). Die TeilnehmerInnen erhalten verschiedene Flächen wie einen Wasserballglobus, einen Torus, eine Wendelfläche, eine gehäkelte hyperbolische Fläche und Luftballons, außerdem Papier, Pappe und Klebeband. Die StudentInnen können mit den Flächen versuchen, ihre Ideen zur Beschreibung von Flächen auf konkrete Beispiele anzuwenden oder Ideen für konkrete Flächen auf alle Flächen zu verallgemeinern. Tangentialebenen lassen sich mit einem Stück Pappe gut veranschaulichen.

2.4.4. Geodäten

Beim Thema Abstände (Geodäten) sollen die TeilnehmerInnen darüber nachdenken, wie man auf einer gekrümmten Fläche Abstände messen kann (siehe Anhang S. 155). Die TeilnehmerInnen erhalten verschiedene Flächen wie einen Wasserballglobus, einen Torus, eine Wendelfläche, eine gehäkelte hyperbolische Fläche und Luftballons, außerdem Papier, Pappe und Klebeband. Die anfassbaren Flächen können verschiedene Zugänge zum Thema unterstützen. Faltbare Flächen wie die gehäkelte hyperbolische Fläche und Papier erleichtern es, über Geraden und ihre Symmetrien nachzudenken, da jeder Falz ein Stück einer Geodäte in der Fläche darstellt. Am Wasserballglobus wird schnell deutlich, dass es mehrere kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten geben kann. Bei der Beschäftigung mit der hyperbolischen Fläche wird deutlich, dass es auch anschaulich schwierig sein kann, eine Verbindung kürzesten Abstands zwischen zwei Punkten zu finden.

Bei diesem Thema ist möglicherweise etwas mehr Unterstützung nötig, um die Gruppen auf die Spur der Variationsrechnung zu bringen oder einen physikalischen Ansatz finden zu lassen, bei dem die Beschleunigung die relevante Größe ist (siehe 2.5.4).

2.4.5. Krümmung von Flächen

Beim Thema „Krümmung von Flächen“ ist das Ziel, einen Krümmungsbegriff für Flächen zu entwickeln (siehe Anhang S. 156). Dies kann die Gaußkrümmung sein oder die mittlere Krümmung oder die Krümmung von Schnittkurven mit Normalenebenen. Eine Frage auf dem Arbeitsblatt gibt den Anstoß, über Kurven nachzudenken, die in der Fläche liegen, da die StudentInnen die Krümmung von ebenen Kurven und Raumkurven schon kennen. Eine andere Frage zielt auf den Unterschied von intrinsischer und extrinsischer Krümmung ab. Die TeilnehmerInnen erhalten wieder verschiedene Flächen wie einen Wasserballglobus, einen Torus, eine Wendelfläche, eine gehäkelte hyperbolische Fläche und Luftballons, außerdem Papier, Pappe und Klebeband.

2.4.6. Rotationsflächen

Beim Thema Rotationsflächen ist das Ziel, eine allgemeine Parametrisierung für Rotationsflächen zu finden und mehr über ihren Flächeninhalt oder Geodäten auf Rotationsflächen herauszufinden (siehe Anhang S. 157). Von den zwei Integralen bei der allgemeinen Flächeninhaltsformel kann bei Rotationsflächen eines berechnet werden. Das übrige Integral lässt sich geometrisch interpretieren als Grenzprozess der Summe von Kegelstümpfen, die die Rotationsfläche annähern. Bei Rotationsflächen lassen sich in einigen Spezialfällen die Geodäten angeben. Die TeilnehmerInnen erhalten Rotationsflächen wie einen Wasserball und einen Torus und können sich aus Papier und Klebeband Zylinder und Kegel basteln. Eine Parametrisierung der Sphäre wird üblicherweise schon im zweiten oder dritten Themenblock von einer Gruppe vorgestellt.

2.4.7. Längen-, Flächen- und Winkeltreue

Beim Thema „Längen-, Flächen- und Winkeltreue“ sollen die TeilnehmerInnen sinnvolle Definitionen für die Begriffe Längen-, Flächen- und Winkeltreue einer Parametrisierung entwickeln (siehe Anhang S. 158). Außerdem sollen sie Beziehungen zwischen diesen Begriffen untersuchen. Zudem wird die Frage aufgeworfen, ob es eine längentreue Landkarte der Erde (genauer: $\mathbb{S}^2$) gibt. Zum Einstieg in dieses Thema wird das Programm „The Sphere of the Earth“ von Daniel Ramos (Ramos 2021b) verwendet. Es ist der Vorgänger von „Mappae Mundi“ (Ramos 2021a). Mit diesem Programm kann man verschiedene Karten der Erde auf ihre Längen-, Flächen- und Winkeltreue untersuchen. Für den Beweis, dass es keine längentreue Karte der Erde gibt, wird der Gruppe nach einer gewissen Zeit ein Ausschnitt aus einem Skript (Kuwert 2006, S. 38-39) zur Verfügung gestellt. Insgesamt ist dieses Thema zu lang für einen Vortrag. Die StudentInnen sollen daher auswählen, welche Beziehungen zwischen den drei Eigenschaften sie im Vortrag ansprechen und beweisen. Der Beweis, dass es keine längentreue Karte der Erde gibt, kann im Vortrag als Beweisskizze vorgestellt werden.

2.4.8. Krümmung von Flächen, Teil 2

Da die Krümmung von Flächen im dritten Themenblock in beiden Semestern nicht erschöpfend bearbeitet worden war, konnte dieses Thema im vierten Themenblock weitergeführt werden. Im Wintersemester 17/18 war im dritten Themenblock sowohl die Gauß- als auch die mittlere Krümmung geometrisch hergeleitet worden. Eine Gruppe erhielt den Auftrag, die Gaußkrümmung mit den Fundamentalformen bzw. der Weingartenabbildung in Verbindung zu bringen (siehe Anhang S. 159).

Im Wintersemester 18/19 hatten beide Gruppen die mittlere Krümmung hergeleitet. Eine Gruppe betrachtete deshalb im vierten Themenblock bei verschiedenen Quadriken die mittlere Krümmung sowie einen Vorschlag für einen anderen Krümmungsbegriff (Gaußkrümmung), um sich so der Anschauung von intrinsischer und extrinsischer Krümmung zu nähern (siehe Anhang S. 161). Eine andere Gruppe bekam den Auftrag, die Krümmung von Flächen auf einem ähnlichen Weg wie bei den Kurven herzuleiten, um so die Gaußkrümmung zu erhalten (siehe Anhang S. 160).

Die TeilnehmerInnen können wieder auf die verschiedenen Flächen und Bastelmaterialien zurückgreifen.

2.5. Die Themen – Mathematische Inhalte, studentische Lösungen

In diesem Abschnitt werden einige der mathematischen Inhalte und der Zugänge und Lösungen der StudentInnen dargestellt. Die vollständigen Ausarbeitungen der StudentInnen werden in Form des Skriptes auf Nachfrage gerne zur Verfügung gestellt.

2.5.1. Krümmung ebener Kurven

Dieser Abschnitt ist eine ausführlichere Version des entsprechenden Abschnitts im Artikel Hilken (2020).

Die Krümmung ebener Kurven kann auf verschiedenen Wegen hergeleitet oder veranschaulicht werden. Die folgende Liste enthält eine Übersicht über die in der Literatur beschriebenen oder von StudentInnen im Seminar gefundenen Wege.

Im Folgenden sei die Kurve γ als Graph einer glatten Funktion f oder durch eine (beliebige) reguläre, glatte Parametrisierung gegeben. Auf der Kurve sei ein Punkt P gewählt, an dem die Krümmung κ bestimmt werden soll.

A. Zugänge über Krümmungskreise: Bei Zugängen über Krümmungskreise wird die Krümmung des Kreises als Kehrwert des Radius' definiert. Alle anderen Kurven werden im untersuchten Punkt P durch einen Kreis approximiert. Dieser Kreis heißt Schmiegekreis. Das Vorzeichen der Krümmung wird von der Parametrisierung des des Kreises bestimmt.

a) geometrisch: Neben P werden zwei weitere Punkte $P_1 = \gamma(t_0 - h)$ und $P_2 = \gamma(t_0 + h)$ auf der Kurve gewählt (siehe Abb. 2.2[13]). Diese drei Punkte bestimmen im Allgemeinen einen eindeutigen Kreis, dessen Mittelpunkt als Schnittpunkt der Normalen auf den

[13]Die Abbildungen 2.4-2.9 wurden ganz oder teilweise von den studentischen Hilfskräften Axel Fehrenbach und Olivia Vičánek Martínez erstellt.

Sekanten der Kurve berechnet werden kann. Beim Grenzübergang $h \to 0$, d. h. wenn P_1 und P_2 gegen P gehen, wird aus dem Kreis der Schmiegekreis an die Kurve in P. Dieser Zugang wird von Bauer, Gromes und Partheil (2016) für Graphen beschrieben und wurde im Seminar für allgemein parametrisierte Kurven entwickelt.

b) analytisch: Um für eine graphisch parametrisierte Kurve einen Schmiegekreis zu bestimmen, wird ein Halbkreis k ebenfalls graphisch parametrisiert. Mittels der folgenden Bedingungen werden die Parameter der Parametrisierung bestimmt: f und k sollen in P in der nullten, ersten und zweiten Ableitung übereinstimmen, d. h. $f(t_0) = k(t_0)$, $f'(t_0) = k'(t_0)$ und $f''(t_0) = k''(t_0)$. Der Kreismittelpunkt liegt dabei auf der Normalen an die Kurve durch P. Dieser Zugang entspricht im Wesentlichen einer Taylor-Approximation zweiten Grades.
Dieser Zugang wird in Bauer, Gromes und Partheil (2016) und der dort angegebenen Literatur beschrieben und wurde auch im Seminar entwickelt.

c) geometrisch-analytisch 1: Neben P wird ein weiterer Punkt $P_1 = (t_0 + h, f(t_0 + h))$ auf der graphisch parametrisierten Kurve gewählt (siehe Abb. 2.3). Der Schnittpunkt der Normalen zu den Tangenten in den beiden Punkten wird als Mittelpunkt eines Kreises gewählt und der Abstand vom Mittelpunkt zu P als dessen Radius. Beim Grenzübergang $h \to 0$, d. h. wenn P_1 gegen P geht, wird aus dem Kreis der Schmiegekreis an die Kurve in P.[14]

d) geometrisch-analytisch 2: Neben P wird ein weiterer Punkt $P_1 = (t_0 + h, f(t_0 + h))$ auf der graphisch parametrisierten Kurve gewählt. Ein Kreis wird nun dadurch bestimmt, dass sein Mittelpunkt auf der Normalen zur Tange in P liegt und dass er außerdem den Punkt P_1 enthält. Beim Grenzübergang $h \to 0$, d. h. wenn P_1 gegen P geht, wird aus dem Kreis der Schmiegekreis an die Kurve in P.

e) Schmiegeparabel: Anstelle eines Kreises kann auch eine Parabel an die Kurve angeschmiegt werden. Dazu wird zunächst die Krümmung von Parabeln im Scheitel mittels eines Schmiegekreises bestimmt. Dann wird eine Parabel im Scheitelpunkt in P an die Kurve angeschmiegt (siehe Abb. 2.6). Hierbei wird der Zusammenhang mit der Taylor-Approximation noch deutlicher als beim analytischen Zugang b).

B. Krümmungsdreiecke: Ähnlich wie bei der Herleitung der Tangente ein Steigungsdreieck verwendet wird, kann auch die Krümmung über ein Dreieck bestimmt werden, nämlich als Abweichung der Kurve von einer Geraden.

a) Abstand zur Tangente: Die Krümmung wird definiert als Grenzwert des Verhältnisses des doppelten Abstands der Kurve zur Tangente in P und dem entsprechenden Tangentenabschnitt: $\kappa = \lim \frac{2 \cdot \text{Abstand}}{\text{Tangentenabschnitt}^2}$ (siehe Abb. 2.4).
Dieser Zugang wird für parametrisierte Kurven beschrieben von Bauer, Gromes und Partheil (2016).

b) Es lassen sich weitere Dreiecke aus Tangente oder Sekante und dem Abstand der Kurve dazu finden, die beim Grenzübergang die Krümmung der Kurve angeben. Drei dieser Varianten werden Bauer, Gromes und Partheil (2016) skizziert.

C. Tangenten-/Winkeländerung: Die Krümmung kann aus der Änderung der Richtung der Tangenten hergeleitet werden: Je stärker eine Kurve in einem Punkt gekrümmt ist, desto mehr ändert die Tangente dort ihre Richtung.

[14] Dank an Lea Lange für den Hinweis auf diesen Zugang.

a) Tangentenänderung: Die Krümmung wird definiert als Änderung der Tangente bezüglich der Normalen relativ zur Bogenlänge: $\kappa(t_0) = \lim \frac{\langle \gamma'(t), n(t_0)\rangle}{\int |\gamma'(\tau)|} d\tau$.
Dieser Zugang wird von Bauer, Gromes und Partheil (2016) beschrieben.

b) Winkeländerung: Die Krümmung wird definiert als Änderung des Winkels der Tangente bezüglich der Normalen relativ zur Bogenlänge: $\kappa(t_0) = \lim \frac{\varphi(t)}{\int |\gamma'(\tau)|} d\tau$ (siehe Abb. 2.7).
Dieser Zugang wird von Bauer, Gromes und Partheil (2016) beschrieben und wurde auch im Seminar in verschiedenen Varianten entwickelt.

c) Winkeländerung bei Graphen: Die Krümmung wird definiert als Änderung des Winkels der Tangente bezüglich (einer Parallelen zu) der t-Achse: $\kappa = \lim \frac{\varphi(t)}{\int |\gamma'(\tau)|} d\tau$ mit $\varphi = \arctan(f'(t_0 + h)) - \arctan(f'(t_0))$ (siehe Abb. 2.8).
Dieser Zugang wird von Steinberg (1985) beschrieben und wurde auch im Seminar entwickelt.

D. Parallele Kurven: Verschiebt man jeden Kurvenpunkt um h entlang seiner Normalen, erhält man eine Parallelkurve γ_h zu γ.

a) Längenvergleich: Die Differenz der Länge eines Abschnitts einer äußeren und einer inneren Parallelkurve (γ_{+h} mit Länge L_{+h} bzw. γ_{-h} mit Länge L_{-h}) wird ins Verhältnis gesetzt mit dem Quadrat der Länge L des entsprechenden Abschnitts der Originalkurve γ: $\kappa(t_0) = \lim \frac{L_{+h} - L_{-h}}{L^2}$ (siehe Abb. 2.9).
Dieser Zugang wurde im Seminar entwickelt.

b) maximaler Abstand: Es wird der maximale Abstand der (inneren) Parallelkurve zur Originalkurve γ berechnet, sodass sich die Parallelkurve nicht selbst schneidet. Die Krümmung wird definiert als Kehrwert dieses Abstands. (Die Parallelkurve beschreibt den Weg des Mittelpunktes eines auf γ rollenden Kreises. Im Grenzfall entspricht dieser Kreis in P dem Schmiegekreis, was das Kehrwert-Nehmen erklärt.)
Dieser Zugang wird für Graphen beschrieben von Wunderling (2001).

Vollständig ausgearbeitete Versionen der Zugänge A.a,b,c,e und C.b,c und D.a,b sind in Anhang A.2 zu finden.

Durch die verschiedenen Zugänge zur Krümmung ebener Kurven können verschiedene Grundvorstellungen zur Krümmung aufgebaut werden. Bauer, Gromes und Partheil (2016, S. 16) beschreiben vier Grundvorstellungen. Eine Grundvorstellung ist die der Krümmung als inversem Krümmungsradius. Der Krümmungskreis kann dabei als Grenzwert von Drei-Punkte-Kreisen (Zugang A.a) oder als Approximation zweiter Ordnung (Zugang A.b,e) angesehen werden. Diese Vorstellungen sind analog zur Vorstellung der Tangente als Grenzwert von Sekanten bzw. als linearer Approximation. Eine weitere Grundvorstellung ist die der Krümmung als einer Abweichung von einer Geraden (Tangente oder Sekante, Zugänge B). Die dritte von Bauer, Gromes und Partheil (2016) genannte Grundvorstellung ist die der Krümmung als relative Tangentenänderung (Zugang C.a). Die vierte Grundvorstellung ist die der Krümmung als relative Winkeländerung (Zugänge C.b,c). Zugang D.a deutet auf eine weitere, von Bauer, Gromes und Partheil (2016) nicht genannte Grundvorstellung von Krümmung hin, nämlich Krümmung als Verhältnis der Längen von Kurvenabschnitten.

Die verschiedenen Zugänge setzen unterschiedliche viel Vorwissen voraus. Die analytische (A.b) und die geometrisch-analytische (A.c) Herleitung des Schmiegekreises sowie eventuell Zugang D.b über Parallelkurven maximalen Abstands sind mit Schulwissen nachvollziehbar, wenn die Grenzwerte bei A.c über die Differenzenquotienten berechnet werden und nicht mit

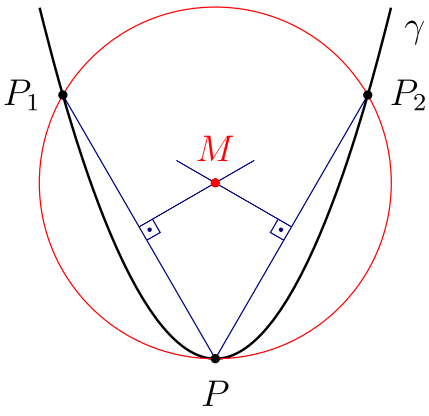


Abbildung 2.2.: Krümmungskreis geometrisch bestimmt mit Hilfe von drei Punkten[13]

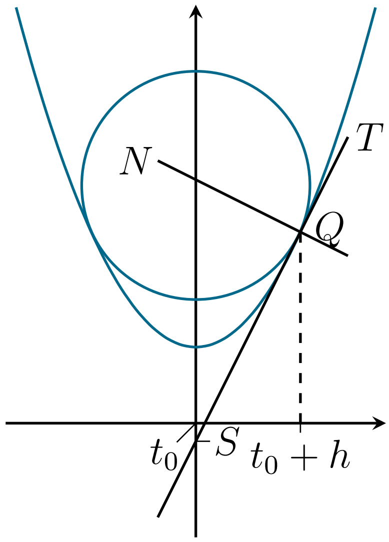


Abbildung 2.5.: Bestimmung eines Schmiegekreises im Scheitel einer Parabel[13]

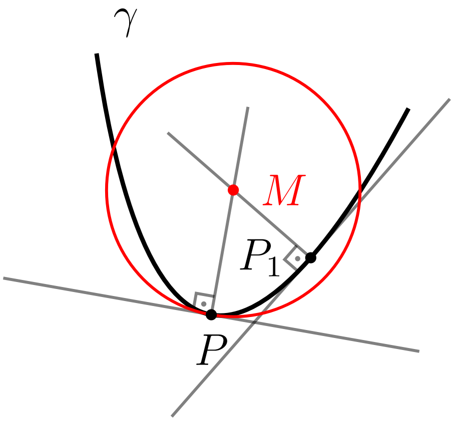


Abbildung 2.3.: Krümmungskreis bestimmt mit Hilfe zweier Tangenten[13]

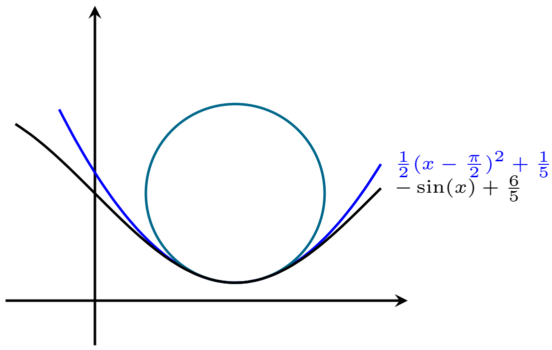


Abbildung 2.6.: Schmiegekreis und Schmiegeparabel[13]

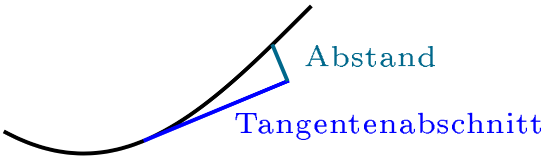


Abbildung 2.4.: Krümmungsdreieck[13]

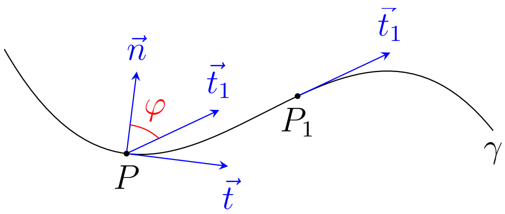


Abbildung 2.7.: Winkeländerung der Tangente bezüglich der Normalen[13]

dem Satz von L’Hospital oder anderen fortgeschrittenen Methoden. Für die anderen Zugänge werden Inhalte der Vorlesungen Linearen Algebra oder Analysis benötigt, beispielsweise der Satz von L’Hospital oder der Satz über die implizite Funktion. Für eine eingehendere Analyse des didaktischen Potenzials des Themas und möglicher Umsetzungen in der Schule siehe Büchter und Henn (2013).

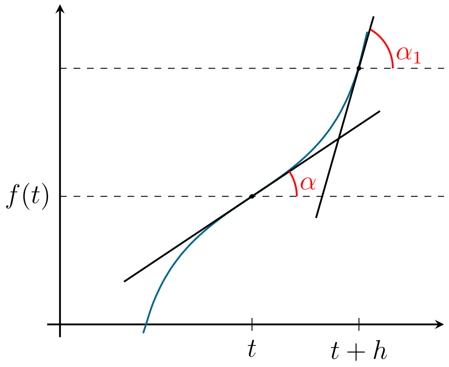


Abbildung 2.8.: Winkeländerung der Tangente bezüglich der t-Achse[13]

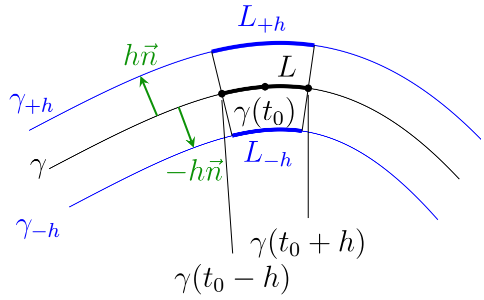


Abbildung 2.9.: Längenvergleich der Parallelkurven mit der Originalkurve[13]

In vielen Lehrbüchern wird die Krümmung anhand von nach Bogenlänge parametrisierten Kurven eingeführt, beispielsweise in Do Carmo (1993), Oprea (2007) und Bär (2010). Eine anschauliche Bedeutung der Krümmung wird meist kurz angedeutet, aber nicht für eine vollständige Herleitung der Definition verwendet.

In den beiden erstgenannten Lehrbüchern wird Zugang C angesprochen. Do Carmo (1993, S. 14) erklärt, dass der Betrag der zweiten Ableitung der Kurve die Änderungsrate des Winkels benachbarter Tangenten darstellt, also wie schnell sich die Kurve von der Tangente wegdreht. Ganz ähnlich benennt Oprea (2007, S. 17) den Betrag der zweiten Ableitung der Kurve als Änderungsrate der Richtung der Tangente. In beiden Lehrbüchern wird die Krümmung dabei direkt für Kurven im $\mathbb{R}^3$ eingeführt, ohne eine explizite Untersuchung der Krümmung ebener Kurven.

Bär (2010, S. 41) führt die Krümmung für ebene Kurven ein. Er stellt fest, dass die zweite Ableitung der Kurve ein Vielfaches des Normalenvektors ist und dass somit eine Funktion existiert, die an jedem Punkt den entsprechenden Faktor angibt: $\gamma''(t) = \kappa(t)n(t)$. Diese Funktion definiert er als Krümmung. Anschaulich sei die Krümmung ein Maß dafür, wie stark die Kurve von einer Gerade abweicht.

In Lehrbüchern wird bei der Einführung des Krümmungsbegriffs also nur eine Grundvorstellung angesprochen und dies meist nur sehr kurz als eine Art Plausibilisierung des Vorgehens, nicht um die Krümmung auf der Basis einer geometrischen Anschauung herzuleiten. Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ werden hingegen verschiedene Grundvorstellungen angesprochen, da die Gruppen ihre Definitionen der Krümmung meist auf unterschiedlichen Grundvorstellungen aufbauen. Diese Vielfalt der Zugänge wurde von den StudentInnen in schriftlichen Reflexionen als sehr interessant und bereichernd hervorgehoben.

Verbindungen zwischen den verschiedenen Zugängen und den Hands-on-Aktivitäten

Zu Beginn des Themas „Krümmung ebener Kurven“ durchlaufen die StudentInnen vier Stationen mit Hands-on-Aktivitäten. Die Hands-on-Aktivitäten regen verschiedene Vorstellungen zur Krümmung an, die für manche der vorgestellten Zugänge eine Grundlage bilden können, siehe auch Tabelle 2.3.[15]

Beim Abfahren oder Ablaufen von Kreisen stellen die TeilnehmerInnen schnell einen Zu-

[15] Dieser Abschnitt ist angelehnt an den entsprechenden Abschnitt in Hilken (2020).

sammenhang zwischen dem Radius und der Krümmung des Kreises her. In den Worten einer Teilnehmerin:[16] „Das Ablaufen der Kurven mit den Füßen hat dabei geholfen ein Gefühl für die Abhängigkeit der Krümmung eines Kreises vom Radius zu bekommen. Man konnte also als Beobachtung formulieren, dass je größer der Radius des Kreises ist, desto schwächer die Krümmung sein muss.“ Da die Krümmung von Kreisen einfach zu bestimmen ist, kommen manche TeilnehmerInnen auf die Idee, mit Hilfe von Kreisen die Krümmung anderer Kurven zu bestimmen. Sie können dann einen der Wege mit Schmiegekreisen einschlagen (Zugänge A). Diese Idee kann auch durch das Abfahren der Kurven unterstützt werden. Fährt man eine beliebige Kurve entlang und hält an einer Stelle den Lenkereinschlag fest, verlässt man die Kurve und fährt einen Kreis, der die Kurve an der Stelle gut annähert und die Krümmung beschreibt. Der gefahrene Kreis entspricht einem Schmiegekreis.

Andere TeilnehmerInnen richten ihr Augenmerk bei dieser Station vor allem auf den Winkel zwischen Roller- und Vorderradachse oder Roller- und Lenkerachse. Ein Teilnehmer: „Dabei habe ich festgestellt, dass sich Krümmung beispielsweise in der Lenkerausrichtung eines Fahrzeuges manifestiert.“ Diese Betrachtung kann zu einem der Winkeländerungszugänge führen (Zugänge C). Außerdem kann an dieser Station die Bedeutung des Begriffes „Wendepunkt“ nachvollzogen werden, da dort der Lenker „gewendet“ wird.

Auch die Vorstellung von Krümmung als Abweichung von einer Geraden (Zugänge B) kann an der City-Roller-Station erfahren werden: Fährt man eine Kurve, weicht man von der Geraden ab. Je enger die Kurve, um so größer ist die Abweichung. Die Idee der Krümmung als Abweichung von einer Geraden wurde von verschiedenen StudentInnen im Seminar formuliert, aber nicht im Sinne der Zugänge B vollständig ausgearbeitet.

An der Station, an der die TeilnehmerInnen Kurven ablaufen, kommen einige auf die Idee, die Längen der Originalkurve, der Kurve des linken Fußes und der Kurve des rechten Fußes zu vergleichen. Dies führt auf den Zugang via Längenvergleich (Zugang D.a).

Bei der Station, an der man einander Bälle zuwerfen soll, machen die TeilnehmerInnen verschiedene Beobachtungen zur Krümmung der Parabel, z. B. dass die Krümmung bis zum Höhepunkt monoton wächst. Alle Stationen zusammen helfen den TeilnehmerInnen, einen Alltagsbezug herzustellen. In den Worten eines Teilnehmers: „Ich habe gelernt, in welchen alltäglichen Situationen Krümmung eine Rolle spielt, ob es sich nun um Kurven im Straßenverkehr oder die Flugkurve eines Balls handelt.“

2.5.2. Krümmung von Raumkurven

Die Krümmung von Raumkurven kann, wie auch die Krümmung ebener Kurven, auf verschiedenen Wegen hergeleitet werden. Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ wurden im Wesentlichen drei verschiedene Zugänge entwickelt.

Bei einem Zugang wird die Krümmung von Raumkurven auf die Krümmung ebener Kurven zurückgeführt. Dazu wird eine Ebene bestimmt, die die Kurve im fraglichen Punkt P möglichst gut annähert (*Schmiegeebene*). Die Kurve wird in diese Ebene projiziert und die Krümmung dann gemäß der Formel für ebene Kurven berechnet.

Für die Bestimmung der Ebene fanden die StudentInnen verschiedene Möglichkeiten. Eine Gruppe schloss daraus, dass die Krümmung ebener Kurven aus der ersten und zweiten Ableitung berechnet wird, dass die Ebene von der ersten und zweiten Ableitung aufgespannt wird (falls diese linear unabhängig sind). Eine andere Gruppe berechnete die Ebene „händisch“: Die StudentInnen wählten zwei weitere Punkte P_1, P_2 auf der Kurve und berechneten den

[16] Diese und die folgenden Äußerungen von TeilnehmerInnen stammen aus schriftlichen Reflexionen der TeilnehmerInnen.

Station	**Tätigkeit**	**Zugang/Vorstellung**
City-Roller und Kreide	Kreise ablaufen oder abfahren	Krümmung des Kreises hängt vom Radius ab: $\kappa \sim \frac{1}{r}$. Voraussetzung für alle Zugänge über Schmiegekreise (A).
City-Roller	Kurven (ab)fahren, an einer Stelle den Lenkereinschlag beibehalten, dadurch einen Kreis fahren	Der Kreis entspricht einem Schmiegekreis (A).
	Kurven (ab)fahren, dabei den Winkel zwischen Roller- und Vorderradachse oder der Roller- und Lenkerachse beobachten	Zugang über Winkeländerung (C.b, C.c)
	Abwechselnd Rechts- und Linkskurven fahren	Wendepunkte als Punkte ohne Krümmung wahrnehmen
Kreide	Kurven ablaufen, dabei einen Fuß links und einen Fuß rechts der Kurve; die Füße legen unterschiedlich lange Wege zurück	Zugang via Längenvergleich (D.a)
Ball	Einander Bälle zuwerfen und die Krümmung der Flugbahn beobachten	Beobachtungen zur Krümmung der Parabel, z. B. dass Krümmung bis zum Scheitel monoton wächst

Tabelle 2.3.: Verbindungen zwischen den verschiedenen Zugängen und den Hands-on-Aktivitäten

Normalenvektor der Ebene, die von PP_1 und PP_2 aufgespannt wird. Im Limes wird durch diesen Normalenvektor die Schmiegeebene bestimmt.

Nach der Bestimmung der Schmiegeebene wird die Kurve auf die Ebene projiziert. Dazu führten die StudentInnen einen Basiswechsel durch zu einer Orthonormalbasis, bestehend aus der normierten ersten Ableitung, einem weiteren Spannvektor der Schmiegeebene und dem Normalenvektor. Die Projektion der Kurve auf die Schmiegeebene entspricht dann der Projektion auf die ersten beiden Komponenten in der neuen Basis. Damit konnte schließlich die Formel für die Krümmung ebener Kurven verwendet werden. Dieser Zugang lässt sich für nach Bogenlänge parametrisierte und allgemein parametrisierte Kurven durchführen.

Bei einem anderen Zugang wandten die StudentInnen die Idee der Krümmung als relativer Winkeländerung auf Raumkurven an. Diese Anschauung wird auch in Lehrbüchern vermittelt, dient dort aber im Allgemeinen nicht der vollständigen Herleitung einer Formel zur Berechnung der Krümmung (Do Carmo 1993; Oprea 2007). Die Berechnung des Winkels erfolgt in diesem Fall nicht über das Skalarprodukt wie bei ebenen Kurven, sondern über das Kreuzprodukt. Der Winkel zwischen zwei Tangenten wird wie im ebenen Fall ins Verhältnis zur Länge des entsprechenden Kurvenabschnitts gesetzt.

Bei einem dritten Zugang wird die Idee des Schmiegekreises in Form einer Schmiegehelix auf Raumkurven übertragen. Die Helix ist eine Raumkurve konstanter Krümmung und enthält den Kreis als ebenen Spezialfall. Diese Idee wurde im Seminar nicht ausgearbeitet.

Stattdessen griff eine Teilnehmerin dieses Thema in ihrer Abschlussarbeit auf (Schneider 2021).

In vielen Lehrbüchern wird die Krümmung von Kurven von Anfang an für Raumkurven eingeführt (Do Carmo 1993; Oprea 2007), sodass ein Rückgriff auf die Krümmung ebener Kurven oder die Methoden zur Herleitung derselben nicht möglich ist. Bär (2010, S. 65-67) definiert die Krümmung von Raumkurven in eher symbolischer als geometrischer Analogie zur Krümmung ebener Kurven als $\kappa = |\gamma''|$ und veranschaulicht die Krümmung wie im ebenen Fall als Abweichung der Kurve von einer Geraden.

2.5.3. Flächen und Flächeninhalt

Beim Thema „Flächen und Flächeninhalt“ sollen sich die StudentInnen überlegen, wie man Flächen mathematisch beschreiben kann. Analog zu Tangenten an Kurven entwickeln sie anschließend das Konzept der Tangentialebene und sie entwickeln eine Möglichkeit, den Flächeninhalt gekrümmter Flächen zu berechnen.

Die Zugänge der StudentInnen zur Bestimmung von Flächeninhalten waren im Wesentlichen gleich: Die Fläche wird in ein Gitter aus Kreuzungen von Koordinatenlinien unterteilt. An jedem Gitterpunkt wird der Flächeninhalt eines Parallelogramms berechnet. Die Flächeninhalte dieser Parallelogramme werden aufsummiert. Im Limes ergibt sich schließlich der Flächeninhalt der Fläche oder des Flächenstücks. Unterschiede zwischen den Bearbeitungen der Gruppen ergaben sich in der Wahl der Parallelogramme. Manche Gruppen wählten an jedem Punkt ein Parallelogramm in der Tangentialebene, dessen Kantenlängen durch die Differenz der Koordinatenwerte bestimmt ist (Δu, Δv). Andere Gruppen wählten jeweils das Parallelogramm, dass von drei benachbarten Gitterpunkten auf der Fläche aufgespannt wird (also von $P(u,v)$, $P(u+\Delta u)$ und $P(u, v+\Delta v)$). Do Carmo (1993, Abschnitt 2.8) beschreibt eine weitere Möglichkeit, den Flächeninhalt zu bestimmen: Die Fläche wird in (bis auf Randpunkte) disjunkte Flächenstücke zerlegt. Jedes Flächenstück wird auf die Tangentialebene an einen der Punkte des Flächenstückes projiziert. Wählt man eine Folge immer feinerer Zerlegungen, ergibt sich der Inhalt der Fläche als Grenzwert der Summe der Flächeninhalte der Projektionen.

2.5.4. Geodäten

Beim Thema Geodäten gehen die StudentInnen der Frage nach, wie auf gekrümmten Flächen Abstände gemessen werden können. Den Abstand zwischen zwei Punkten auf einer Fläche definierten die StudentInnen im Seminar als die Länge der kürzesten Kurve, die die beiden Punkte verbindet.

Davon ausgehend leiteten die StudentInnen eine Bedingung her, die solch kürzeste Verbindungen erfüllen müssen, nämlich dass die zweite Ableitung der Verbindungskurve an jedem Punkt der Kurve parallel zur Normale der Tangentialebene der Fläche am entsprechenden Punkt ist: für alle t. Diese Bedingung leiteten die StudentInnen mittels Variationsrechnung her: Sie nahmen an, eine kürzeste Verbindungskurve zu kennen und betrachteten eine dazu homotope Kurvenschar. Die Ausgangskurve muss dann die Kurve minimaler Länge unter Variation des Scharparameters sein. Hierbei geht das Fundamentallemma der Variationsrechnung ein.

Eine andere Begründung fand eine Gruppe durch eine physikalischere Überlegung. Die StudentInnen argumentierten, dass eine „Gerade“ in einer Fläche eine Kurve sein muss, die relativ zur Fläche nicht gekrümmt ist (d. h. deren geodätische Krümmung verschwindet).

Das bedeutet, dass die Beschleunigung an keinem Punkt der Kurve einen Anteil in der Tangentialebene haben darf. Dies liefert ebenfalls die Bedingung $\gamma''(t) \parallel N(t)$.

Die Studenten entwickelten also eine Bedingung, mit der überprüft werden kann, ob eine gegebene Kurve ein „Kandidat“ für eine Kurve minimaler Länge ist. Weitergehende Untersuchungen zur Existenz und Konstruktion von Verbindungskurven minimaler Länge benötigt mehr Vorwissen aus den Bereichen Differentialgleichungen und Differentialgeometrie. Dieser „Mangel“, nur eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung gefunden zu haben, wurde von manchen StudentInnen als unbefriedigend empfunden. Die DozentInnen können in dem Fall darauf aufmerksam machen, dass ähnliche Situationen in der Mathematik häufig vorkommen (z. B. bei nicht-konstruktiven Existenzbeweisen) und dass unvollständige Ergebnisse zu einem Forschungsprozess dazugehören.

2.5.5. Krümmung von Flächen

Für Flächen im $\mathbb{R}^3$ (Untermannigfaltigkeiten) werden klassischerweise zwei Krümmungsbegriffe eingeführt: die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung. Die Gaußkrümmung beschreibt die intrinsische Krümmung einer Fläche, während die mittlere Krümmung die extrinsische Krümmung beschreibt. Beide Krümmungsbegriffe wurden von den StudentInnen im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ entwickelt.

Die mittlere Krümmung wurde von den StudentInnen unter Zurückführung auf die Krümmung von Kurven entwickelt. Dazu schnitten die StudentInnen die gekrümmten Flächen mit Normalenebenen. Die Krümmung der dabei entstehenden Kurven konnten sie mit der Formel für die Krümmung von ebenen oder Raumkurven berechnen. Eine Schwierigkeit für die StudentInnen war nun, wie sie mit den vielen Kurven und ihren Krümmungen weiterarbeiten sollten: Sollte die Krümmung von Flächen sinnvollerweise durch eine Zahl repräsentiert werden wie bei Kurven? Oder durch einen Vektor mit zwei oder mehr Zahlen? Oder durch die Menge aller aus den Kurven berechneten Krümmungen? Diese Frage kann von den StudentInnen ohne Kenntnisse über die zweite Fundamentalform nicht begründet beantwortet werden. Darum erhielten die StudentInnen von den Dozentinnen den Hinweis, dass eine Zahl (bzw. skalare Funktion) gesucht ist. Die StudentInnen wählten daraufhin die maximale und die minimale Kurvenkrümmung oder die Krümmungen zweier zu einander orthogonaler Kurven und berechneten daraus das arithmetische Mittel. Dies entspricht der mittleren Krümmung.

Die Gaußkrümmung wurde von den StudentInnen über die Änderung des Normalenvektors definiert. Sie betrachteten dazu den Normalenvektor im untersuchten Punkt $P(u,v)$ sowie zwei Normalenvektoren in „benachbarten“ Punkten $P(u+\Delta u, v)$ und $P(u, v+\Delta v)$. Die Differenzvektoren $P(u+\Delta u, v) - P(u,v)$ und $P(u, v+\Delta v) - P(u,v)$ spannen ein Parallelogramm auf. Den Flächeninhalt dieses Parallelogramms setzten die StudentInnen ins Verhältnis mit dem entsprechenden Flächeninhalt auf der Fläche. Im Limes ergibt sich die Gaußkrümmung.

Eine detaillierte Beschreibung der Zugänge und auch der Unterschiede der verschiedenen Bearbeitungen ist in Cederbaum und Hilken (2021) zu finden.

Ein weitere Möglichkeit, die Krümmung von Flächen zu bestimmen, ist das Anschmiegen von Quadriken. Dies ist eine Verallgemeinerung der Schmiegekreise im Fall der ebenen Kurven. Die Idee kam im Seminar auf, wurde dort aber nicht ausgearbeitet. Stattdessen griff eine Teilnehmerin dieses Thema in ihrer Abschlussarbeit auf: Schnell (2020) wählt das elliptisches Paraboloid, das hyperbolisches Paraboloid und den parabolischer Zylinder als Quadriken mit unterschiedlichen Krümmungstypen. An jeden Punkt einer gekrümmten Fläche kann eine dieser Quadriken angeschmiegt und dann die Krümmung über die Krümmung der Quadrik bestimmt werden.

2.5.6. Rotationsflächen

Beim Thema Rotationsflächen entwickeln die StudentInnen eine allgemeine Beschreibung von Rotationsflächen und untersuchen anschließend Eigenschaften von Rotationsflächen.

Im Seminar konzentrierte sich eine Gruppe dabei auf den Flächeninhalt von Rotationsflächen und erstellte eine geometrische Interpretation der Formel zur Berechnung von Flächeninhalten von Rotationsflächen: Wird die Fläche durch Kegelstümpfe angenähert und dann der Grenzwert bestimmt, ergibt sich die gleiche Formel wie wenn man die allgemeine Formel für den Flächeninhalt auf den Spezialfall der Rotationsflächen anwendet. Dieses Ergebnis setzten die Studentinnen in Beziehung zur Herleitung des Volumens von Rotationsflächen, wobei es ausreicht, Zylinderstücke anstelle von Kegelstümpfen zu verwenden.

Eine andere Gruppe beschäftigte sich mit Geodäten (kürzesten Verbindungskurven) auf Rotationsflächen. Sie stellten fest, dass Kurven, die als Schnitt der Fläche mit einer Ebene entstehen, die die Rotationsachse enthält, stets Geodäten sind. Kreise, die als Schnitt der Fläche mit einer Ebene entstehen, die senkrecht auf der Rotationsachse steht, sind nur dann Geodäten, wenn es sich um die „Talsohle“oder den „höchsten Grat“ handelt. Schließlich untersuchte die Gruppe auch Geodäten auf abrollbaren Rotationsflächen. Diese könnten bestimmt werden, indem die Fläche „abgerollt“ wird und dann die Geodäte in der Ebene ermittelt wird.

3. Mathematikbezogene Überzeugungen

3.1. Mathematikbezogene Überzeugungen

Die Ausbildung zukünftiger Mathematiklehrkräfte ist herausfordernd und wird darum laufend verändert, um die LehramtsstudentInnen möglichst gut und gemäß neueren Forschungsergebnissen auf ihren Beruf vorzubereiten. Einen wichtigen Begriff zur Beschreibung von Schwierigkeiten der Lehramtsausbildung prägte schon Felix Klein vor mehr als hundert Jahren mit der „doppelten Diskontinuität“ (Klein 1908, S. 2). Zwar haben sich seit Kleins Zeiten sowohl der Schulunterricht als auch die Ausbildung von Lehrkräften geändert, doch an den mannigfachen Zitationen von Kleins doppelter Diskontinuität (z. B. Ableitinger, Kramer und Prediger 2013; Beutelspacher u. a. 2011) ist abzulesen, dass das Problem derselbigen noch nicht gelöst ist. Mit der doppelten Diskontinuität werden die Übergänge von angehenden Lehrkräften von der Schule zur Universität und von der Universität zur Schule bezeichnet. Diese Diskontinuität rührt unter anderem daher, dass viele StudentInnen und Lehrkräfte die Schulmathematik und die universitäre Mathematik als kaum verbunden wahrnehmen. Bauer und Partheil (2009) stellen eine Diskontinuität auf drei Ebenen fest. Eine Ebene ist die der Inhalte, denn an der Schule und der Universität werden unterschiedliche Inhalte gelehrt. Zwar gibt es auch Überschneidungen, doch lassen in diesen Fällen Unterschiede der Ziele feststellen, wie folgendes Beispiel verdeutlichen kann: An der Universität sollen Eigenschaften des Integrals und Kriterien für Integrierbarkeit angewendet und bewiesen werden können. Dies spielt in der Schule keine Rolle. Auch auf der Ebene der Argumentationen gibt es Unterschiede. An der Universität wird vor dem Hintergrund eines vollständigen, lückenlosen Aufbaus der Mathematik oder des betreffenden Gebietes argumentiert. In der Schule hingegen stehen „heuristische Argumentationen [. . .] gleichberechtigt neben vollständigen Beweisen“ (Bauer und Partheil 2009, ibid. S. 87).

Diese mehrfache Diskontinuität trägt dazu bei, dass die Motivation vieler LehramtsstudentInnen der Mathematik für ihr Fach eher gering ist und dass das Fach von ihnen negativer wahrgenommen wird als von ihren KommilitonInnen ohne Lehramtsziel (Mischau und Blunck 2006; Pieper-Seier 2002). Nach dem Übergang zur Schule beeinflusst dann das an der Universität Gelernte kaum den Unterricht. Um diese doppelte Diskontinuität zu mildern, gibt es schon viele verschiedene theoretische und praktische Ansätze (siehe z. B. Ableitinger, Kramer und Prediger 2013).

Ein Ansatz ist, das Bild von Mathematik zu untersuchen und positiv zu beeinflussen. Das Bild von Mathematik oder die Überzeugungen über Mathematik hängen mit der doppelten Diskontinuität zusammen. Dies zeigt sich bei der Ebene der Ziele und der Ebene der Argumentation von (Bauer und Partheil 2009). Manche StudentInnen sehen Mathematik nach den Erfahrungen der Schulzeit als eine Art Formelsammlung, die für Anwendungen nützlich ist. Heuristische Argumente erscheinen in diesem Bild meist als ausreichend für die Anwendungen. Demgegenüber wird die Mathematik an der Universität als deduktiv-axiomatisches, vollständiges System dargestellt, in dem lückenlose Beweise eine zentrale Rolle spielen (Grieser 2015, S. 89-90). Die Ziele, die Personen mit unterschiedlichen Überzeugungen über Mathematik beim Lehren und Lernen von Mathematik verfolgen, werden demnach unterschiedliche sein. Auch die Argumentationen, die von den einen oder anderen akzeptiert oder erwartet werden, unterscheiden sich.

Die Untersuchung und Beeinflussung von Überzeugungen über das Wesen der Mathematik und über das Lehren und Lernen von Mathematik ist daher ein Ansatzpunkt, um die doppelte Diskontinuität abzumildern. Dieser Ansatz wurde auch mit dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ verfolgt.

Im Folgenden wird der Begriff der Überzeugung genauer dargestellt und es werden Wirkungen von Überzeugungen beschrieben. Anschließend wird dargelegt, wie Überzeugungen über Mathematik verändert werden können. Hiernach werden zwei Studien zur Erfassung und Änderung von mathematikbezogenen Überzeugungen im Rahmen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ vorgestellt.[1]

3.1.1. Begriffsklärung, Definitionen, Struktur

In der Literatur wurden (mathematikbezogene) Überzeugungen aus verschiedenen Sichtweisen und mit unterschiedlichen Zielen beschrieben und untersucht (Rouleau, Ruiz, Reyes und Liljedahl 2019). Damit einher gehen auch unterschiedliche Bezeichnungen wie etwa Einstellungen (Grigutsch, Raatz und Törner 1998), mathematische Weltbilder (Weygandt und Oldenburg 2014), *beliefs* (Depaepe, De Corte und Verschaffel 2016) und andere. In der vorliegenden Untersuchung wird der Begriff der Überzeugung verwendet. Mathematikbezogene Überzeugungen werden als implizite oder explizite subjektive Vorstellungen über Mathematik als Disziplin und über das Lehren und Lernen von Mathematik definiert (vgl. Op’t Eynde, De Corte und Verschaffel 2002, S. 16+27).

Die Struktur der Menge der Überzeugungen einer Person wird auf verschiedenen Ebenen modelliert. Das Modell von Green (1971) (hier zitiert nach Leatham (2006, S. 93-95) und Cooney, Shealy und Arvold (1998, S. 309-310)) strukturiert Überzeugungen auf drei Weisen. Zum einen werden zentrale und periphere Überzeugungen unterschieden. Je größere Bedeutung eine Überzeugung für eine Person hat, desto zentraler ist die Überzeugung. Man geht davon aus, dass zentrale Überzeugungen schwieriger zu ändern sind als periphere. Cooney, Shealy und Arvold (1998) beschreibt entsprechende Fallbeispiele. Green (1971) beschreibt außerdem eine quasi-logische Struktur von Überzeugungen. Das heißt, das manche Überzeugungen logisch aus anderen Überzeugungen folgen, zumindest aus Sicht der Person, die die Überzeugungen hat. Für eine andere Person muss dieser logische Zusammenhang nicht bestehen. Zum Beispiel kann jemand aus der Überzeugung, dass SchülerInnen das Einmaleins gut lernen sollen, folgern, dass im Unterricht deswegen kein Taschenrechner benutzt werden sollte (Leatham 2006, S. 94). Andere Personen sehen zwischen den zwei Aussagen möglicherweise keinen Zusammenhang. Zum dritten stellt Green (1971) die These auf, dass Überzeugungen in Gruppen (*cluster*) auftreten, zwischen denen es kaum Verbindungen gibt. Verschiedene Gruppen von Überzeugungen werden in verschiedenen Kontexten angesprochen. Dadurch kann für einen Beobachter der Eindruck entstehen, eine Person habe sich widersprechende Überzeugungen, während die Person selbst das anders wahrnimmt.

Eine andere Ebene der Strukturierung von Überzeugungen ist inhaltlicher Natur (siehe

[1]Eine kürzere Version dieses Abschnitts 3.1 und des folgenden Abschnitts 3.2 wird als Artikel mit dem Titel „Strengthening pre-service teachers’ availing mathematics-related beliefs: evaluating an intervention“bei einer englischsprachigen, mathematikdidaktischen Zeitschrift mit Carla Cederbaum und Taiga Brahm als Koautoren eingereicht.

Tabelle 3.1, Zeilen). Überzeugungen werden unterteilt in epistemologische Überzeugungen, das sind „Vorstellungen über die Struktur, Genese und Validierung von mathematischem Wissen“ (Dubberke u. a. 2008, S. 194), zum Lehren und Lernen von Mathematik und zum Kontext (Blömeke u. a. 2008), wobei verschiedene AutorInnen unterschiedliche Schwerpunkte setzen und daher leicht unterschiedliche Unterteilungen vornehmen (Op't Eynde, De Corte und Verschaffel 2002). Die epistemologischen Überzeugungen wiederum werden oft in vier weitere Aspekte unterteilt, wie bei Muis (2007, S. 176) beschrieben:

- *certainty of knowledge*: Wissen kann als unveränderlich oder als sich entwickelnd angenommen werden.
- *source of knowledge*: Man kann der Überzeugung sein, dass Wissen von Autoritäten wie LehrerInnen weitergegeben werden muss oder dass man Wissen durch logisches Denken und Vernunft erlangen kann.
- *simplicity of knowledge*: Wissen kann als aus isolierten Fakten oder als aus stark miteinander vernetzten Konzepten bestehend angenommen werden.
- *justification of knowledge*: Man kann der Überzeugung sein, dass Autoritäten unfehlbar sind oder dass Aussagen empirisch oder durch Nachdenken überprüft und auf Kohärenz geprüft werden müssen.

Diese Einteilung der Überzeugungen wird auch in Bezug auf andere Wissenschaften verwendet, beispielsweise für Psychologie (z. B. Muis, Trevors, Duffy und Ranellucci 2016). Dabei zeigt sich, dass die Ausprägung der Überzeugungen fachabhängig ist. Die ProbandInnen der Studie von Muis, Trevors, Duffy und Ranellucci (2016) zeigten bezüglich Mathematik andere Überzeugungen als bezüglich Psychologie. Daher ist es sinnvoll, nicht (nur) Überzeugungen zur Entstehung und Weitergabe von Wissen allgemein zu untersuchen, sondern dies im Kontext eines bestimmten Faches zu tun.

Die Ausprägung der Überzeugungen wird von vielen AutorInnen in zwei Dimensionen zusammengefasst (siehe Tabelle 3.1, Spalten). Die Bezeichnungen variieren dabei deutlich (siehe Tabelle 3.2), überschneiden sich aber inhaltlich stark. Weit verbreitet ist die Einteilung in naive und reife, differenzierte Überzeugungen (*sophisticated beliefs*) (z. B. Mason und Scrivani 2004). Da diese Bezeichnungen aber eine Wertung der Überzeugungen beinhalten, ziehen andere Autoren die Bezeichnungen nützlich/nicht nützlich (*availing/non-availing*) vor (z. B. Muis 2004). Doch auch diese Bezeichnungen enthalten eine Wertung, wenn eine Dimension generell als nützlich und die andere generell als nicht nützlich betrachtet wird. Beispielsweise wird die Überzeugung, dass mathematisches Wissen von Autoritäten weitergegeben wird, meist als naiv bzw. nicht nützlich bezeichnet. Eine solche Einstellung kann in manchen Situationen aber durchaus nützlich sein. Zum Beispiel kann es hilfreich sein, eine Definition zunächst als gegeben hinzunehmen und damit weiterzuarbeiten, ohne die Hintergründe ganz verstanden zu haben. Ein tieferes Verständnis kann sich später einstellen, wenn man etwas Erfahrung mit dem definierten Objekt gesammelt hat (siehe auch Elby, Macrander und Hammer 2016, S. 126). Die Einteilung in nützliche und nicht nützliche Überzeugungen basiert jedoch auf empirischen Befunden, wonach manche Überzeugungen häufig mit einem „besseren“ Lernen in Zusammenhang stehen.

Nicht wertend sind Bezeichnungen, die sich auf die Inhalte der Überzeugungen beziehen. Verwendet werden dabei unter anderem die Begriffspaare absolutistisch und fehlbar (*fallibilist*) (Depaepe, De Corte und Verschaffel 2016), statisch und dynamisch (z. B. Felbrich, Kaiser und Schmotz 2012) und transmissiv und konstruktivistisch (z. B. Voss, Kleickmann,

	statisch	dynamisch
epistemologische Überzeugungen (Muis 2007)		
certainty	Mathematisches Wissen ist unveränderlich.	Mathematisches Wissen entwickelt sich weiter.
source	Wissen muss von Autoritäten weitergegeben werden.	Man kann Wissen durch logisches Denken erlangen.
simplicity	Wissen besteht aus isolierten Fakten.	Wissensbestandteile sind starkt vernetzt.
justification	Was Autoritäten vermitteln, ist richtig.	Aussagen müssen empirisch oder durch Nachdenken überprüft werden.
Überzeugungen zum Lehren und Lernen	Mathematik lernt man durch Auswendiglernen. (Op't Eynde, De Corte und Verschaffel 2002)	Fehler gehören zum Lernprozess dazu. (Op't Eynde, De Corte und Verschaffel 2002)
kontextbezogene Überzeugungen	z. B. Überzeugungen zu Erwartungen und Überzeugungen anderer (Op't Eynde, De Corte und Verschaffel 2002)	

Tabelle 3.1.: Übersicht über die Einteilungen von Überzeugungen mit Beispielen

naiv	reif, differenziert (*sophisticated*)
nicht nützlich	nützlich (*availing*)
absolutistisch/platonistisch	fehlbar (*fallible*)
statisch	dynamisch
transmissiv	konstruktivistisch

Tabelle 3.2.: Übersicht über einige für die Ausprägung von Überzeugungen verwendete Begriffspaare

Kunter und Hachfeld 2013). Im Folgenden werden die Begriffe statisch und dynamisch oder nützlich und nicht nützlich verwendet. „Nützlich“ ist dabei als „in vielen Fällen für ein konzeptuelles Lernen und aktives Wissen nützlich“ zu verstehen. Statische Überzeugungen sind beispielsweise, dass Wissen unveränderlich ist und von Autoritäten weitergegeben werden muss. Dynamische Überzeugungen sind beispielsweise, dass Wissen sich weiterentwickelt und durch Vernunft und logisches Denken erschlossen werden kann.

Statische und dynamische Überzeugungen sind nicht als Pole eines eindimensionalen „Überzeugungskontinuums“ zu sehen. Vielmehr zeigten Voss, Kleickmann, Kunter und Hachfeld (2013), dass sie jeweils eine eigene Dimension darstellen (im Artikel transmissiv und konstruktivistisch genannt). Die beiden Dimensionen korrelieren negativ. Es ist demnach beispielsweise möglich, beiden Überzeugungen zuzustimmen oder durch eine Intervention die Zustimmung in einer Dimension zu ändern und in der anderen nicht.

Ein Aspekt der Überzeugungen über das eigene Lernen von Mathematik ist die mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung. Selbstwirksamkeitserwartung (*self-efficacy*) wird definiert als „beliefs in one's capabilities to organize and execute the courses of action required to produce given attainments“[2] (Bandura 1997, p. 3). Die Selbstwirksamkeitserwartung scheint eine der Hauptantriebskräfte für die Handlungen und Ziele von Menschen zu sein. Bandura (1999, p. 28) nennt sie sogar „the foundation of human agency“[3], da sie alle Handlungen beeinflusst: Wenn eine Person nicht glaubt, dass ihr Handeln zu einem erwünschten Ergebnis führt, wird sie die Handlung wahrscheinlich nicht ausführen. Die Selbstwirksamkeitserwartung beeinflusst viele Faktoren, beispielsweise welche Ziele sich jemand setzt oder wie sehr sich jemand anstrengt, um Ziele zu erreichen. Wer eine höhere Selbstwirksamkeitserwartung hat, setzt sich höhere Ziele und ist ausdauernder darin, sie zu erreichen. Die Selbstwirksamkeitserwartung beeinflusst auch, welche Möglichkeiten jemand in Betracht zieht und ob jemand die Chancen oder die Gefahren einer Situation oder einer Entwicklung stärker wahrnimmt. Zudem beeinflusst die Selbstwirksamkeitserwartung, ob jemand sich für einen Misserfolg selbst verantwortlich sieht – dann kann er es beim nächsten Mal besser machen – oder ob jemand die Umstände verantwortlich macht – dann kann er nichts daran ändern (Bandura 1999).

3.1.2. Wirkung von Überzeugungen

In verschiedenen Studien wurde der Zusammenhang zwischen Überzeugungen und Leistung erforscht. Beispielsweise wurden im Rahmen der TIMSS-Studie in Deutschland auch die Überzeugungen von OberstufenschülerInnen und ihr Zusammenhang zur Leistung in Mathematik untersucht (Köller 2001). Vier Dimensionen mathematikbezogener Überzeugungen wurden mit einem Fragebogen erhoben: Sicherheit von Wissen (*certain knowledge*), Einfachheit von Wissen (*simple knowledge*), Konstruktivismus und Relevanz. Für die Messung der Leistung wurden die Daten aus TIMSS verwendet. Es zeigte sich, dass alle vier Dimensionen als Prädiktoren der mathematischen Leistung dienen können, wobei die ersten beiden negativ, die letzten beiden positiv mit der Leistung korrelierten. Dieser Effekt blieb auch dann bestehen, wenn der Faktor Kurswahl (Mathematik als Basis-/Leistungsfach) einbezogen wurde.

Auch Depaepe, De Corte und Verschaffel (2016) und Muis (2004) kommen in ihren Übersichtsartikeln zu dem Schluss, dass die Überzeugungen von SchülerInnen oder StudentInnen mit deren Leistungen in Verbindung stehen, wobei dynamische, nützliche (*availing*) Überzeugungen mit besseren Leistungen zusammenhängen. Für unterschiedliche Arten mathematischer Probleme zeigen sich dabei unterschiedlich starke Korrelationen (Depaepe, De Corte und Verschaffel 2016, S. 158-159). Der Zusammenhang zwischen Überzeugungen und Leistung wird durch verschiedene Faktoren vermittelt, beispielsweise die Selbstwirksamkeitserwartung (Depaepe, De Corte und Verschaffel 2016, S. 158-159). Ein möglicher weiterer Mediator ist nach den von Muis (2004) zitierten qualitativen und quantitativen Studien die Arbeitsweise beim Lösen mathematischer Aufgaben und Probleme. Die Studien zeigen, dass dynamische, nützliche Überzeugungen positiv mit Arbeitsweisen korrelieren, die einer guten Lösung der Aufgaben zuträglich sind, beispielsweise wie lange sich jemand mit der Aufgabe beschäftigt.

Muis (2007) arbeitet vier Thesen über einen Zusammenhang zwischen Überzeugungen und Selbst-Regulation beim Lernen heraus. Selbst-Regulation wiederum ist ein Faktor, der die Leistung beeinflusst, sodass die Selbst-Regulation ein weiterer Vermittler zwischen Über-

[2]Übersetzung: Selbstwirksamkeitserwartung wird definiert als „die Überzeugung, die Fähigkeiten zu haben, die für das Organisieren und Ausführen von zum Erreichen bestimmter Ziele erforderlichen Handlungsabläufen nötig sind“

[3]Übersetzung: „die Grundlage allen menschlichen Handelns“

zeugungen und Leistung sein kann. Die Thesen beinhalten, dass Überzeugungen die Wahrnehmung der Aufgabe, die persönlichen Zielsetzungen im Lösungsprozess und die Wahl der Lösungsstrategien beeinflussen. Ähnliche Zusammenhänge zwischen epistemologischen Überzeugungen und anderen Faktoren wie der Selbstwirksamkeitserwartung oder Überzeugungen zur Lehrerautorität wurden auch bei LehrerInnen festgestellt (Depaepe, De Corte und Verschaffel 2016, S. 151).

Neben den epistemologischen Überzeugungen beeinflusst auch die Selbstwirksamkeitserwartung die Leistung. Dieser Zusammenhang ist durch einige Studien aus verschiedenen Ländern und Disziplinen gut belegt (für eine Übersicht siehe Bartimote-Aufflick u. a. (2016, S. 1923), für ein Beispiel einer Studie siehe Mews und Pöge (2019)). Für mathematische Leistungen bilden die Selbstwirksamkeitserwartung und das Selbstbild nach Skaalvik und Skaalvik (2011) einen besseren Prädiktor als frühere Leistungen einer Person. Nach Pietsch, Walker und Chapman (2003) hängt die mathematische Leistung enger mit der Selbstwirksamkeitserwartung zusammen als mit der Kompetenzkomponente des Selbstkonzepts. Die Selbstwirksamkeitserwartung steht mit weiteren Faktoren in Zusammenhang. Beispielsweise stellte sie sich als guter Prädiktor für die Kurswahl, die akademische Motivation und die Ausdauer während des Studiums heraus (Goldin u. a. 2016, S. 8). Eine hohe Selbstwirksamkeitserwartung hängt außerdem mit der Anwendung nützlicher Lernstrategien zusammen (Pintrich und De Groot 1990), mit einer besseren Selbstregulation (Pintrich und De Groot 1990; Zimmerman und Martinez-Pons 1990) und mit einem größeren Durchhaltevermögen (Pintrich und De Groot 1990; You 2018). Diese Faktoren könnten neben anderen Vermittler einer Wirkung der Selbstwirksamkeitserwartung auf die Leistung sein (Bartimote-Aufflick u. a. (2016, S. 1923-1924) und Honicke und Broadbent (2016, S. 79-80)).

Wenn also manche Überzeugungen für das Lernen nützlicher und andere weniger nützlich sind, stellt sich die Frage, welche Überzeugungen SchülerInnen und LehrerInnen haben. In Bezug auf SchülerInnen kommt Muis (2004) in ihrem Übersichtsartikel zu dem Schluss, dass sie meist statische, weniger nützliche Überzeugungen zu Mathematik und zum Lernen von Mathematik haben. Beispielsweise meinen viele, dass man Mathematikaufgaben schnell lösen können müsse, dass man nicht selbst etwas herausfinden könne, sondern alles von der Lehrkraft oder aus dem Schulbuch lernen müsse, und dass mathematisches Wissen unzusammenhängend sei (Muis 2004, S. 330).

Die von Muis (2004) für ihren Übersichtsartikel untersuchten Studien sind 15 bis 30 Jahre alt und daher möglicherweise nicht repräsentativ für heutige SchülerInnen. Nach Depaepe, De Corte und Verschaffel (2016, S. 154-156) zeigen jedoch auch neuere Studien, dass die mathematikbezogenen Überzeugungen vieler SchülerInnen für das Lernen von Mathematik eher nicht förderlich sind. Es stellt sich daher die Frage, wie die mathematikbezogenen Überzeugungen von SchülerInnen so beeinflusst werden können, dass sie die SchülerInnen beim Lernen von Mathematik unterstützen, statt ihnen hinderlich zu sein. Ein Ansatzpunkt könnten die Überzeugungen der Lehrer sein, denn neben einem mehr oder weniger direkten Einfluss von mathematikbezogenen Überzeugungen auf die eigene mathematische Leistung gehen viele ForscherInnen auch von einem Zusammenhang zwischen den Überzeugungen einer Lehrkraft, ihrer Unterrichtsgestaltung und den Überzeugungen und Leistungen ihrer SchülerInnen aus.

Wie sich die Überzeugungen von Lehrkräften auf ihren Unterricht auswirken, kann auf verschiedenen Ebenen untersucht werden. Als ein möglicher Vermittler zwischen Überzeugungen und dem Unterrichtsgeschehen werden Unterrichtsziele gesehen. So führt etwa Schoenfeld (2006) aus, dass die Überzeugungen einer Lehrkraft mitbestimmen, welche Ziele welche Priorität haben. Törner, Rolka, Rösken und Sriraman (2010) untersuchten in einer Fallstudie, wie Unterrichtsziele und Überzeugungen zusammenhängen. Sie analysierten eine Unterrichtsstunde in einer achten Gymnasialklasse und ein anschließendes Interview mit der Lehrerin in Bezug auf die Ziele und Überzeugungen der Lehrerin. Sie kamen dabei zu dem Ergebnis, dass Ziele und Überzeugungen kaum getrennt von einander betrachtet werden können, weil sie sich gegenseitig stark beeinflussen.

Im Rahmen der COACTIV-Studie (Dubberke u. a. 2008; Voss, Kleickmann, Kunter und Hachfeld 2013) wurden nicht nur die Überzeugungen von LehrerInnen und Merkmale ihres Unterrichts (aus Schülersicht) untersucht, sondern auch in Beziehung zu den Leistungen der SchülerInnen gesetzt. Dabei zeigte sich, dass die kognitive Aktivierung der SchülerInnen als ein Mediator zwischen den Lehrerüberzeugungen und Schülerleistungen fungiert. Die Überzeugungen von Lehrkräften wurden mit einem Lehrerfragebogen erfasst, verschiedene Unterrichtsmerkmale aus Schülersicht mit einem Schülerfragebogen. Außerdem wurde die mathematische Leistung der SchülerInnen getestet. Dazu wurden Daten aus der PISA-Studie sowie Daten aus einem selbst entwickelten Test verwendet. Klassen von Lehrkräften mit transmissiveren (statischeren) Überzeugungen zeigten schlechtere Leistungen als Klassen von Lehrkräften mit weniger transmissiven Überzeugungen (Dubberke u. a. 2008). Umgekehrt zeigten Klassen von Lehrkräften mit stärker konstruktivistischen (dynamischen) Überzeugungen bessere Leistungen (Voss, Kleickmann, Kunter und Hachfeld 2013). Vermittelt wurde dieser Effekt über die von den SchülerInnen berichtete kognitive Aktivierung. Klassen von Lehrkräften mit transmissiveren Überzeugungen berichteten eine geringere, Klassen von Lehrkräften mit konstruktivistischeren Überzeugungen eine höhere kognitive Aktivität. Biedermann, Steinmann und Oser (2015) nennen weitere Studien, nach denen konstruktivistisch orientierte LehrerInnen ihren SchülerInnen „häufiger kognitiv anregende Problemlöseaufgaben und anspruchsvollere Textaufgaben zur Verfügung stellen“ (Biedermann, Steinmann und Oser 2015, S. 49) als LehrerInnen mit eher transmissiven Überzeugungen.

In verschiedenen Studien wurde jedoch festgestellt, dass Überzeugungen und Unterrichtspraxis von Lehrkräften nicht immer zusammenpassen (vgl. Liljedahl 2008). Liljedahl (2008) untersuchte diese Diskrepanzen, indem er Lehrkräfte ihr Bild von Mathematik in einem Dreieck einordnen ließ, dessen Eckpunkte verschiedenen Überzeugungen zugeordnet waren (Mathematik als Toolbox, Mathematik als System und Mathematik als Prozess). Außerdem sollten sie angeben, wie viele von 90 Stunden Mathematikunterricht eines Schuljahres sie für welchen der drei Aspekte aufwenden würden. Zwei solcher Bearbeitungen, bei denen sich die Angaben im Dreieck und zur Verteilung von Unterrichtsstunden zu widersprechen schienen, wurden LehramtsstudentInnen vorgelegt, die sich Erklärungen dazu überlegen sollten. Eine vorgeschlagene Erklärung war, dass die befragten LehrerInnen möglicherweise der Meinung seien, dass SchülerInnen viel Vorwissen bräuchten, dass sie durch einen Toolbox-Zugang erwerben müssten, bevor man im Unterricht konstruktivistisch arbeiten könne. Andere LehramtsstudentInnen erklärten die Unterschiede damit, dass die befragten LehrerInnen möglicherweise unterschiedliche Überzeugungen für Theorie und Praxis hätten, etwa als Unterschied von Schul- und Hochschulmathematik. Aus den Erklärungen wurden fünf Erklärungsmotive extrahiert.

Letztere Erklärung nahm Beswick (2012) als Ausgangpunkt für ihre Untersuchung. Sie unterschied zwischen Überzeugungen zu Mathematik als Disziplin und Mathematik als Schulfach und entwickelte daraus ein Modell, wie sich Diskrepanzen zwischen Überzeugungen und tatsächlichem Unterricht erklären lassen könnten (Beswick 2012, S. 133). Beispielsweise könnte eine Lehrkraft, die Schulmathematik eher als Ansammlung von Fakten und Formeln ansieht (instrumentalistische Überzeugung) und die Disziplin Mathematik als dynamische, kreative Wissenschaft, davon ausgehen, dass SchülerInnen zunächst grundlegende Fertigkeiten erwerben müssten und kreative Mathematik somit in der Schule noch nicht vorkommen kann. Dies deckt sich mit der zweiten oben skizzierten Erklärungsmöglichkeit bei Liljedahl (2008). Beswick (2012) untersuchte außerdem die Überzeugungen von Lehrkräften mit einem Fragebogen und mit Interviews und Unterrichtsbeobachtungen. Sie kommt zu dem Schluss, dass unterschiedliche Überzeugungen zu Mathematik als Schulfach bzw. Disziplin daher kommen könnten, dass die Lehrkräfte Mathematik als SchülerInnen und StudentInnen sehr unterschiedlich erlebt haben. Zudem bekommen sie als Lehrkräfte möglicherweise Vorgaben, wie sie unterrichten sollen, die sich aber nicht mit ihren Überzeugungen decken.

Leatham (2006) stellt eine weitere Erklärung zur Diskussion. Er geht davon aus, dass die Überzeugungen, die eine Lehrkraft hat, für diese Lehrkraft konsistent sind (*sensible system of beliefs*). Wenn sich aus Sicht eines Beobachters Widersprüche ergeben, ist das Wissen des Beobachters unvollständig oder er versteht etwas anders als die Lehrkraft. Beispielsweise könnte die Lehrkraft in einer gewissen Situation auf der Grundlage von allgemeineren Überzeugungen zum sozialen Lernen handeln statt auf der Grundlage von mathematikbezogenen Überzeugungen. Wenn der Beobachter nur die mathematikbezogenen Überzeugungen erfragt hat, könnte sich dadurch in seinen Augen ein Widerspruch zeigen, ohne dass dieser aus Sicht der Lehrkraft vorhanden ist. Ebenso kann ein Beobachter unter Begriffen wie „Problemlösen“ etwas anderes verstehen als die Lehrkraft (Leatham 2006, S. 97), was zu Missverständnissen bezüglich der Überzeugungen der Lehrkraft führen kann.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die meisten Forscher die Annahme vertreten, dass die mathematikbezogenen Überzeugungen von Lehrkräften ihren (Mathematik-)Unterricht beeinflussen. Zur Frage, wie sich die Überzeugungen auswirken, gibt es einige Anhaltspunkte, aber diese Frage bedarf weiterer Forschung.

Zu klären ist nun die Frage, welche mathematikbezogenen Überzeugungen LehrerInnen und LehramtsstudentInnen haben. Grigutsch, Raatz und Törner (1998) befragten 310 LehrerInnen bei einer Tagung mit einem Fragebogen zu ihrem mathematischen Weltbild. Der Fragebogen enthielt Items zu vier Aspekten: Mathematik als formales System (Formalismusaspekt), Mathematik als Werkzeugkasten (Schemaaspekt), Mathematik als Prozess (Prozessaspekt) und Mathematik als praktisch relevante Disziplin (Anwendungsaspekt). Der Formalismusaspekt charakterisiert Mathematik als streng logisch, präzise und eindeutig. Der Schemaaspekt charakterisiert Mathematik als Sammlung von Formeln und Regeln, die man auswendig lernen und dann anwenden muss. Der Prozessaspekt charakterisiert Mathematik als Disziplin, die der Kreativität bedarf und in die jeder seine eigenen Ideen einbringen kann. Der Anwendungsaspekt charakterisiert Mathematik als in verschiedenen Kontexten zum Problemlösen anwendbar. Die ersten beiden Aspekte sind den statischen, die letzten beiden den dynamischen Überzeugungen zuzurechnen. Eine Faktorenanalyse bestätigte die Vier-Faktoren-Struktur. Die Zustimmung der LehrerInnen zu den dynamischen Aspekten war höher als die Zustimmung zu den statischen Aspekten.

Auch in der COACTIV-Studie stimmten die befragten LehrerInnen dynamischen Aspekten stärker zu als statischen. Die LehrerInnen wurden unter anderem zu ihren Überzeugungen zu Mathematik und zum Lehren und Lernen von Mathematik befragt (Dubberke u. a. 2008; Voss, Kleickmann, Kunter und Hachfeld 2013). Verwendet wurde eine Auswahl an Items von Grigutsch, Raatz und Törner (1998). Für Mathematik als Toolbox geben Voss, Kleickmann, Kunter und Hachfeld (2013) einen Mittelwert von 2.53 (SD 0.58) an und für Mathematik als Prozess einen Mittelwert von 3.36 (SD 0,47).

Ein ähnliches Bild ergibt sich auch bei LehramtsstudentInnen. Beispielsweise untersuchten Buchholtz, Kaiser und Blömeke (2013) und Buchholtz und Kaiser (2017) in einer Längsschnittstudie über vier Semester die Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik von Lehramtsstudierenden (gymnasiales Lehramt) und Nicht-Lehramtsstudierenden mit Fragebögen und Interviews. Die Studierenden stimmten schon zu Studienbeginn konstruktivistisch orientierten Überzeugungen stärker zu als transmissiv orientierten. Im Laufe der vier Semester verstärkte sich dieses Muster, das heißt, die Zustimmung zu konstruktivistischen Überzeugungen nahm zu und die Zustimmung zu transmissiven Überzeugungen nahm ab. Es zeigte sich hierbei kein Unterschied zwischen den Lehramts- und Nicht-LehramtsstudentInnen.

Biedermann, Steinmann und Oser (2015) untersuchten in einer quasi-längsschnittlichen Studie StudentInnen verschiedener Lehramtsstudiengänge in der Deutschschweiz im Rahmen von TEDS-M. Auch in dieser Studie zeigten die ProbandInnen schon zu Beginn eine Bevorzugung konstruktivistischer Überzeugungen, die sich zum Ende des Studiums verstärkte. Dabei war die Varianz bei den konstruktivistischen Überzeugungen größer als bei den transmissiven. Auch Felbrich, Kaiser und Schmotz (2012) stellten in einer internationalen Studie mit StudentInnen des Grundschullehramts bei den deutschen StudentInnen gegen Ende des Studiums Zustimmung zu dynamischen Überzeugungen und eine eher neutrale Haltung bei statischen Überzeugungen fest. Die Zustimmung zu den Überzeugungen variiert innerhalb eines Landes jedoch stark.

Die Studie von Geisler und Rolka (2018) steht dazu im Gegensatz. Untersucht wurden 209 Lehramts- und NichtlehramtsstudentInnen im ersten Semester. Die StudentInnen zeigten im Schnitt größere Zustimmung zu statischen Überzeugungen als zu dynamischen.

Insgesamt zeigt sich bei LehrerInnen und LehramtsstudentInnen eine größere Zustimmung zu dynamischen Überzeugungen als zu statischen. Dieser Unterschied zu SchülerInnen ist nicht überraschend, da die meisten MathematiklehrerInnen und -lehramtsstudentInnen ihr Fach freiwillig gewählt und in der Schule selbst eher überdurchschnittliche Leistungen in Mathematik gezeigt haben dürften, sodass sie gegenüber der Gesamtheit der SchülerInnen eine Positivauslese darstellen. Dies wird auch im Vergleich mit StudentInnen des Grundschullehramts deutlich, die Mathematikvorlesungen besuchen müssen. Der Blick auf Mathematik derer, die nicht freiwillig die Mathematikvorlesungen besuchen, ist deutlich negativer (Kunz, Bräuning und Zacher 2020). Trotz der im Schnitt größeren Zustimmung zu dynamischen Überzeugungen bei LehrerInnen und StudentInnen des gymnasialen Lehramts stimmen die LehrerInnen und LehramtsstudentInnen in ihren Überzeugungen keineswegs überein. Es gibt deutliche Unterschiede zwischen einzelnen Personen (z. B. Felbrich, Kaiser und Schmotz 2012) und verschiedenen Stichproben (vgl. Geisler und Rolka 2018, mit den anderen Studien).

Es ist also davon auszugehen, dass viele LehramtsstudentInnen – und später auch ihre SchülerInnen – von dynamischeren Überzeugungen profitieren könnten. Im Folgenden werden daher Möglichkeiten dargestellt, wie Überzeugungen beeinflusst werden können.

3.1.3. Überzeugungen ändern

Mathematikbezogene Überzeugungen zum Wesen der Mathematik, zum Lehren und Lernen von Mathematik und die mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung wirken sich (wie oben dargestellt) auf den Werdegang von LehrerInnen aus. In ihrer Ausbildung beeinflussen ihre Überzeugungen, wie und wie gut sie fachliche Kompetenzen erwerben (Depaepe, De Corte und Verschaffel 2016). Während ihrer Arbeit in der Schule haben die Überzeugungen einen Einfluss auf die Unterrichtsgestaltung, die wiederum das Lernen der SchülerInnen beeinflusst (Voss, Kleickmann, Kunter und Hachfeld 2013). Außerdem können die Überzeugungen der LehrerInnen durch die Unterrichtsgestaltung oder andere Vermittler die Überzeugungen der SchülerInnen beeinflussen, die sich wiederum auf das Lernen der SchülerInnen auswirken

(Muis, Trevors, Duffy und Ranellucci 2016; Yackel und Cobb 1996). Es ist daher sinnvoll, LehramtsstudentInnen die Möglichkeit zu bieten, nützliche Überzeugungen zu stärken. Im Folgenden werden Möglichkeiten dargestellt, wie Überzeugungen beeinflusst werden können.

Eine Art von Interventionen, die Überzeugungen ändern können, sind kurze Interventionen, die durch eine speziell auf die Änderung der Überzeugungen ausgerichtete Aktivität wirken sollen. Ein Beispiel für eine solche kurze Intervention ist die Verwendung von Widerlegungstexten (*refutational text*). In einem Widerlegungstext werden verbreitete, nicht nützliche Überzeugungen aufgegriffen und als nicht nützlich charakterisiert. Nützliche Überzeugungen werden ihnen gegenübergestellt. Dabei werden in die Argumentation Forschungsergebnisse einbezogen (siehe z. B. Tippett (2010), S. 953 oder Gill, Ashton und Algina (2004), S. 169).

Eine solche Intervention mit Widerlegungstexten beschreiben Gill, Ashton und Algina (2004). Sie untersuchten, wie sich Widerlegungstexte zusammen mit verstärkter Aktivierung (*augmented activation*) auf die Überzeugungen von LehramtsstudentInnen auswirken. Verstärkte Aktivierung heißt, dass die Leser eines Textes im Text darauf aufmerksam gemacht werden, dass folgende Passagen ihren bisherigen Vorstellungen widersprechen könnten und dass sie darauf ihre besondere Aufmerksamkeit richten sollen (Gill, Ashton und Algina 2004, S. 168). Für die Studie wurden 161 StudentInnen des Grundschullehramts in den USA zufällig in eine Experimental- und eine Kontrollgruppe eingeteilt. Die Experimentalgruppe bekam einen Widerlegungstext zu lesen, der auf der Idee des *conceptual change* basierte. Zusätzlich wurde die Aufmerksamkeit der StudentInnen mit verstärkter Aktivierung auf Überzeugungen gelenkt, die ihren eigenen widersprachen. Die Kontrollgruppe bekam einen Standardtext (*standard expository text*). Mit einem Test wurden sowohl explizite als auch implizite Überzeugungen untersucht, Letzteres durch die Bewertung von Unterrichtsszenarien. Die Experimentalgruppe zeigte anschließend bei der expliziten und bei der impliziten Messung stärker konstruktivistische Überzeugungen als die Kontrollgruppe.

Die Literatur zu Widerlegungstexten zeigt keine eindeutigen Ergebnisse zur Wirksamkeit dieser Art von Intervention (siehe z. B. Kienhues, Bromme und Stahl 2008), aber es lässt sich eine positive Tendenz erkennen. In ihrem Überblicksartikel kommt Tippett (2010, S. 966) zu dem vorsichtigen Schluss, dass Widerlegungstexte eher zu einer Veränderung im Sinne eines *conceptual change* führen können als Standardtexte (*expository text*). Die Wirksamkeit zeigte sich hier vor allem bei Studien mit SchülerInnen der dritten bis zehnten Klassenstufe, aber auch bei anderen Altersstufen zeigte sich, wenn, ein positiver Effekt (also kein negativer). In diese Metastudie gingen hauptsächlich Studien ein, die Texte zu naturwissenschaftlichen Themen verwendeten. Es ist daher ungeklärt, inwieweit die Ergebnisse auf Überzeugungen zu wissenschaftlichen Disziplinen und zum Lehren und Lernen derselben übertragbar sind. Einzelne Fehlvorstellungen wie „Strauße stecken bei Gefahr den Kopf in den Sand.“ (Tippett 2010, S. 951) können vermutlich leichter geändert werden als Netzwerke von Überzeugungen (vgl. Tippett 2010, S. 965).

Eine Überzeugungsänderung mit Hilfe von Widerlegungstexten zu erreichen, mag zwar schnell zu Ergebnissen führen, aber es bleibt die Frage, warum SchülerInnen und StudentInnen überhaupt statische, weniger nützliche Überzeugungen entwickeln. Muis (2004) leitet aus den von ihr zusammengefassten Studien die Hypothese ab, dass der Unterricht neben anderen Umgebungsfaktoren die Überzeugungen beeinflusst. Diese Hypothese wird von Muis, Trevors, Duffy und Ranellucci (2016) gestützt. In der Studie von Muis, Trevors, Duffy und Ranellucci (2016) wurden StudentInnen und SchülerInnen mit einem Fragebogen und mit Interviews zu ihren Überzeugungen zu Mathematik und Psychologie befragt. In den Interviews nannten die ProbandInnen als Begründungen für ihre Überzeugungen Beispiele aus dem Unterricht in den entsprechenden Fächern. Sie führten keine Beispiele aus anderen Zusammenhängen an. Das deutet darauf hin, dass zumindest die Überzeugungen, die SchülerInnen und StudentInnen bewusst nennen oder begründen können, stark von den Erfahrungen im Unterricht beeinflusst werden. Daher ist es naheliegend, dass diese Überzeugungen durch eine Änderung des Unterrichts beeinflusst werden können.

Ein Erklärungsmodell für die These, dass Unterricht Überzeugungen beeinflusst, bietet die Theorie der soziomathematischen Normen von Yackel und Cobb (1996). Soziomathematische Normen sind „*normative aspects of mathematics discussions specific to students' mathematical activity*“[4] (Yackel und Cobb 1996, S. 461) und beschreiben allgemeinere, soziale Normen im Hinblick auf mathematische Aktivitäten näher. Als Beispiel nennen Yackel und Cobb (S. 461) die soziale Norm, dass jeder seinen Lösungsweg erklären können muss. Die zugehörige soziomathematische Norm bestimmt, was als Erklärung akzeptiert wird. Diese Normen werden im Unterricht (meist implizit) ausgehandelt und können sich im Laufe der Zeit verändern. Sie hängen von der Lehrkraft, den SchülerInnen und der Form des Unterrichts ab. Beispielsweise untersuchten Yackel, Rasmussen und King (2000) die sozialen und soziomathematischen Normen in zwei unterschiedlich gestalteten Mathematikveranstaltungen zu Differentialgleichungen. Beide Kurse waren interaktiv, denn die StudentInnen wurden nach Lösungsideen für mathematische Probleme gefragt. Die sozialen und soziomathematischen Normen, die dabei etabliert wurden, waren jedoch unterschiedlich. Im einen Fall wurde nur die Rückmeldung gegeben, ob eine Antwort richtig oder falsch sei und bei falschen Antworten wurde nach weiteren Vorschlägen gefragt. Die StudentInnen wurden nicht dazu genötigt, ihre Lösungsansätze oder Vermutungen zu erklären und es wurde nicht erwartet, dass sie die Lösungen der Kommilitonen als sinnvoll erachteten und verstanden. Im anderen Kurs wurden genau diese Punkte von den StudentInnen eingefordert. Dadurch unterschieden sich die sozialen Normen und dementsprechend das Verhalten der StudentInnen. Ebenso unterschieden sich die soziomathematischen Normen. Im ersten Kurs wurde implizit festgelegt, dass prozedurale Begründungen wie „Weil das die Regel ist.“ als mathematische Begründung ausreichen. Im zweiten Kurs hingegen wurden die StudentInnen, wenn sie prozedurale Begründungen gaben, nach konzeptuellen Begründungen gefragt. Die Normen wurden in diesen Kursen von den Dozenten initiiert, aber auch die StudentInnen trugen durch ihr entsprechend angepasstes Verhalten dazu bei, die Normen zu festigen und genauer auszuhandeln.

Nach Yackel und Cobb (1996, S. 460) gibt es eine wechselseitige Beziehung zwischen Überzeugungen und soziomathematischen Normen: Die Überzeugungen der Lehrkraft und der SchülerInnen beeinflussen, welche Normen sich etablieren, die Normen wiederum beeinflussen die Entwicklung der Überzeugungen. Die Theorie der soziomathematischen Normen wurde zunächst an Unterrichtssituationen in der Grundschule entwickelt (Yackel und Cobb 1996), lässt sich aber auch auf Unterrichtssituationen an der Universität anwenden(Yackel, Rasmussen und King 2000).

Wenn also die Gestaltung des Unterrichts die Überzeugungen der beteiligten Personen beeinflusst, erscheint es sinnvoll, den Unterricht so zu gestalten, dass die Überzeugungen gestärkt werden, die sich für das Lernen als nützlicher herausgestellt haben als andere. Diesen Ansatz verfolgten auch alle in Muis (2004) im Abschnitt „Changing Epistemological Beliefs“ genannten Studien.

Ein Beispiel für eine Intervention, mit der durch eine veränderte Unterrichtsweise eine Änderung der Überzeugungen von SchülerInnen erreicht werden sollte, beschreiben Mason und Scrivani (2004). Über drei Monate hinweg wurde in zwei italienischen fünften Klassen jede Woche eine Doppelstunde von der Zweitautorin gestaltet. Die Autorinnen beschreiben

[4] Übersetzung: Soziomathematische Normen sind „normative Aspekte mathematischer Diskussionen, die für mathematische Aktivitäten von SchülerInnen kennzeichnend sind“

drei wesentliche Charakteristika dieser Stunden:

- Die Klassenkultur wurde geändert, indem eine neue Rollenverteilung etabliert wurde. Die SchülerInnen wurden dazu ermutigt, sich selbst mit den Aufgaben auseinanderzusetzen in der Annahme, die Inhalte wirklich verstehen zu können. Dazu sollten sie beispielsweise selbst Lösungen erstellen und mit anderen vergleichen. So sollten sie immer mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen übernehmen. Die Lehrerin übernahm dementsprechend die Rolle, die SchülerInnen zu ermutigen, ihnen strukturelle Hilfestellung zu bieten und sie zu (meta-)kognitiven Aktivitäten anzuregen. Dabei kam auch eine Heuristik zum Problemlösen zum Einsatz. Gleichzeitig wurde daran gearbeitet, dass die Schüler erkennen, dass es verschiedene Lösungen zu einem Problem geben kann und dass es wichtig ist, den Lösungsweg zu verstehen und nicht nur „die Lösung“ zu kennen.

- Dazu wurde sowohl in Kleingruppen gearbeitet als auch im Plenum über Lösungswege diskutiert, um zur Auseinandersetzung mit verschiedenen Lösungswegen und ihren Vor- und Nachteilen anzuregen.

- Die SchülerInnen wurden mit Problemen konfrontiert, die keine Lösung hatten („Kapitänsproblem“), zu deren Lösung Alltagswissen nötig war oder für die es mehrere Antworten gab.

Am Ende der Intervention hatten die SchülerInnen sowohl dynamischere Überzeugungen als am Anfang als auch dynamischere Überzeugungen als zwei Kontrollklassen.

Higgins (1997) beschreibt die Durchführung und Auswirkungen einer Intervention zum Problemlösen, die während eines Schuljahres mit Sechst- und Siebtklässlern durchgeführt wurde. In drei Klassen wurde am Anfang des Schuljahres eine Heuristik gelehrt, die beim Lösen von (mathematischen) Anwendungsproblemen helfen kann. Danach bekamen die SchülerInnen jede Woche eine offene Aufgabe gestellt, die keine klare Lösungsstrategie nahelegte, beispielsweise wie viele Stunden Jugendliche eigenen Angaben zufolge täglich fernschauen. Im Lauf der Woche hatten die SchülerInnen die Gelegenheit, sich dazu Gedanken zu machen. Am Ende der Woche wurde die Aufgabe besprochen. Dabei konnten die SchülerInnen ihre eigenen Lösungswege einbringen und diskutieren. Hinzu kamen etwa 80 Unterrichtsstunden zum Problemlösen, darunter die Verwendung von Hands-on-Materialien, Kleingruppendiskussionen, Aufgaben mit wenig oder keiner Hilfestellung durch die Lehrkraft und geleitetes entdeckendes Lernen. Die SchülerInnen der Experimentalgruppe hatten anschließend nützlichere Überzeugungen als die SchülerInnen dreier Kontrollklassen. Zum Beispiel sahen sie in Mathematik mehr als Algorithmen, die man auswendig lernen muss.

Auch Verschaffel u. a. (1999) führten eine Intervention zum Lösen von offenen Textaufgaben durch, deren Ziel zum einen war, die Problemlösefähigkeiten der SchülerInnen zu verbessern, zum anderen aber auch ihre Überzeugungen zu verändern. Die Intervention bestand aus einer Reihe von 20 Unterrichtsstunden, in denen vier fünfte Klassen über mehrere Stunden hinweg einzelne Aspekte einer Problemlöseheuristik übten. In den letzten Unterrichtsstunden wendeten sie die gesamte Heuristik auf schwierigere Probleme an. In sieben Kontrollklassen fand der sonst übliche Unterricht statt. Die SchülerInnen der Experimentalgruppe wiesen im Posttest nützlichere Überzeugungen auf als die SchülerInnen der Kontrollklassen. Der Effekt war allerdings klein. Als wichtige Elemente der Intervention nennen Verschaffel u. a. (1999)

- realistische, offene Probleme, deren Lösung die Anwendung einer Heuristik erfordert, und die unterschiedlich präsentiert wurden, etwa als Textaufgabe, Comic, Zeitungsartikel o. Ä.,

- Gruppenarbeiten, Einzelarbeiten und Plenumsdiskussionen, während derer die Lehrkraft zu Reflexionen über das eigene Vorgehen anregt, sowie
- die Änderung soziomathematischer Normen durch Anregung zur Reflexion, Diskussion der Normen und die Änderung der Rolle der Lehrkraft.

Gemeinsam ist den drei Interventionen, dass sie offene Probleme verwenden, Aufgaben, die keine Lösung haben, oder Aufgaben, die Alltagswissen erfordern. Außerdem werden sowohl Gruppenarbeiten als auch Plenumsdiskussionen eingesetzt. Während der Gruppenarbeiten nimmt die Lehrkraft eine unterstützende Rolle ein. Durch diese Unterrichtselemente wurde eine Änderung der sozialen und soziomathematischen Normen im Vergleich zum sonst üblichen Unterricht ermöglicht. Die üblichen Unterrichtsinhalte wurden außerdem in allen drei Interventionen um teils sehr ausführliche, teils etwas kürzere Unterrichtseinheiten zu Heuristiken erweitert, die die SchülerInnen zum Lösen der offenen Probleme verwenden konnten.

In ihrem Übersichtsartikel kommen Depaepe, De Corte und Verschaffel (2016, S. 159) unter Bezug auf Muis (2004) zu dem allgemeineren Ergebnis, dass in den meisten Studien die Einführung eines konstruktivistisch orientierten Zugangs beim Unterrichten von Mathematik zu nützlicheren Überzeugungen führte.

Interventionen, die die mathematikbezogenen Überzeugungen positiv beeinflussen sollen, wurden auch für LehramtsstudentInnen entwickelt. So konzipierten und untersuchten Holzäpfel, Bernack, Leuders und Renkl (2012) ein Problemlöse- und Forschungsseminar für Lehramtsstudierende im zweiten oder dritten Studienjahr (s. a. Bernack-Schüler 2018). Ein Ziel des Seminars war es, die mathematikbezogenen Überzeugungen der TeilnehmerInnen zu ändern. Außerdem wurde die Qualität der Problemlöseprozesse untersucht. Die TeilnehmerInnen des Seminars bekamen offene Aufgaben gestellt, für die man nicht viel Vorwissen braucht, um sie zu verstehen. Die TeilnehmerInnen bearbeiteten die Aufgaben in einem „Forschungsheft“, in das sie alle ihre Gedanken, Versuche, Erkenntnisse und Emotionen eintragen sollten. In einigen Vorlesungsabschnitten wurden außerdem Problemlösestrategien vorgestellt. Das Seminar wurde sechsmal durchgeführt und kleinere Aspekte wurden geändert. Beispielsweise wurde die Reihenfolge der Vorlesungsabschnitte und der „Forschungszeiten“ variiert und in manchen Seminaren wurden kurze Gruppenarbeitsphasen angeleitet, in denen sich die StudentInnen über ihre bisherigen Überlegungen zum aktuellen Problem austauschen konnten. Die TeilnehmerInnen erhielten während ihres Lösungsprozesses kein persönliches Feedback von den DozentInnen. Um die Überzeugungen der TeilnehmerInnen zu erfassen, wurde ein Fragebogen (Prä-/Posttest) mit Items aus der COACTIV-Studie (Baumert u. a. 2009) und eigenen Weiterentwicklungen sowie einem semantisches Differential verwendet. Außerdem wurden die Reflexionen zum eigenen Mathematikbild in den Forschungsheften und Concept Maps zu diesem Thema analysiert. Bei der Auswertung des Fragebogens ergab sich eine Schwächung der Überzeugungen „Mathematik als System“ und „Mathematik als Toolbox“ und eine Stärkung der Überzeugungen „Mathematik als dynamische Wissenschaft“ und „Mathematik als explorative Tätigkeit“. Die letzteren beiden Aspekte stellen eine Ausdifferenzierung von „Mathematik als Prozess“ aus der COACTIV-Studie dar.

Roscoe und Sriraman (2011) integrierten in einen Geometriekurs für StudentInnen des Grundschullehramts in den USA vier Problemlöseaufgaben. Die 46 TeilnehmerInnen bearbeiteten die Aufgabe jeweils zunächst in Gruppen mit vier bis fünf Personen und beendeten sie als Hausaufgabe in Einzelarbeit. Nach jeder Aufgabe reflektierten sie schriftlich ihren Lernweg und ihre Emotionen beim Lösen des Problems sowie die Bedeutung dessen für ihre spätere Arbeit in der Schule. 18 StudentInnen besuchten einen Kurs, der die gleichen Inhalte behandelte, in dem aber keine Problemlöseaufgaben verwendet wurden. Die Auswertung eines Fragebogens ergab, dass die dynamischen Überzeugungen der TeilnehmerInnen mit Problemlöseaufgaben zum Lehren und Lernen von Mathematik nach der Veranstaltung stärker waren als vorher. Bei den Überzeugungen zum Wesen der Mathematik fand eine geringere Verschiebung zu dynamischeren Überzeugungen statt. Die Änderung der Überzeugungen hing nicht von der mathematischen Leistung ab. Bei der Kontrollgruppe war keine Veränderung der Überzeugungen festzustellen.

Ein weiterer Kurs für LehramtsstudentInnen wird von Yusof und Tall (1999) beschrieben. Der Kurs fand über zehn Wochen an einer malaysischen Universität statt und befasste sich mit mathematischem Problemlösen. Die 44 StudentInnen (drittes bis fünftes Studienjahr) arbeiteten in Gruppen zusammen. Die Erstautorin unterstützte sie dabei mit strategischen Hilfen, stellte aber keine Lösungen zur Verfügung. Auch Plenumsdiskussionen dienten dem Fokussieren, Finden von Strategien und Reflektieren, aber es wurden auch hier keine Lösungen vermittelt. Außerdem wurden die StudentInnen in Gesprächen beim Reflektieren des Lösungsprozesses angeleitet. Die Auswertung eines Fragebogens zeigte, dass die dynamischen Überzeugungen der StudentInnen nach dem Kurs stärker waren. Yusof und Tall (1999) befragten außerdem MathematikdozentInnen der Universität, welche Überzeugungen sie bei ihren StudentInnen favorisierten und was sie erwarteten, welche Überzeugungen die StudentInnen hatten. Die DozentInnen bevorzugten überwiegend dynamische Überzeugungen, erwarteten aber eher statische. Ein Follow-Up-Test ergab, dass die TeilnehmerInnen des Problemlösekurses ein halbes Jahr später, nachdem sie traditionelle Kurse bei anderen DozentInnen besucht hatten, wieder weniger dynamische und eher statische Überzeugungen hatten – obwohl die DozentInnen dynamische Überzeugungen bevorzugten.

Den drei beschriebenen Kursen ist gemeinsam, dass sie Problemlöseaufgaben verwenden und die TeilnehmerInnen zu Reflexionen über den Lösungsprozess und zur Auseinandersetzung mit den eigenen Emotionen während des Lösungsprozesses anregen. Roscoe und Sriraman (2011) und Yusof und Tall (1999) nutzten außerdem Gruppenarbeiten, bei Holzäpfel, Bernack, Leuders und Renkl (2012) hingegen spielten Gruppenarbeiten keine große Rolle. Wie bei den Interventionen mit SchülerInnen lässt sich auch in diesen Interventionen eine Änderung der sonst üblichen sozialen und soziomathematischen Normen erkennen. Ähnlich in allen Interventionen ist die Verwendung spezieller Aufgaben, die eine Änderung der Normen erleichtern, möglicherweise sogar nötig machen. Ein Unterschied zwischen den Interventionen mit SchülerInnen und und jenen mit StudentInnen ist die Betonung der Reflexion von Prozessen und Emotionen bei den Kursen für StudentInnen.

Mit der Theorie der soziomathematischen Normen von Yackel und Cobb (1996) lässt sich begründen, warum die gemeinsamen Kernelemente der Interventionen zu einer Stärkung von dynamischen Überzeugungen beitragen können. Offene Aufgaben und Problemlöseaufgaben können auf zum Teil grundlegend verschiedenen Wegen gelöst werden. Wird eine Aufgabe nicht nur von der Lehrkraft im Plenum bearbeitet, sondern haben verschiedene Gruppen die Möglichkeit, eigene Lösungen zu finden, können diese verschiedenen Lösungen im Plenum diskutiert und verglichen werden. Dabei kann die soziale Norm, dass bei der Besprechung eines Problems verschiedene Lösungen präsentiert werden sollen, etabliert werden und es kann die soziomathematische Norm ausgehandelt werden, wann Lösungen als verschieden zählen (vgl. Yackel und Cobb 1996, S. 461). Durch diesen Prozess kann die Überzeugung, dass mathematische Probleme auf verschiedenen Wegen gelöst werden können, unterstützt werden. Bei der Bearbeitung von offenen und Problemlöseaufgaben können sich alle SchülerInnen bzw. StudentInnen beteiligen, was durch die Lehrkraft in Einzel- und Gruppenarbeiten und im Plenum eingefordert werden kann, indem sie die TeilnehmerInnen nach ihren Ideen und Einschätzungen fragt und bei Bedarf strategische oder motivationale Hilfe gibt. Auf diese

Weise kann die Norm etabliert werden, dass alle etwas beitragen können und müssen (vgl. Yackel, Rasmussen und King 2000). Dadurch kann die Selbstwirksamkeitserwartung gestärkt werden; die Überzeugung, dass Mathematik von Autoritäten vermittelt werden müsse, kann geschwächt und die Überzeugung, dass man in Mathematik vieles selbst herausfinden könne, kann gestärkt werden.

Bernack-Schüler (2018, S. 40) stellt außerdem die Reflexion über Überzeugungen als einen wesentlichen Bestandteil mehrerer Interventionen und Unterrichtsprogramme heraus. Im Fall von Lehrkräften oder LehramtsstudentInnen nennt sie zudem die Auseinandersetzung mit dem „mathematische[n] Denken von Schülern“ und die „Implementierung und Entwicklung von neuen Unterrichtskonzepten“ als mögliche Faktoren, die Einfluss auf die Überzeugungen haben.

Problemlöseaufgaben und offene Aufgaben sind zwar ein Kernelement der geschilderten Interventionen, führen aber nicht grundsätzlich zu einer Stärkung dynamischer Überzeugungen. Charalambous, Panaoura und Philippou (2009) untersuchten die Überzeugungen von zyprischen StudentInnen des Grundschullehramts über zwei Jahre hinweg. Die LehramtsstudentInnen besuchten in dieser Zeit einen Kurs zur Geschichte der Mathematik, bestehend aus Vorlesungen zu verschiedenen Themen und Problemlösestunden. Es zeigte sich, dass zwar die platonischen Überzeugungen (Teil der statischen Überzeugungen) schwächer wurden, die Überzeugungen zum Problemlösen (Teil der dynamischen Überzeugungen) allerdings auch, und die formalistischen Überzeugungen (Teil der statischen Überzeugungen) wurden stärker. Die erwartete Stärkung der dynamischen Überzeugungen zum Problemlösen trat in diesem Fall also nicht ein. Der Artikel gibt allerdings keine genaue Auskunft über die verwendeten Aufgaben, über die Unterrichtsform (Gruppenarbeit, Einzelarbeit, Plenum...) oder über die Art und Häufigkeit von Hilfsangeboten. Deshalb lässt sich der Kurs nicht mit den oben geschilderten Kursen auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede vergleichen.

Die bisher genannten Studien gehen von der Hypothese aus, dass eine Änderung von Überzeugungen eine entsprechende Änderung von Handlungen oder Verhaltensweisen nach sich zieht. Rouleau, Ruiz, Reyes und Liljedahl (2019) zeigen, dass es auch umgekehrt sein kann. In ihrer Studie erlebten Lehrerinnen in einer Fortbildung, dass eine bestimmte Unterrichtsmethode „funktionieren“ kann. Die Lehrerinnen wurden daraufhin ermuntert, die Methode selbst einzubauen, obwohl sie noch nicht überzeugt waren, dass die Methode auch in ihren Klassen die gewünschten Erfolge bringen würde. Es stellte sich jedoch heraus, dass die befürchteten Schwierigkeiten nicht eintraten. Dadurch änderten sich die Überzeugungen der Lehrerinnen. Das Schema enthält hier also einen Schritt mehr als bei den vorher beschriebenen Studien: Es wird zunächst eine Verhaltensänderung entgegen den Überzeugungen bewirkt. Durch die Erfahrungen mit dem veränderten Verhalten verändern sich die Überzeugungen, wodurch wiederum das veränderte Verhalten dauerhaft integriert werden kann.

Überzeugungen können also durch positive Erfahrungen, durch das Erleben von Erfolg verändert werden. Dies ist besonders bei der Selbstwirksamkeitserwartung der Fall, denn für die Selbstwirksamkeitserwartung gelten „enactive mastery experiences“[5] (Dinther, Dochy und Segers 2011, S. 104) als beste Fördermöglichkeit. Dabei handelt es sich um die Erfahrung, eine Situation durch eigenes Handeln selbst meistern oder ein Problem selbst lösen zu können. In einer bestimmten Situation erfolgreich zu sein, gibt der Person die Rückmeldung, dass sie die Kompetenzen hat, eine solche Situation handhaben zu können. Das stärkt ihre Selbstwirksamkeitserwartung für ähnliche Situationen. Misserfolge verringern dementsprechend die Selbstwirksamkeitserwartung. Die Selbstwirksamkeit ist resilienter, wenn sie nicht von einfach erreichten Erfolgen herrührt, sondern wenn Hindernisse überwunden werden

[5] Übersetzung: enaktive Erfahrungen, etwas gemeistert zu haben

mussten und ausdauernde Bemühungen nötig waren (Dinther, Dochy und Segers 2011).

Bandura (1997) nennt noch drei weitere Quellen der Selbstwirksamkeitserwartung. Zum einen können stellvertretende Erfahrungen (*vicarious experience*) beim Beobachten von Vorbildern die Selbstwirksamkeitserwartung erhöhen: Beobachtet man Personen, die einem ähnlich sind, dabei, wie sie Aufgaben erfolgreich meistern, kann das die eigene Selbstwirksamkeitserwartung erhöhen, ähnliche Aufgaben selbst meistern zu können. Die Vorbilder können beispielsweise KommilitonInnen/MitschülerInnen, LehrerInnen oder Eltern sein. Eine weitere Quelle für die Selbstwirksamkeitserwartung ist die verbale Überzeugung (*verbal persuasion*): Ermutigungen und die glaubhafte Versicherung, dass eine Person eine Aufgabe schaffen kann, können der Person die Selbstwirksamkeitserwartung stärken und der Person das nötige Durchhaltevermögen geben. Auch physiologische und emotionale Zustände (*physiological and affective states*) haben einen Einfluss auf die Selbstwirksamkeitserwartung: negative Emotionen wirken sich eher negativ auf die Selbstwirksamkeitserwartung aus, während positive Emotionen die Selbstwirksamkeitserwartung stärken können.

Ein Beispiel für eine Intervention zur Änderung der Selbstwirksamkeitserwartung von SchülerInnen wird von Schukajlow, Leiss u. a. (2012) beschrieben. NeuntklässlerInnen arbeiteten an intra-mathematischen Aufgaben, Textaufgaben und Modellierungsaufgaben. Untersucht wurden die Freude beim Lösen der Aufgaben, das Interesse, die Wertzuschreibung und die Selbstwirksamkeitserwartung. 112 SchülerInnen wurden lehrerzentriert unterrichtet, das heißt, die Lehrkraft stellte ein Lösungsmuster für jeden Aufgabentyp vor und die SchülerInnen lösten in Einzelarbeit ähnliche Aufgaben. Ebenfalls 112 SchülerInnen wurden schülerzentriert unterrichtet, das heißt, sie arbeiteten in Gruppen an den Aufgaben und bekamen dabei strategische Hilfen von der Lehrkraft. Bei der Präsentation der Lösungen wurden die Lösungsprozesse und -wege reflektiert. Die Selbstwirksamkeitserwartung (und auch Freude, Interesse und Wertzuschreibung) stieg bei den schülerzentriert unterrichteten SchülerInnen stärker an als bei den lehrerzentriert unterrichteten (Schukajlow, Leiss u. a. 2012, S. 231). Der Unterschied zwischen den beiden Bedingungen könnte nach Bandura (1997, S. 83) damit zu erklären sein, dass die SchülerInnen im lehrerzentrierten Unterricht zu viel Hilfe bekamen und deshalb ihre Erfolge beim Lösen von Aufgaben nicht sich selbst sondern der Hilfe der Lehrkraft zuschrieben. Die SchülerInnen im schülerzentrierten Unterricht konnten hingegen mehr selbst ausprobieren, sodass sie ihre *mastery* Erfahrungen mehr sich selbst anrechneten. Welche Quelle von Selbstwirksamkeit in einem konkreten Fall die größte Rolle spielt, bedarf jedoch einer genauen Analyse. Morris und Usher (2011) befragten zwölf HochschuldozentInnen, welche Quellen am meisten zu ihrer Selbstwirksamkeitserwartung bezüglich des Lehrens beigetragen hatten. Fast alle schrieben Erfolgserlebnissen (*mastery experience*) eine große Bedeutung zu. Die Entscheidung, wann der Unterricht erfolgreich war, basierte aber auf Rückmeldungen der TeilnehmerInnen oder Mentoren (*verbal persuasion*). Die Quellen waren in diesem Fall also nicht klar zu trennen.

Die beschriebenen Studien zeigen, dass durch eine Änderung der Unterrichtsgestaltung eine Änderung der Überzeugungen der TeilnehmerInnen erreicht werden kann. In den meisten Interventionen und Kursen war dabei nicht die Vermittlung bestimmter mathematischer Inhalte das explizite Ziel, sondern die Interventionen und Kurse waren eher methodisch ausgerichtet: Die TeilnehmerInnen lernten heuristische Strategien kennen und wendeten sie auf mathematische Probleme an. Eine Ausnahme ist die Studie von Roscoe und Sriraman (2011), in der eine Geometrieveranstaltung untersucht wurde.

Für die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Studie wurde daher gezielt ein Kurs konzipiert, der ein fortgeschrittenes mathematisches Thema behandelt und keine systematische Einführung in heuristische Verfahren enthält, um zu untersuchen, ob auch ein solcher Kurs zu einer Änderung der mathematikbezogenen Überzeugungen der TeilnehmerInnen beitragen kann, und damit den Befund von Roscoe und Sriraman (2011) zu unterstützen oder zu kontrastieren. Eine Veranstaltung, die übliche mathematische Themen behandelt, lässt sich zudem besser in vorhandene Curricula einbinden als Veranstaltungen, die viel Zeit für Themen verwenden, die nicht offiziell im Curriculum vorgesehen sind. Falls die Veranstaltung die gesteckten Ziele erreicht, trägt sie somit zu einer einfacheren Integration von Forschungsergebnissen in die Praxis bei.

Bisherige Studien nennen einige Kernelemente ihrer Interventionen, auf die die AutorInnen eine Änderung der sozialen und soziomathematischen Normen und damit eine Änderung der Überzeugungen zurückführen. Explizite Untersuchungen, welche Kernelemente welche Überzeugungen unterstützen, fehlen jedoch. Zudem gibt es neben vielen Gemeinsamkeiten auch Unterschiede zwischen den Interventionen. Beispielsweise kommt im Kurs von Holzäpfel, Bernack, Leuders und Renkl (2012) kaum Gruppenarbeit vor, andere AutorInnen wie Mason und Scrivani (2004) und Verschaffel u. a. (1999) nennen Gruppenarbeit explizit als ein Kernelement ihrer Intervention. In der vorliegenden Arbeit soll daher auch untersucht werden, welche Zusammenhänge zwischen Unterrichtselementen und Überzeugungen sich aus studentischen Arbeiten ableiten lassen.

3.2. Änderung von Überzeugungen in „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“

Die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene Literatur legt nahe, dass ein Kurs mit ähnlichen soziomathematischen Normen wie in den obigen Kursen zu einer Stärkung der dynamischen mathematikbezogenen Überzeugungen und der Selbstwirksamkeitserwartung und einer Schwächung der weniger nützlichen Überzeugungen von StudentInnen beitragen kann. Die Hypothesen, die mit dem Kurs „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ untersucht werden sollen, sind daher:

- (H1a) Die weniger nützlichen, statischen Überzeugungen der StudentInnen sind nach dem Kurs schwächer.
- (H1b) Die nützlichen, dynamischen Überzeugungen der StudentInnen sind nach dem Kurs stärker.
- (H2) Die mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung der StudentInnen ist nach dem Kurs stärker.

3.2.1. Methoden

ProbandInnen: Alle TeilnehmerInnen der Studie waren LehramtsstudentInnen der Mathematik an der Universität Tübingen. Die ProbandInnen der Experimentalgruppe besuchten das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ und die ProbandInnen der Kontrollgruppe besuchten die Geometrievorlesung.

Die Experimentalgruppe bestand aus allen 31 TeilnehmerInnen des Seminars im Wintersemester 17/18 (15 TeilnehmerInnen) und 18/19 (16 TeilnehmerInnen). Die Teilnahme am Seminar war freiwillig. Da es mehr Bewerber als Plätze gab, wurden die TeilnehmerInnen ausgelost. Sieben TeilnehmerInnen waren männlich, vierundzwanzig weiblich. Die Kontrollgruppe bestand aus LehramtsstudentInnen, die während eines der beiden Semester an der Geometrievorlesung teilnahmen. 80 StudentInnen nahmen am Vortest teil und 16 von diesen füllten auch den Nachtest aus. Diese 16 bilden im Folgenden die Kontrollgruppe. Von den sechzehn StudentInnen waren vier männlich und zwölf weiblich. Das Verhältnis von weiblichen und männlichen Studenten in den beiden Gruppen war also fast gleich mit einem Anteil von 25% männlichen Studenten. An der Universität Tübingen liegt der Anteil männlicher Studenten unter allen StudentInnen, die Mathematik auf Lehramt studieren, bei etwa 40%. Zwischen der Kontrollgruppe und den StudentInnen, die nur den Vortest ausgefüllt hatten, waren keine Unterschiede festzustellen, abgesehen von einem mathematischen Lückentext, in dem die Kontrollgruppe etwas besser abschnitt.

Alle SeminarteilnehmerInnen waren LehramtsstudentInnen nach GymPO und waren im 7. bis 12. Semester (Median: 9. Semester). Die ProbandInnen der Kontrollgruppe waren LehramtsstudentInnen nach GymPO oder B.Ed. im 3. bis 12. Semester (Median: 7. Semester, nur eine Person im 3. Semester). Im Zuge der Umstellung der Lehramtsstudiengänge vom Staatsexamen auf das Bachelor-Master-System wurde die Vorlesung Geometrie im Studienverlauf um vier Semester vorgezogen, wodurch auch StudentInnen aus niedrigeren Semestern als die SeminarteilnehmerInnen an der Studie teilnahmen.

Die Teilnahme an der Studie war für alle ProbandInnen freiwillig. Im Wintersemester 17/18 bekamen die ProbandInnen nach dem Nachtest als Dankeschön eine Tafel Schokolade oder eine andere Süßigkeit. Um den Anreiz, auch am Nachtest teilzunehmen, zu erhöhen und dadurch mehr vollständige Datensätze zu erhalten, wurden im Wintersemester 18/19 unter den ProbandInnen neun Tübinger Einkaufsgutscheine im Wert von je 10 € verlost. Die Studie wurde von der Ethikkommission der Fakultät begutachtet und genehmigt.

Intervention: Die Intervention bestand aus dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen", das ein Semester dauerte und zwei Semesterwochenstunden umfasste. Die TeilnehmerInnen entwickelten in Gruppenarbeit selbst mathematische Konzepte und präsentierten ihre Ergebnisse ihren KommilitonInnen im Plenum. Das Seminar bestand aus vier Blöcken. Am Anfang jedes Blocks wurden die Themen verteilt und die TeilnehmerInnen bekamen Hands-on-Materialien zur Verfügung gestellt, um sich damit Sachverhalte veranschaulichen zu können. Ihre dabei gesammelten Ideen arbeiteten sie zu präzisen mathematischen Herleitungen aus. Während der Gruppenarbeitsphasen wurden die TeilnehmerInnen von den Dozentinnen mit strategischen und motivationalen Hilfen unterstützt und gelegentlich auch mit inhaltlichen. Am Ende eines Blocks präsentierte jeweils ein Gruppenmitglied die Ergebnisse der Gruppe. Für eine genauere Beschreibung des Seminarablaufs und der Seminarinhalte siehe Abschnitt 2.3 und 2.4. Das Seminar enthielt mehrere der auch in anderen Interventionen verwendeten Kernelemente. Offene Aufgaben boten den TeilnehmerInnen die Möglichkeit, eigene Lösungswege zu beschreiten und die Erfahrung zu machen, dass sie selbst mathematische Theorien entwickeln können. Durch die Gruppenarbeit mussten die TeilnehmerInnen viel mit einander kommunizieren und sich in die Gedankenwelt der Kommilitonen eindenken. In motivational oder emotional schwierigen Phasen (z. B. bei Frustration, weil „nichts funktioniert") konnten sie sich gegenseitig unterstützen und auch die Dozentinnen gingen auf entsprechende Äußerungen ein. Außerdem mussten die TeilnehmerInnen einmal schriftlich ihr Lernen reflektieren.

Daten: Alle ProbandInnen füllten einen Papierfragebogen (siehe Tabelle 3.3) aus: den Vortest in der zweiten Vorlesungswoche, den Nachtest in einer der letzten drei Vorlesungswochen. Die Experimentalgruppe wurde zusätzlich ein Jahr nach dem Ende des Seminars gebeten, einen Follow-Up-Test auszufüllen. Vierzehn der TeilnehmerInnen kamen dieser Bitte nach. Um die mathematikbezogenen Überzeugungen der Studierenden untersuchen zu können, enthielt der Fragebogen drei Skalen des Fragebogens von Baumert u. a. (2009), der auf den verbreiteten Skalen von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) basiert. Die Skalen sind „Mathematik als Toolbox“, „Mathematik als Prozess“ und „Praktische Relevanz der Mathematik“. Eine Überzeugung im Sinne der Toolbox-Skala gehört zu den statischen Überzeugungen, eine Überzeugung im Sinne der Prozess- oder Relevanz-Skala gehört zu den dynamischen Überzeugungen. Baumert u. a. (2009) verwendete den Fragebogen für LehrerInnen. Darum musste ein Item leicht umformuliert werden, um es an die Situation der LehramtsstudentInnen anzupassen.[6] Zur Erhebung der mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung der ProbandInnen wurde eine angepasste Skala nach Schoreit (2016) verwendet[7], die auf Arbeiten von Schwarzer und Jerusalem basiert (z. B. Schwarzer und Jerusalem 1999). Bei allen diesen Skalen wurden die ProbandInnen mit vier oder fünf Aussagen konfrontiert und sollten auf einer Likert-Skala von 1=„trifft nicht zu“ bis 4=„trifft voll zu“ angeben, wie stark sie der jeweiligen Aussage zustimmten oder sie ablehnten. Eine Aussage der Toolbox-Skala war beispielsweise „Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.“

[6] Beim Item iic wurde „für das spätere Leben der Schüler/innen“ zu „für das spätere Leben von Schüler/innen“ geändert. Außerdem wurde beim Item iiv „Formen“ zu „Formeln“ geändert.

[7] Es wurde bei jedem Item das Wort „Mathematikunterricht“ bzw. „Mathematik“ durch das Wort „Mathematikstudium“ ersetzt.

	Anzahl der Items	Beispiel	Skala	Cronbachs Alpha	Test	Quelle
Überzeugung: Mathematik als Toolbox	5	Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.	4-Punkte-Likert-Skala	Vortest: 0.52 Nachtest: 0.6[a]	Vor-, Nachtest, Follow-up	Baumert u. a. (2009)
Überzeugung: Mathematik als Prozess	4	In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.	4-Punkte-Likert-Skala	Vortest: 0.71 Nachtest: 0.71	Vor-, Nachtest, Follow-up	Baumert u. a. (2009)
Überzeugung: Praktische Relevanz der Mathematik	4	Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.	4-Punkte-Likert-Skala	Vortest: 0.76 Nachtest: 0.69	Vor-, Nachtest, Follow-up	Baumert u. a. (2009)
Mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung	3	Ich kann im Mathematikstudium auch die schwierigen Aufgaben lösen, wenn ich mich anstrenge.	4-Punkte-Likert-Skala	Vortest: 0.67 Nachtest: 0.74	Vor-, Nachtest	basiert auf Schoreit (2016)
Mathematikbezogene Anstrengungsbereitschaft	4	Im Mathematikstudium strenge ich mich auch dann an, wenn ich eine Aufgabe zunächst nicht gleich verstehe.	4-Punkte-Likert-Skala	Vortest: 0.8 Nachtest: 0.82	Vor-, Nachtest	basiert auf Schoreit (2016)
Mathematischer Lückentext					Vortest	eigene Entwicklung
Persönliche Daten: Geschlecht, Semester, Abiturnote					Vortest	

[a]Für die Analysen wurden nur vier Items verwendet. Cronbachs Alpha für diese: Vortest: 0.56, Nachtest: 0.63.

Tabelle 3.3.: Überblick über die verwendeten Testinstrumente

Um zu testen, ob die Drei-Faktoren-Struktur der Itembatterie zu Überzeugungen mit den Daten zusammenpasst, wurde eine konfirmatorischen Faktorenanalyse mit allen LehramtsstudentInnen, die am Vortest teilnahmen, durchgeführt ($N = 101$). Die CFI- und RMSEA-Werte waren nicht akzeptabel (CFI 0.834, RMSEA 0.081). Dies schien zu einem großen Teil an einem Item der Toolbox-Skala zu liegen (bei Baumert u. a. (2009) „iip“ genannt), denn unter Ausschluss dieses Items liefert die Faktorenanalyse die akzeptablen Werte 0.934 für CFI und 0.053 für RMSEA. Darum wurde dieses Item bei allen weiteren Analysen ausgeschlossen.

Für die Prozess- und die Relevanz-Skala lieferte Cronbachs Alpha akzeptable Werte (Prozess: Alpha = 0.71 im Vor- und Nachtest; Relevanz: Alpha = 0.76 im Vor- und 0.69 im Nachtest). Für die Toolbox-Skala lag Cronbachs Alpha unter der Akzeptanzschwelle von 0.65 (Alpha = 0.56 und 0.63 im Vor- bzw. Nachtest). Wir werden die folgenden Ergebnisse darum mit Vorsicht interpretieren. Für die Selbstwirksamtkeitserwartungsskala betrug Cronbachs Alpha 0.67 im Vor- und 0.74 im Nachtest.

Um Unterschiede zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe kontrollieren zu können, enthielt der Fragebogen außerdem eine Skala zur Anstrengungsbereitschaft im Mathematikstudium, die auf der entsprechenden Skala von Schoreit (2016) basiert und die gleiche Likert-Skala verwendet wie die vorigen Skalen. Die mathematischen Fähigkeiten der TeilnehmerInnen wurden mit drei Lückentexten untersucht. Die Lückentexte waren Beweise von Aussagen aus Analysis 1, Linearer Algebra und elementarer Zahlentheorie, die Lücken enthielten. Die TeilnehmerInnen sollten die Lücken so ausfüllen, dass ein korrekter Beweis entstand. Die TeilnehmerInnen wurden außerdem nach persönlichen Daten wie ihrem Geschlecht, dem Fachsemester und ihrer Abiturnote gefragt.

Zwischen der Experimentalgruppe und der Kontrollgruppe war mit einem Permutationstest (Exakter Test, Fisher-Pitman-Test [8]) kein signifikanter Unterschied in Bezug auf die Abiturnote ($Z = 1.10$, $p > 0.1$), die Anstrengungsbereitschaft ($Z = 0.34$, $p > 0.1$) oder den mathematischen Lückentext ($Z = -0.55$, $p > 0.1$) festzustellen.

Im Vortest füllten die Studierenden den gesamten Fragebogen aus, im Nachtest nur die Skalen zu Überzeugungen, Selbstwirksamkeitserwartung und Anstrengungsbereitschaft. Der Follow-Up-Test enthielt nur die drei Skalen zu Überzeugungen.

Die Korrelationen der Variablen sind in Tabelle 3.4 zu finden.

Statistische Verfahren: Die Daten wurden unter Verwendung des R-Paketes MANOVA.RM (Friedrich, Konietschke und Pauly 2018a) analysiert. Um Unterschiede zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe sowie zwischen Vor- und Nachtest zu untersuchen, wurde eine multivariate Varianzanalyse mit wiederholter Messung verwendet. Die Tests liefern Haupt- und Interaktionseffekte in Bezug auf die *between-group-* und *within-subject*-Faktoren. Die berichteten Statistiken sind Resampling-Statistiken (*Resampled Wald-Type Statistics*) und

[8] Bei einem Permutationstest werden die vorhandenen Datenwerte permutiert, um zu bestimmen, ob die durch die Messung erhaltene Verteilung der Werte extrem ist oder nicht (Wollschläger 2017). Um zwei Untergruppen einer Grundgesamtheit zu vergleichen, werden alle Permutationen der Messwerte dieser Untergruppen betrachtet, auch Permutationen von Messwerten zwischen den Gruppen. Denn unter der Null-Hypothese, dass sich die Untergruppen nicht unterscheiden, könnte jeder Messwert genau so gut aus der einen wie aus der anderen Untergruppe stammen. Die Originalverteilung der Messwerte wird mit den permutierten Verteilungen verglichen.
Üblichere Tests wie der t-Test gehen von kontinuierlichen Zufallsvariablen aus und nehmen eine Normalverteilung an. Diese Voraussetzungen werden von den hier untersuchten Daten nicht erfüllt, weshalb der Permutationstest gewählt wurde. Man kann aber auch mit diesen Daten einen Welch-Two-Sample-t-Test durchrechnen: Abiturnote: $t = -1.02$, df= 25.04, $p > 0.1$; Anstrengungsbereitschaft: $t = -0.59$, df= 28.42, $p > 0.1$; Lückentext: $t = 0.51$, df= 25.47, $p > 0.1$

	Tool1	Tool2	Pr1	Pr2	Rel1	Rel2	SWE1	SWE2	AB1	AB2
Tool1	1.00									
Tool2	0.52	1.00								
Pr1	-0.03	-0.29	1.00							
Pr2	-0.05	-0.13	0.55	1.00						
Rel1	-0.05	-0.03	0.22	0.18	1.00					
Rel2	-0.01	-0.03	0.30	0.32	0.45	1.00				
SWE1	0.03	0.11	0.21	0.13	0.09	0.20	1.00			
SWE2	-0.12	-0.02	0.27	0.21	0.34	0.25	0.40	1.00		
AB1	-0.03	0.11	0.08	0.12	0.15	0.08	0.57	0.29	1.00	
AB2	-0.13	0.07	0.02	0.22	0.30	0.06	-0.17	0.28	0.37	1.00

Tool: Toolbox, Pr: Prozess, Rel: Relevanz, SWE: Selbstwirksamkeitserwartung, AB: Anstrengungsbereitschaft, 1, 2: t1 bzw. t2

Tabelle 3.4.: Korrelationsmatrix

solche vom Typ ANOVA für wiederholte Messungen (*ANOVA-type statistics for repeated measurement*. Erstere wird für kleine Stichprobengrößen empfohlen (Friedrich, Konietschke und Pauly 2018b, S. 9).

3.2.2. Ergebnisse

Tabelle 3.5 zeigt die Mittelwerte und Standardabweichungen im Vor- und Nachtest der Skalen „Mathematik als Toolbox“, „Mathematik als Prozess“, „Praktische Relevanz der Mathematik“ und „Selbstwirksamkeitserwartung“ (SWE), siehe auch Abbildung 3.1. Die möglichen Werte reichen von 1 (Ablehnung) bis 4 (Zustimmung).

	Kontrollgruppe				Experimentalgruppe			
	M	Med	SD	N	M	Med	SD	N
Vortest								
Toolbox	2.53	2.50	0.46	16	2.51	2.63	0.48	30
Prozess	3.25	3.38	0.52	16	3.30	3.50	0.53	31
Relevanz	3.20	3.00	0.40	16	3.02	3.00	0.51	31
SWE	2.29	2.33	0.63	16	2.15	2.33	0.54	26
Nachtest								
Toolbox	2.48	2.38	0.37	16	2.48	2.50	0.57	30
Prozess	3.45	3.50	0.48	16	3.69	3.75	0.27	31
Relevanz	2.95	2.88	0.65	16	3.12	3.00	0.36	31
SWE	2.23	2.33	0.53	16	2.49	2.33	0.58	26

Tabelle 3.5.: Arithmetisches Mittel, Median und Standardabweichung (SD) im Vor- und Nachtest

Die Werte der Experimental- und der Kontrollgruppe sind im Vortest auf allen Skalen ähnlich. Auf der Toolbox-Skala liegen die Mittelwerte der Mitte der Skala sehr nahe. Es gab keinen signifikanten Haupt- oder Interaktionseffekt bei der Toolbox-Überzeugung (vgl. Tabelle 3.6). Dieses Ergebnis unterstützt die erste Hypothese (H1a) nicht.

Mit 3.30 bzw. 3.25 von 4 sind die Werte auf der Prozessskala schon im Vortest sehr hoch. Im Nachtest nahm der Wert bei beiden Gruppen zu (signifikanter Haupteffekt für Zeit zum Signifikanzniveau, $p < 0.001$). Es traten weder ein Gruppeneffekt ($p = 0.29$) noch ein Interaktionseffekt ($p = 0.18$) auf. Hypothese (H1b) wird hiervon nicht unterstützt. Interessanterweise verringerte sich die Standardabweichung der Experimentalgruppe um fast die Hälfte (0.53 und 0.27), während die Standardabweichung der Kontrollgruppe beinahe gleich blieb (0.52 und 0.48). Bei der Relevanz-Überzeugung gab es keinen Haupteffekt bezüglich der Gruppe ($p = 0.95$) oder die Zeit ($p = 0.37$), aber einen Interaktionseffekt ($p < 0.05$) zum Signifikanzniveau 5% mit mittlerer Größe (Cohens d= 0.74, Hedges' g= 0.72). Dieses Ergebnis unterstützt Hypothese (H1b).[9]

Bei der Selbstwirksamkeitserwartung gab es keinen signifikanten Haupteffekt bezüglich die Gruppe ($p = 0.73$), aber einen Effekt bezüglich der Zeit ($p < 0.05$) und einen Interaktionseffekt ($p < 0.01$). Der Effekt bezüglich der Zeit ist klein (Cohens d = 0.15, Hedges' g = 0.15), der Interaktionseffekt mittel bis groß (Cohens d = 0.81, Hedges' g = 0.79). Dieses Ergebnis unterstützt Hypothese (H2).[10]

Tabelle 3.7 zeigt das arithmetische Mittel, den Median und die Standardabweichung der vierzehn TeilnehmerInnen der Experimentalgruppe, die den Follow-Up-Test mit den drei Skalen zu Überzeugungen ausfüllten. Die Werte auf der Toolbox-Skala bewegen sich um den Mittelwert von 2,5. Im Vor- und Nachtest sind die Werte fast identisch, im Follow-Up-Test etwas niedriger. Die Werte auf der Prozess-Skala sind zu allen Zeitpunkten größer als 3, wobei der Wert im Vortest am niedrigsten ist und die Werte im Nach- und im Follow-Up-Test beinahe gleich sind. Die Standardabweichung auf dieser Skala nimmt mit der Zeit ab. Die Werte auf der Relevanz-Skala bewegen sich um den Wert 3, wobei der Wert im Vortest am niedrigsten ist.

3.2.3. Diskussion

Mit dieser Studie sollte untersucht werden, ob das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“, in dem andere soziomathematische Normen etabliert wurden als in traditionellen Mathematikseminaren, mit einer Stärkung von nützlichen mathematikbezogenen Überzeugungen einhergeht. Die Hypothesen wurden teilweise unterstützt. Auf der Toolbox-Skala zeigte sich entgegen Hypothese (H1a) kein signifikanter (Abschwächungs-)Effekt, anders als beispielsweise bei Holzäpfel, Bernack, Leuders und Renkl (2012). Da die Werte auf dieser Skala im Schnitt jedoch nahe der neutralen Mitte der Skala liegen und damit geringer sind als auf der Prozess- und der Relevanz-Skala, erscheint es nicht notwendig, mit folgenden Interventionen auf eine weitere Schwächung dieser Überzeugung abzuzielen. Eine völlige Ablehnung statischer Überzeugungen würde in der Folge die Unterrichtsgestaltung einschränken, was nicht zu befürworten wäre (Biedermann, Steinmann und Oser 2015, S. 51).

Bezüglich Hypothese (H1b) zeigte sich ein gemischtes Bild. Auf der Relevanz-Skala gab es einen signifikanten Interaktionseffekt, was die Hypothese unterstützt. Auf der Prozess-Skala gab es einen signifikanten Effekt innerhalb der Experimentalgruppe, aber keinen Interaktionseffekt beim Vergleich von Experimental- und Kontrollgruppe. Dies widerspricht Hypothese (H1b). Dieses Ergebnis ist unerwartet, da bei anderen Interventionen (z. B. Mason und Scrivani 2004; Holzäpfel, Bernack, Leuders und Renkl 2012) insgesamt eine Stärkung der

[9] Mit Bonferroni-Korrektur ist der Effekt nicht signifikant.
[10] Mit Bonferroni-Korrektur ist der Effekt signifikant zum Signifikanzniveau 0.05.

nützlichen Überzeugungen eintrat. Für diesen Befund gibt es verschiedene mögliche Erklärungen. Eine Erklärungsmöglichkeit ist, dass die Intervention nützliche Überzeugungen nicht in der gewünschten Weise unterstützt. Allerdings legt die nähere Betrachtung des Boxplots in Abbildung 3.1 eher einen Deckeneffekt als Erklärung nahe. Mittelwert und Median beider Gruppen waren schon beim ersten Messzeitpunkt größer als 3 (von 4). Daher gab es nicht viel Raum für eine Erhöhung der Werte auf dieser Skala. In zukünftigen Studien sollten daher größere Skalen verwendet werden, um einen Deckeneffekt zu vermeiden oder ausschließen zu können. Ein weiterer Grund für das nicht signifikante Ergebnis könnte die kleine Stichprobe sein.

Die Analyse der schriftlichen Reflexionen der SeminarteilnehmerInnen spricht eher für die Hypothese, da in den Reflexionen viele dynamische Überzeugungen zum Ausdruck kom-

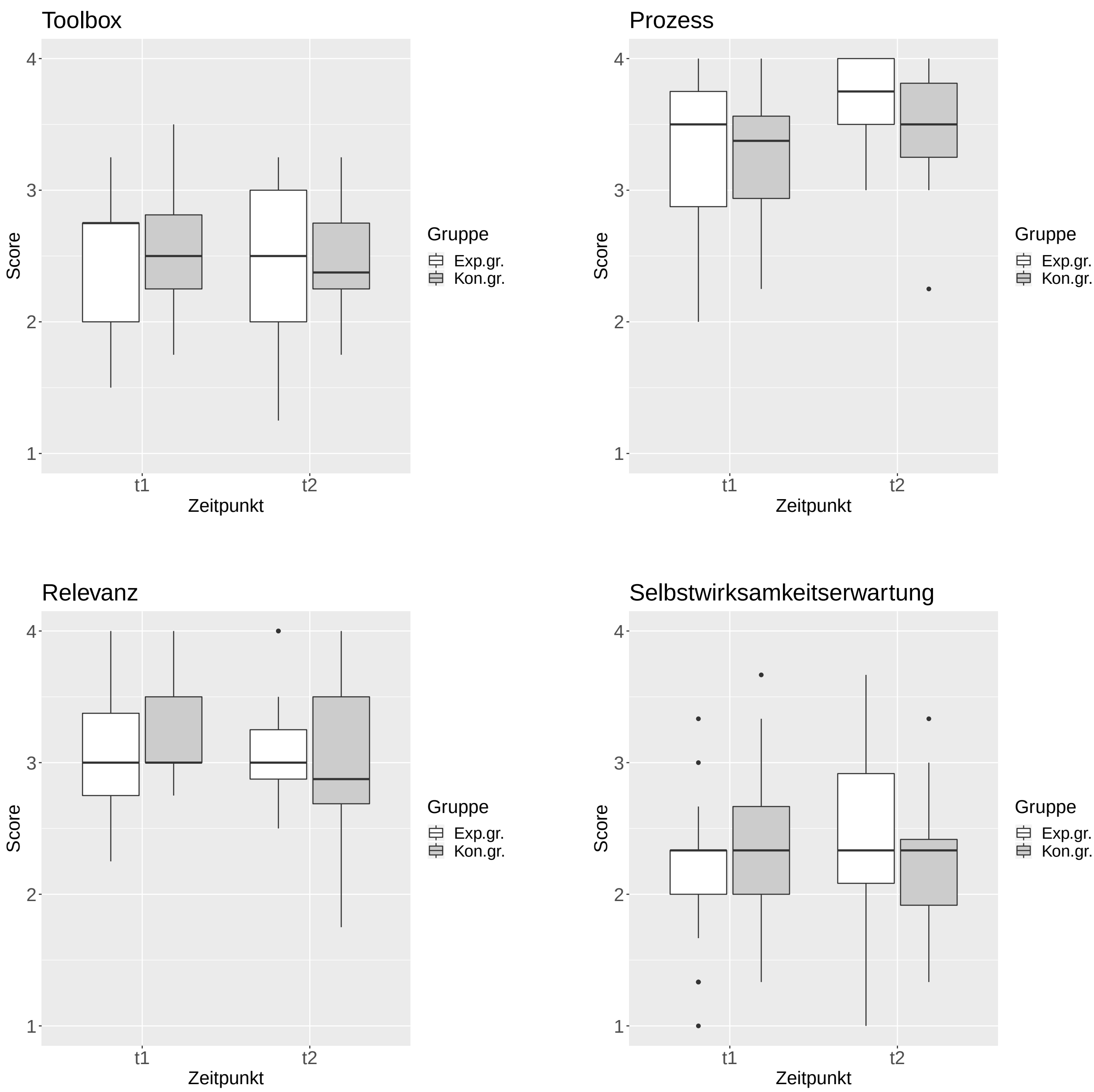


Abbildung 3.1.: Boxplots für die vier Skalen Toolbox, Prozess, Relevanz und SWE. Dargestellt werden jeweils der Median, die Quartile und ggf. Ausreißer.

p-Wert-Resampling

Toolbox

	Perm (WTS)
Gruppe	0.91
Zeitpunkt	0.52
Gruppe:Zeitp.	0.92

Prozess

	Perm (WTS)
Gruppe	0.29
Zeitpunkt	<0.001
Gruppe:Zeitp.	0.18

Relevanz

	Perm (WTS)
Gruppe	0.95
Zeitpunkt	0.37
Gruppe:Zeitp.	<0.05

Selbstwirksamkeitserwartung

	Perm (WTS)
Gruppe	0.73
Zeitpunkt	<0.05
Gruppe:Zeitp.	<0.01

ANOVA-Type Statistic

Toolbox

	Test statistic	df1	df2	p
Gruppe	0.02	1	53.89	0.90
Zeitpunkt	0.38	1	Inf	0.54
Gruppe:Zeitp.	0.01	1	Inf	0.93

Prozess

	Test statistic	df1	df2	p
Gruppe	1.17	1	92.53	0.28
Zeitpunkt	19.35	1	Inf	<0.001
Gruppe:Zeitp.	1.88	1	Inf	0.17

Relevanz

	Test statistic	df1	df2	p
Gruppe	0.01	1	78.75	0.94
Zeitpunkt	0.76	1	Inf	0.39
Gruppe:Zeitp.	4.52	1	Inf	<0.05

Selbstwirksamkeitserwartung

	Test statistic	df1	df2	p
Gruppe	0.12	1	108.00	0.72
Zeitpunkt	4.12	1	Inf	<0.05
Gruppe:Zeitp.	8.79	1	Inf	<0.01

Tabelle 3.6.: Resampling- und ANOVA-Teststatistiken für die vier Skalen Toolbox, Prozess, Relevanz und Selbstwirksamkeitserwartung

	Vortest			Nachtest			Follow-up		
	M	Med	SD	M	Med	SD	M	Med	SD
Toolbox	2.44	2.5	0.50	2.46	2.63	0.62	2.27	2.25	0.46
Prozess	3.38	3.5	0.41	3.68	3.75	0.27	3.75	3.75	0.22
Relevanz	2.96	2.75	0.46	3.18	3.25	0.37	3.14	3.13	0.45

Tabelle 3.7.: Arithmetisches Mittel, Median und Standardabweichung in Vor-, Nach- und Follow-Up-Test, N=14

men und kaum statische. Siehe dazu Abschnitt 3.3. Die Daten der 14 TeilnehmerInnen aus der Experimentalgruppe, die am Follow-up-Test teilnahmen, deuten darauf hin, dass eine Verschiebung der Zustimmung zur Prozess-Überzeugung stattgefunden hat und anhält, auch nachdem die StudentInnen wieder traditionelle Veranstaltungen besucht haben. Dies steht im Gegensatz zu den Ergebnissen von Yusof und Tall (1999). Sie unterrichteten einen Problemlösekurs für malaysische StudentInnen, während dem sich die Überzeugungen der StudentInnen in der gewünschten Weise änderten. Nach einem Semester mit traditionellen Vorlesungen waren die Überzeugungen der StudentInnen allerdings wieder fast die gleichen wie vor dem Problemlösekurs.

Ein interessanter Befund ist die Abnahme der Standardabweichung auf der Prozess-Skala bei der Experimentalgruppe. Bei der Kontrollgruppe nahm die Standardabweichung hingegen sogar zu. Die Entwicklung der Standardabweichung bei der Kontrollgruppe stimmt damit mit der von Biedermann, Steinmann und Oser (2015, S. 63) berichteten überein. Die StudentInnen in jener Studie waren sich in ihrer Ablehnung transmissiver (statischer) Überzeugungen also einiger als in ihrer Befürwortung konstruktivistischer (dynamischer). Nach dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" ist dies bei der Experimentalgruppe gerade andersherum.

Die Ergebnisse der vorgestellten Studie deuten auf eine Verbesserung der mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung hin und unterstützen damit (H2). Dieser Effekt kann mit der Theorie zur Selbstwirksamkeitserwartung von Bandura (1997) erklärt werden. Alle TeilnehmerInnen des Seminars lösten selbst mathematische Probleme, weshalb man davon ausgehen kann, dass sie *mastery*-Erfahrungen machten. *Mastery*-Erfahrungen gelten als wirkungsvolle Quelle für eine gute Selbstwirksamkeitserwartung (Dinther, Dochy und Segers 2011, S. 104). Da die mathematischen Problem zudem anspruchsvoll waren und von den StudentInnen nicht schnell gelöst werden konnten, könnte der Zuwachs an Selbstwirksamkeitserwartung stabil sein (Bandura 1997, S. 80).

Hinweise auf eine Steigerung der Selbstwirksamkeitserwartung finden sich auch in den schriftlichen Reflexionen der TeilnehmerInnen. Die TeilnehmerInnen reflektierten dabei ihren Lernprozess oder Verbindungen zwischen dem Seminar und ihrer späteren Arbeit an der Schule. Mehrere TeilnehmerInnen berichteten, dass sie sich nun mehr zutrauten, wenn es darum gehe, ein mathematisches Thema zu verstehen oder ein Problem zu lösen. Manche TeilnehmerInnen berichteten auch, dass sie die Aufgaben im Seminar als sehr schwer empfunden hätten und zwischendurch frustriert gewesen seien, dafür aber um so glücklicher und stolzer, wenn sie ein Problem gelöst hätten. Zwar lassen sich andere Quellen von Selbstwirksamkeitserwartung an dieser Stelle nicht ausschließen, aber anders als beispielsweise in der Lehre kann man beim Lösen mathematischer Probleme meist leicht entscheiden, wann man eine Aufgabe gemeistert hat. Die TeilnehmerInnen waren daher bei der Bewertung ihrer Erfahrungen als „erfolgreich" oder „nicht erfolgreich" weniger auf Rückmeldungen von außen angewiesen als beispielsweise die von Morris und Usher (2011) untersuchten DozentInnen.

Dennoch können neben *mastery*-Erfahrungen auch die anderen Quellen von Selbstwirksamkeitserwartung eine Rolle gespielt haben. Die Selbstwirksamkeitserwartung der StudentInnen könnte durch stellvertretendes Lernen gewachsen sein, wenn sie Kommilitonen beim Problemlösen beobachteten oder wenn die Dozentinnen den Gruppen zeigten, wie sie ein Problem angehen würden (Dinther, Dochy und Segers 2011). Auch verbale Ermutigungen (*verbal persuasion*) können die Selbstwirksamkeitserwartung verstärkt haben, da sich die TeilnehmerInnen immer wieder gegenseitig ermutigten und auch von den DozentInnen unterstützt wurden. Beiträge dieser Quellen lassen sich jedoch nicht eindeutig aus den Reflexionen der TeilnehmerInnen ablesen.

Insgesamt deutet die vorliegende Studie darauf hin, dass das Seminar zu einer Stärkung der dynamischen Überzeugungen und der mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung beiträgt. Sie unterstützt damit das Ergebnis von Roscoe und Sriraman (2011), dass auch Kurse, die auf fachliche Inhalte ausgerichtet sind, zu einer Änderung von Überzeugungen beitragen können. Die Studie unterliegt allerdings auch einigen Einschränkungen in Bezug auf das Studiendesign. Beispielsweise wurden die Experimental- und die Kontrollgruppe nicht von den gleichen DozentInnen unterrichtet, sodass ein Effekt aufgrund der unterschiedlichen Persönlichkeiten und Unterrichtsstile aufgetreten sein könnte. In der weiteren Forschung wäre es daher sinnvoll, solche möglichen Störeffekte zu kontrollieren, indem beide Kurse von den gleichen DozentInnen gehalten werden oder indem die StudentInnen zur Unterrichtsqualität befragt werden.

Eine weitere Einschränkung ergibt sich daraus, dass die Stichprobe nicht randomisiert war, da die ProbandInnen aus freiwilligen StudentInnen bestanden, die sich schon für das Seminar oder die Vorlesung entschieden hatten. Zudem waren die TeilnehmerInnen des Seminars vor der Anmeldung über das Konzept der Veranstaltung informiert worden, sodass jene StudentInnen, die dem ablehnend gegenüber standen, sich nicht anmeldeten. Eine gewisse Randomisierung der Experimentalgruppe wurde allerdings dadurch erreicht, dass es mehr Bewerber als Plätze gab und die TeilnehmerInnen ausgelost wurden. Außerdem konnten mittels des Vortests mögliche Unterschiede zwischen den Gruppen erkannt und einberechnet werden.

Eine Einschränkung des Ergebnisses, dass die Änderungen der mathematikbezogenen Überzeugungen auch nach einem Jahr noch vorhanden sind, ist, dass nur etwa die Hälfte der Experimentalgruppe am Follow-up-Test teilnahm.

Die Werte für Cronbachs Alpha waren bei der Toolbox-Skala eher klein (0.56 und 0.63) und damit niedriger als in Baumert u. a. (2009, Alpha = 0.73 und 0.75). Dies könnte daran liegen, dass die Skala nicht zwischen Überzeugungen zur Schul- und zur Hochschulmathematik differenziert. LehramtsstudentInnen könnten bei manchen Items mehr an Schulmathematik denken, bei anderen eher an die Mathematik an der Universität. Die LehrerInnen in der Studie von Baumert u. a. (2009) hingegen hatten vermutlich hauptsächlich die Schulmathematik vor Augen. Über unterschiedlichen Überzeugungen zu Schul- und Hochschulmathematik wurde in der Literatur schon berichtet, siehe zum Beispiel Beswick (2012).

Generell sind die Konsistenz- und Reliabilitätseinschätzungen von Instrumenten, die mathematikbezogene Überzeugungen auf Basis von Selbstauskünften erfassen, eher gering (z. B. Muis 2004; Rott und Leuders 2016). Darum wurden Mixed-Methods-Ansätze vorgeschlagen und verwendet, um Überzeugungen zu bestimmen. Beispielsweise nutzten Rott und Leuders (2016) Items mit Likert-Skalen und Interviews, um einen Fragebogen mit offenen Items zu entwickeln. Sie unterscheiden dabei zwischen der Orientierung und der Ausgereiftheit (*sophistication*) einer Überzeugung. Eine interessante Frage für zukünftige Forschung ist daher, ob das Seminar dazu beiträgt, dass die TeilnehmerInnen ihre Überzeugungen im Anschluss reflektierter begründen können. Eine Unterscheidung von Orientierung und Ausgereiftheit könnte zu einer Erklärung des nicht signifikanten Ergebnisses auf der Prozess-Skala in der vorgestellten Studie beitragen. Die Verwendung eines Fragebogens mit offenen Items wie dem von Rott und Leuders (2016) könnte außerdem die Gefahr einer Verzerrung durch soziale Erwünschtheit, die in dieser Studie nicht ausgeschlossen werden kann, verringern.

Eine weitere interessante Frage für zukünftige Forschung ist, ob das Seminar auch die Überzeugungen zum Lehren von Mathematik beeinflusst. Conner, Edenfield, Gleason und Ersoz (2011) untersuchten die Überzeugungen von LehramtssutdentInnen während einer mathematischen und einer methodischen Veranstaltung. Dabei stellten sich die Überzeugungen zu Mathematik als recht stabil heraus, aber es gab eine Verschiebung der Überzeugungen zum Lehren von Mathematik. Die oben erwähnten schriftlichen Reflexionen der SeminarteilnehmerInnen lassen vermuten, dass auch sie ihre Überzeugungen zum Lehren von Mathematik änderten. Die Frage, die sich hier stellt, ist also, ob es ausreicht, StudentInnen gewisse Methoden in einer Mathematikveranstaltung selbst ausprobieren und kurz reflektieren zu lassen, um eine Veränderung der Überzeugungen zum Lehren von Mathematik zu begünstigen, oder ob die Methoden wie bei Conner, Edenfield, Gleason und Ersoz (2011) in einem Methodenkurs explizit diskutiert werden müssen.

Eine weitere offene Frage ist, wie Änderungen von mathematikbezogenen Überzeugungen und Kernelemente der Intervention zusammenhängen. Gibt es Kernelemente, die bestimmte Überzeugungen besonders stärken? Oder kommen Änderungen von Überzeugungen erst durch das Zusammenspiel verschiedener Elemente zustande? Bisherige Studien nennen einige Kernelemente ihrer Interventionen, auf die die AutorInnen eine Änderung der sozialen und soziomathematischen Normen und damit eine Änderung der Überzeugungen zurückführen. Explizite Untersuchungen, welche Kernelemente welche Überzeugungen unterstützen, fehlen jedoch. Im nächsten Abschnitt sollen deshalb mit Hilfe von schriftlichen Reflexionen der TeilnehmerInnen aus der Experimentalgruppe mögliche Zusammenhänge zwischen Kernelementen der Veranstaltung und Überzeugungen ermittelt werden, die dann als Grundlage für weitere Forschung dienen können.

3.3. Analyse der schriftlichen Reflexionen

In diesem Abschnitt werden schriftliche Reflexionen der SeminarteilnehmerInnen unter zwei Gesichtspunkten analysiert. Zum einen soll untersucht werden, welche Überzeugungen in den Texten zum Ausdruck kommen und ob dies mit den Ergebnissen der Analyse des Fragebogens (Abschnitt 3.2) übereinstimmt. Zum anderen sollen mögliche Zusammenhänge zwischen Kernelementen der Veranstaltung und Überzeugungen ermittelt werden, um Hinweise zu erhalten, welche Elemente Veranstaltungen mit ähnlichen Zielen beinhalten sollten.

Die Leitfragen für die folgende Untersuchung sind also:

- Was für Überzeugungen werden in den Texten der StudentInnen deutlich?
- Welche Elemente des Seminars fördern welche Überzeugungen und warum?

3.3.1. Methoden

Qualitative Inhaltsanalyse

Die qualitative Inhaltsanalyse ist ein regelgeleitetes, systematisches Auswertungsverfahren, das auf Kategorien basiert (Kuckartz 2016). Zur Auswertung eines Datensatzes, der üblicherweise aus Texten oder Transkripten besteht, wird ein Kategoriensystem entwickelt. Sinneinheiten der Texte werden den Kategorien zugeordnet und dadurch Zusammenhänge oder Charakteristika des untersuchten Gegenstandes erschlossen. Dabei wird stets das gesamte Datenmaterial kategorisiert, um voreilige Schlussfolgerungen aus Einzelfällen zu vermeiden. Außerdem werden die Daten im Kontext analysiert und interpretiert, wie es für qualitative Forschung üblich ist (Levitt u. a. 2018). Ein wichtiges Gütekriterium der qualitativen Inhaltsanalyse ist die Intercoder-Übereinstimmung. Diese gibt Auskunft darüber, wie gut die Kategorisierungen verschiedener Codierer übereinstimmen.

Unter den Begriff der qualitativen Inhaltsanalyse fallen mehrere Methoden, die sich in ihrer Zielsetzung unterscheiden. Für die vorliegende Untersuchung wurde das Verfahren der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse gewählt (Kuckartz 2016, Kap. 5). Das Ziel dieser Art der Inhaltsanalyse ist „die Identifizierung von Themen und Subthemen, deren Systematisierung und Analyse der wechselseitigen Relationen im Mittelpunkt stehen“ (ibid. S. 123), was den Zielen der Untersuchung entspricht.

Bevor eine Inhaltsanalyse durchgeführt werden kann, müssen zunächst die Auswahleinheiten und Analyseeinheiten bestimmt werden (Kuckartz 2016, S. 30). Auswahleinheiten sind die Objekte, die aus der Menge der potenziell für die Analyse relevanten Objekte als diejenigen ausgewählt werden, die in die Analyse eingehen sollen, beispielsweise die Ausgabe einer Zeitung eines bestimmten Tages. Eine Analyseeinheit legt fest, welche Teile einer Auswahleinheit in die Analyse eingehen sollen, im Beispiel die Artikel in der Zeitung, die das untersuchte Thema behandeln.

Eine inhaltlich strukturierende Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2016) besteht aus sieben Phasen:

1. Initiierende Textarbeit
2. Entwickeln thematischer Hauptkategorien
3. Kategorisieren des gesamten Materials
4. Zusammenschau aller einer Hauptkategorie zugeordneten Textstellen
5. Entwicklung von Unterkategorien aus dem Material jeder Hauptkategorie
6. Erneutes Kategorisieren des gesamten Materials
7. Auswertung

Der Prozess muss nicht linear verlaufen. Wenn in Phase 6 deutlich wird, dass die Unterkategorien noch nicht klar genug definiert oder nicht umfassend genug sind, ist es erforderlich, zu Phase 4 oder 5 zurückzugehen und das Kategoriensystem entsprechend anzupassen.

Beschreibung der Phasen

Phase 1: Initiierende Textarbeit
In dieser Phase liest man den Text gründlich, um „ein erstes Gesamtverständnis für den jeweiligen Text auf der Basis der Forschungsfrage(n) zu entwickeln“ (Kuckartz 2016, S. 56). Dazu markiert man beispielsweise wichtige oder unverständliche Abschnitte, arbeitet Argumente heraus und notiert Auffälligkeiten und eigene Ideen in sogenannten Memos. Daran kann sich eine Zusammenfassung jedes Falles im Hinblick auf die Forschungsfrage anschließen, um einen besseren Überblick über das Material zu erhalten.

Phase 2: Entwickeln thematischer Hauptkategorien
In der qualitativen Inhaltsanalyse können Kategorien generell auf zwei Arten entwickelt werden: a priori auf Basis der Literatur und der Forschungsfrage oder induktiv aus dem Material heraus. Bei der inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse werden die Hauptkategorien häufig a priori und die Unterkategorien induktiv entwickelt. Die Hauptkategorien können beispielsweise den Themen entsprechen, die in einem Interviewleitfaden vorgegeben sind.

Phase 3: Kategorisieren des gesamten Materials
In Phase 3 codiert man das gesamte Material mit den Hauptkategorien. Das heißt, dass man bei jeder Sinneinheit eines Textes entscheidet, in welche der Kategorien sie fällt. Dabei kann eine Sinneinheit auch mehreren Kategorien zugeordnet werden, da innerhalb einer Sinneinheit verschiedene Themen angesprochen sein können. Die Einordnung geschieht dabei immer mit Blick auf die Gesamteinschätzung des Textes.

Phasen 4 und 5: Zusammenschau aller einer Hauptkategorie zugeordneten Textstellen und Entwicklung von Unterkategorien

In der inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse werden die Unterkategorien meist induktiv auf Basis des Materials erstellt. Dazu stellt man alle einer Hauptkategorie zugeordneten Textstellen zusammen. Diese Textstellen durchsucht man nach relevanten Themen oder fasst Textstellen ähnlichen Inhalts zusammen. Anschließend systematisiert man die entstandenen Unterkategorien, beispielsweise indem man ähnliche Kategorien zu etwas allgemeineren Kategorien zusammenfasst. Außerdem erstellt man ein Kategorienhandbuch, in dem alle Haupt- und Unterkategorien mit ihren Definitionen und mit Textbeispielen beschrieben sind.

Phase 6: Erneutes Kategorisieren des gesamten Materials
Mit dem ausdifferenzierten Kategoriensystem wird noch einmal das gesamte Material kategorisiert. Sollte sich das Kategoriensystem in dieser Phase als noch nicht klar oder umfassend genug herausstellen, muss man zu Phase 4 und 5 zurückkehren und das Kategoriensystem weiter verbessern.

Phase 7: Auswertung
Ist der Prozess des Kategorisierens abgeschlossen, können die Befunde ausgewertet werden.

Beschreibung des eigenen Vorgehens

Im Folgenden wird dargestellt, wie die oben beschriebene inhaltlich strukturierende Inhaltsanalyse im vorliegenden Fall durchgeführt wurde.

Entstehung und Auswahl des Materials, ProbandInnen: Die ProbandInnen der Studie waren die 16 TeilnehmerInnen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ im Wintersemester 2018/2019. Fünf der TeilnehmerInnen waren männlich, elf weiblich. Alle waren Lehramtsstudierende nach GymPO und waren im 8. bis 12. Semester, wobei die meisten, nämlich 12, im 9. Semester waren. Für die Teilnahme an der Studie bekamen die ProbandInnen einen Gutschein im Wert von 5 €[11]. Die Studie wurde von der Ethikkommission der Fakultät begutachtet und genehmigt.

Im Rahmen des Seminars reflektierten die TeilnehmerInnen schriftlich ihren Lernprozess während der ersten Seminareinheit („Krümmung ebener Kurven“). Zu Beginn der Seminareinheit wurden parametrisierte Kurven von den Dozentinnen in einem kurzen Vortrag eingeführt. Anschließend absolvierten die TeilnehmerInnen in Gruppen vier Stationen mit praktischen Aufgaben. Sie bekamen dazu schriftliche Arbeitsaufträge und Fragen zu ihren Beobachtungen (siehe Anhang A.1) gestellt. Danach arbeiteten die TeilnehmerInnen an einer mathematischen Definition der Krümmung ebener Kurven. Für den Einstieg bekamen sie dazu ein weiteres Arbeitsblatt mit Beispielkurven und Fragen (siehe Anhang A.1). Die Ausarbeitung ihrer Ideen erfolgte sowohl im Seminar als auch außerhalb der Seminarstunden. In der letzten Seminarstunde zu dieser Einheit stellte jeweils ein Gruppenmitglied die Ergebnisse der Gruppe in Form eines Tafel- oder Beamervortrags allen TeilnehmerInnen vor. Die Zugänge der vier Gruppen waren alle unterschiedlich. Für eine genauere Beschreibung der Seminareinheit und der Ergebnisse der TeilnehmerInnen siehe Abschnitt 2.4.1 bzw. 2.5.1.

Zur Reflexion ihres Lernprozesses bekamen die TeilnehmerInnen die folgenden Fragen gestellt, die den von May und Etkina (2002) verwendeten Fragen entsprechen.

- Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie es gelernt?

[11] Der Gutschein wurde für die Teilnahme an dieser Studie und der Studie zu Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis, siehe Abschnitt 4.4, ausgegeben.

- Welche Fragen sind noch offen?
- Wenn Sie der Dozent/die Dozentin wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?

Die TeilnehmerInnen wurden nicht direkt nach ihren Überzeugungen zu Mathematik gefragt, um eine Verzerrung der Antworten hin zu sozial erwünschten Antworten möglichst gering zu halten. Die TeilnehmerInnen hatten nach Beendigung der Themeneinheit drei Wochen Zeit, die Aufgabe zu bearbeiten. Sie bekamen ein kurzes Feedback zu ihrem Text, beispielsweise Antworten zu den offenen Fragen. Es gab keine Note für diese Aufgabe. Die TeilnehmerInnen konnten selbst entscheiden, ob sie ihren Text für diese Forschung zur Verfügung stellen oder nicht. Da alle TeilnehmerInnen zustimmten, wurden alle 16 Texte als Auswahleinheiten in die Analyse aufgenommen. Als Analyseeinheit wurde jeweils der gesamte Text gewählt, das heißt, die Auswahleinheiten und Analyseeinheiten sind identisch.

Entwicklung des Kategoriensystems: Die initiierende Textarbeit (Phase 1) gab mir einen Überblick über die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Texte und die angesprochenen Themen. Die Texte haben eine Länge von einer halben bis anderthalb Seiten. In allen Texten wird das Vorgehen der Gruppe bei der Lösung der Aufgabe beschrieben. Die Texte unterscheiden sich jedoch in Ausführlichkeit und Reflexionsniveau. In manchen Texten wird überwiegend das konkrete Vorgehen beschrieben, in anderen wird dieses Vorgehen reflektiert und es werden Lernprozesse auf einer Metaebene angesprochen. Fallzusammenfassungen habe ich nicht erstellt, da das Material überschaubar ist und Fallanalysen nicht das Ziel der Untersuchung sind.

Die Hauptkategorien (Phase 2) basieren auf den Hauptkategorien von May und Etkina (2002). In deren Studie wurden die Überzeugungen einzelner StudentInnen untersucht und mit ihren Leistungen in Verbindung gesetzt. Dazu wurden die Lerntagebücher von StudentInnen aus einem Physikkurs, der ein Semester dauerte, analysiert und das Wissen und Verständnis der StudentInnen mit Tests abgefragt. Im Gegensatz dazu sollten in der hier beschriebenen Studie nicht einzelne StudentInnen untersucht werden, sondern es sollten die Lehrveranstaltung und ihre Elemente mit den Überzeugungen der StudentInnen in Beziehung gesetzt werden. Dennoch diente das Kategoriensystem von May und Etkina (2002) als Ausgangspunkt für die Erstellung eines eigenen, den Zielen der Untersuchung angepassten Kategoriensystems.

Das Kategoriensystem von May und Etkina (2002) besteht aus drei Hauptkategorien mit jeweils mehreren Unterkategorien. Die erste Hauptkategorie enhält Aussagen darüber, was die StudentInnen meinen, gelernt zu haben. Unterkategorien sind beispielsweise (Zitate aus May und Etkina 2002, S. 1257)

- Formula: Gleichungen oder Ähnliches ohne eine Erklärung ihrer inhaltlichen Bedeutung („We learned Newton's third law where F (1 on 2)= −F (2 on 1).“),
- Concept: Beschreibungen von Ideen oder Zusammenhängen („We learned that when the sum of forces acting on the object is not zero, there is an acceleration of the object but when they are in the equilibrium the object moves at constant velocity.“).

Die zweite Hauptkategorie enthält Aussagen der StudentInnen zu ihrem Lernprozess, also darüber, wie sie gelernt haben. Unterkategorien sind beispielsweise

- Observed phenomenon: ein physikalisches Phänomen wurde beobachtet („We observed that the insulation pipes rubbed with natural fur repel each other, if one pipe is rubbed with the natural fur and the other one with synthetic, they attract each other.“),

- Reasoned/derived in lecture: mit dem gesamten Kurs wurde etwas mathematisch oder experimentell hergeleitet („We derived the expression $v = ir$ with simple experiments where a certain current was placed into a circuit and compared with voltage. We then found a linear relationship between them and found the equation.“),

- Authority: etwas wurde von der Lehrperson, dem Lehrbuch oder von FreundInnen gelernt („The professor gave us the equation for the law of gravitation.“).

Die dritte Hauptkategorie enthält Aussagen, die auf bestimmte Überzeugungen hindeuten. Diese Hauptkategorie enthält nur zwei Unterkategorien, nämlich

- Applicability of knowledge: mit physikalischen Gesetzen/Konzepten können Probleme gelöst werden („We built a horizontal and a vertical accelerometer. The accelerometers were another application of Newton's second law.“),

- Concern for coherence: physikalische Gesetze/Konzepte bilden ein kohärentes Ganzes und sollten zusammenpassen („In order to understand, why there are two different equations for gravitational potential energy we derived the simple mgy for close to the surface from the other equation.“).

Für die hier beschriebene Untersuchung[12] nahm ich dieses Kategoriensystem als Vorlage und codierte zunächst alle Texte mit den Hauptkategorien „Was hat die Person gelernt?“ und „Wie hat die Person gelernt?“ (Phase 3). Anschließend versuchte ich, die codierten Textstellen einer Unterkategorie zuzuweisen. Dabei traten einige Probleme auf. Manche der Unterkategorien, insbesondere von „Wie“, blieben leer, da das Vorgehen in Physik und Mathematik einige Unterschiede aufweist. Beispielsweise wird in Mathematik nicht in gleicher Weise mit Experimenten gearbeitet wie in Physik, weshalb sich die Unterkategorien, die sich auf Experimente beziehen, nicht gut für das Kodieren von Texten aus einer Mathematikveranstaltung eignen. Zudem war die Veranstaltung von May und Etkina (2002) etwas anders gestaltet als das hier beschriebene Seminar. Zum Beispiel gab es bei May und Etkina Diskussionen mit dem gesamten Kurs, in denen Konzepte diskutiert und Formeln hergeleitet wurden. Solche Diskussionen fehlten im Seminar. Daher ergab die Kategorie „Im Kurs hergeleitet“ für diese Untersuchung keinen Sinn. Insgesamt wurde also schnell deutlich, dass zur Auswertung des Materials neue Unterkategorien nötig waren. Um diese zu entwickeln (Phasen 4 und 5), stellte ich ähnliche Textstellen der „Was“- bzw. „Wie“-Kategorie zusammen und bildete daraus Unterkategorien, die ich mit einem Expertenpanel diskutierte, um die Definitionen möglichst präzise formulieren zu können oder die Unterkategorien anders zu strukturieren.

Die dritte Hauptkategorie von May und Etkina (2002) enthält nur zwei Unterkategorien und deckt damit nicht alle Überzeugungsdimensionen ab. Um ein umfassenderes Bild von den Überzeugungen zu bekommen, die in den Texten deutlich werden, nahm ich deshalb die Items von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) bzw. Baumert u. a. (2009), Berkaliev und Kloosterman (2009) und Deng, Chen, Tsai und Chai (2011) als vorläufige Unterkategorien. Grigutsch, Raatz und Törner (1998) beschreiben vier Skalen mit jeweils mehreren Items: den Formalismus-Aspekt („Ganz wesentlich für die Mathematik sind ihre logische Strenge und Präzision, d.h. das ‚objektive‘ Denken.“, S. 17), den Anwendungs-Aspekt („Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.“, S. 17), den Prozess-Aspekt („In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.“, S. 18), den Schema-Aspekt[13] („Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man

[12] endgültiges Kategoriensystem siehe S. 79
[13] Mathematik als Toolbox bei Baumert u. a. (2009)

Aufgaben löst.“, S. 19), siehe auch S. 54. Berkaliev und Kloosterman (2009) beschreiben die Skalen Lösungsdauer („Ich kann zeitaufwändige mathematische Probleme lösen.“, S. 176, eigene Übersetzung), Wichtigkeit von Konzepten („In Mathematik ist es wichtig, Konzepte zu verstehen.“, S. 176, eigene Übersetzung), Nutzen von Anstrengung/Bemühung („Anstrengung kann mathematische Fähigkeiten verbessern.“, S. 176, eigene Übersetzung) und Alltagsnutzen von Mathematik („Mathematik ist im Alltag nützlich.“, S. 176, eigene Übersetzung). Zwei weitere Skalen beziehen sich speziell auf das Lösen von Textaufgaben und sind für die vorliegende Untersuchung irrelevant. Deng, Chen, Tsai und Chai (2011) beschreiben Überzeugungen zu Naturwissenschaften, die sich teilweise auf die Mathematik übertragen lassen. Diese Überzeugungen sind unter anderem:

- Quelle von Wissen: Wissen wird von Autoritäten vermittelt. ↔ Wissen wird von Individuen konstruiert.
- Entstehung von Wissen: Wissen ist frei von menschlichen Ideen. ↔ Wissen ist ein Produkt des menschlichen Geistes.
- Einfluss des persönlichen Hintergrundes: Der persönliche Hintergrund von Forschern beeinflusst die Wissenschaft. ↔ Die Wissenschaft wird davon nicht beeinflusst.
- Sicherheit von Wissen: Wissen ist unveränderlich. ↔ Wissen ist vorläufig. (s. a. Köller 2001)
- kohärentes Wissen: Wissen ist eine Sammlung isolierter Fakten. ↔ Wissen ist ein System zusammenhängender Konzepte. (s. a. Beswick 2012, S. 3)

Diese Items bzw. Definitionen von Überzeugungen nahm ich zunächst als vorläufige Unterkategorien der Hauptkategorie „Überzeugungen“. Die Unterkategorien, denen keine Textstelle zugeordnet werden konnte, wurden nicht ins endgültige Kategoriensystem aufgenommen. Mit dem vorläufigen Kategoriensystem codierte ich das gesamte Material noch einmal neu (Phase 6), um das Kategoriensystem und die Definitionen zu testen.

Anschließend wurde ein Codierertraining durchgeführt. Eine studentische Hilfskraft (im M. Ed. Mathematik) wurde ins Codieren und ins Kategoriensystem eingewiesen. Sie codierte das gesamte Material (Phase 6). Durch Diskussionen über die Textstellen, die wir unterschiedlich codiert hatten, konnten wir die Definitionen der Kategorien verbessern, da manche zuvor noch nicht ausreichend präzise formuliert waren (Phase 5). Beispielsweise wurde die Kategorie „Zusammenhänge“ der Hauptkategorie „Überzeugungen“ in zwei Kategorien aufgespalten, um zwischen Zusammenhängen auf verschiedenen Ebenen unterscheiden zu können (siehe dazu auch Kapitel 4). Die Kategorien der Hauptkategorie „Was“ erwiesen sich dabei als eher schwierig zu präzisieren. Mit dem endgültigen Kategoriensystem codierten zwei KollegInnen nach entsprechender Einweisung einen Teil des Materials. Die Intercoder-Übereinstimmung war hoch mit Ausnahme der Hauptkategorie „Was“ und die Textstellen, an denen Uneinigkeit herrschte, konnten durch kurze Diskussionen konsensuell gelöst werden. Es wurden also alle Texte von zwei Personen codiert und drei der Texte zusätzlich von einer dritten Person.

Zum Codieren wurde die Software MaxQDA verwendet.

Das Kategoriensystem: Das Kategoriensystem besteht wie jenes von May und Etkina (2002) aus den Hauptkategorien „Was wurde gelernt?“, „Wie wurde gelernt?“ und „Überzeugungen“. Es folgt eine kurze Beschreibung der einzelnen Kategorien. Die genauen Definitionen der Kategorien sind in Anhang A.8 verzeichnet. Die Kategorie „Was“ enthält drei

Unterkategorien, die auf „Formula“, „Skill“ und „Concept“ von May und Etkina (2002) basieren:

- Mathematische Fakten: Der Student bzw. die Studentin notiert mathematische Fakten, ohne auf deren Bedeutung einzugehen.
- Mathematische Fähigkeiten: Der Student bzw. die Studentin berichtet, Problemlösemethoden oder Fähigkeiten erlernt zu haben.
- Konzept: Der Student bzw. die Studentin beschreibt Konzepte, Ideen oder Zusammenhänge qualitativ.

Die Kategorie „Wie“ ist in zwei Unterkategorien unterteilt: Sichtstrukturen und mathematische Arbeitsweisen. Sichtstrukturen sind „Unterrichtsmerkmale, die auch Außenstehenden in relativ kurzer Zeit durch Beobachtung leicht zugänglich sind.“ (Kunter und Trautwein 2013, S.65). Das können Organisationsmerkmale, Unterrichtsmethoden oder Sozialformen sein. Die Unterkategorien Sichtstrukturen und mathematische Arbeitsweisen sind wiederum unterteilt. Zu den Sichtstrukturen gehören die folgenden Kategorien:

- Hands-on-Aktivitäten: Der Student bzw. die Studentin berichtet, bei den Hands-on-Aktivitäten etwas gelernt zu haben, z. B. Lösungsideen bekommen zu haben.
- Arbeitsblätter: Der Student bzw. die Studentin berichtet, durch die Bearbeitung des Arbeitsblattes etwas gelernt zu haben.
- Ausarbeiten von Vorträgen und Skripten: Der Student bzw. die Studentin berichtet, durch das Vorbereiten eines Vortrags oder das Ausarbeiten eines Skriptbeitrags etwas gelernt zu haben, z. B. die innere Logik des Zugangs besser verstanden zu haben.
- Instruktion: Der Student bzw. die Studentin berichtet, beim Anhören eines Vortrags oder beim Lesen des Skriptes etwas gelernt zu haben, z. B. unterschiedliche Lösungswege kennen gelernt zu haben.
- Gruppenarbeit: Der Student bzw. die Studentin berichtet, dass die Arbeit in einer Gruppe dazu beigetragen hat, die Aufgabe zu lösen, z. B. durch sich ergänzendes Wissen.
- Coaching: Der Student bzw. die Studentin berichtet, dass die Hinweise der Dozentinnen bei den Gruppenarbeiten hilfreich waren.

Als mathematische Arbeitsweisen werden hier Methoden bezeichnet, die beim mathematischen Arbeiten und Forschen zum Einsatz kommen.

- überprüfen: Der Student bzw. die Studentin überprüft Ergebnisse oder Hypothesen mit vorherigen Überlegungen.
- Beobachtung: Der Student bzw. die Studentin berichtet, bei den praktischen Aufgaben ein Phänomen beobachtet zu haben.
- Wiederholung, Anwendung: Der Student bzw. die Studentin berichtet, Inhalte aus früheren Semestern durch Wiederholung oder Anwendung gelernt zu haben.
- Spezialfall verallgemeinern: Der Student bzw. die Studentin berichtet, durch das Verallgemeinern eines Spezialfalls ein Problem gelöst zu haben.

- mathematisieren: Der Student bzw. die Studentin berichtet, alltägliche oder anschauliche Sachverhalte mathematisch präzise gefasst zu haben.

- Irrwege: Der Student bzw. die Studentin berichtet, auf dem Weg zum Ziel auch nichtzielführende Ansätze durchdacht zu haben.

Von den in der oben genannten Literatur beschriebenen Überzeugungen kamen die folgenden in mindestens einem Text zum Ausdruck:

- Zusammenhänge (groß): Es gibt viele Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Themen oder Objekten aus verschiedenen Bereichen (vgl. Beswick 2012, S. 3).

- Zusammenhänge (mittel): Es gibt viele Verbindungen innerhalb eines Themengebietes, etwa verschiedene Charakterisierungen eines Objektes oder Konzeptes.

- verschiedene Wege: „Mathematische Aufgaben und Probleme können auf verschiedenen Wegen richtig gelöst werden." (Baumert u. a. 2009, S. 66)

- selber finden: „In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren." (Baumert u. a. 2009, S. 66)

- alltagsbezogen: Mathematik hat Verbindungen zu realen Gegenständen oder alltäglichen Phänomenen.

- zeitaufwändige Probleme: „Ich kann zeitaufwändige mathematische Probleme lösen." (Berkaliev und Kloosterman 2009, S. 176, eigene Übersetzung)

Eine Kategorie „Zusammenhänge (klein)" ist nicht enthalten. Beziehungen wie die zwischen dem Radius eines Kreises und der Krümmung des Kreises wurden zwar in manchen Texten als Zusammenhang bezeichnet, fallen aber nicht unter die Definition von Zusammenhängen in der Literatur zu Überzeugungen (siehe z. B. Beswick 2012). Darum wurde eine solche Kategorie nicht ins System aufgenommen. Da in den Texten nur ein Bezug der Mathematik zum Alltag oder zu Alltagsgegenständen benannt wurde, die Mathematik aber nicht explizit als relevant und wichtig zum Lösen von Problemen herausgestellt wurde, wurden die Items aus (Baumert u. a. 2009, S. 67) abgeschwächt zur Kategorie „alltagsbezogen".

Zu den beschriebenen Überzeugungen gibt es jeweils auch eine ablehnende oder gegensätzliche Überzeugung, wie beispielsweise auf Seite 79 nach Deng, Chen, Tsai und Chai (2011) dargestellt ist. Ablehnende oder gegensätzliche Überzeugungen wurden mit der jeweiligen oben beschriebenen „positiven" Überzeugung codiert und erst in der Auswertung differenziert. Beispielsweise wurden Textstellen, in denen zum Ausdruck kam, dass mathematisches Wissen von Autoritäten weitergegeben werden muss, der Kategorie „selber finden" zugeordnet, weil diese Überzeugung der Überzeugung, in Mathematik viel selbst herausfinden zu können, entgegensteht. Siehe dazu auch den Codierleitfaden A.8.

3.3.2. Ergebnisse und Diskussion

Während des Codierprozesses erwiesen sich die Unterkategorien von „Was" als nicht völlig trennscharf. Besonders bei „Fähigkeit" und „Konzept" kam es häufig vor, dass ein Codierer die eine und ein anderer die andere Unterkategorie zuordnete. Eine Einigung war oft schwierig zu erzielen. Als Ergebnis der Auswertung dieser Kategorien sei hier deshalb nur

Hauptkategorie	1 UK	2 UK	3 UK	4 UK	5 UK	6 UK
Überzeugungen	1	5	2	4	3	1
Sichtstrukturen	3	5	2	3	3	0
Arbeitsweisen	3	4	5	4	0	0

Tabelle 3.8.: Anzahl der Texte, in denen n verschiedene Unterkategorien (UK) einer Hauptkategorie vorkommen

vermerkt, dass die Unterkategorie „Mathematische Fakten“ deutlich seltener codiert wurde als die Unterkategorien „Fähigkeit“ und „Konzept“. Dieser Befund passt zu dem von May und Etkina (2002, S. 1255), da auch in jener Studie bei allen Studierenden häufig Konzepte und Fähigkeiten codiert wurden und seltener „Formeln“. May und Etkina stellten darüber hinaus fest, dass bei Studierenden, die über das Semester hinweg wenig hinzulernen, deutlich häufiger „Formeln“ codiert wurden als bei jenen Studierenden, die viel hinzulernten. In der vorliegenden Studie verteilen sich die mit „Mathematische Fakten“ codierten Textstellen auf verschiedene Studierende, das heißt, es ist keine Häufung bei einzelnen Studierenden festzustellen. Tiefergehenden Analysen auf Basis dieser Kategorien können mit dem vorliegenden Material wegen der Unschärfe der Kategorien und der geringen Datenmenge pro Person nicht durchgeführt werden.

In der folgenden Ergebnisdarstellung sind „Text“ und „StudentIn“ synonym, da von jedem Studenten/jeder Studentin genau ein Text analysiert wurde.

Jede der Hauptkategorien Überzeugungen, Sichtstrukturen und Arbeitsweisen wurde in jedem Text an mindestens einer Textstelle codiert, siehe Tabelle 3.8. Die Anzahl Codierungen pro Dokument für die drei Kategorien zusammen reicht von 6 bis 21. Der Median liegt bei 12 Codierungen pro Dokument.

Vorkommen von Überzeugungen

In den Texten der Studierenden kommen Aussagen zu den schon oben beschriebenen Überzeugungen vor. Eine Übersicht über die Häufigkeit der Überzeugungen ist Tabelle 3.9 zu entnehmen.

Selber finden: In 14 der 16 Texte finden sich Hinweise auf die Überzeugung, dass man in Mathematik viele Dinge selbst finden und ausprobieren kann. Viele StudentInnen berichten in ihren Texten, dass und wie sie eine Definition und Formel für die Krümmung ebener Kurven mit ihrer Gruppe selbst entwickelt haben. Manche verbinden dies mit der Aussage, dass ihnen solche selbst entwickelten Inhalte besser im Gedächtnis bleiben. Die Überzeugung, in Mathematik selbst etwas herausfinden zu können, kommt bei vier StudentInnen auch in ihrer Aussage zum Ausdruck, etwas darüber gelernt zu haben, wie man an mathematische Probleme herangeht, oder dass sie in Zukunft erst einmal selbst nachdenken möchten, bevor sie Internetquellen zurate ziehen. Eine Studentin formulierte Zweifel daran, dass die von ihnen als StudentInnen hergeleiteten Definitionen wirklich korrekt sind, da sie nicht von einer Autorität „abgesegnet“ (T8,8[14]) seien.

Verschiedene Wege: In 13 der Texte wird die Überzeugung formuliert, dass ein mathematisches Problem verschiedene Lösungen oder Lösungswege haben kann. Dies zeigt sich darin, dass die StudentInnen berichten, durch die Präsentationen der anderen Gruppen weitere Möglichkeiten kennen gelernt zu haben, wie man eine Formel für die Krümmung ebener

[14] „T8,8“ bedeutet „Text 8, Zeile/Satz 8“.

Überzeugung	Zustimmung	Ablehnung
Selber finden	14	1
Verschiedene Wege	13	1
Alltagsbezug	9	0
Zusammenhänge (mittel)	8	0
Zusammenhänge (groß)	5	0
Zeitaufwändige Probleme	5	0

Tabelle 3.9.: Anzahl der Texte, in denen Zustimmung oder Ablehnung einer Überzeugung deutlich wird

Kurven herleiten kann. Einige bewerten dies als „total interessant“ (T3,18) oder „bereichernd“ (T16,22). Zwei StudentInnen ergänzen ihren Bericht durch die explizite Aussage, dass dies zeige, dass es in der Mathematik verschiedene Wege gebe, ein Problem zu lösen. Befördert wird die positive Reaktion auf die verschiedenen Zugänge vermutlich auch dadurch, dass die verschiedenen Zugänge verschiedene Grundvorstellungen ansprechen (zu den Grundvorstellungen siehe Abschnitt 2.5.1 und Bauer, Gromes und Partheil (2016)). Würden beispielsweise unterschiedliche Wege präsentiert, wie man etwas berechnen kann, ohne dabei verschiedene Grundvorstellungen anzusprechen, würden die Reaktionen vermutlich weniger deutlich ausfallen. Zehn der StudentInnen würden als DozentInnen ihre StudentInnen fragen, welche verschiedenen Wege es zur Herleitung der Krümmung gibt, was deutlich macht, dass die StudentInnen der Tatsache, dass es verschiedene Zugänge/Wege gibt, eine gewisse Bedeutung zumessen. Bei nur einer Studentin lässt sich eine gewisse Ablehnung der Überzeugung feststellen. Sie notiert als offene Frage, „ob das nun die tatsächlich ‚richtige‘ Methode ist oder EINE von vielen Methoden“ (T8,8). Hierin zeigt sich, dass die Studentin der Überzeugung, dass es verschiedene (richtige) Wege geben kann, nicht uneingeschränkt zustimmt. Möglicherweise würde sie es bevorzugen, wenn es nur einen einzigen, richtigen Weg gäbe.

Zusammenhänge (mittel): Acht der dreizehn StudentInnen, die die verschiedenen Wege als positiv bemerkten, kommentierten auch deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede oder dass sich die verschieden wirkenden Formeln in einander überführen lassen. Diese Aussagen fallen in die Kategorie „Zusammenhänge (mittel)“. Diese StudentInnen nahmen also nicht nur die unterschiedlichen Wege wahr, sondern hielten es auch für wichtig, über die Konsistenz der unterschiedlich aussehenden Ergebnisse nachzudenken.

Alltagsbezug: Neun StudentInnen berichten, eine Verbindung zwischen den mathematischen Inhalten und dem Alltag erkannt zu haben, meist in Verbindung mit den Hands-on-Aktivitäten. Manche stellten dies als besonders interessant oder gar erstaunlich heraus. Manche formulierten auch die Frage, welche Anwendungsmöglichkeiten es für das Konzept der Krümmung in der Wissenschaft oder im Alltag gebe. Die Überzeugung, dass Mathematik im Alltag oder für die Gesellschaft nützlich oder wichtig ist, wurde nicht explizit formuliert.

Zusammenhänge (groß): Fünf StudentInnen berichten, Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Grundvorlesungen oder dem neu Gelernten und der Analysis und dem Wissen aus der Schule erkannt zu haben, oder sie fragen nach Zusammenhängen des neu Gelernten zu anderen Gebieten.

Zeitaufwändige Probleme: Fünf Studentinnen machen Aussagen, die auf die Überzeugung, auch zeitaufwändige mathematische Probleme lösen zu können, hindeuten. Zwei Studentinnen schreiben explizit, gelernt zu haben, bei schwierigen Problemen nicht aufzugeben. Zwei andere beschreiben, dass sie mit Aufwand ans Ziel gekommen seien. Eine Studentin nimmt sich vor, in Zukunft nicht so schnell eine Suchmaschine zu benutzen, wenn sie etwas nicht gleich lösen kann, sondern erst selbst nachzudenken. In keinem Text findet sich eine Aussage, die darauf hindeutet, dass die Person erwartet, dass man mathematische Probleme in kurzer Zeit lösen können müsse.

Eine weitere Überzeugung kommt in zwei Texten zum Ausdruck. Zwei Studentinnen schreiben, dass es das Verständnis für einen Sachverhalt fördere, wenn man wisse und erklären könne, warum gewisse Ansätze nicht funktionieren. Diese Überzeugung wird jedoch nicht in den verwendeten Quellen zu Überzeugungen genannt und wurde daher nichts ins Kategoriensystem aufgenommen.

Auffällig ist, dass nur eine der sechzehn StudentInnen eine Aussage macht, die auf eine statische Überzeugung hindeutet. In der Untersuchung von May und Etkina (2002) kamen mehr Äußerungen dieser Art vor, beispielsweise die Äußerung, etwas von der Lehrperson, aus dem Lehrbuch oder von einem Freund vermittelt bekommen zu haben. Viele dieser Äußerungen wären in der hier beschriebenen Studie vermutlich der Kategorie „Selber finden" als ablehnend zugeordnet worden, etwa das Beispiel auf S. 1257 (May und Etkina 2002). Eine mögliche Erklärung für das Ausbleiben solcher Äußerungen in den Texten aus dem Seminar könnte sein, dass die TeilnehmerInnen zwar Lehrbücher oder Internetquellen genutzt, dies in ihren Reflexionen aber lieber verschwiegen haben. Gegen diese These spricht allerdings zum einen, dass die Nutzung solcher Quellen den DozentInnen zumindest während der Arbeitszeit in den Seminarstunden aufgefallen wäre, und zum anderen, dass die Lösungen der StudentInnen nicht der üblichen Vorgehensweise in der Literatur entsprechen oder in ihrer Ausführlichkeit und Anschaulichkeit weit darüber hinausgehen. Insgesamt deuten die Ergebnisse darauf hin, dass der Aufbau des Seminars es den TeilnehmerInnen ermöglichte, Erfahrungen im Sinne der dynamischen Überzeugungen zu machen und diese Überzeugungen dadurch zu stärken.

Die Überzeugungen, dass man in Mathematik viel selbst herausfinden kann und dass Probleme auf verschiedenen Wegen gelöst werden können, entsprechen zwei Items der Prozess-Skala in Baumert u. a. (2009) und sind auch im Fragebogen enthalten (siehe Abschnitt 3.2 und Anhang A.5). Dass fast alle TeilnehmerInnen zu diesen beiden Überzeugungen passende Aussagen in ihrem Text machten, unterstreicht den hohen Wert, den die SeminarteilnehmerInnen im Vortest und erst recht im Nachtest auf der Prozessskala erreichten.

Die Überzeugung, auch zeitaufwändige Probleme lösen zu können, hängt eng mit der Selbstwirksamkeitserwartung zusammen. Dies zeigt sich an den Items, die zur Messung der Konstrukte verwendet werden. Stage und Kloosterman (1991) zitieren aus den Indiana Mathematics Belief Scales zwei Items der Skala zu schwierigen/zeitaufwändigen Problemen: „Matheaufgaben, die lange brauchen, machen mir nichts aus." (S. 29, eigene Übersetzung), „Wenn ich eine Matheaufgabe nicht schnell lösen kann, höre ich auf, es zu versuchen." (S. 29, eigene Übersetzung). Ein in der vorliegenden Studie verwendetes Item (basierend auf Schoreit 2016) zur Messung der Selbstwirksamkeitserwartung lautet beispielsweise „Ich kann im Mathematikstudium auch die schwierigen Aufgaben lösen, wenn ich mich anstrenge." (siehe Anhang 3.2). Die beiden positiv formulierten Items machen eine Aussage darüber, welche Aufgaben jemand meint, lösen zu können. Das negativ formulierte Item von Stage und Kloosterman (1991) zielt auf ein Phänomen ab, das mit der Selbstwirksamkeitserwartung eng zusammenhängt: Wer eine niedrige Selbstwirksamkeitserwartung hat, gibt schneller auf als jemand mit einer hohen Selbstwirksamkeitserwartung (Bandura 1999). Auch die Überzeugung, in Mathematik viel selbst herausfinden zu können, hat einen Bezug zur Selbstwirksamkeitserwartung: In der Formulierung, selbst etwas herausfinden zu können, steckt implizit die Erwartung, tatsächlich etwas herauszufinden, wenn man es versucht.

Die Textstellen, die der Kategorie „zeitaufwändige Probleme“ zugeordnet werden, lassen (mit Ausnahme einer Stelle) keinen Rückschluss zu, ob das Seminar die Selbstwirksamkeitserwartung verändert hat, sondern zeigen nur das Vorhandensein einer gewissen Selbstwirksamkeitserwartung. Zwei andere Textstellen deuten jedoch darauf hin, dass die mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung dieser Studentinnen durch die erste Seminareinheit gestärkt wurde. Eine Studentin nimmt sich vor, in Zukunft nicht so schnell eine Suchmaschine zu benutzen, wenn sie etwas nicht gleich lösen kann, sondern erst selbst nachzudenken. Eine andere Studentin schreibt, dass sie sich ihrer mathematischen Kenntnisse oft sehr unsicher sei, aber mehr schaffen würde, als sie sich zutraue, und dass sie gelernt habe, nicht so schnell aufzugeben. Aus den übrigen Texten lässt sich eine solche Veränderung nicht direkt ablesen. Die mit dem Fragebogen erfasste Stärkung der Selbstwirksamkeit der SeminarteilnehmerInnen kann somit mit den Reflexionstexten nicht direkt nachgewiesen werden, aber die Reflexionstexte stehen dem Ergebnis in keiner Weise entgegen, zumal alle außer zwei StudentInnen Aussagen im Sinne der Überzeugung „selber finden“ und manche zusätzlich im Sinne der Überzeugung „zeitaufwändige Probleme“ machen.

Die Kategorien „Zusammenhänge“ (mittel und groß) und „verschiedene Wege“ hängen eng mit dem Vernetzen von Inhalten zusammen. Bei der Kategorie „Zusammenhänge“ ist dies aus der Definition ersichtlich. Um verschiedene Lösungswege finden zu können, ist es notwendig, Inhalte zu vernetzen, da verschiedene Lösungswege verschiedene Konzepte oder Denkweisen nutzen. Außerdem stellt sich die Frage, wie die verschiedenen Lösungswege zusammenhängen. Die Überzeugung, dass es in der Mathematik viele Zusammenhänge gibt und dass sich Probleme auf verschiedenen Wegen lösen lassen, kann daher das Vernetzen von Inhalten unterstützen. Siehe zu Vernetzungen Kapitel 4.

Zusammenhang von Überzeugungen und Arbeitsweisen

Um mögliche Zusammenhänge zwischen Kernelementen des Seminars und Überzeugungen zu ermitteln, wurden diejenigen Textstellen ausgewertet, die sowohl einer Überzeugung als auch einer Arbeitsweise bzw. Sichtstruktur zugeordnet wurden. Hierdurch wird sichtbar, welche Überzeugungen zusammen mit welchen Arbeitsweisen und Sichtstrukturen auftreten. Die Textstellen enthalten teilweise schon Begründungen für diese möglichen Zusammenhänge, wie im Folgenden dargestellt wird.

Zusammenhänge (groß): Von den Arbeitsweisen stehen „Wiederholung, Anwendung“ und „Irrwege“ in den Texten im Zusammenhang mit der Überzeugung, dass es Verbindungen zwischen Themen und Objekten aus verschiedenen Bereichen gibt. Die Inhalte des Seminars bauen auf den Inhalten der Grundvorlesungen Analysis und Lineare Algebra auf. Manche Studierende mussten Sachverhalte der Grundvorlesungen, die ihnen nicht mehr präsent waren, wiederholen. Zwei Studierende berichten, durch das Wiederholen und Anwenden im neuen Kontext Zusammenhänge zwischen verschiedenen Themen erkannt zu haben. Eine Person schreibt, dass es hilft, Wissen zu verknüpfen, wenn man versteht, warum ein Ansatz nicht funktioniert.

Zeitaufwändige Probleme: Bei der Arbeit an offen gestellten Problemen kommt es immer wieder vor, dass man einen Ansatz verfolgt, der nicht zum Ziel führt. Drei Studierende sehen darin Gelegenheiten, Durchhaltevermögen zu lernen. Dadurch kann die Überzeugung, dass man zeitaufwendige mathematische Probleme lösen kann, gestärkt werden. Dazu ist es allerdings wichtig, dass Irrwege als solche erkannt werden und letztendlich ein Lösungsweg gefunden wird. Denn dann machen die StudentInnen eine *mastery* Erfahrung, die ihre mathematische Selbstwirksamkeitserwartung stärken kann und die durch das Überwinden von Hindernissen besonders wirksam ist (Dinther, Dochy und Segers 2011, und siehe Abschnitt 3.1.3). Im Seminar trugen die Gruppenarbeit (siehe unten) und das Coaching durch die Dozentinnen dazu bei, *mastery* Erfahrungen zu gewährleisten.

Zusammenhang von Überzeugungen und Sichtstrukturen

Selber finden: Die Überzeugung „Selber finden“ tritt vor allem im Zusammenhang mit den Hands-on-Aktivitäten und der Gruppenarbeit auf. Sechs StudentInnen berichten, dass die Hands-on-Aktivitäten sie auf Ideen brachten, wie man die Krümmung oder andere Eigenschaften einer Kurve definieren könnte. Da Ideen und Ansätze, wie man ein Problem lösen kann, grundlegend für das Finden einer Lösung sind, haben die Hands-on-Aktivitäten also dazu beigetragen, dass die StudentInnen erleben, dass sie in Mathematik viel selbst herausfinden können. Dadurch kann diese Überzeugung gestärkt worden sein. Nicht beantwortet werden kann hieraus die Frage, ob es ausgereicht hätte, sich die Hands-on-Aktivitäten nur vorzustellen. Beispielsweise kann man auch dann, wenn man nur in Gedanken einen Kreis mit dem Fahrrad abfährt, bemerken, dass der Lenkereinschlag dabei die ganze Zeit gleich bleibt. Carbonneau, Marley und Selig (2013) nennen als einen Vermittler der Wirkung von Hands-on-Materialien das Alltagswissen (*real-world knowledge*), das diese stimulieren. Wenn Lernende noch nicht viel über ein abstraktes Konzept wissen, können konkrete Objekte helfen, ein solches Wissen oder Verständnis aufzubauen. Da die Studierenden vor dem Seminar noch nichts über die Krümmung ebener Kurven wissen, ist somit davon auszugehen, dass das Durchführen der Hands-on-Aktivitäten sie in ihrem Lernprozess besser unterstützt als es das gedankliche Vorstellen der Aktivitäten würde. Fünf StudentInnen äußern sich ähnlich über die Gruppenarbeit. Arbeitet man zu mehreren zusammen, kann man sich mit Ideen und Vorwissen ergänzen und es können Synergieeffekte entstehen (Clark, James und Montelle 2014). Dadurch trägt die Gruppenarbeit wie die Hands-on-Aktivitäten dazu bei, dass die StudentInnen erleben, dass sie in Mathematik viel selbst herausfinden können. Damit sich die Gruppenarbeit so positiv auf die Arbeit und damit auch auf die Überzeugungen auswirken kann, muss sie gewisse Voraussetzungen erfüllen. Wenn sich beispielsweise manche Gruppenmitglieder kaum am Lösungsprozess beteiligen, werden diese weniger die Erfahrung machen, in Mathematik selbst etwas herausfinden zu können. Durch eine geringe Beteiligung der einen kann auch die Motivation der übrigen geschwächt und so eine positive Erfahrung für alle verhindert werden. Zu Gelingensbedingungen von Gruppenarbeiten siehe Abschnitt 2.2.3.

Ein Student schreibt, dass das Arbeitsblatt seine Gruppe dabei unterstützt habe, eine eigene Herleitung der Krümmungsformel zu entwickeln.

verschiedene Wege: Sechs Textstellen wurden sowohl der Kategorie „verschiedene Wege“ als auch der Kategorie „Instruktion“ zugeordnet. In allen sechs Textstellen schreiben die StudentInnen, dass sie durch die Vorträge der anderen Gruppen weitere Wege kennen gelernt hätten, wie man eine Formel für die Krümmung herleiten könne. Das deutet darauf hin, dass durch die Präsentation verschiedener Lösungswege die Überzeugung, dass es in Mathematik verschiedene Lösungswege zu einem Problem geben kann, gestärkt wurde. Offen bleibt die Frage, ob diese Überzeugung in gleichem Maße unterstützt worden wäre, wenn die StudentInnen sich zuvor nicht selbst einen Weg überlegt hätten, sondern wenn ihnen nur mehrere Möglichkeiten präsentiert worden wären.

Alltagsbezug: Als einzige Sichtstruktur wurden die Hands-on-Akivitäten von sieben StudentInnen als Grund dafür berichtet, dass sie Verbindungen zwischen Alltagsgegenständen oder -phänomenen und Mathematik entdeckt haben. Die bei den Hands-on-Aktivitäten gemachten Beobachtungen konnten dabei den Ausgangspunkt für die mathematischen Herleitungen bilden oder wurden später als Möglichkeit zur Überprüfung der Ergebnisse verwendet. Drei der StudentInnen merken an, dass sie solche Verbindungen in anderen Veranstaltungen des Mathematikstudiums nicht oder kaum gesehen hätten. Offen bleibt auch hier die Frage, ob es zur Unterstützung der Überzeugung ausgereicht hätte, sich die Hands-on-Aktivitäten nur vorzustellen.

Weitere Zusammenhänge zwischen Sichtstrukturen und Überzeugungen sind denkbar. Beispielsweise könnte Gruppenarbeit die Überzeugung, dass es verschiedene Lösungen geben kann, unterstützen, wenn verschiedene Gruppenmitglieder verschiedene Lösungsideen haben. Das Vorbereiten des Vortrags oder das Schreiben des Skriptbeitrags könnte dazu beitragen, Zusammenhänge zu erkennen, da man sich dabei einen Überblick über den Lösungsweg verschafft. Dabei können einem Zusammenhänge innerhalb des Themas oder zu anderen Themen auffallen. Diese möglichen Zusammenhänge zwischen Überzeugungen und Sichtstrukturen lassen sich mit dem hier verwendeten Datenmaterial jedoch weder bestätigen noch widerlegen.

In dieser Teilstudie sollte untersucht werden, welche Zusammenhänge zwischen Kernelementen der Veranstaltung und Überzeugungen bestehen. Aus der Analyse der Reflexionen lassen sich mehrere Hypothesen und Fragen ableiten. Ob sich diese Zusammenhänge auch in größeren Stichproben nachweisen lassen und ob die Zusammenhänge von kausaler Art sind und welche Gelingensbedingungen es jeweils gibt, bleiben offene Fragen für weitere Forschung.

Hypothese: Hands-on-Aktivitäten unterstützen die Überzeugungen, dass Mathematik einen Alltagsbezug hat und dass man in Mathematik viel selbst herausfinden kann. Offene Fragen sind hier, ob es zur Unterstützung der Überzeugungen auch ausreicht, sich die Hands-on-Aktivitäten nur vorzustellen und ob „Hands-on"-Aktivitäten mit digitalen Medien den gleichen Effekt haben.

Hypothese: Gruppenarbeit unterstützt die Überzeugung, dass man in Mathematik viel selbst herausfinden kann. Die Arbeit von Holzäpfel, Bernack, Leuders und Renkl (2012) zeigt, dass dynamische Überzeugungen auch durch Veranstaltungen ohne Gruppenarbeit gestärkt werden können. Im Kontext dieser Hypothese stellt sich daher die Frage, wann Gruppenarbeit und wann Einzelarbeit effektiver ist. Dies könnte beispielsweise von der Schwierigkeit der Aufgaben abhängen, da schwierige Aufgaben in Einzelarbeit möglicherweise nicht gelöst werden können, in Gruppenarbeit aber schon (Clark, James und Montelle 2014).

Hypothese: Das Vorstellen verschiedener Lösungswege oder Lösungsansätze eines Problems mittels Vorträgen unterstützt die Überzeugung, dass Probleme in Mathematik auf verschiedenen Wegen gelöst werden können. Eine offene Frage ist in diesem Kontext, ob die Überzeugung in gleichem Maße unterstützt wird, wenn die TeilnehmerInnen sich zuvor nicht selbst einen Weg überlegen, sondern wenn ihnen nur mehrere Möglichkeiten präsentiert werden.

3.4. Zusammenfassung und Schlussbemerkungen

Ein Ziel des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" ist es, die mathematikbezogenen Überzeugungen der TeilnehmerInnen positiv zu beeinflussen, das heißt, dynamische Überzeugungen und die Selbstwirksamkeitserwartung zu stärken. Untersucht wurden die Überzeugungen mittels eines Fragebogens und schriftlichen Reflexionen der TeilnehmerInnen. Zwar konnten nicht alle Hypothesen bestätigt werden, doch deuten die Ergebnisse insgesamt darauf hin, dass mit dem Seminar tatsächlich eine Änderung der Überzeugungen einhergeht.

Andere Veranstaltungen wie die von Mason und Scrivani (2004) und Holzäpfel, Bernack, Leuders und Renkl (2012), mit denen ebenfalls das Ziel verfolgt wird, Überzeugungen zu ändern, vermitteln den TeilnehmerInnen heuristische Strategien und zielen nicht explizit darauf ab, gewisse Themen des Curriculums abzudecken. Dadurch kann es schwierig sein, solche Veranstaltungen in das Curriculum oder das Vorlesungsangebot zu integrieren, da sie meist zusätzliche Zeit benötigen oder eine Änderung der Regularien für zulässige Module erfordern. Die in diesem Kapitel beschriebene Studie hingegen unterstützt das Resultat von Roscoe und Sriraman (2011), dass Überzeugungen auch mit Interventionen geändert werden können, in denen mathematische Inhalte die zentrale Rolle spielen und nicht heuristische Strategien. Die beschriebene Veranstaltung ist als Seminar mit 2 SWS konzipiert und deckt typische Themen der elementaren Differentialgeometrie ab. Die Veranstaltung braucht daher nicht (viel) zusätzliche Zeit und kann wie jedes andere Mathematikseminar als solches ins Modulhandbuch aufgenommen werden. Die Studie trägt dadurch dazu bei, die Integration von Forschungsergebnissen in die Praxis zu erleichtern.

Aus der Analyse der schriftlichen Reflexionen lassen sich zudem Hypothesen ableiten, welche Kernelemente des Seminars besonders zu einer Änderung der Überzeugungen beitragen. Die Studie bietet damit Orientierung für DozentInnen, die einen ähnlichen Kurs zu anderen mathematischen Themen entwickeln möchten. Allerdings ist zur Frage der Zusammenhänge und Kausalitäten zwischen Kernelementen und Überzeugungen weitere Forschung nötig, bevor Designprinzipien abgeleitet werden können.

4. Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis

4.1. Vernetzung, Lineare Algebra und Analysis

Ein Ziel des Mathematikstudiums ist, dass die StudentInnen mathematische Inhalte tief durchdringen und verstehen. Nach Barmby, Harries, Higgins und Suggate (2007, S. 2/42) bedeutet verstehen, dass man Zusammenhänge zwischen verschiedenen mentalen Repräsentationen mathematischer Konzepte herstellt. Verständnis eines Konzeptes ist dann das Netzwerk von Repräsentationen, die mit diesem Konzept assoziiert sind. Daher ist es wichtig, dass StudentInnen die vielen mathematischen Inhalte vernetzen, die sie im Studium lernen oder schon in der Schule gelernt haben. Besonders in und zwischen den Grundvorlesungen ist das Vernetzen essentiell, da alle weiteren Vorlesungen auf diesen Grundlagen aufbauen.

An deutschen Universitäten bilden die Lineare Algebra (ein oder zwei Semester) und die Analysis (zwei Semester) die Grundlage für alle weiteren Veranstaltungen und müssen deshalb von allen StudentInnen belegt werden. Für ein tiefes, tragfähiges Verständnis der beiden Gebiete ist das Vernetzen innerhalb der und zwischen den Gebieten unerlässlich. Erfahrungsgemäß fällt gerade Letzteres den StudentInnen jedoch schwer. Das äußert sich beispielsweise in Übungsaufgaben gegen Ende des ersten Semesters, in denen Objekte aus beiden Vorlesungen vorkommen wie bei Aufgaben zu Vektorräumen stetiger oder differenzierbarer Funktionen anstelle des gewohnten $\mathbb{K}^n$.

Für LehramtsstudentInnen ist das Vernetzen von Wissen nicht nur für ihr eigenes Lernen im Studium wichtig, sondern auch im Hinblick auf ihre spätere Arbeit in der Schule. Zum einen wird in Bildungsplänen gefordert, dass die „unterrichtliche Umsetzung [...] auf eine Vernetzung des Wissens und der Inhalte ab[zielt]“ (*Bildungsplan des Gymnasiums – Mathematik* 2016, S. 9). Dazu müssen entsprechende Vernetzungen auch den Lehrkräften bekannt sein. Zum anderen gibt es einen Zusammenhang zwischen dem konzeptuellen und vernetzten Wissen von Lehrkräften und der Leistung ihrer SchülerInnen. Einen solchen Zusammenhang konnte Tchoshanov (2011) für Lehrkräfte der Mittelstufe nachweisen.

Im Folgenden soll darum untersucht werden, ob und wie LehramtsstudentInnen Lineare Algebra und Analysis vernetzen, um Probleme genauer umreißen und eventuell Lösungsvorschläge anbieten zu können. Zunächst wird untersucht, ob sich die Erfahrung bestätigen lässt, dass Aufgaben, die Konzepte aus beiden Gebieten ansprechen, den StudentInnen schwer fallen. Anschließend wird untersucht, welche Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis den StudentInnen bewusst sind, als wie einfach oder schwierig sie das Vernetzen einschätzen und welche Maßnahmen ihrer Meinung nach beim Vernetzen helfen könnten.

4.1.1. Vernetzungen

Mathematische Vernetzungen, Verbindungen oder Zusammenhänge[1] werden in der Literatur auf verschiedene Weisen charakterisiert. Zusammenhänge können auf einer fachlichen Ebene untersucht werden, siehe beispielsweise Brinkmann (2002). In diesem Fall beschreiben Zusammenhänge Beziehungen zwischen mathematischen Ideen, Konzepten oder Prozessen, die von der Fachgemeinschaft als solche akzeptiert werden. Dabei sind sie unabhängig von einzelnen Personen. Nach einer anderen Charakterisierung ist Vernetzung das Ergebnis des Lernprozesses einer Person, die versucht, ihr mathematisches Wissen in kohärenten Systemen zu ordnen (Businskas 2008, S. 12-13). Nach einer weiteren Charakterisierung entspricht das Vernetzen dem Lernprozess selbst. So definieren Leikin und Levav-Waynberg (2007, S. 350) das Vernetzen mathematischer Ideen als das Verbinden verschiedener Ideen und das Lösen herausfordernder Aufgaben, indem man bekannte Konzepte sucht, die in neuen Situationen helfen könnten. Eli, Mohr-Schroeder und Lee (2013) fassen den Kern der verschiedenen Charakterisierungen zusammen und beschreiben Zusammenhänge kurz als Verbindungen oder Brücken zwischen mathematischen Ideen. Vom fachlichen Standpunkt aus gesehen, können individuelle Vernetzungen richtig oder falsch sein. Im Folgenden werden alle drei Charakterisierungen von Vernetzungen verwendet. Bei der Beschreibung von Zusammenhängen ohne Bezug auf StudentInnen oder andere Personen geht es um Vernetzungen auf der fachlichen Ebene. Bei der Analyse der von StudentInnen beschriebenen oder verwendeten Vernetzungen geht es um Vernetzungen auf der individuellen Ebene, also um den Lernprozess oder das Ergebnis eines Lernprozesses.

Fachliche und korrekte individuelle Vernetzungen können in verschiedene Arten von Vernetzungen unterteilt werden. In der Literatur finden sich verschiedene Listen von Vernetzungsarten. García-García und Dolores-Flores (2019) bestimmten durch die Analyse von Interviews mit SchülerInnen zur Differential- und Integralrechnung fünf Arten von (individuellen) Vernetzungen.

- Prozedurale Vernetzung: Regeln, Algorithmen oder Formeln werden verwendet, um beliebige mathematische Aufgaben zu lösen.
- Vernetzung durch verschiedene Repräsentationen: Das gleiche mathematische Konzept wird mit verschiedenen Repräsentationen, z. B. geometrisch, algebraisch oder mit Gegenständen, dargestellt.
- Teil-Ganzes-Vernetzung: Mathematische Konzepte werden durch eine logische Beziehung wie Generalisierung oder Inklusion vernetzt.
- Merkmalsvernetzung: Mathematische Konzepte gleichen oder unterscheiden sich in bestimmten Merkmalen.
- Vernetzung durch Umkehrbarkeit: Man kann von Konzept A zu Konzept B gelangen und durch die Umkehrung des Prozesses auch von Konzept B zu Konzept A, z. B. addieren und subtrahieren als inverse Operationen.

Businskas (2008, S. 18-19) nennt nicht nur die Vernetzung durch Repräsentationen in unterschiedlichen Formen, sondern auch innerhalb einer Darstellungsart, etwa $(x + 1)^2$ und $x^2 + 2x + 1$ als verschiedene Repräsentationen des gleichen Inhalts in der gleichen, nämlich

[1] Die Begriffe Vernetzung, Verbindung und Zusammenhänge werden im Folgenden synonym verwendet. Im Englischen wird häufig das Wort *connection* verwendet.

algebraischen Form. Außerdem beschreibt sie eine Vernetzung, die eher von einem didaktischen als fachlichen Standpunkt aus wahrgenommen werden kann: zwei Konzepte sind verbunden, wenn sie aufeinander aufbauen, sodass man das eine verstanden haben muss, um das andere erlernen zu können (ibid. z. B. S. 116-117).

Eine ausführlichere Einteilung, welche die oben genannten Vernetzungen mit Ausnahme der didaktisch orientierten enthält, bietet Brinkmann (2002). Sie modelliert Vernetzungen mittels Graphen, die aus Relationen entstehen. Die Knoten der Graphen entsprechen dabei mathematischen Objekten und Aussagen wie Begriffen, Sätzen, Algorithmen, Termen usw. (ibid. S. 35-36). Diese Objekte und Aussagen können zueinander in verschiedenen Beziehungen stehen. So ist beispielsweise die Matrizenrechnung ein Teilgebiet der Linearen Algebra und die Menge der ganzen Zahlen steht mit der Menge der Matrizen in Verbindung, da beide die Struktur eines Ringes aufweisen. Diese Beziehungen fasst Brinkmann (2002) als mathematische Relationen auf. Sie bilden die Kanten der Graphen und können, je nach dem ob die Relation symmetrisch ist oder nicht, gerichtete oder ungerichtete Kanten darstellen. Innermathematische Vernetzungen unterteilt Brinkmann (2002, Abschnitt 3.3) in fachsystematische und anwendungsbezogene Vernetzungen. Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die von Brinkmann unterschiedenen Vernetzungen. Ein Großteil der fachsystematischen Vernetzungen sind solche über hierarchische Strukturen wie Ober- und Unterbegriffe oder die Einteilung in Inhaltsbereiche mit Teilbereichen.

Neben der Art eines Zusammenhangs kann auch seine „Größe“ betrachtet werden. Businskas (2008, S. 8-12) unterscheidet drei Stufen der „Körnigkeit“: zum einen weitreichende Ideen, die verschiedene Themen verbinden und somit als groß oder global bezeichnet werden können, zu anderen Konzept-zu-Konzept-Verbindungen wie Teiler/Faktor/Vielfaches und zum dritten Zusammenhänge wie äquivalente Repräsentationen, die eher lokal, klein sind. In vielen Studien werden eher „feinkörnige“ Zusammenhänge untersucht, beispielsweise in Adu-Gyamfi, Bossé und Chandler (2017), García-García und Dolores-Flores (2019) und Weinberg (2001). Die Übergänge zwischen den verschiedenen Stufen der Feinheit/Grobheit sind dabei fließend und können sich im Laufe der Jahre und Jahrhunderte ändern. Beispielsweise werden algebraische und geometrische Darstellungen von Kurven heute selbstverständlich als zwei Repräsentationen der gleichen Sache angesehen. Dies wurde aber erst durch die Zusammenführung von Algebra und Geometrie durch Descartes und Fermat möglich (vgl. Wußing 2008, S. 398-411). Ebenso wurden in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts strukturtheoretische Betrachtungen vorangetrieben, wodurch sich die Untersuchung von Strukturen wie Gruppen und Algebren zu einem eigenen mathematischen Gebiet entwickelte. Zusammenhänge zwischen verschiedenen mathematischen Konzepten durch solche Strukturen werden daher heute nicht mehr als so grob wahrgenommen wie vielleicht noch vor 200 Jahren.

Für die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen verschiedenen Gebieten ist eine Charakterisierung des Begriffes „Gebiet“ notwendig. In den folgenden Analysen werden daher Vorlesungen bzw. Vorlesungszyklen als Gebiete betrachtet, also beispielsweise Analysis 1 und 2 als ein Gebiet. Diese Einteilung bietet sich an, da den StudentInnen die Mathematik im Studium in eben dieser Einteilung präsentiert wird. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Vorlesungen wie Analysis und Lineare Algebra sind dann große Zusammenhänge, solche innerhalb einer Vorlesung kleinere.

Das Vernetzen von Ideen wird in der Literatur als ein Hauptmerkmal von Verständnis beschrieben. Beispielsweise setzen Barmby, Harries, Higgins und Suggate (2007, S. 2-42) das Verstehen von Mathematik damit gleich, dass man Zusammenhänge zwischen verschiedenen mentalen Repräsentationen mathematischer Konzepte herstellt. Verständnis eines Konzeptes ist dann das Netzwerk von Repräsentationen, die mit diesem Konzept assoziiert sind. Leikin

Name	**Relationsformulierung**	**Beispiel**
Fachsystematische Vernetzung		
Einteilung in Inhaltsbereiche	ist ein Teilbereich von	„Differenzialrechnung" „ist ein Teilbereich von" „Analysis"
Zuordnung von Objekten zu Inhaltsbereichen	ist ein Objekt aus dem Bereich	„Dreieck" „ist ein Objekt aus dem Bereich" „Geometrie"
Ober-/Unterbegriff	ist ein Ober-/Unterbegriff von	„SSS" „ist ein Unterbegriff von" „Kongruenzsatz für Dreiecke"
Ober-/Untermengen	ist eine Ober-/Untermenge von	„Menge aller reellen Zahlen" „ist eine Obermenge von" „Menge aller rationalen Zahlen"
Teile-Ganzes-Beziehung	„ist Teil von" oder „hat als ein Bestandteil"	„rechtwinkliges Dreieck" „hat als Bestandteil" „Hypotenuse"
Kategorisierung, Klasseneinteilung, Fallunterscheidung	hat als eine Kategorie/eine Klasse/einen möglichen Fall	„Menge der Winkel" „hat als eine (Winkel)klasse"„Menge der rechten Winkel"
Merkmalsvernetzung	hat als/ist ein Merkmal/eine Eigenschaft von	„gleichschenkliges Dreieck" „hat als eine Eigenschaft" „2 gleich lange Seiten"
Zugehörigkeitsrelation für Lösungen und Beweise	gehört zu	„Beweis xy" „gehört zu" „Satz yz" (eigenes Beispiel)
deduktive Relation	„daraus folgt" oder „ist herleitbar aus"	„Abbildung f ist linear" „daraus folgt" „$f(0) = 0$" (eigenes Beispiel)
Vernetzung über zugrundeliegende Strukturen wie Gruppen		
Anwendungsbezogene Vernetzung		
Vernetzung durch Modellierung		Interpretation (Modell) der Grundbegriffe eines Axiomensystems oder der Gegebenheiten einer Aufgabe, z. B. reelle Zahlen $\leftrightarrow$ Streckenlängen;
Anwendung von Sätzen	kann gelöst werden unter Anwendung des Satzes	Berechnungen einer Seitenlänge im rechtwinkligen Dreieck mit dem Satz des Pythagoras
Anwendung von Regeln	kann gelöst werden unter Anwendung der Regel	„Berechne $3 \div \frac{6}{11}$" „kann gelöst werden unter Anwendung der Regel" „Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man die Zahl mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert."
Ausführung von Algorithmen	kann gelöst werden unter Anwendung des Algorithmus/Verfahrens	„$\int_1^2 xe^x dx$" „kann gelöst werden unter Anwendung des Verfahrens" „partielle Integration"

Tabelle 4.1.: Liste der innermathematischen Vernetzungen nach Brinkmann (2002)

und Levav-Waynberg (2007, S. 350) nennen mathematische Zusammenhänge einen essenziellen Teil mathematischen Verständnisses. Etwas ausführlicher beschreibt Drollinger-Vetter (2011, S. 167-168) das Verstehen aus kognitionspsychologischer Sicht, nach der das Lernen und Verstehen eines konkreten Konzeptes bedeutet, ein „semantisches Netzwerk bestehend aus Elementen und Relationen“ aufzubauen. Teile des Netzwerks können dann „zu Elementen höherer Ordnung verdichtet werden.“ Neues lerne man, indem man es mit Bekanntem verknüpft.

Auf der individuellen Ebene steht das Vernetzen auch im Zusammenhang mit den Überzeugungen zum Wesen der Mathematik. Verschiedene Modelle der Überzeugungen zum Wesen der Mathematik enthalten eine (Unter-)Dimension dazu, als wie zusammenhängend oder unzusammenhängend jemand die Mathematik wahrnimmt (z. B. Muis 2007, S. 176, *simplicity of knowledge*). Wie sich die Überzeugung zur Vernetztheit der Mathematik auf das konkrete Wahrnehmen von Zusammenhängen auswirkt, ist noch nicht geklärt.

Das Vernetzen von Inhalten ist nicht nur ein Merkmal des Verstehens der Inhalte, sondern auch Teil des Problemlösens und des Transfers. Nach Eli, Mohr-Schroeder und Lee (2013, S. 122) sind Vernetzungen ein Mittel zum Problemlösen und beim Untersuchen einer Problemstellung müssen Zusammenhänge erkannt werden. Ebenso schreibt Drollinger-Vetter (2011, S. 168), dass Netzwerke „beim Durcharbeiten flexibilisiert, beweglich und transparent gemacht [werden], damit Anwendungen und Transfer möglich werden.“

Damit StudentInnen und SchülerInnen ein tiefes Verständnis für mathematische Inhalte entwickeln können, ist es daher wichtig, ihnen Möglichkeiten zum Vernetzen von Bekanntem und Neuem zu bieten und sie im Vernetzungsprozess zu unterstützen. Auch in Bildungsplänen und Lehrempfehlungen wird die Bedeutung des Vernetzens betont. So wird im *Bildungsplan des Gymnasiums – Mathematik* (2016, S. 9) gefordert, dass die „unterrichtliche Umsetzung [...] auf eine Vernetzung des Wissens und der Inhalte ab[zielt]“. In „Bildungsstandards aktuell“ von Blum, Vogel, Drüke-Noe und Roppelt (2015, S. 174) wird die Forderung nach horizontalen und vertikalen Vernetzungen bekräftigt. Diese seien auch in den Leitideen angelegt, deren Einführung die traditionelle Trennung von Analysis, analytischer Geometrie (Lineare Algebra) und Stochastik verringern sollen. Ebenso wird in einer Veröffentlichung der *International Academy of Education* die Unterstützung von SchülerInnen beim Vernetzen herausgestellt (Anthony und Walshaw 2009, S. 15-16).

Damit LehrerInnen ihre SchülerInnen beim Vernetzen von mathematischem Wissen unterstützen und entsprechende Aufgabenformate entwickeln können, ist es notwendig, dass ihr eigenes mathematisches Wissen stark vernetzt ist (Leikin und Levav-Waynberg (2007, S. 352), Eli, Mohr-Schroeder und Lee (2013, S. 120)). Eli, Mohr-Schroeder und Lee (2013, S. 121) sehen ein tiefes, konzeptuelles Verständnis und die Fähigkeit zum Vernetzen mathematischer Inhalte als eine generelle Voraussetzung für effektives Unterrichten, da LehrerInnen dann fundierte Entscheidungen zur Gestaltung des Unterrichts treffen können. Zudem gibt es Hinweise darauf, dass zwischen dem konzeptuellen und vernetzten Wissen von Lehrkräften und der Leistung ihrer SchülerInnen ein Zusammenhang besteht, wie Tchoshanov (2011) es für die Mittelstufe nachweisen konnte.

Bisherige Untersuchungen zeigen, dass im Mathematikunterricht wenig vernetzt wird und dass das Vernetzungswissen von LehrerInnen nicht so stark ausgeprägt ist, wie es wünschenswert wäre. Leikin und Levav-Waynberg (2007, S. 351) berichten von Studien aus verschiedenen Ländern, die zeigten, dass LehrerInnen Probleme häufig nicht auf mehrere Arten lösen (können) und dass Vernetzungsaktivitäten häufig nicht zum Standardrepertoire von LehrerInnen gehören. In der Studie von Businskas (2008) sollten LehrerInnen Kärtchen mit mathematischen Begriffen oder Aussagen dahingehend bewerten, ob es Verbindungen zwischen ihnen gibt oder nicht. Dabei stellte sich heraus, dass die TeilnehmerInnen, wenn sie nach bestimmten Kartenpaaren gefragt wurden, Verbindungen verschiedener Arten nennen konnten, wenn auch mit Mühe. Wenn sie die Kärtchen selbst wählen durften, nannten jedoch nur wenige TeilnehmerInnen Zusammenhänge verschiedener Art (ibid. S. 135-136+151). Dies weist darauf hin, dass die TeilnehmerInnen Wissen zu mathematischen Zusammenhängen haben, das aber weitgehend nur implizit ist. Am häufigsten wurden verschiedene Repräsentationen eines Konzepts sowie verwandte Prozeduren als Verbindungen genannt, also Verbindungen eher feineren Grades.

Außerdem dachten die TeilnehmerInnen der Studie über Vernetzungen fast ausschließlich im Zusammenhang mit dem Unterrichten nach (Businskas 2008, S. 151-152). Sie sahen mathematische Zusammenhänge als „strategisches Element“ (S. 152) ihres Unterrichtens: zum einen als Grundlage für Entscheidungen bezüglich der Unterrichtsgestaltung (s. a. Eli, Mohr-Schroeder und Lee 2013, S. 121) und zum anderen als Lernziel für ihre SchülerInnen. Trotz dieser generell positiven Einstellung gegenüber der Vernetzung von mathematischen Inhalten wurde dem Vernetzen im Unterricht nur wenig Raum gegeben. Die LehrerInnen präsentierten beispielsweise mehrere Beispiele, um einen neuen Gegenstand einzuführen und den SchülerInnen die Möglichkeit zu geben, das Thema mit Konzepten zu verbinden, die ihnen schon bekannt waren. Die Zusammenhänge, deretwegen die LehrerInnen die Beispiele auswählten, verdeutlichten sie ihren SchülerInnen jedoch nur selten (Businskas 2008, S. 151). Manche LehrerInnen erklärten die Diskrepanz zwischen ihrer positiven Einstellung zu Vernetzungen und der geringen Präsenz von Vernetzungen im Unterricht mit Zeitmangel aufgrund des umfangreichen Lehrplans und der notwendigen Prüfungsvorbereitung der SchülerInnen, die durch Unterrichten von Zusammenhängen nicht möglich sei. Dass die LehrerInnen hauptsächlich Verbindungen in Form verschiedener Repräsentationen benennen konnten, hält Businskas (2008, S. 135-136) für nicht erstaunlich, da gerade dieser Typ von Verbindungen in Schulbüchern hervorgehoben werde.

Zu ähnlichen Ergebnissen kommen auch Leikin und Levav-Waynberg (2007). Sie interviewten zwölf LehrerInnen der Sekundarstufe dazu, ob und warum diese verschiedene Lösungen zu Problemen im Unterricht (nicht) diskutierten, und untersuchten auch, ob die LehrerInnen selbst Probleme auf verschiedene Arten lösen konnten. Bei Aufgaben, die in der Schule mit einem bestimmten Lösungsweg verknüpft waren, konnten nur wenige LehrerInnen einen zweiten Lösungsweg angeben. Bei Aufgaben, die auch in der Schule auf verschiedenen Wegen gelöst werden, gaben die LehrerInnen mehrere Lösungswege an. In den Unterricht integrierten die LehrerInnen verschiedene Lösungswege fast ausschließlich dann, wenn es gemäß dem Lehrplan vorgesehen war oder wenn SchülerInnen danach fragten, weil sie eigene Lösungsideen diskutieren wollten oder den ersten Lösungsweg nicht begriffen hatten (ibid. S. 360+365). Für andere Situationen zweifelten die LehrerInnen am Nutzen der Diskussion verschiedener Lösungswege (ibid. S. 360), wie auch die ProbandInnen in der Studie von Businskas (2008).

Auch in Deutschland werden die Lehrpläne immer wieder als zu umfangreich beklagt (vgl. z. B. Wessling 2013), was LehrerInnen davon abhalten könnte, Vernetzungen, die nicht explizit vorgesehen sind, im Unterricht zu behandeln. Ebenso deutet die Studie von Adleff, Ross und Kaiser (2020) darauf hin, dass auch im Mathematikunterricht in Deutschland Vernetzungen nicht ausreichend behandelt werden. Eine Möglichkeit, Vernetzungen im Unterricht zu thematisieren, bieten Aufgaben, die verschiedene Lösungswege zulassen. Von den von Adleff, Ross und Kaiser (2020) untersuchten Aufgaben, die beobachteten Unterrichtsstunden entstammen, ließ nur gut die Hälfte unterschiedliche Lösungswege überhaupt zu. Es ist davon auszugehen, dass nur bei einem Teil der Aufgaben dieses Potenzial auch genutzt wurde, denn wie die von Leikin und Levav-Waynberg (2007) untersuchten LehrerInnen hatten auch die deutschen StudentInnen des Lehramts in der Studie von Achmetli, Krug und Schukajlow (2015) Schwierigkeiten, die gestellten Aufgaben auf verschiedenen Wegen zu lösen.

Insgesamt erscheint es also sinnvoll, LehramtsstudentInnen darin zu unterstützen, ihr mathematisches Wissen auf verschiedenen Ebenen zu vernetzen, damit sie selbst ein tiefes Verständnis der Inhalte erreichen und auf dieser Basis ihren SchülerInnen bewusst Vernetzungsgelegenheiten anbieten können. Da die Bereiche Lineare Algebra und Analysis die Grundlagen für das ganze Mathematikstudium bilden und auch im Curriculum der Schule verankert sind, sind Vernetzungen zwischen diesen Bereichen für LehramtsstudentInnen sowohl für ihr Studium als auch für ihre spätere Arbeit wichtig. Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ kann zu dieser Vernetzung beitragen, denn in der elementaren Differentialgeometrie werden viele Konzepte sowohl aus der Linearen Algebra als auch aus der Analysis benötigt. Die SeminarteilnehmerInnen müssen daher immer wieder Konzepte aus beiden Bereichen zugleich verwenden, um Probleme lösen zu können. Dadurch können die StudentInnen die Bereiche besser verknüpfen und und eventuelle „Mauern“ zwischen den Gebieten, die das hin- und Herwechseln erschweren, abbauen.

Zwei Arten von Vernetzungswissen sind für die LehramtsstudentInnen relevant: zum einen ein explizites Wissen über Vernetzungen, also ein verbalisierbares Wissen, und zum anderen ein implizites Wissen, welches sich darin äußert, dass jemand etwas kann, ohne erklären zu können, warum er so handelt oder was genau er in der Situation tut (vgl. Neuweg 2015). Das explizite Wissen ist für LehrerInnen/LehramtsstudentInnen notwendig, um SchülerInnen Vernetzungsgelegenheiten anbieten zu können. Das implizite Wissen steht mit der Fähigkeit, Probleme lösen zu können, im Zusammenhang, das heißt, die LehrerInnen/LehramtsstudentInnen sollten Probleme mit Hilfe von Vernetzungen lösen können.

Vernetzungen zwischen Linearer Algebra und Analysis können also als explizites Wissen vorhanden sein und als solches verbalisiert werden. Ebenso können die Vernetzungen implizit vorhanden sein, was sich in der Fähigkeit zeigt, Aufgaben lösen zu können, die Wissen aus beiden Bereichen erfordern. Im Folgenden soll darum untersucht werden, wie gut LehramtsstudentInnen Aufgaben lösen können, die Wissen aus Linearer Algebra und Analysis voraussetzen, und welche Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis die StudentInnen explizit benennen können. Zunächst wird dargestellt, was mit Linearer Algebra und Analysis gemeint ist und welche Verbindungen es zwischen diesen Gebieten gibt.

4.1.2. Lineare Algebra und Analysis

Im Folgenden verstehe ich unter Analysis und Linearer Algebra die Inhalte der entsprechenden Vorlesungen. Die Inhalte der Vorlesungen verschiedener DozentInnen sind zwar nicht identisch, da die DozentInnen unterschiedliche Schwerpunkte setzen, doch gibt es einen Kanon an Inhalten, der stets behandelt wird. Um diesen Kanon zu bestimmen, wurden die Inhaltsverzeichnisse verschiedener Bücher und das *Modulhandbuch für das Lehramt Mathematik* (2015) verglichen. Die gemeinsamen Themen sind in den folgenden Übersichten dargestellt. Gelegentlich wird Lineare Algebra mit LinA und Analysis mit Ana abgekürzt.

Inhalte der Analysis 1

Verglichen wurden Forster (2016) und Königsberger (2004a).

- Natürliche Zahlen, Vollständige Induktion, mengentheoretische Grundlagen
- Reelle Zahlen (über Axiome, Dedekindsche Schnitte oder Cauchy-Folgen)

- Komplexe Zahlen
- Folgen, Grenzwerte
- Reihen und Konvergenzkriterien
- Grundlagen zu Funktionen
- Stetigkeit
- Exponentialfunktion, Logarithmus, trigonometrische Funktionen
- Differentialrechnung, Extrema, Konvexität
- Integralrechnung, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Gamma-Funktion
- Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen
- Taylor-Reihen
- Fourier-Reihen
- Anwendungen wie Differentialgleichungen oder numerische Verfahren wie das Newton-Verfahren

Das *Modulhandbuch für das Lehramt Mathematik* (2015) führt die letzten fünf Punkte nicht explizit an. Taylor-Reihen werden jedoch stets behandelt und Funktionenfolgen und ihre Konvergenz wird für die Analysis 2 als Thema genannt. Das Modulhandbuch nennt Königsberger (2004a) und Forster (2011) als Literatur.

Inhalte der Analysis 2

Verglichen wurden Forster (2017) und Königsberger (2004b).

- Topologische und metrische Räume, Stetigkeit, Kompaktheit
- Differenzialrechnung: verschiedene Ableitungsbegriffe
- Taylorapproximation, Extrema
- Satz über die implizite Funktion/Umkehrfunktion
- Untermannigfaltigkeiten
- unterschiedliche Themen
  - Vektorfelder, Fluss und Divergenz
  - Integralrechnung und Integralsätze
  - Gewöhnliche Differentialgleichungen

Das *Modulhandbuch für das Lehramt Mathematik* (2015) nennt Untermannigfaltigkeiten und Vektorfelder nicht explizit als Themen, aber gewöhnliche Differentialgleichungen, Mehrfachintegrale und die Transformationsformel sollen immer behandelt werden. Das Modulhandbuch nennt Königsberger (2004b) und Forster (2006) als Literatur.

Inhalte der Linearen Algebra

Verglichen wurden Bosch (2014), Jänich (2008) und Fischer (2014).

- Grundlegende Begriffe und Strukturen: Mengen, Gruppen, Körper, Abbildungen, Polynome…
- Vektorräume, reell und komplex
- Lineare Unabhängigkeit, Dimension, Basis
- Lineare Abbildungen
- Matrizen
- Lineare Gleichungssysteme
- Determinanten
- Eigenwerte und -vektoren
- Klassifikation von Matrizen, Normalformen
- Euklidische Vektorräume: Skalarprodukt, Orthogonalität…

Je nach Studienordnung werden die Themen in einem Semester abgehandelt oder auf zwei Semester verteilt, wobei in letzterem Fall weitere Themen wie multilineare Algebra oder algebraische Strukturen behandelt werden.

Das *Modulhandbuch für das Lehramt Mathematik* (2015) enthält alle genannten Themen inklusive einiger weiterführender, da zwei Semester für die Lineare Algebra vorgesehen sind. Als Literatur werden Bosch (2008) und Fischer (2008) angeführt.

Vernetzungen von Linearer Algebra und Analysis

Die in der Literatur beschriebenen mathematischen Zusammenhänge sind häufig eher „feinkörnig“, beispielsweise verschiedene Repräsentationen von Funktionen, Ableitungen und Integralen wie bei García-García und Dolores-Flores (2019). Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis als Verbindungen zwischen verschiedenen Gebieten sind demgegenüber eher „grobkörnig“. Viele in der Literatur beschriebene Vernetzungskategorien lassen sich deshalb kaum zur Analyse der Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis heranziehen.

Von den von Brinkmann (2002, siehe auch Tabelle 4.1 auf S. 92) beschriebenen Vernetzungen bieten sich besonders die Zuordnung von Objekten zu Inhaltsbereichen und die Vernetzung über zugrundeliegende Strukturen an. Ein Beispiel für eine Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis durch die Zuordnung von Objekten zu Inhaltsbereichen ist die Norm. Sie wird in der Linearen Algebra als Spezialfall des Skalarproduktes eingeführt und in der Analysis als Spezialfall von Metriken. Die Norm kann daher beiden Bereichen zugeordnet werden und stellt somit eine Verbindung zwischen ihnen dar. Ein Beispiel für eine Vernetzung über zugrundeliegende Strukturen ist die Struktur der Vektorräume. Vektorräume werden vor allem in der Linearen Algebra behandelt. Meist wird dort mit $\mathbb{K}^n$ gearbeitet. Die Struktur der Vektorräume spielt jedoch auch in der Analysis eine Rolle. Beispielsweise weist man dort nach, dass die Menge der stetigen bzw. (stetig) differenzierbaren Funktionen einen Vektorraum bildet.

Eine weitere Art der Verbindungen zwischen der Linearen Algebra und der Analysis sind indirekte Verbindungen: Wenn für ein Konzept oder zur Lösung eines Problems Objekte/ Konzepte/Sätze sowohl aus der Linearen Algebra als auch aus der Analysis nötig sind, besteht eine Verbindung zwischen den beiden Bereichen. Diese Art der Verbindung hat Ähnlichkeiten mit der didaktischen Kategorie von Businskas (2008, S. 116-117): zwei Konzepte sind verbunden, wenn sie aufeinander aufbauen, sodass man das eine verstanden haben muss, um das andere erlernen zu können. Dies ist auch der Fall, wenn Konzepte aus der Linearen Algebra und der Analysis für ein drittes Konzept benötigt werden. Jedoch werden bei Businskas (2008) Verbindungen zwischen grundlegenderen und darauf aufbauenden Konzepten betrachtet, während es hier um die Verbindung zweier grundlegender Konzepte in einem dritten geht.

Beispiele für diese Art der Verbindung finden sich im Bereich der Differentialgleichungen. Differentialgleichungen bauen auf dem Konzept der Ableitung aus der Analysis auf. Im Fall linearer Differentialgleichungen ist der Lösungsraum der Gleichung ein (eventuell affiner) Vektorraum. Das Konzept des Vektorraums wird hauptsächlich in der Linearen Algebra behandelt. Beim Lösen von Systemen linearer Differentialgleichungen ist weitere Theorie aus der Linearen Algebra hilfreich: Bei linearen Diffentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, $y'(t) = Ay(t),\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, können Lösungen über die Eigenwerte und -vektoren der Matrix A bestimmt werden. Dazu wird A diagonalisiert oder in Jordansche Normalform gebracht. Diese Konzepte stammen aus der Linearen Algebra.

In Tabelle 4.2 sind einige weitere Beispiele aus verschiedenen Bereichen aufgeführt. Die Tabelle stellt keine vollständige Liste dar, da die Gebiete Lineare Algebra und Analysis (und die Mathematik insgesamt) zu vielfältig vernetzt sind, was Fischer (2014) mit Blick hauptsächlich auf die Lineare Algebra wie folgt formuliert: „Die Beziehungen und Verwindungen zwischen all diesen Gebieten sind vielfältig und schwer schematisch zu skizzieren.“

In den folgenden Abschnitten wird untersucht, wie gut LehramtsstudentInnen Aufgaben lösen können, die Wissen aus Linearer Algebra und Analysis voraussetzen, und welche Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis die StudentInnen explizit benennen können.

4.2. Aufgaben im Fragebogen

In Tutorien im ersten Semester kann man die Erfahrung machen, dass Aufgaben, die Inhalte aus Linearer Algebra und Analysis einbeziehen, den StudentInnen schwer fallen. Dies zeigt sich beispielsweise bei Aufgaben, in denen in einem Vektorraum von Funktionen (anstelle von „echten“ Vektoren) gearbeitet werden soll. Ob diese Erfahrung auf der Wahrnehmung einiger Ausnahmen basiert oder ob es sich um ein verbreitetes Phänomen handelt, soll im Folgenden mit einem Fragebogen untersucht werden.

Methoden

ProbandInnen: Die Stichprobe besteht aus insgesamt 88 LehramtsstudentInnen. 31 der StudentInnen nahmen im Wintersemester 17/18 oder 18/19 am Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ teil und 57 StudentInnen besuchten im gleichen Zeitraum die Vorlesung Geometrie. Die Teilnahme an der Studie war freiwillig. Der Anteil männlicher Teilnehmer lag bei gut 27% und damit etwas niedriger als im Studiengang Mathematik auf Lehramt, in dem die männlichen Studenten einen Anteil von etwa 40% ausmachen. Die TeilnehmerInnen waren im 3. bis 12. Semester (Median: 7. Semester). Die Studie wurde von der Ethikkommission der Fakultät begutachtet und genehmigt.

Bereich	Beispiel	Lineare Algebra	Analysis
Analysis	mehrdimensionale Analysis, z. B. Bestimmung der Extrema von Funktion mit Hilfe der Definitheit der Hessematrix	Matrizen, Definitheit von Matrizen	Differenzialrechnung, Untersuchung von Eigenschaften von Funktionen
	Ableitung als Linearisierung	lineare Abbildungen	Ableitung
Analysis oder Lineare Algebra	Funktionenräume wie $C(X,Y)$, $C^n(X,Y)$ oder $C^\infty(X,Y)$	Struktur: Vektorraum	Elemente des Vektorraums: stetige/differenzierbare Funktionen
Differentialgleichungen	Lösungsraum linearer DGL ist ein Vektorraum	Struktur: Vektorraum	Untersuchung von Gleichungen mit Ableitungen
	lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten lösen durch Diagonalisieren/Bestimmung der Jordanschen Normalform	Diagonalisierbarkeit, Jordansche Normalform	Untersuchung von Gleichungen mit Ableitungen
	DGL höherer Ordnung in ein System erster Ordnung umwandeln	Matrizen	Untersuchung von Gleichungen mit Ableitungen
Differentialgeometrie	die Herleitung der Krümmung von Raumkurven wird durch einen Basiswechsel ermöglicht	Gram-Schmidt-Verfahren, Basiswechsel	Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von Differentialen
	Tangentialräume	Struktur: Vektorraum, Basen von Vektorräumen	Richtungsableitung
	Krümmung von Flächen via Krümmung der Schnittkurven mit Normalenebenen	Normalenebenen	Raumkurven, Ableitungen
Funktionalanalysis	Untersuchung von linearen Operatoren, z. B. auf Stetigkeit	Struktur: Vektorraum, Linearität	Stetigkeit, Folgen und Grenzwerte...
Numerik	Splineinterpolation	lineare Gleichungssysteme	mehrfache stetige Differenzierbarkeit
	Newtonverfahren im $\mathbb{R}^n$	lineare Gleichungssysteme	Ableitungen, Konvergenz

Tabelle 4.2.: Übersicht über einige Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis

Daten: Die TeilnehmerInnen füllten in der ersten oder zweiten Vorlesungswoche einen Fragebogen aus. Die 31 SeminarteilnehmerInnen füllten den Fragebogen zusätzlich noch einmal am Ende des Semesters aus. Für den Fragebogen wurden vier Aufgaben konzipiert, in denen

Objekte aus der Linearen Algebra und der Analysis gleichzeitig vorkommen, siehe unten. Außerdem wurden drei mathematische Lückentexte entwickelt, die sich nur auf entweder Analysis oder Lineare Algebra oder Elementare Zahlentheorie beziehen. Der Fragebogen enthielt außerdem Skalen zu mathematikbezogenen Überzeugungen, zur mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung und Anstrengungsbereitschaft und die Fragen nach einigen persönlichen Daten, siehe Abschnitt 3.2.

In den nächsten Absätzen werden die vier Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis beschrieben.

> **Aufgabe 1:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ eine beliebige Matrix. Sei $\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.
> Ist α bei jedem $x \in \mathbb{R}^k$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bei der ersten Aufgabe soll ein hauptsächlich aus der Linearen Algebra bekanntes Objekt (lineare Abbildung) auf eine aus der Analysis bekannte Eigenschaft (Stetigkeit) untersucht werden. In der Aufgabenstellung werden die Konzepte „Matrix" und „lineare Abbildung" aus der Linearen Algebra angesprochen und das Konzept der Stetigkeit aus der Analysis. Die Aufgabe kann auf verschiedene Weisen gelöst werden, siehe Tabelle 4.3.

Argumentation	**Anteile an Linearer Algebra/Analysis**
Ax ist in jeder Zeile ein Polynom in x und Polynome sind stetig.	Lineare Algebra: Matrixrechenregeln, keine tiefgehende Theorie Analysis: Stetigkeit von Polynomen und Abbildungen zwischen mehrdim. Räumen
α ist linear und beschränkt (als linearer Operator), daher stetig.	funktionalanalytisch
Lineare Abbildungen sind differenzierbar und differenzierbare Abbildungen sind stetig.	Lineare Algebra: - Analysis: Differenzierbarkeit linearer Abbildungen, Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Tabelle 4.3.: Mögliche Argumentationen zur Lösung von Aufgabe 1

Die Aufgabe basiert auf einer indirekten Vernetzung der Gebiete, da Konzepte aus beiden Bereichen in der Aufgabe angesprochen werden. Die Argumentation zur Lösung der Aufgabe beruht auf Wissen aus der Analysis. Wissen aus der Linearen Algebra ist zum Lösen kaum bis gar nicht nötig.

> **Aufgabe 2:** Sei $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$, d. h. D bildet beliebig oft differenzierbare Funktionen auf ihre erste Ableitung ab. D ist linear.
> Nennen Sie einen Eigenvektor von D (nicht die Null-Abbildung).
> Zu welchem Eigenwert gehört dieser Eigenvektor?
> Nennen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert π.

In der zweiten Aufgabe wird der Vektorraum der glatten Funktionen betrachtet. Vektorräume werden in der Linearen Algebra behandelt, wobei dort als Beispiel überwiegend $\mathbb{K}^n$ verwendet wird. In der Aufgabenstellung werden die Begriffe „Eigenvektor" und „Eigenwert" aus der Linearen Algebra angesprochen sowie das Thema der Differentialrechnung aus der Analysis. Zum Lösen der Aufgabe muss die angegebene Menge als Vektorraum verstanden oder zumindest akzeptiert werden und es müssen die abstrakten Definitionen von Eigenvektor und Eigenwert aus der Linearen Algebra auf das gegebene Beispiel angewendet werden. Dies entspricht einer Vernetzung über zugrundeliegende Strukturen oder durch Modellierung bei Brinkmann (2002, siehe auch S. 4). Zudem ist Wissen über die Ableitung der Exponentialfunktion aus der Analysis nötig.

> **Aufgabe 3:** Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sei $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenige lineare Abbildung, die f in $x_0 \in \mathbb{R}$ am besten approximiert.
> Wie lässt sich L in Abhängigkeit von f berechnen? Zeichnen Sie auch eine illustrierende Skizze.

Die dritte Aufgabe zielt auf die Vorstellung der Ableitung als Linearisierung ab. In der Aufgabenstellung werden die Begriffe „lineare Abbildung“ aus der Linearen Algebra und „Approximation“ aus der Analysis angesprochen. Zur Lösung der Aufgabe muss die Ableitung einer Funktion (Analysis) als lineare Approximation der Funktion erkannt werden. Dies entspricht der indirekten Vernetzung der Gebiete. Außerdem soll die lineare Approximation in zwei Repräsentationen gegeben werden, algebraisch und geometrisch (Vernetzung von unterschiedlichen Repräsentationen).

> **Aufgabe 4:** Seien $f_1, f_2, f_3 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$ und $f_3(x) = \cos x$. Zeigen Sie, dass diese drei Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ linear unabhängig sind.

Wie in der zweiten Aufgabe wird auch in der vierten ein Vektorraum von Funktionen betrachtet, hier der Vektorraum der stetigen Funktionen. In der Aufgabenstellung wird mit der linearen Unabhängigkeit ein Konzept aus der Linearen Algebra angesprochen, während die trigonometrischen Funktionen eher aus der Analysis bekannt sind. Zur Lösung der Aufgabe muss die abstrakte Definition der linearen Unabhängigkeit auf das gegebene Beispiel angewendet werden. Dies entspricht wieder einer Vernetzung über zugrundeliegende Strukturen oder durch Modellierung bei Brinkmann (2002, siehe auch S. 4). Außerdem müssen die Werte der trigonometrischen Funktionen für gewisse Stellen bekannt sein. Spezielles Wissen aus der Analysis ist zur Lösung der Aufgabe nicht notwendig.

Alle vier Aufgaben sind mit den Inhalten aus Analysis 1 und 2 und Lineare Algebra 1 und 2 lösbar. Die Inhalte der Aufgaben 1, 3 und 4 werden üblicherweise in den Vorlesungen oder den zugehörigen Übungen behandelt. Die Aufgaben sollten von allen StudentInnen ab dem dritten Semester[2] gelöst werden können.

Die vier Aufgaben wurden testweise von DoktorandInnen der Mathematik bzw. Fachdidaktik bearbeitet, um eventuelle Fehler und missverständliche Formulierungen verbessern zu können. Zunächst enthielt der Fragebogen noch eine fünfte Aufgabe,[3] die von den TestlöserInnen jedoch als unpassend bewertet wurde. Die Aufgabe wurde daraufhin verworfen.

Neben den beschriebenen Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis enthielt der Fragebogen auch drei Aufgaben, die sich nur auf Analysis oder Lineare Algebra oder Elementare Zahlentheorie bezogen. Jede der Aufgaben bestand aus einer Aussage aus dem entsprechenden Gebiet und dem Beweis dieser Aussage. Der Beweis enthielt mehrere

[2] bzw. ab dem fünften Semester, falls Lineare Algebra und Analysis nicht parallel gehört werden

[3] „In welchem Zusammenhang sind Ihnen in den Analysis-Vorlesungen quadratische Matrizen begegnet? Nennen Sie alle Bereiche/Matrizen, die Ihnen einfallen.“

Lücken, die von den StudentInnen ausgefüllt werden sollten. Beispielsweise sollte in der Aufgabe zur Analysis die Äquivalenz der Folgenstetigkeit (i) und des ε-δ-Kriteriums (ii) für Funktionen auf $\mathbb{R}$ bewiesen werden. Der Beweis begann wie folgt:

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei ______ > 0. Sei (x_n) eine Folge in ______ mit Grenzwert ______.
Wähle ______ > 0 so, dass (ii) gilt. ...

Bei dieser Aufgabe wurde zum Wintersemester 18/19 der Grenzwert ξ in a umbenannt, da sich im vorigen Wintersemester beim Codieren herausgestellt hatte, dass bei einigen StudentInnen ξ und ε kaum unterscheidbar waren.

Die vollständigen Aufgaben sind in Anhang 3.2 zu finden.

Die Lückentexte sind ebenfalls mit den Inhalten aus Analysis 1 und 2 und Lineare Algebra 1 und 2 lösbar und sollten von allen StudentInnen ab dem dritten Semester gelöst werden können.[4]

Die Lückentexte zur Analysis und zur Linearen Algebra wurden probeweise von 15 bzw. 14 StudentInnen in Tutorien zur Analysis 4 bzw. Linearen Algebra 1 und 2 gelöst, um eventuelle Fehler und missverständliche Formulierungen verbessern zu können. Die Bandbreite möglicher Punkte wurde bei beiden Texten fast vollständig ausgereizt. Alle drei Lückentexte wurden zudem wie die Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis testweise von DoktorandInnen der Mathematik bzw. Fachdidaktik bearbeitet. Daraufhin wurden manche Lücken vergrößert.

Codierprozess: Zu den Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis wurden Musterlösungen erstellt, auf deren Basis normativ eine Punkteverteilung ausgearbeitet wurde. Diese legt fest, welche Schritte oder Argumente vorhanden sein müssen, damit ein Punkt vergeben wird. Daraus wurde ein erster Codierleitfaden erstellt. Mit diesem codierte ich das Material aus dem Wintersemester 2017/2018 und verbesserte dabei den Codierleitfaden. Die größte Änderung ergab sich bei Aufgabe 3. Viele StudentInnen nannten als einziges Stichwort „Taylor-Polynom“ oder „Taylor-Reihe“, was bis dahin nicht im Codierleitfaden enthalten war. Der Codierleitfaden wurde darum um den „Zwischenschritt“ Taylor ergänzt, um diese passende, aber unpräzise Idee von falschen Ideen differenzieren zu können. Bei jeder Aufgabe können nun 0 bis 3 Punkte erreicht werden. Mit dem verbesserten Codierleitfaden (siehe Anhang A.7) codierte eine studentische Hilfskraft das Material aus dem Wintersemester 2017/2018 und eine andere studentische Hilfskraft das Material aus dem Wintersemester 2018/2019. Die beiden Codierungen verglichen wir jeweils mit meiner Codierung. Fehlerhaft codierte Stellen wurden verbessert und alle weiteren Unterschiede wurden konsensuell gelöst. Cohens κ lag im Wintersemester 2017/2018 bei 0.78 und im Wintersemester 2018/2019 bei 0.87. Die Interrater-Reliabilität war also gut bis sehr gut.[5]

Zu den Lückentexten wurden ebenfalls Musterlösungen und ein Codierleitfaden erstellt. Korrekt ausgefüllte Lücken wurden mit 1, falsch ausgefüllte Lücken mit 0 codiert. Da die Lösungen der StudentInnen bei der Aufgabe zur Analysis kleinere Fehler enthielten (z. B. x statt ξ für den Grenzwert), wurden für einige Lücken weitere Codes erstellt (siehe Codierleitfaden A.7), um die Entscheidung, welche dieser kleinen Fehler letztendlich als richtig und welche als falsch gewertet werden sollten, nicht während des Codierprozesses ad hoc fällen zu müssen. Bei der Auswertung wurden die Fehler x statt ξ für den Grenzwert, $n \geq n_0$

[4] Siehe Fußnote 2.

[5] Alterntiv zu Cohens κ kann auch Krippendorffs α berechnet werden: $\alpha = 0.78$ bzw. $= 0.87$. Die Interrater-Reliabilität war somit im ersten Semester knapp unter der Schwelle für gute Reliabilität und im zweiten Semester darüber. Da das Material von zwei Ratern codiert wurde, sodass Uneinigkeiten geklärt werden konnten, wiegt die etwas zu niedrige Reliabilität im ersten Semester nicht so schwer.

statt $n > n_0$ und ein Index zu viel bzw. zu wenig am ξ bzw. ε nicht als Fehler gewertet, das heißt, die Lösungen wurden als korrekt angenommen. Alle weiteren Fehler mit eigenem Code im Codierleitfaden wurden als Fehler gewertet (z. B. fehlende Betragszeichen). Cohens κ lag im Wintersemester 2017/2018 bei 0.94 und im Wintersemester 2018/2019 bei 0.98. Die Interrater-Reliabilität war somit in beiden Semestern sehr gut.[6]

4.2.1. Ergebnisse

Von den insgesamt 12 möglichen Punkten in den Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis erreichte etwa ein Viertel der TeilnehmerInnen keinen und etwa ein weiteres Viertel nur einen Punkt. Gut ein Viertel der TeilnehmerInnen erreichte zwei oder drei Punkte und knapp ein Viertel erreichte vier oder mehr Punkte. Die meisten TeilnehmerInnen erreichten bei diesen Aufgaben also nur sehr wenige Punkte. Eine Übersicht über die Punkteverteilung bei den vier Aufgaben kann Tabelle 4.4 entnommen werden. 11 StudentInnen wurden dabei nicht berücksichtigt, da sie keine der vier Aufgaben bearbeitet hatten. Bei diesen StudentInnen gibt es keinen Hinweis, ob sie die Aufgaben nicht lösen konnten oder ob sie sich nur keine Mühe gegeben hatten/geben wollten. Bei den StudentInnen, die mindestens eine Aufgabe bearbeitet haben, wurden nicht bearbeitete Aufgaben mit 0 Punkten bewertet, da sie die Aufgaben vermutlich lösen wollten, aber nicht alle lösen konnten.

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Summe
Minimum	0	0	0	0	0
Median	1.00	1.50	1.00	0.50	1.00
Ar. Mittel	1.00	1.53	1.15	0.71	2.30
Maximum	3	3	3	3	11
nicht bearbeitet von	32	47	37	21	

Tabelle 4.4.: Punkte bei Aufgabe 1 bis 4 und die Summe über alle Aufgaben

Bei den Lückentexten zur Analysis, Linearen Algebra und Elementaren Zahlentheorie konnten maximal 14, 6 bzw. 12 Punkte erreicht werden, insgesamt also 32. Die Aufgabe zur Analysis fiel am besten aus mit im Mittel gut 60% der Punkte. Wie bei den Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis wurden StudentInnen, die keine einzige Lücke ausgefüllt hatten, nicht berücksichtigt. Dies war nur bei zwei StudentInnen der Fall. Bei allen anderen wurden nicht ausgefüllte Lücken als falsch gewertet. Für die letzte Spalte der Tabelle wurden die Punkte der Lückentexte mit 1/14, 1/6 bzw. 1/12 gewichtet, sodass alle drei Lückentexte das gleiche Gewicht in die Gesamtsumme einbringen. Der erreichbare Höchstwert ist dabei 3. Siehe Tabelle 4.5.

Im Vergleich zu den Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis wurden die Lückentexte von mehr StudentInnen und im Schnitt auch besser bearbeitet (im Mittel 40% der Punkte bei den Lückentexten, 19% der Punkte bei den Vernetzungsaufgaben).

Die 31 SeminarteilnehmerInnen bearbeiteten die Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis sowohl am Anfang als auch am Ende des Semesters. Sie erreichten auch im Nachtest nur wenige Punkte. Die Ergebnisse deuten jedoch auf eine leichte Verbesserung hin: Der Anteil unbearbeiteter Aufgaben verringerte sich von etwa 51% im Vortest auf etwa 31% im Nachtest. Die TeilnehmerInnen erreichten im Schnitt einen Punkt mehr als im Vortest, siehe Tabelle 4.6. Abbildung 4.1 ist zu entnehmen, dass sich mehr TeilnehmerInnen

[6] Krippendorffs $\alpha = 0.95$ bzw. $= 0.98$.

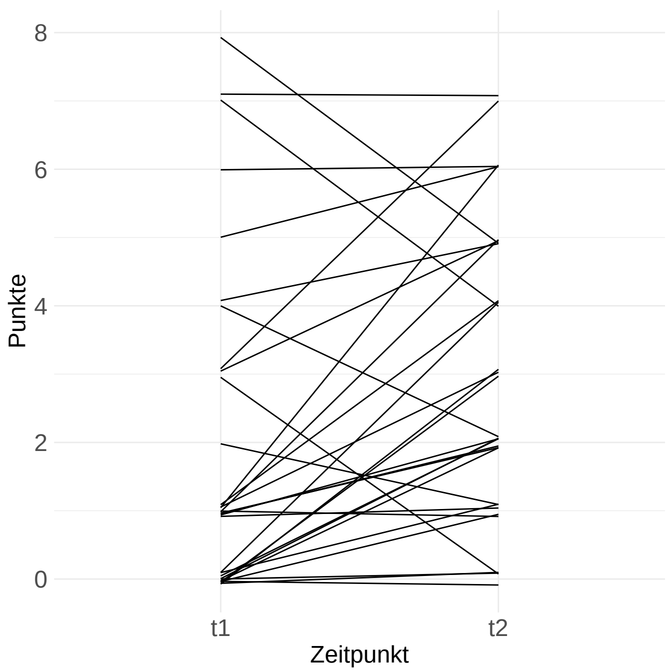
	Analysis	Lineare Algebra	Zahlentheorie	Summe	gewicht. Summe
Minimum	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (3%)	0.07 (2.33%)
Median	9 (64%)	1 (17%)	1 (8%)	11 (34%)	0.86 (27.67%)
Ar. Mittel	8.35 (60%)	2.37 (40%)	2.16 (18%)	12.88 (40%)	1.17 (39%)
Maximum	14 (100%)	6 (100%)	12 (100%)	30 (94%)	2.86 (95.33%)
nicht bearbeitet von	1	26	25		

Tabelle 4.5.: Punkte (und Anteil an maximal erreichbaren Punkten) bei den Lückentexten, die Summe über alle Aufgaben und die gewichtete Summe über alle Aufgaben (sodass jeder Lückentext gleich viel beiträgt, Maximalwert: 3)

verbessert als verschlechtert haben. Die Verbesserung um im Schnitt einen Punkt ist nicht auf eine bestimmte Aufgabe zurückzuführen.

	Aufg. 1		Aufg. 2		Aufg. 3		Aufg. 4		Summe	
Zeitpunkt	t1	t2	t1	t2	t1	t2	t1	t2	t1	t2
Minimum	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Median	0.5	1	1	2	1	1	1	1	1	2
Ar. Mittel	0.86	1.06	1.17	1.69	1.25	0.91	0.87	0.89	1.97	2.97
Maximum	3	2	3	3	3	3	3	3	8	7
nicht bearbeitet von	17	13	19	15	19	8	8	3		

Tabelle 4.6.: Punkte der SeminarteilnehmerInnen bei Aufgabe 1 bis 4 und die Summe über alle Aufgaben im Vor- und Nachtest



Änderung der Punktzahl	bei n Personen
-3	3
-2	1
-1	1
± 0	7
$+1$	7
$+2$	5
$+3$	3
$+4$	3
$+5$	1

Abbildung 4.1.: Änderung der Gesamtpunkte von Vor- zu Nachtest, pro SeminarteilnehmerIn eine Linie

4.2.2. Diskussion

Bei den Aufgaben zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis erreichte ein Viertel der TeilnehmerInnen keine, ein Viertel einen und ein weiteres Viertel zwei oder drei Punkte. Das heißt, drei Viertel der TeilnehmerInnen konnten höchstens ein Viertel der Aufgaben lösen. Da die TeilnehmerInnen alle mindestens im dritten, die meisten (85%) mindestens im fünften Fachsemester waren, wäre zu erwarten gewesen, dass sie die Aufgaben größtenteils hätten lösen können. Dass dies nicht der Fall war, unterstützt die Hypothese, dass Aufgaben, die sowohl auf Linearer Algebra als auch auf Analysis basieren, StudentInnen schwer fallen.

Im Vergleich mit den Aufgaben, die nur auf einem Gebiet basieren, fielen die Vernetzungsaufgaben schlechter aus.[7] Die Vernetzungsaufgaben wurden von weniger TeilnehmerInnen bearbeitet als die Lückentexte, was darauf hindeutet, dass die Vernetzungsaufgaben für sie schwieriger waren. Auch die erreichten Punkte weisen darauf hin: Bei den Lückentexten erreichten die TeilnehmerInnen im Schnitt 40% der Punkte, bei den Vernetzungsaufgaben nur 19%. Eine Einschränkung dieses Ergebnisses ist allerdings, dass bei den Vernetzungsaufgaben und den Aufgaben zu nur einem Bereich unterschiedliche Aufgabentypen verwendet wurden. Die Vernetzungsaufgaben waren (mit Ausnahme von Aufgabe 2) wie übliche Übungsaufgaben gestaltet, bei denen die TeilnehmerInnen selbst einen Lösungsansatz finden mussten. Bei den Lückentexten hingegen waren nur einzelne Lücken zu füllen. Dieser Aufgabentyp war den TeilnehmerInnen aus dem Mathematikstudium nicht bekannt. Es könnte sein, dass eines der Aufgabenformate den StudentInnen generell schwerer fällt als das andere, was das Ergebnis verzerren könnte.

Dass die SeminarteilnehmerInnen bei den Vernetzungsaufgaben im Nachtest im Schnitt einen Punkt (entspricht 8 Prozentpunkten) mehr erreichten als im Vortest, ist ein Anhaltspunkt dafür, dass sie durch das Seminar ihre Fähigkeiten zum Lösen von Aufgaben, die auf Linearer Algebra und Analysis basieren, verbessern konnten. Allerdings kann diese Hypothese mit den vorliegenden Daten nicht überprüft werden, da die Stichprobe sehr klein und keine Kontrollgruppe vorhanden ist.

Ein Erklärungsmodell für die Schwierigkeiten von StudentInnen, Lineare Algebra und Analysis zu verknüpfen, ist die Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche von Bauersfeld (1983). Bauersfeld geht davon aus, dass alles Gelernte in sogenannten subjektiven Erfahrungsbereichen gespeichert wird. Ein subjektiver Erfahrungsbereich umfasst dabei stets „die Gesamtheit des als subjektiv wichtig Erfahrenen und Verarbeiteten, einschließlich der Gefühle, der Körpererfahrung usw.“ (Bauersfeld 1983, S. 2). In einer Situation kann immer nur ein subjektiver Erfahrungsbereich aktiviert werden, innerhalb dessen Sprache und Handlungen interpretiert und Handlungsmöglichkeiten gesucht werden. Andere möglicherweise passende subjektive Erfahrungsbereiche, zu denen vom aktivierten Erfahrungsbereich aus keine Verbindung besteht, werden unterdrückt. Das kann sich beispielsweise darin äußern, dass ein Wort in verschiedenen Erfahrungsbereichen unterschiedlich interpretiert wird und dass diese unterschiedlichen Bedeutungen nicht verknüpft werden. Durch eine Rahmung einer Situation durch bestimmte Wörter wird ein bestimmter subjektiver Erfahrungsbereich aktiviert, der gewisse Lösungsprozeduren mit sich bringt und andere subjektive Erfahrungsbereiche mit anderen Prozeduren unterdrückt.

Bauersfeld (1983) stellt als Beispiel einen Fall aus der Literatur vor. Ein achtjähriges Mädchen konnte die schriftliche Aufgabe 8:4 nicht lösen. Bei einer Paraphrasierung mit Geldeinheiten konnte sie aber die – aus Sicht des Beobachters schwierigere – Aufgabe 5:4

[7] Ein *Wilcoxon signed rank test with continuity correction* ergibt einen p-Wert von $6.692 \cdot 10^{-10}$ ($V = 2634.5$). Da die Aufgabentypen aber grundsätzlich verschieden sind, ist fraglich, wie aussagekräftig der Test ist.

korrekt lösen. Bauersfeld erklärt dies damit, dass für das Mädchen das Rechnen auf Papier nichts mit dem Umgang mit Geld zu tun habe, weil es sich um verschiedene subjektive Erfahrungsbereiche des Mädchens handele. Ein Zahlwort wie „acht“ oder „fünf“ stehe einmal für ein Symbol („8“, „5“) und einmal für einige Münzen oder Geldscheine. Jeder subjektive Erfahrungsbereich stellt damit zusammen mit den mit ihm und durch ihn verknüpften anderen subjektiven Erfahrungsbereichen „einen abgeschlossenen Kontext in dem Sinne dar, dass die Netze seiner Begriffe nicht aus diesem Verbund hinausreichen.“ (ibid. S. 32)

Die in der Mathematik häufig geforderten Lernprozesse des Transferierens, Abstrahierens und Veranschaulichens entsprechen nach Bauersfeld dem Verknüpfen von subjektiven Erfahrungsbereichen (Bauersfeld 1983, S. 2). Beispielsweise sollen beim Abstrahieren Gemeinsamkeiten zwischen Objekten in verschiedenen subjektiven Erfahrungsbereichen durch Strukturvergleiche erkannt werden (ibid. S. 34). Die Gemeinsamkeiten lassen sich jedoch „wegen der Spezifität der Interessen, Sinnzuschreibungen, Sprache, Handlungen, Routinen usw.“ (ibid. S. 34) in keinem der angesprochenen subjektiven Erfahrungsbereiche formulieren. Das bedeutet, dass ein neuer Erfahrungsbereich entwickelt werden muss, „dessen Gründung [. . .] einer aktiven Sinnkonstruktion [bedarf], die zwar von außen unterstützt, aber nicht gewissermaßen stellvertretend für das Individuum vollzogen werden kann“ (ibid. S. 35).

Im Fall der beiden hier behandelten Vorlesungen Lineare Algebra und Analysis können eben diese als subjektive Erfahrungsbereiche der StudentInnen interpretiert werden. Die von Bauersfeld beschriebenen Beispiele von Erfahrungsbereichen sind spezifischer (z. B. „schriftliches Abziehen“ Bauersfeld (1983, S. 4)), doch reichen für eine Beschreibung des Grundproblems die gröberen Erfahrungsbereiche „Vorlesung Lineare Algebra“ und „Vorlesung Analysis“ mit den in der Vorlesung, beim Lösen der Aufgaben und in den zugehörigen Übungsstunden gemachten Erfahrungen. Diese subjektiven Erfahrungsbereiche sind zunächst nicht miteinander verknüpft. Bei mathematischen Problemen, die beide Bereiche ansprechen, wird darum nur einer aktiviert. Eine Frage wie in Aufgabe 1, „Sind (endlichdimensionale) lineare Abbildungen stetig?“, aktiviert durch das Wort „linear“ zuerst den subjektiven Erfahrungsbereich „Lineare Algebra“. Dem Wort „stetig“ ist in diesem Erfahrungsbereich keine Bedeutung zugewiesen, da Stetigkeit in der Linearen Algebra nicht behandelt wird.[8] Eine zusätzliche Aktivierung des subjektiven Erfahrungsbereiches „Analysis“ ist nach Bauersfeld (1983, S. 2) kaum möglich. Erst durch die Bildung eines subjektiven Erfahrungsbereiches, der die Bereiche „Lineare Algebra“ und „Analysis“ verbindet, wird eine gleichzeitige Aktivierung ermöglicht. Dies bedarf einer aktiven Sinnkonstruktion durch die Lernenden.

Um die Verknüpfung der subjektiven Erfahrungsbereiche anzuregen, mussten die SeminarteilnehmerInnen in beiden Semestern reflektieren, welche Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis ihnen bekannt sind. Im Wintersemester 17/18 wurde die Frage eher allgemein formuliert, während der Fokus im Wintersemester 18/19 auf Verbindungen lag, die im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ vorkamen. Die Texte der StudentInnen wurden im Hinblick darauf analysiert, welche Themen oder Beispiele sich besonders eignen könnten, um StudentInnen Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis aufzuzeigen, woher die Schwierigkeiten beim Vernetzen kommen und wie man sie möglicherweise überwinden kann.

[8] Vorstellbar ist auch, dass bei Personen, denen die Analysis näher liegt, durch „stetig“ der Erfahrungsbereich „Analysis“ zuerst aktiviert wird, in dem dann linearen Abbildungen und Matrizen möglicherweise keine Bedeutung zugewiesen ist. Welcher Erfahrungsbereich bei den StudentInnen zuerst aktiviert wird, könnte mit Interviews untersucht werden.

4.3. Schriftliche Reflexion aus dem WS 17/18

Die Vernetzungsaufgaben im Fragebogen sprechen hauptsächlich das implizite Vernetzungswissen an. Das bedeutet, dass es nicht notwendig ist, Verbindungen zwischen Algebra und Analysis explizit benennen zu können, um die Aufgaben zu lösen. Die StudentInnen müssen aber Wissen aus beiden Bereichen aktivieren können, also gleichzeitig auf beide Erfahrungsbereiche zugreifen können. Erkenntnisse über das explizite Wissen der StudentInnen zu Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis sollen durch die Analyse der schriftlichen Reflexionen gewonnen werden.

Anhand der Reflexionen aus dem Wintersemester 2017/2018 soll untersucht werden, ob die StudentInnen grundsätzlich Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis erkennen und durch welche Beispiele sie solche Verbindungen illustrieren. Außerdem soll ein Vergleich der Bearbeitungen der Vernetzungsaufgaben im Fragebogen mit dem Text des/der jeweiligen StudentIn mögliche Hypothesen über einen Zusammenhang zwischen den Bearbeitungen aufzeigen.

4.3.1. Methoden

Für eine Beschreibung der Ziele und des allgemeinen Ablaufs einer (inhaltlich strukturierenden) Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2016) siehe Abschnitt 3.3.1. Im Folgenden wird dargestellt, wie die inhaltlich strukturierende Inhaltsanalyse im vorliegenden Fall durchgeführt wurde.

Entstehung und Auswahl des Materials, ProbandInnen: Die ProbandInnen der Studie besuchten das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ im Wintersemester 2017/2018. Im Seminar wurden Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis nicht systematisch thematisiert, aber in der Differentialgeometrie werden häufig Konzepte aus beiden Gebieten gleichzeitig verwendet. Von den 15 StudentInnen des Seminars erklärten sich 11 bereit, an der Studie teilzunehmen. Zwei der TeilnehmerInnen waren männlich, neun weiblich. Alle waren LehramtsstudentInnen nach GymPO und im 7. bis 11. Semester. Für die Teilnahme an der Studie bekamen die ProbandInnen einen Gutschein im Wert von 10 €. Die Studie wurde von der Ethikkommission der Fakultät begutachtet und genehmigt.

Im Rahmen des Seminars reflektierten die TeilnehmerInnen schriftlich über Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis. Dazu bekamen sie die folgende Aufgabe gestellt:

> Stellen Sie sich vor, Sie leiten ein Erstsemestertutorium (LinA oder Ana). In Ihre Sprechstunde kommt jemand mit der Frage: „Haben eigentlich LinA und Ana irgendwas miteinander zu tun? Ich sehe da gar keinen Zusammenhang.“
>
> Was würden Sie antworten? Würden Sie einem Studenten/einer Studentin gegen Ende des Grundstudiums (Ende 4. Semester) etwas anderes antworten?

Die Reflexion musste eine Woche vor der letzten Seminarstunde fertiggestellt werden. Alle StudentInnen des Seminars mussten die Aufgabe bearbeiten und bekamen von der verantwortlichen Dozentin des Seminars ein kurzes Feedback zu ihrem Text. Es gab keine Note für diese Aufgabe. Elf der StudentInnen stellten ihren Text für die Studie zur Verfügung. Dazu gaben sie den Text mit einem Code versehen bei einer Mitarbeiterin des Arbeitsbereiches ab, um Anonymität zu wahren.[9] Dieser zusätzliche Schritt hat möglicherweise die übrigen vier StudentInnen davon abgehalten, auch ihre Texte zur Verfügung zu stellen. Alle

[9]Die StudentInnen reichten ihren Text einmal mit ihrem Namen direkt bei der für das Seminar verantwort-

elf eingereichten Texte wurden als Auswahleinheiten in die Analyse aufgenommen. Als Analyseeinheit wurde jeweils der gesamte Text gewählt.

Entwicklung des Kategoriensystems: Die initiierende Textarbeit (Phase 1) gab einen Überblick über die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Texte und die angesprochenen Themen und Beispiele. Die Texte haben eine Länge von einer halben bis einer Seite. In vielen Texten wird der Aussage, dass Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis schwer zu sehen seien, zugestimmt. Die Texte unterscheiden sich darin, wie sehr bekräftigt und mit Beispielen unterlegt wird, dass es Zusammenhänge gibt. Fallzusammenfassungen wurden nicht erstellt, da das Material überschaubar ist und Fallanalysen nicht das Ziel der Untersuchung waren.

Die Kategorien wurden induktiv am Material gebildet (Phase 2). Die Ideen für Kategorien, die bei der initiierenden Textarbeit entstanden, waren

- Lineare Algebra verwendet in Analysis
- Analysis verwendet in Linearer Algebra
- Lineare Algebra und Analysis verwenden gleiche Objekte
- Lineare Algebra und Analysis kommen zusammen in einem anderen Bereich vor
- konkretes Beispiel
- vages Beispiel
- unpassendes Beispiel
- Lineare Algebra und Analysis haben gemeinsame Grundlagen

Während des ersten Codierens der Texte (Phase 3) wurden die Kategorien „konkretes Beispiel“ und „vages Beispiel“ vereinigt, da sich die Differenzierung der Textstellen als schwierig herausstellte. Nach dem ersten Codierdurchgang versuchte ich mit einem Kollegen, eine weitere Unterteilung der Kategorien zu finden (Phase 4 und 5). Die Beispiele unterteilten wir in oberflächliche und tiefergehende Beispiele. Außerdem erschien es uns sinnvoll, die Kategorien „Lineare Algebra“, „Analysis“ und „Kommentare über den Zusammenhang“ aufzunehmen, da viele Textstellen nicht in die anderen Kategorien passten.

Anschließend begannen die Dozentin des Seminars und ich, unabhängig von einander die Texte mit dem überarbeiteten Kategoriensystem zu codieren (Phase 6). Nach zwei Texten verglichen wir unsere Codierungen und führten „theoretisch unklare Beispiele“ als neue Kategorie zwischen oberflächlichen und tiefergehenden Beispielen ein, da einige Textstellen für ein oberflächliches Beispiel zu inhaltsreich waren, aber nicht präzise genug für ein tiefergehendes (Phase 5). Außerdem wurden „LinA in Ana“ und „Ana in LinA“ jeweils in die Unterkategorien „konkrete Beispiele“ und „allgemeine Aussagen“ unterteilt. Mit diesem überarbeiteten Kategoriensystem codierten wir unabhängig von einander alle übrigen Texte (Phase 6). Anschließend diskutierten wir alle Textstellen, die wir unterschiedlich codiert hatten, um einen Konsens zu finden.

Zum Codieren wurde die Software RQDA verwendet.

lichen Dozentin ein und einmal mit einem Code versehen bei einer Mitarbeiterin des Arbeitsbereiches, die die Abgaben an die für die Auswertung verantwortliche Person weitergab.

Das Kategoriensystem: Das Kategoriensystem besteht aus den beiden Hauptkategorien „Thema“ und „Art des Beispiels“. Es folgt eine kurze Beschreibung der einzelnen Kategorien. Die genauen Definitionen der Kategorien sind in Anhang A.9 verzeichnet. Die Kategorie „Thema“ enthält Unterkategorien zu verschiedenen Themen, in denen Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis vorkommen.

- Ana in LinA allgemein: allgemeine Behauptung, dass Analysis für Lineare Algebra benötigt wird
- Ana in LinA konkret: Beispiel dafür, dass Objekte/Strukturen/Sätze aus Analysis in der Linearen Algebra verwendet werden
- LinA in Ana allgemein: analog zu Ana in LinA allgemein
- LinA in Ana konkret: analog zu Ana in Lina konkret
- in anderem Bereich: Lineare Algebra und Analysis werden beide innerhalb eines anderen mathematischen Gebietes benötigt
- gemeinsame Grundlagen: Grundlagen, die sowohl in Linearer Algebra als auch in Analysis benötigt werden
- gemeinsame Fragestellung: Fragestellungen, die in beiden Gebieten vorkommen
- unterschiedliche Herangehensweisen: In Linearer Algebra und Analysis gibt es unterschiedliche Herangehensweisen, die zusammen beim Problemlösen helfen können.

Die Kategorie „Art des Beispiels“ enthält Kategorien zur Differenzierung von Beispielen.

- falsches Beispiel: Das Beispiel ist unpassend oder mathematisch falsch.
- oberflächliches Beispiel: Es werden nur grobe Themen genannt oder es wird auf einer kalkulatorischen Ebene argumentiert.
- theoretisch unklares Beispiel: Das Beispiel ist oberflächlich beschrieben, hat aber das Potenzial für ein tiefergehendes Beispiel.
- tiefergehendes Beispiel: Theorie aus einem Gebiet wird ins andere transferiert.

Diese Einteilung ähnelt den Kategorien zur Unterscheidung von falschen, schwachen/oberflächlichen und starken/tiefen Repräsentationen mathematischer Zusammenhänge bei Mhlolo, Venkat und Schäfer (2012). In jener Studie stehen allerdings Unterrichtsinteraktionen im Fokus.

Das hier entwickelte Kategoriensystem enthält außerdem die folgenden drei Kategorien:

- Analysis: Beschreibung oder Charakterisierung von Analysis
- Lineare Algebra: Beschreibung oder Charakterisierung von Linearer Algebra
- Kommentare zum Zusammenhang: Aussagen darüber, ob es Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis gibt

4.3.2. Ergebnisse und Diskussion

Welche Verbindungen sehen die StudentInnen zwischen Linearer Algebra und Analysis?

Viele StudentInnen beginnen ihre Antwort mit einer Beschreibung von Linearer Algebra und Analysis. Als Themen oder Objekte in Analysis nennen sie besonders häufig Stetigkeit und Differenzialrechnung, aber auch Grenzwerte, Integralrechnung, Folgen, Reihen, Untersuchung von Funktionen, Krümmung, e und π. Die lineare Algebra wird von manchen explizit als Teilgebiet der Algebra betrachtet. Genannte Themen sind Vektorräume, lineare Abbildungen/Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Körper- und Gruppentheorie, Moduln und Gleichungen erster Ordnung. Dies spiegelt zusammen mit den gemeinsamen Grundlagen (siehe unten) die Inhalte der Vorlesungen wieder (vgl. Abschnitt 4.1.2).

10 der 11 Texte enthalten einen oder mehrere Kommentare darüber, ob Lineare Algebra und Analysis zusammenhängen und ob man das leicht erkennen kann oder nicht. Dabei gibt es 12 Kommentare, die einen Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis recht deutlich bejahen, z. B. „Ich kann gut verstehen, dass es zunächst einmal so aussieht, als ob diese zwei Gebiete der Mathematik überhaupt nichts miteinander zu tun haben. Jedoch kann ich dir sagen, dass du schon im nächsten Semester einen Zusammenhang sehen wirst.“ (T1,3-4[10]), „Ja haben sie. Ohne das eine Teilgebiet der Mathematik kann das andere nicht existieren.“ (T4,26-27). In 9 Kommentaren zeigen sich die VerfasserInnen eher skeptisch und betonen, dass Zusammenhänge schwer zu sehen seien, z. B. „Allgemein finde ich es jedoch schwierig konkrete Beispiele zu nennen, da mir selbst der genaue Zusammenhang nicht klar ist.“ (T11,17), „Dennoch sind meiner Meinung nach die meisten der beiden Themengebiete unabhängig voneinander zu verstehen, nicht völlig aber größtenteils schon“ (T5,21). In manchen Texten kommen Kommentare beider Arten vor. 9 Personen schreiben, dass es nicht leicht sei, im ersten Semester (oder auch später) einen Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis zu sehen. In keinem Text wird behauptet, dass es gar keine Verbindungen gebe.

Thematisch sehen die StudentInnen die folgenden Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis. Dabei bedeutet „5 Nennungen“, dass es zu dem genannten Thema fünf Textstellen gibt. Es können mehrere dieser Textstellen aus einem Text stammen.

Lineare Algebra und Analysis haben **gemeinsame Grundlagen**, die in der einen Vorlesung behandelt und in der anderen vorausgesetzt werden oder auch in beiden Vorlesungen eingeführt werden. Dies sind zum Beispiel Themen der Mengenlehre (5 Nennungen) wie Mengen und Abbildungen (2 Nennungen). Auch die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind für Lineare Algebra und Analysis grundlegend (5 Nennungen).[11] Des Weiteren werden auch Arbeitstechniken wie das Beweisen als Grundlage oder Lernziel beider Vorlesungen angesehen (2 Nennungen). Die Beschreibung dieser gemeinsamen Grundlagen zeigt, dass die StudentInnen nicht zwischen den Vorlesungen Lineare Algebra bzw. Analysis und den mathematischen Gebieten gleichen Namens unterscheiden. Dies wurde möglicherweise durch die Fragestellung begünstigt, die eine solche Differenzierung nicht nahelegt.

Viele StudentInnen sehen Verbindungen in der **mehrdimensionalen Analysis** (10 Personen), in der Matrizenrechnung und einige Sätze aus der Linearen Algebra im analytischen Kontext benötigt werden. Manchmal wird nur behauptet, dass Lineare Algebra in Analysis gebraucht werde, ohne ein konkretes Beispiel anzugeben (2 Personen). Oft wird nur

[10] „T1,3-4“ bedeutet „Text 1, Zeile/Satz 3-4“.

[11] Die Konstruktion von $\mathbb{R}$ ist dabei der Analysis zuzurechnen und die körpertheoretische Betrachtung der Algebra. Diese Zuordnung kam allerdings in keinem Text vor.

allgemein gesagt, dass Matrizen vorkämen (2 Personen) oder es werden die Jacobi- oder Hessematrix konkret benannt (3 Personen), ohne darauf einzugehen, dass einige Resultate aus der Linearen Algebra bei der Arbeit mit diesen Matrizen hilfreich sind. Ebenso schreiben manche StudentInnen, dass es für Analysis wichtig sei, die strukturellen Eigenschaften von Vektorräumen, wie man sie in der Linearen Algebra untersucht, zu kennen (2 Personen). Als konkretere Beispiele werden genannt: Determinanten zur Integralberechnung (1 Nennung), Normen, die von den StudentInnen der Linearen Algebra zugeordnet werden (2 Nennungen), Extremwertprobleme, bei denen man die Definitheit einer Matrix untersucht (1 Nennung), sowie Normalenvektoren und Tangentialebenen an Flächen (1 Nennung) und Grenzwertberechnungen von Matrizen (1 Nennung).

Die umgekehrte Transferrichtung von **Analysis in die Lineare Algebra** wird seltener erwähnt (4 Personen). Als Beispiel wird die Bestimmung von Nullstellen von Polynomen mit „Techniken der Analysis“ genannt (1 Nennung), ohne diese „Techniken“ näher zu bestimmen. Als weiteres Beispiel wird die Matrixexponentialfunktion (1 Nennung) angeführt. Außerdem wird der Fundamentalsatz der Algebra genannt (1 Nennung). Dieser wird meist in der Linearen Algebra formuliert und in Analysis bewiesen, ist aber inhaltlich eher der Algebra als der Linearen Algebra zuzurechnen.

Als Beispiele für ein Zusammenwirken von Linearer Algebra und Analysis **in anderen Gebieten** werden Differentialgeometrie (3 Personen), Geometrie (2 Personen), Physik (1 Person), Stochastik (1 Person), Numerik (2 Personen) und das Mathematikstudium allgemein (4 Personen) genannt. Als Beispiele aus der Differentialgeometrie werden der Basiswechsel bei der Herleitung einer Formel für die Krümmung einer Raumkurve (2 Nennungen) und Tangenten und Schmiegeebenen (1 Nennung) genannt. Diese Beispiele stammen aus dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“. In der Physik werden Bewegungen im Raum betrachtet, bei denen Vektordarstellungen und Ableitungen benötigt werden (1 Nennung). Aus Numerik wird als Beispiel nur das Programm MATLAB angeführt (1 Nennung), das mit Matrizen arbeitet.

Zudem werden der Linearen Algebra und der Analysis jeweils eigene **Herangehensweisen** oder Methodiken zugeschrieben, die für Beweise oder das Problemlösen gleichermaßen nötig seien (5 Personen). Als einziges konkretes Beispiel wird die Kurvendiskussion genannt, bei der eine Funktion algebraisch (aber nicht „linear-algebraisch“) auf Nullstellen und analytisch auf ihr Verhalten bei Polstellen untersucht werde (1 Nennung). Hierbei stehen die verschiedenen Ansätze jedoch eher nebeneinander, da nicht deutlich gemacht wird, für was man die Ergebnisse beider Untersuchungen braucht.

Auffällig ist insgesamt, dass nur wenig verschiedene Beispiele vorkommen, obwohl alle StudentInnen noch weitere Beispiele kennen müssten, wie etwa die folgenden:

- Verschiedene Funktionenräume bilden Vektorräume, sodass man lineare Unabhängigkeit von Funktionen untersuchen und Eigenfunktionen beispielsweise des Ableitungsoperators bestimmen kann.

- Die Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung bilden einen Vektorraum, sodass es ausreicht, eine Basis dieses Lösungsraumes zu finden.

- Skalare lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung können in ein System von Gleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden.

- Die Ableitung ist eine Linearisierung und damit eine lineare Abbildung. Zwar wird in den Texten die Jacobimatrix genannt, jedoch wird nicht explizit darauf hingewiesen,

dass dies eine lineare Abbildung ist und dass sie eine lineare Approximation der Funktion darstellt. Als „Erklärung“ für das Auftreten einer Matrix wird eher die höhere Dimension von Definitions- oder Wertebereich angeführt.
Auch in Halverscheid und Müller 2013 zeigt sich die Linearisierungsvorstellung der (mehrdimensionalen) Ableitung nur selten, ist aber bei der Jacobi-Matrix der „zentrale Anknüpfungspunkt [...] für die StudentInnen“ (ibid. S. 127). Es ist daher erstaunlich, dass diese Vorstellung in keinem der Texte zum Ausdruck kommt.

- Es wurden wenig Beispiele aus dem Seminar genannt. Das liegt aber möglicherweise an der Fragestellung, da StudentInnen im ersten Semester noch keine Differentialgeometrie kennen.

Über die **Art** der genannten Beispiele lässt sich Folgendes sagen. Dabei bedeutet „4 Beispiele“, dass die entsprechende Beispielkategorie vier Textstellen enthält. Davon können mehrere aus dem gleichen Text stammen.

Die genannten Beispielen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Tiefe. Einige Beispiele sind **unpassend**, **unverständlich** oder mathematisch **falsch** (6 Beispiele). Einige Beispiele gehen auf Grundlagen ein, die hauptsächlich in der einen Vorlesung behandelt, aber auch in der anderen eingesetzt werden, wie etwa Konzepte aus der Mengenlehre. Diese Beispiele zählen hier nicht als „richtige“ Beispiele, weil sie mathematisch gesehen keine gemeinsame Anwendung von Linearer Algebra und Analysis zeigen, sondern eine Grundlage beider Bereiche darstellen. Ohne starke Interpretation unklar ist zum Beispiel der folgende Satz: „betrachtet man beispielsweise Funktionen in der Analysis sind diese im Prinzip nur lineare Abbildungen in der Linearen Algebra“ (T3,12).

Die meisten Beispiele sind eher **oberflächliche Beispiele** (26 Beispiele). Es wird behauptet, dass Lineare Algebra und Analysis beide nötig seien, um in einem Bereich Ergebnisse erzielen zu können, sei dieser Bereich Lineare Algebra, Analysis, Numerik, Physik oder ein anderer (15 Nennungen). Es wird aber kein konkretes Beispiel gegeben. In anderen Beispielen werden nur Objekte wie die Jacobimatrix genannt, die Lineare Algebra und Analysis verbinden (5 Nennungen). Es wird aber nicht gezeigt, wie die zugehörige Theorie einfließt, d. h. die Objekte werden eher kalkulatorisch verwendet. Das Rechnen mit Matrizen benötigt jedoch nicht viel Theorie aus der Linearen Algebra. Außerdem werden die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ häufig erwähnt (6 Nennungen). Diese lassen sich strukturell-algebraisch und konstruktiv-analytisch betrachten, jedoch scheinen die StudentInnen sie eher einfach als Objekte zu betrachten, die in beiden Vorlesungen vorkommen: „Die einfachsten Vektorräume die wir kennen sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Diese zwei Vektorräume spielen nun in der Analysis wieder eine sehr große Rolle“ (T9,13-14).

Einen weiteren großen Teil der Beispiele bilden solche, bei denen **nicht klar** ist, ob der Student/die Studentin eine eher kalkulatorische Nutzung der Objekte meint oder ob er/sie auch an zugehörige Sätze/Theorie gedacht hat (11 Beispiele):

- „Das Thema Normen wird in Linearer Algebra eingeführt, aber in der Analysis verwendet und gebraucht.“ (T5,17) Sind hier Normen als Formeln gemeint, um etwas zu berechnen, oder umfasst das „Thema Normen“ auch zugehörige Theorie wie Verbindungen zu Skalarprodukten, Äquivalenz von Normen u. a. m.?

- „Oder schaut man sich mehrdimensionale Funktionen und deren Ableitungen (Stichwort: Jacobi Matrix) oder Gradienten an, so lässt sich dies mit Matrizen erklären“

(T3,13). Hie ist nicht klar, was genau sich mit Matrizen erklären lassen soll: Wie man mit der Jacobimatrix rechnet? Oder ist hier etwas Tiefergehendes gemeint?

- „Gerade bei physikalischen Fragen wird besonders deutlich, wie analytische und algebraische Fragen oft Hand in Hand gehen können. Physiker arbeiten häufig mit Vektoren um z.B. die Bewegung eines Körpers darzustellen. Nur die Richtung der Bewegung reicht aber häufig nicht, um genauere Aussagen treffen zu können. Hier kommt dann die Analysis ins Spiel. Denn auch für Vektoren gibt es Ableitungsvektoren, die mit den Hilfsmitteln der Analysis bestimmt werden können und Auskunft über die Geschwindigkeit oder Beschleunigung des bewegten Körpers zu geben" (T8,12-16). Die algebraische und die analytische Sichtweise stehen hier recht unverbunden nebeneinander, denn es wird nicht explizit deutlich gemacht, was der Mehrwert dieser zweifachen Betrachtung ist.

Ein paar Beispiele sind **tiefergehende Beispiele** (5 Beispiele), bei denen deutlich wird, dass Theorie aus einem Gebiet in ein anderes übertragen wird. Zum einen gibt es die Behauptung, dass Sätze aus der Linearen Algebra in Analysis benötigt werden (1 Nennung). Im Gegensatz zu ähnlich formulierten oberflächlichen Beispielen wird hier explizit gesagt, dass Sätze benötigt würden. Als weiteres Beispiel wird genannt, dass man bei der Herleitung der Krümmung einer Raumkurve einen Basiswechsel durchführt (2 Nennungen). Ein anderes Beispiel sind Extrema von Funktionen in mehreren Veränderlichen (1 Nennung). Dabei untersucht man die Definitheit der zugehörigen Hessematrix. Außerdem wird der Fundamentalsatz der Algebra angeführt (1 Nennung).

Insgesamt zeigt sich, dass es nur wenigen StudentInnen gelingt, ein konkretes, tiefgehendes Beispiel zu finden und so zu formulieren, dass deutlich wird, wie gut Lineare Algebra und Analysis einander ergänzen und bereichern können.

Vergleich mit den Vernetzungsaufgaben im Fragebogen

Ein Vergleich der Bearbeitungen der Vernetzungsaufgaben im Fragebogen mit dem Text des/der jeweiligen StudentIn ergibt das folgende Bild:

Diejenigen, die versuchten, die Vernetzungsaufgaben zu lösen, aber nur wenig erreichten, notierten auch in den Texten eher wenige und oberflächliche Beispiele.

- Studentin 2 behauptet, dass Lineare Algebra und Analysis einander bräuchten, findet als Beispiel aber nur die Kurvendiskussion, bei der algebraische und analytische Methoden eingesetzt würden. Im Test hat sie nur eine bzw. zwei Aufgaben bearbeitet (Vortest bzw. Nachtest) und kommt über einen Ansatz nicht hinaus.

- Studentin 6 sieht keinen großen Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis. Sie findet als passendes Beispiel nur Matrizen in Analysis 2. Ihre anderen Beispiele wie $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ stellen eher gemeinsame Grundlagen dar. Im Vor- und Nachtest ist bei jeweils einer Aufgabe eine Grundidee zu erkennen. Stattdessen schreibt sie im Vortest sogar explizit, dass sie den „Begriff Eigenvektor [...] bisher nur im Zusammenhang mit Matrizen" kenne und dass sie keinen Zusammenhang zwischen Linearität und Stetigkeit sehe.

- Studentin 9 meint, dass ein Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis schwer zu sehen sei. Sie findet als einziges Beispiel die Vektorräume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Im Vortest findet sie bei zwei Aufgaben einen Ansatz, bei einer dritten ist nur eine wenig hilfreiche Skizze notiert. Im Nachtest hat sie nur eine Aufgabe bearbeitet, bei dieser aber keinen richtigen Ansatz gefunden.

- Studentin 11 bejaht einen Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis, meint aber, ihn nicht zu kennen. Sie nennt die Matrixexponentialfunktion und Grenzwertberechnungen von Matrizen als einzige Beispiele, jedoch ohne genauere Angaben, wie Lineare Algebra und Analysis dort zusammenkommen. In beiden Tests hat sie jeweils nur eine Aufgabe bearbeitet. Im Vortest findet sie keine richtige Argumentation, im Nachtest scheint nur ein kleiner Denkfehler vorzuliegen.

- Studentin 4 behauptet zwar, dass Lineare Algebra und Analysis ohne das jeweils andere „nicht existieren“ könnten, nennt aber kein einziges konkretes Beispiel für ein Zusammenspiel von Linearer Algebra und Analysis. Im Test hat sie zwei bzw. drei Aufgaben bearbeitet, aber keine gelöst, wobei im Nachtest bei allen dreien die Grundidee stimmt.

Bei den StudentInnen, die im Text mehr oder nicht nur oberflächliche Beispiele genannt haben oder die im Fragebogen mehr Punkte erreichen konnten, ist kaum ein Zusammenhang zwischen der Bearbeitung des Fragebogens und dem Text erkennbar. Es gibt Probanden, die in ihrem Text mehrere Beispiele nennen, darunter auch ein tiefgehendes (StudentInnen 1, 3, 5, 10), die aber im Vor- und Nachtest nicht gut abschneiden (Student 3) oder bei denen sich die beiden Tests deutlich unterscheiden (Studentinnen 5 und 10). Umgekehrt ist es bei Student 7. Er hat in den Tests gut abgeschnitten, aber seine Beispiele in den Texten sind eher oberflächlich. Nur Studentin 1 kann sowohl in beiden Tests einige Punkte (7 bzw. 4) erreichen als auch im Text gute Beispiele nennen.

- Studentin 10 meint, dass sich Lineare Algebra und Analysis ergänzen. Sie findet drei Beispiele, darunter die Charakterisierung von Extremwerten über die Definitheit der Hessematrix. Ihre Tests sind recht unterschiedlich. Im Vortest kann sie nichts lösen und notiert, dass sie die Konzepte der linearen Unabhängigkeit und der Eigenvektoren nur im Zusammenhang mit Vektoren/Matrizen kenne. Im Nachtest findet sie einen Ansatz für die Aufgabe 4 zur linearen Unabhängigkeit und hat die richtige Idee bei der Linearisierung (Aufg. 3).

- Student 3 behauptet, dass der Zusammenhang schon in Linearer Algebra und Analysis zu erkennen sei, dass es aber schwierig sei, diesen Zusammenhang zu erkennen. Er findet mehrere Beispiele, darunter auch den Basiswechsel bei der Bestimmung der Krümmung von Raumkurven. Im Test jedoch versucht er insgesamt nur eine Aufgabe zu lösen, wählt aber einen nicht zielführenden Weg.

- Studentin 5 meint, dass Lineare Algebra und Analysis ohne das jeweils andere zu verstehen seien, dass sie aber ohne einander nicht existieren könnten. Sie findet mehrere Beispiele, darunter den Fundamentalsatz der Algebra. Die Tests sind recht unterschiedlich. Im Vortest bearbeitet sie zwei Aufgaben, wovon bei einer der Ansatz stimmt. Im Nachtest kann sie eine Aufgabe ganz lösen und hat bei zwei anderen eine Idee.

- Studentin 1 ist der Meinung, dass ein Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis am Anfang des Studiums schwer zu sehen sei. Sie findet aber mehrere Beispiele aus späteren Semestern, wie Matrizen in Analysis 2, Normalenvektoren an Ebenen (LinA) und Flächen (Ana) und den Basiswechsel bei der Herleitung der Krümmung von Raumkurven. Im Vortest löst sie zwei der vier Aufgaben komplett (Aufg. 2, 3) und findet bei einer dritten (Aufg. 4) einen Ansatz. Im Nachtest löst sie keine Aufgabe komplett richtig. Möglicherweise fehlte die Motivation, denn bei obigen drei Aufgaben sind wieder richtige Ansätze vorhanden, aber keine vollständige Lösung.

- Student 7 meint, dass das Wissen des einen Gebietes im anderen helfen könne. Seine Beispiele, im Wesentlichen Matrizen und Vektoren in Analysis 2, scheinen eher oberflächlich zu sein: Man sollte „sicher damit umgehen“ können. Es ist nicht deutlich, ob dies Sätze zu Eigenwerten u. a. einschließt. Im Vortest konnte er zwei Aufgaben ganz und eine fast lösen. Im Nachtest konnte er zwei Aufgaben lösen. Insgesamt liegt er damit deutlich über dem Durchschnitt.

Insgesamt lässt sich somit kein klarer Zusammenhang zwischen dem impliziten Wissen über den Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis, welches zum Lösen von mathematischen Aufgaben benötigt wird, und dem expliziten, formulierbaren Wissen über den Zusammenhang vermuten. Es wird nur deutlich, dass beide Aufgaben den StudentInnen schwer fielen.

Zusammenfassung und Diskussion

Anhand der Texte der StudentInnen sollte analysiert werden, ob die StudentInnen grundsätzlich Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis erkennen und durch welche Beispiele sie solche Verbindungen illustrieren. Die Analyse zeigt, dass alle StudentInnen das Vorhandensein eines Zusammenhangs zwischen Linearer Algebra und Analysis bestätigen. Allerdings sind sich die meisten einig, dass dieser Zusammenhang schwer zu sehen sei. Dementsprechend fällt es ihnen schwer, gute (tiefgehende) Beispiele, an denen man sehen kann, wie Lineare Algebra und Analysis einander brauchen und ergänzen, zu finden und zu beschreiben. Viele Beispiele bleiben vage. Ein großer Teil der Beispiele kommt aus der mehrdimensionalen Analysis, in der Matrizen natürlicherweise auftreten. Jedoch gehen die meisten Beispiele nicht über eine Nennung von Matrizen hinaus, obwohl auch weiterführende Konzepte wie Invertierbarkeit und Definitheit in der mehrdimensionalen Analysis eine Rolle spielen. Offen bleibt auch die Frage, warum einige wichtige Themen in den Texten nicht vorkommen, und insbesondere, warum die Jacobi-Matrix anders als bei Halverscheid und Müller 2013 von niemandem explizit als Linearisierung beschrieben wird.

Dass die StudentInnen einen Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis nicht verneinten, aber doch als schwierig zu erkennen einstuften, kann verschiedene Gründe haben. Möglicherweise stimmen sie dem Vorhandensein von Zusammenhängen zwar grundsätzlich zu, hatten aber noch nie bewusst darüber nachgedacht und konnten deshalb nicht sofort mit Beispielen aufwarten. Möglich ist aber auch, dass die Zustimmung teilweise durch die Aufgabenstellung hervorgerufen wurde und dass manche StudentInnen weniger Verbindungen sehen, als ihr Text vermuten lässt.

Im Vergleich der Texte mit den Aufgaben im Fragebogen zeigt sich kein klarer Zusammenhang, d. h. ein Text mit guten Beispielen lässt nicht auf gelöste Vernetzungsaufgaben im Fragebogen schließen oder umgekehrt. Es deutet sich höchstens an, dass, wer im Fragebogen keine Aufgabe ansatzweise lösen kann, im Text nur wenige und nur oberflächliche Beispiele nennt. Es können hier keine begründeten Hypothesen generiert werden.

Insgesamt wird deutlich, dass es den StudentInnen schwer fällt, Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis zu benennen und zu erklären. Dieses Ergebnis stützt die dieser Studie zugrunde liegende Vermutung, dass die StudentInnen Schwierigkeiten mit dem Vernetzen der Gebiete haben. Hierfür kann es verschiedene Gründe geben. Wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, speichern die StudentInnen das Wissen und die Erfahrungen aus der Linearen

Algebra und der Analysis vermutlich in unterschiedlichen subjektiven Erfahrungsbereichen ab, die sie kaum gleichzeitig aktivieren können. Dazu bedürfte es der Erschaffung eines neuen Erfahrungsbereiches, der beide verbindet (Bauersfeld 1983, S. 35). Ein solcher verbindender Erfahrungsbereich scheint bei den StudentInnen durchaus im Aufbau zu sein, da sie gewisse Zusammenhänge beschreiben können, bedarf aber dennoch einer weiteren Stärkung. Gelegenheiten zur Entwicklung und zum Ausbau eines verbindenden Erfahrungsbereiches könnten schon in den Vorlesungen zur Linearen Algebra und Analysis geboten werden, indem dort Verbindungen in der Vorlesung und in den Übungsaufgaben explizit thematisiert werden.

Ein weiterer möglicher Grund für die Schwierigkeiten, Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis zu beschreiben, könnte darin liegen, dass die StudentInnen es aus dem Mathematikstudium nicht gewohnt sind, schriftliche Reflexionen zu verfassen. Zudem waren nicht alle StudentInnen motiviert, sich mit der Aufgabe Mühe zu geben: Aus der Evaluation der Veranstaltung geht hervor, dass es für die StudentInnen eher eine lästige Zusatzaufgabe war, den Text zu schreiben. Möglicherweise ist die Oberflächlichkeit und Undifferenziertheit der Beispiele also zumindest teilweise auf mangelnde Motivation und fehlende Übung zurückzuführen.

Was die StudentInnen selbst als Gründe dafür ansehen, warum ihnen das Vernetzen schwer fällt, wurde anhand der schriftlichen Reflexion aus dem Wintersemester 2018/2019 untersucht. Dies wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

4.4. Schriftliche Reflexion aus dem WS 18/19

Mit der Analyse der schriftlichen Reflexionen aus dem Wintersemester 2018/2019 wird untersucht, bei welchen Themen aus dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis besonders gut zu erkennen sind. Außerdem wird untersucht, was aus Sicht der StudentInnen Gründe dafür sein könnten, dass das Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis ihnen schwer fällt und was ihnen beim Erkennen von Verbindungen geholfen hat.

4.4.1. Methoden

Entstehung und Auswahl des Materials, ProbandInnen: Die ProbandInnen der Studie waren die 16 TeilnehmerInnen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ im Wintersemester 2018/2019. Im Seminar wurden Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis nicht systematisch thematisiert, aber in der Differentialgeometrie werden häufig Konzepte aus beiden Gebieten gleichzeitig verwendet. Fünf der TeilnehmerInnen waren männlich, elf weiblich. Alle waren LehramtsstudentInnen nach GymPO und im 8. bis 12. Semester, wobei die meisten (12) im 9. Semester waren. Für die Teilnahme an der Studie bekamen die ProbandInnen einen Gutschein im Wert von 5 €[12]. Die Studie wurde von der Ethikkommission der Fakultät begutachtet und genehmigt.

Im Rahmen des Seminars reflektierten die TeilnehmerInnen schriftlich, welche Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis ihnen im Seminar oder in anderen Veranstaltungen aufgefallen waren. Für eine Beschreibung des Seminars siehe Abschnitt 2.3.

Als Anregung zum Nachdenken über Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis bekamen die TeilnehmerInnen die folgende Aufgabe gestellt:

[12] Der Gutschein wurde für die Teilnahme an dieser Studie und der Studie zu Überzeugungen über Mathematik, siehe Kapitel 3.3, ausgegeben.

> Damit Wissen wirklich nutzbar wird, ist es nötig, verschiedene „Wissensbits“ miteinander zu vernetzen. Dies ist auch in der Arbeit mit SchülerInnen wichtig, da von ihnen erwartet wird, Wissen aus einem Gebiet in einem anderen anwenden zu können. Im Rahmen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ haben Sie selbst die Gelegenheit, dieses Vernetzen von Wissen zu erleben und zu reflektieren.
>
> Haben Sie sich beispielsweise schon einmal gefragt, ob Lineare Algebra und Analysis eigentlich etwas miteinander zu tun haben? In den entsprechenden Vorlesungen wird nicht immer explizit auf Verbindungen hingewiesen. In späteren Vorlesungen braucht man dann aber doch häufig Objekte und Konzepte aus beiden Gebieten gleichzeitig.
>
> Sind Ihnen bei den bisherigen Seminarthemen Stellen aufgefallen, an denen LinA und Ana zusammenkommen?
>
> Hilft Ihnen das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen? Wenn ja, wie? Wenn nein, was würde Ihnen stattdessen möglicherweise helfen?

Die TeilnehmerInnen hatten zwei Wochen Zeit, die Aufgabe zu bearbeiten. Sie bekamen ein kurzes Feedback zu ihrem Text. Es gab keine Note für diese Aufgabe. Die TeilnehmerInnen konnten selbst entscheiden, ob sie ihren Text für diese Forschung zur Verfügung stellen oder nicht. Da alle TeilnehmerInnen zustimmten, wurden alle 16 Texte als Auswahleinheiten in die Analyse aufgenommen. Als Analyseeinheit wurde jeweils der gesamte Text gewählt, das heißt, die Auswahleinheiten und Analyseeinheiten sind identisch.

Entwicklung des Kategoriensystems: Untersucht wurde, welche bei Themen des Seminars die StudentInnen Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis erkennen sowie was aus Sicht der StudentInnen Gründe dafür sein könnten, dass das Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis ihnen schwer fällt und was ihnen beim Erkennen von Verbindungen geholfen hat. Dazu wurden die Texte der StudentInnen mit einem Kategoriensystem, das aus zwei Hauptkategorien besteht, codiert. Eine Hauptkategorie umfasst die Themen, die die StudentInnen als Beispiele benennen, bei denen Lineare Algebra und Analysis zusammenkommen oder bei denen sie einen Zusammenhang erkannt haben. Die andere Hauptkategorie umfasst Aussagen zu Gründen für Schwierigkeiten beim Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis sowie Aussagen zu möglichen Hilfen. Das endgültige Kategoriensystem ist in Anhang 4.4.1 beschrieben.

Jede Hauptkategorie enthält mehrere Unterkategorien. Im Falle der Hauptkategorie „Themen“ sind dies die verschiedenen Themen, die im Seminar bearbeitet wurden, sowie themenübergreifende Beispiele und Beispiele/Themen aus anderen Veranstaltungen. Mit Ausnahme der Kategorie der themenübergreifenden Beispiele wurden die Kategorien schon vor der Analyse der Texte entwickelt. Die Kategorie der themenübergreifenden Beispiele stellte sich während der Textanalyse als notwendig heraus, da einige Beispiele keinem bestimmten Thema zugeordnet werden konnten.

Die Hauptkategorie „Gründe und Hilfen“ enthält die Unterkategorie „Gründe“, in der alle Aussagen zu möglichen Gründen für Schwierigkeiten beim Vernetzen von Linearer Algebra gesammelt werden, und mehrere Unterkategorien dazu, bei welcher Gelegenheit oder wodurch ein Student/eine Studentin Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis erkannt hat. Die Kategorisierung in „Gründe“ und „Hilfen“ war a priori durch die Forschungsfragen vorgegeben. Die anderen Unterkategorien zu „Hilfen“ wurden induktiv am Material entwickelt.

Ich codierte alle Texte selbst und entwickelte dabei wie beschrieben das Kategoriensystem. Anschließend wurde ein Codierertraining durchgeführt. Eine studentische Hilfskraft (im M. Sc. Mathematik) wurde ins Codieren und ins Kategoriensystem eingewiesen. Zwei Texte nutzten wir, um die Klarheit der Kategoriedefinitionen zu überprüfen. Daraufhin wurden die Definitionen der Kategorien „Problemlösen“ und „Vorschlag“ präzisiert. Anschließend codierte die Hilfskraft weitere sechs Texte, also insgesamt die Hälfte des Materials. Wir übersahen beide etwa 3 bis 4 Prozent der zu codierenden Textstellen. Weitere knapp 10% der letztlich akzeptierten Codierungen hatten wir unterschiedlich oder nicht codiert. Diese ließen sich immer nach kurzen Diskussionen konsensuell vereinheitlichen.

Zum Codieren wurde die Software MaxQDA verwendet.

Das Kategoriensystem: Das Kategoriensystem besteht aus den beiden Hauptkategorien „Themen“ und „Gründe und Hilfen“. Es folgt eine kurze Beschreibung der einzelnen Kategorien. Die genauen Definitionen der Kategorien mit Ankerbeispielen sind in Anhang A.10 verzeichnet.

Die Kategorie „Themen“ enthält acht Unterkategorien:

- Kurvenkrümmung: Der Student bzw. die Studentin spricht das Thema „Krümmung ebener Kurven“ an.
- Raumkurven: Der Student bzw. die Studentin spricht das Thema „Krümmung von Raumkurven“ an.
- Flächeninhalt: Der Student bzw. die Studentin spricht das Thema „Flächeninhalt gekrümmter Flächen“ an.
- Flächenkrümmung: Der Student bzw. die Studentin spricht das Thema „Krümmung von Flächen“ an.
- Abstände: Der Student bzw. die Studentin spricht das Thema „Abstände auf gekrümmten Flächen“ an.
- Rotationsflächen: Der Student bzw. die Studentin spricht das Thema „Rotationsflächen“ an.
- themenübergreifend: Der Student bzw. die Studentin nennt Beispiele für Objekte, Konzepte oder Verfahren aus Linearer Algebra und Analysis, die im Seminar verwendet wurden, ohne sie einem Thema zuzuordnen.
- andere Bereiche: Der Student bzw. die Studentin nennt andere Bereiche als das Seminar, in denen er/sie Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis erkannt hat.

Die Kategorie „Gründe und Hilfen“ enthält neun Unterkategorien:

- Gründe für Schwierigkeiten: Der Student bzw. die Studentin benennt einen Grund, weshalb das Erkennen von Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis schwer fallen könnte.
- beides in einer Veranstaltung: Der Student bzw. die Studentin schreibt, dass er/sie in einer Veranstaltung, die nicht Lineare Algebra oder Analysis war, bemerkt hat, dass Lineare Algebra und Analysis verwendet wurden.

- Ana 2 braucht LinA: Der Student bzw. die Studentin schreibt, dass ihm/ihr in Analysis 2 auffiel, dass dort Inhalte aus der Linearen Algebra verwendet wurden.
- Problemlösung: Der Student bzw. die Studentin schreibt, dass zur Lösung eines Problems Konzepte oder Verfahren aus der Linearen Algebra und Analysis nötig waren.
- Rückblick: Der Student bzw. die Studentin schreibt, dass er/sie im Rückblick oder bei Überlegungen auf einer Metaebene Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis erkannt hat.
- Wiederholen: Der Student bzw. die Studentin schreibt, dass das Wiederholen und vertiefte Verstehen von Inhalten früherer Veranstaltungen dazu beiträgt, Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis zu erkennen.
- Hinweise: Der Student bzw. die Studentin schreibt, durch Hinweise von DozentInnen oder KommilitonInnen auf Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis aufmerksam geworden zu sein.
- gleiche Grundlagen: Der Student bzw. die Studentin sieht in gleichen Grundlagen wie Mengenlehre und Logik eine Verbindung zwischen Linearer Algebra und Analysis.
- Vorschlag: Der Student bzw. die Studentin macht einen Vorschlag, wie das Erkennen von Verbindungen im Seminar in Zukunft erleichtert werden könnte.

4.4.2. Ergebnisse und Diskussion

Sichtweisen auf Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis

Die Reflexionen der StudentInnen deuten darauf hin, dass sie Lineare Algebra und Analysis unterschiedlich stark vernetzt wahrnehmen. Manche StudentInnen finden es schwierig, flüssig zwischen den Bereichen hin- und herzuwechseln. Beispielsweise schreibt Student 15 von einer „Mauer zwischen den ‚Welten'" (T15,18[13]), dass er häufig isoliert nur innerhalb der Linearen Algebra oder der Analysis denke und dass „die Trennung in [s]einem Kopf sehr stark verankert" (T15,10) sei. Einen Grund dafür sieht er in der Schulzeit, in der Lineare Algebra (Analytische Geometrie) und Analysis strikt getrennt unterrichtet worden seien, was sich auch in unterschiedlichen Schulbüchern manifestierte. Diese Trennung der Gebiete wurde im ersten Semester durch die Vorlesungen fortgesetzt. Anders als anderen StudentInnen scheint ihm die mehrdimensionale Analysis nur wenig dabei geholfen zu haben, flexibel zwischen den Bereichen wechseln zu können. Vielmehr scheint in Analysis 2 eher das Gefühl geweckt worden zu sein, dass Konzepte und Objekte zusammen verwendet werden, die nicht zusammengehören. Auch im Seminar gab es einen solchen Moment, den er aber auflösen konnte: „Es hat mich z.B. im ersten Moment gestört und gewundert, dass im Taylerpolynom eine mehrdimensionale Matrix vorkommt. Erst nach der genaueren Betrachtung erschien es mir dann als logisch und verständlich. " (T15,11-12). Als hilfreich benennt er die Gruppenarbeiten, weil in den Diskussionen mit den Kommilitonen Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis aufgezeigt würden und er dadurch die Gelegenheit habe, die Ideen zu durchdenken.

Bei anderen StudentInnen änderte sich im Laufe des Studiums die Wahrnehmung der Gebiete von getrennten zu vernetzten Gebieten. Beispielsweise beginnt Student 14 seine Reflexion sehr ähnlich wie Student 15. Er habe den „Eindruck [gehabt], dass man nur eines von

[13]„T15,18" bedeutet „Text 15, Zeile/Satz 18".

beiden gleichzeitig ernsthaft betreiben [könne]: LinA oder Ana“ (T14,6) und begründet dies ebenfalls mit der Trennung der Themen in der Schule. Ihm scheint jedoch die Verwendung von Objekten und Konzepten aus der Linearen Algebra in der mehrdimensionalen Analysis Verbindungen der Bereiche aufgezeigt zu haben, die in weiterführenden Vorlesungen „noch klarer“ (T14,15) geworden seien. Als hilfreich beschreibt er den offenen Zugang im Seminar, bei dem er in seinen Skripten der Linearen Algebra und der Analysis nach für die Lösung der Probleme Nützlichem gesucht habe und tatsächlich aus beiden Gebieten einiges habe anwenden müssen. Außerdem seien für ihn Tipps von den Dozentinnen oder Kommilitonen hilfreich gewesen, wenn er oder seine Gruppe zu sehr in einem der beiden Bereiche verharrte und die Lösungsmöglichkeiten im anderen nicht wahrnahm.

Für andere StudentInnen sind die Grenzen zwischen den Themen weniger wichtig oder sichtbar. So schreibt etwa Studentin 3, dass ihr in Analysis 2, das sie vor der Linearen Algebra hörte, sehr deutlich geworden sei, dass es Verbindungen zwischen den Gebieten gebe, weil ihr gewisse Voraussetzungen aus der Linearen Algebra fehlten. In ihrer derzeitigen Wahrnehmung spielen die Grenzen zwischen den Gebieten keine große Rolle: „Die Grenzen zwischen den beiden Bereichen verschwimmen für mich häufig, vielleicht gerade auch durch andere Vorlesungen, in denen die Verbindungen offensichtlich wurden“ (T3,9).

Eine weitere Sichtweise wird bei Studentin 8 deutlich. Sie scheint nicht unbedingt eine inhaltliche, aber eine normative Trennung zwischen den Gebieten zu sehen. Sie schreibt, dass es für sie „verwunderlich“ gewesen sei, dass sie „plötzlich auf der Ebene der Linearen Algebra mit analytischen Methoden weiterrechnen ‚durfte‘“ (T8,4), denn es habe „an der Universität einen Anschein, dass diese Themengebiete ganz strikt voneinander getrennt werden ‚müssen‘“ (T8,9).

Die vier geschilderten Fälle zeigen eine große Bandbreite der Wahrnehmung von Vernetzungen von oder Grenzen zwischen Linearer Algebra und Analysis auf. Manche StudentInnen nehmen eine natürliche oder normative Trennung der Gebiete wahr, andere sehen einige Verbindungen und nehmen beim Problemlösen gar keine Grenzen zwischen den Gebieten wahr, da sie sich je nach Bedarf beider bedienen. Eine genaue Charakterisierung von „Vernetzungstypen“ ist auf der Grundlage des vorliegenden Materials nicht möglich, da es dafür nicht umfassend genug ist. Jedoch lässt sich für die Lehre die Erkenntnis gewinnen, dass es sehr unterschiedliche Sichtweisen auf Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis gibt, die in Lehrveranstaltungen adressiert werden sollten. Beispielsweise könnten Verbindungen in Vorlesungen explizit angesprochen werden und das gleichzeitige Arbeiten mit Konzepten aus der Linearen Algebra und der Analysis kann in Übungsaufgaben eingefordert und auch explizit benannt werden. Dadurch könnten die StudentInnen, die die Gebiete als getrennt wahrnehmen, darauf aufmerksam werden, dass ihre Sichtweise nicht der des Dozenten bzw. der Dozentin entspricht. Durch die Übungsaufgaben hätten zudem alle StudentInnen die Möglichkeit, Vernetzungen zwischen den Gebieten auszubilden und zu verstärken, denn „Netzwerke werden beim Durcharbeiten flexibilisiert, beweglich und transparent gemacht, damit Anwendungen und Transfer möglich werden“ (Drollinger-Vetter 2011, S. 167-168).

Im Folgenden werden die Gründe, die StudentInnen dafür nennen, dass die Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis schwer fallen kann, aufgeführt.

Gründe für Schwierigkeiten

Acht der StudentInnen nennen Gründe, warum es für sie schwierig war oder ist, Lineare Algebra und Analysis zu vernetzen, siehe Tabelle 4.7. Am häufigsten genannt wurde, dass in den Grundvorlesungen kaum oder gar nicht auf die jeweils andere Vorlesung verwiesen

Grund	genannt von
In den Vorlesungen Lineare Algebra und Analysis wurde kaum oder gar nicht auf die andere Vorlesung verwiesen.	3 Personen
Die Themen werden in zwei Vorlesungen behandelt und nicht in einer.	2 Personen
Schon in der Schule wurden Lineare Algebra (Analytische Geometrie) und Analysis getrennt voneinander unterrichtet.	2 Personen
Die Inhalte der Linearen Algebra und der Analysis scheinen sehr unterschiedlicher Natur zu sein.	2 Personen
Die StudentInnen suchen nicht aktiv nach Zusammenhängen.	2 Personen
Lineare Algebra und Analysis können unabhängig voneinander gehört werden.	1 Person
Die Vorlesungen nacheinander statt parallel zu hören, erschwert es, Verbindungen zu erkennen.	1 Person
Andere Personen sagten dem Studenten/der Studentin, dass die Vorlesungen nichts miteinander zu tun hätten.	1 Person
Weiterführende Veranstaltungen nehmen nur auf eine der beiden Grundvorlesungen Bezug.	1 Person

Tabelle 4.7.: Von StudentInnen genannte Gründe für Schwierigkeiten beim Vernetzen der Vorlesungen Lineare Algebra und Analysis

worden sei. Niemand berichtet das Gegenteil. Diese Behauptung erscheint für Analysis 1 und Lineare Algebra 1 plausibel, da auch entsprechende Lehrbücher selten auf das jeweils andere Gebiet verweisen. Verbindungen werden eher allgemein im Vorwort angesprochen.[14] Für die Analysis 2 jedoch ist das nicht möglich, da dort Konzepte aus der Linearen Algebra benötigt werden.

Zwei Studenten berichten, dass die Themen schon in der Schule getrennt voneinander unterrichtet worden seien, was für einen der beiden auch daran sichtbar wurde, dass es für jedes Thema ein eigenes Buch gab. Diese Ansicht wird von der Schulbuchanalyse von Brinkmann (2002) unterstützt, derzufolge die Inhalte in den drei Bereichen Analysis, Lineare Algebra/Vektorgeometrie und Stochastik weitgehend linear angeordnet sind. „Querverbindungen zwischen den einzelnen Strängen könnten dabei wesentlich häufiger dargestellt werden, als es der Fall ist.“ (Brinkmann 2002, S. 111) Ob in neueren Schulbüchern mehr Vernetzungen dargestellt werden, wie es im neuen Bildungsplan gefordert wird (vgl. z. B. Blum, Vogel, Drüke-Noe und Roppelt 2015, S. 174), müsste eine neuere Schulbuchanalyse untersuchen.

Die Aussagen zweier Studenten deuten darauf hin, dass sie nicht aktiv nach Zusammenhängen suchen: „Bis jetzt liefen die Konzepte der Linearen Algebra und Analysis beiläufig mit, ohne dass es mir direkt aufgefallen wäre“ (T13,30). Vier StudentInnen nennen organisatorische Gründe wie, dass die beiden Vorlesungen getrennt voneinander gehört werden könnten. Eine Studentin schreibt, dass es das Vernetzen erschwert, wenn man die Grundvorlesungen nacheinander statt parallel hört. Andere StudentInnen berichten jedoch von der gegenteiligen Erfahrung, weil ihnen dann entweder etwas fehlte oder weil im zweiten Jahr etwas behandelt wurde, das sie schon im ersten Jahr gelernt hatten.

[14] Beispielsweise geht Bosch (2014) im Vorwort darauf ein, dass sich Lineare Algebra und Analysis ergänzen (S. V) und erwähnt Analysis bei den trigonometrischen Funktionen und beim Beispiel, dass das Integral auf dem Raum der Polynome ein Skalarprodukt darstellt. Fischer (2014) führt die Vorstellung der Ableitung als Linearisierung als motivierendes Beispiel in der Einleitung an (S. XIII) und nennt die Lineare Algebra ein Hilfsmittel der Analysis (S. IX).

Eine Studentin erlebte weiterführende Veranstaltungen als stets auf nur einer der Grundvorlesungen basierend und interpretierte dies als Hinweis darauf, dass die Grundvorlesungen völlig getrennt voneinander seien. Andere StudentInnen berichten jedoch auch hier von gegenteiligen Erfahrungen und mit der Pflichtveranstaltung Numerik hören alle StudentInnen eine Vorlesung, die auf Linearer Algebra und Analysis aufbaut.[15]

Aus den von den StudentInnen genannten Gründen für Schwierigkeiten beim Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis lassen sich auch mögliche Hilfen ableiten. Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis könnten in den Grundvorlesungen und auch in weiterführenden Vorlesungen an Beispielen thematisiert werden. Die Vernetzung der Inhalte sollte idealerweise auch schon in der Schule vorangetrieben werden. Auch das aktive, selbstständige Suchen nach Zusammenhängen innerhalb eines Gebietes und zwischen Gebieten könnte zum Erkennen von Zusammenhängen beitragen. Ein Kurs zum mathematischen Arbeiten könnte den StudentInnen helfen, eine solch aktive Rolle beim Vernetzen einzunehmen.

Die organisatorischen Gründe lassen sich hingegen kaum beseitigen. Zwar könnte es den StudentInnen helfen, Lineare Algebra und Analysis weniger als strikt getrennte Gebiete wahrzunehmen, wenn beides in einer Vorlesung gelehrt würde, doch könnte dies wieder andere Nachteile mit sich bringen, beispielsweise dass die Analysis dann als Hauptgebiet betrachtet wird und die Lineare Algebra als „Hilfsmittel“ etwas untergeht.

Weitere Hilfen zum Vernetzen der Gebiete wurden von den StudentInnen selbst genannt und werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

Hilfen zum Vernetzen

Die StudentInnen nennen verschiedene Ereignisse und Tätigkeiten, die ihnen dabei geholfen haben, Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis zu erkennen. Fünf StudentInnen berichten, dass ihnen in Analysis 2 klar geworden sei, dass es Verbindungen zwischen der Linearen Algebra und der Analysis gebe, weil dort natürlicherweise Matrizen auftauchten und beispielsweise Eigenwerte bestimmt werden mussten. Besonders eindrücklich scheint dies zwei Studentinnen gewesen zu sein, die zuerst Analysis und dann Lineare Algebra belegten. Die eine schreibt, dass ihr in Analysis 2 die Inhalte der Linearen Algebra fehlten, die andere, dass sich in der Linearen Algebra Inhalte aus Analysis wiederholten.

Zwölf StudentInnen schreiben explizit, dass bestimmte Veranstaltungen auf beiden Grundvorlesungen aufbauten und dass diese Veranstaltungen dazu beigetragen hätten, Lineare Algebra und Analysis zu vernetzen. Genannt werden die Vorlesungen Geometrie, Analysis 4, Differentialgleichungen, Stochastik und diskrete Mathematik und die Seminare Zahlentheorie und Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen. Drei Personen verweisen unbestimmt auf „weiterführende Vorlesungen“, in denen Lineare Algebra und Analysis zusammengekommen seien. Außerdem schließen vier Personen aus der Tatsache, dass Lineare Algebra und Analysis gemeinsame Grundlagen (Mengenlehre, Strukturen wie Gruppen. . .) haben, dass es eine Verbindung zwischen ihnen geben müsse. Ein Student sieht darüber hinaus in „Metainhalten“ wie Beweistechniken, die in beiden Vorlesungen gebraucht werden, eine Verbindung.

Acht StudentInnen schreiben, dass sie einige Probleme, die beim Bearbeiten der Aufgaben im Seminar auftraten, nur hätten lösen können, indem sie Konzepte oder „Tricks“ aus beiden Grundveranstaltungen verwendet hätten. Sieben Personen nennen das Zurückblicken als besonders hilfreich für das Vernetzen. Dabei beziehen sich manche auf das Schreiben der Skriptbeiträge, weil sie dafür die von ihnen verwendeten Definitionen und Sätze in Skripten der Grundvorlesungen nachschlugen, wobei ihnen bewusst wurde, was sie aus welcher

[15] Es ist nicht bekannt, ob die Studentin Numerik zum Zeitpunkt der Untersuchung schon besucht hatte.

Vorlesung entnommen hatten. Andere schreiben, dass ihnen die Reflexion helfe, Verbindungen zu erkennen und zwei sprechen unspezifischer davon, dass das Zurückblicken helfe, ohne deutlich zu machen, wodurch das Zurückblicken angeregt wurde.

Fünf StudentInnen halten das im Seminar notwendige Wiederholen von Inhalten der Grundvorlesungen für hilfreich, um Verbindungen zwischen ihnen zu entdecken. Durch das Wiederholen und Anwenden im Seminar hätten sie die Inhalte besser verstanden und könnten dadurch leichter Verbindungen erkennen. Drei StudentInnen schreiben, dass ihnen die Gespräche mit KommilitonInnen oder DozentInnen im Seminar geholfen hätten, ihr bei bestimmten Problemen auf einen Bereich eingeschränktes Denken zu erweitern und auch den anderen Bereich in Betracht zu ziehen. Ein Student erwähnt, dass es auch in anderen Veranstaltungen Hinweise der DozentInnen auf Verbindungen gegeben habe, die er aber schnell wieder vergessen habe.

Die Vorschläge der StudentInnen, wie das Erkennen von Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ erleichtert werden könnte, zielen alle auf eine Explizierung von Verbindungen ab, beispielsweise durch graphische Hervorhebungen im Skript oder mündliche Hinweise während der Vorträge.

Aus den Aussagen der StudentInnen lassen sich einige Ideen ableiten, wie Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis unterstützt werden könnte. Eine Möglichkeit ist das schon in vorhergehenden Abschnitten erwähnte, explizite Thematisieren von Zusammenhängen durch die DozentInnen der Grundvorlesungen und der weiterführenden Vorlesungen. Besonders in Analysis 2 werden Verbindungen deutlich und können besprochen werden.

Eine weitere, ebenfalls schon angesprochene Möglichkeit bieten Aufgaben, deren Bearbeitung Konzepte aus beiden Bereichen benötigt, denn mehreren StudentInnen fiel auf, dass sie gewisse Probleme nicht mit dem Wissen aus nur einem der beiden Bereiche lösen konnten. Gruppenarbeiten können den Effekt verstärken. Manche StudentInnen notierten explizit, dass Gespräche mit ihren KommilitonInnen ihnen geholfen hätten, nicht nur innerhalb des einen Gebietes nach Lösungen zu suchen. Dies lässt sich mit den Texten der Studentinnen 6 und 7 illustrieren: Sie gehörten im Seminar der gleichen Gruppe an, bearbeiteten also gemeinsam die gleichen Aufgaben. Studentin 6 nahm die Themen als algebraische Themen wahr, bei denen analytische Methoden verwendet werden mussten. Im Gegensatz dazu sah Studentin 7 die Themen als generell analytisch an, wobei manche Probleme mit Methoden der Linearen Algebra gelöst werden mussten. Wenn verschiedene Gruppenmitglieder das gleiche Problem aus so verschiedenen Blickwinkeln betrachten, können sie sich gegenseitig gut helfen, den Blickwinkel zu erweitern und dabei Zusammenhänge wahrzunehmen.

Eine weitere Möglichkeit ist das Reflektieren. Dies liegt zum Teil in der Verantwortung der StudentInnen selbst und könnte durch einen Kurs zum mathematischen Arbeiten gefördert werden. Das Erkennen von Zusammenhängen (ob zwischen Linearer Algebra und Analysis oder innerhalb eines Gebietes) ließe sich jedoch auch direkt in eine Lehrveranstaltung einbinden, beispielsweise durch die Arbeit mit Concept Maps oder Ähnlichem (siehe z. B. Borys und Brinkmann 2013).

Die aktive, vernetzende Auseinandersetzung der StudentInnen mit Vorlesungsinhalten kann außerdem durch die Art der Prüfung und der Prüfungsaufgaben beeinflusst werden. Mehrere StudentInnen empfanden das Wiederholen der Inhalte der Grundvorlesungen als hilfreich für das Vernetzen. Ein ähnlicher Effekt könnte sich einstellen, wenn die StudentInnen die Inhalte für eine Prüfung wie das Staatsexamen oder die mündliche Prüfung zum Modul „Grundlagen der Mathematik“ wiederholen.[16]

[16]In dieser Prüfung im Bachelor of Education werden Analysis 1, Analysis 2 und Lineare Algebra 1 geprüft,

In der Literatur finden sich weitere konkrete Konzeptionen von Kursen oder Aufgaben, die beim Vernetzen helfen. Beispielsweise beschreiben Gil, Zamudio-Orozco und King (2019) einen Kurs, der StudentInnen des Lehramts beim Vernetzen schulrelevanter Konzepte unterstützte. Die StudentInnen lösten Probleme auf verschiedenen Wegen und diskutierten, welche „große mathematische Idee“ (S. 4, *big mathematical idea*) sie verband. Nordheimer (2009) stellt die Methode der kapitelübergreifenden Rückschau vor, bei der SchülerInnen kapitelübergreifende Aufgaben entwickeln. Dieses Format ließe sich auch in der Lehramtsausbildung an der Universität einsetzen.

Bei welchen Themen erkennen StudentInnen Verbindungen?

Die seminarbezogenen Beispiele der StudentInnen stammen bis auf eines aus den ersten drei Themenblöcken, siehe Tabelle 4.8. Der vierte Themenblock wurde am Tag der Abgabe der schriftlichen Reflexion begonnen und konnte deshalb kaum in die Reflexionen einfließen. Alle Themen der ersten drei Blöcke werden mehrfach genannt. Auffällig ist, dass die StudentInnen fast nur Beispiele aus Themen wählen, die sie mit ihrer Gruppe selbst bearbeitet haben. Nur drei StudentInnen nennen jeweils ein Beispiel zu einem Thema anderer Gruppen[17]. Dies deutet darauf hin, dass die StudentInnen ein Zusammenspiel von Linearer Algebra und Analysis besser erkennen, wenn sie ein Thema selbst bearbeiten, als wenn sie nur einen Vortrag dazu hören. Dies ist durchaus nachvollziehbar, da in den Vorträgen einige Details weggelassen werden mussten, um den Zeitrahmen einzuhalten. Außerdem setzen sich die TeilnehmerInnen mit den Themen, die sie in einem Vortrag hören, weniger intensiv auseinander als mit ihren eigenen. Zudem haben sie bei den Vorträgen auch nicht die Möglichkeit, in den Skripten der Grundvorlesungen nachzuschauen, was aus welcher Vorlesung verwendet wurde, wie sie es teilweise bei ihren eigenen Themen taten.

Thema	**genannt von**
Krümmung ebener Kurven	11 Personen
Krümmung von Raumkurven	6 Personen
Flächeninhalt gekrümmter Flächen	6 Personen
Krümmung von Flächen	4 Personen
Abstände auf gekrümmten Flächen	5 Personen
Rotationsflächen	1 Person
Beispiele, die nicht auf ein bestimmtes Thema bezogen werden	10 Personen
Beispiele aus anderen Veranstaltungen	9 Personen

Tabelle 4.8.: Themen, aus denen Beispiele für ein Zusammentreffen von Linearer Algebra und Analysis gewählt werden

Acht StudentInnen geben Beispiele an, die sie keinem bestimmten Thema zuordnen. Sie zählen meist einige Objekte, Konzepte und Verfahren aus den beiden Grundvorlesungen auf, die sie im Seminar verwendet haben, ohne zu sagen bei welchem Thema.

Alle StudentInnen geben mindestens ein Beispiel aus dem Seminar an, viele sogar drei oder mehr. Neun StudentInnen nennen zudem ein konkretes Beispiel aus anderen Veranstaltungen. Dabei handelt es sich zumeist um Beispiele aus der mehrdimensionalen Analysis sowie einmal um den Fundamentalsatz der Algebra, den die Studentin in der komplexen Analysis

siehe *Modulhandbuch. Mathematik. Bachelor of Education. Lehramt Gymnasium* (2020).

[17] „Krümmung ebener Kurven“ wurde von vier Gruppen mit je vier Personen bearbeitet, „Rotationsflächen“ von einer Gruppe und alle anderen genannten von zwei Gruppen.

kennen lernte. Ein Student bemerkt außerdem, dass das Konzept der Orthogonalität zusammen mit dem des Skalarprodukts in der Linearen Algebra und der Analysis eine wichtige Rolle spielt. Neun StudentInnen nennen andere Bereiche als das Seminar, ohne ein konkretes Beispiel aus dem jeweiligen Bereich zu beschreiben. Die genannten Bereiche sind Zahlentheorie, Geometrie, Differentialgleichungen, Stochastik, mehrdimensionale Analysis und diskrete Mathematik.

Die Analyse zeigt, dass die StudentInnen bei allen Themen der ersten drei Blöcke des Seminars Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis erkennen können. Am wenigsten zu erwarten war dies beim Thema „Krümmung ebener Kurven“, da bei der Untersuchung von Kurven im $\mathbb{R}^2$ Konzepte und Methoden aus der Linearen Algebra weniger zum Tragen kommen als bei Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$.

Die Themen sind also insgesamt eine gute Wahl für eine Veranstaltung, die die Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis bei den StudentInnen stärken soll. Welche Zusammenhänge die StudentInnen von alleine bewusst wahrgenommen haben und welche ihnen durch die schriftliche Reflexion bewusst wurden, lässt sich mit den vorhandenen Daten nicht untersuchen. Vermutlich würde das explizite Ansprechen solcher Zusammenhänge auch hier den StudentInnen helfen (vgl. z. B. auch Weinberg 2001, S. 26: „we cannot assume that the connection will be made without some intervention.“).

Viele der von den StudentInnen im Wintersemester 18/19 genannten Beispiele sind eher oberflächlich in dem Sinne, dass es sich um eine Aufzählung von Objekten und Konzepten handelt: „An erster Stelle fällt mir auf, dass für die Bearbeitung der bisherigen Themen oft Kenntnisse aus den beiden Teilgebieten nötig waren. Aus der Analysis der Satz von l'Hospital und die Taylor-Entwicklung von Funktionen, sowie aus der Linearen Algebra das Skalarprodukt und das Gram-Schmidt-Verfahren, um ein paar Beispiele zu nennen“ (T2,8-9). Dies ist eine Parallele zu den Beispielen der StudentInnen im Wintersemester 17/18. Jedoch wurden im Wintersemester 18/19 mehr Beispiele notiert, bei denen deutlich wird, wie sich Lineare Algebra und Analysis ergänzen. Bei diesen Beispielen handelt es sich zumeist um Zusammenfassungen der Herleitungen, die die Gruppen selbst ausgearbeitet haben.[18] Zu dieser größeren Anzahl präziserer Beispiele trug vermutlich die veränderte Fragestellung für die schriftliche Reflexion bei, da nicht davon auszugehen ist, dass der zweiten Gruppe von SeminarteilnehmerInnen das Vernetzen leichter fiel als der ersten.

4.5. Zusammenfassung und Schlussbemerkungen

Zu einem tiefen Verständnis mathematischer Inhalte gehört das Vernetzen mathematischer Konzepte und Gebiete und verschiedener Repräsentationen (Barmby, Harries, Higgins und Suggate 2007, S. 2/42). Das Vernetzen der Grundvorlesungen Lineare Algebra und Analysis ist dabei besonders wichtig, da alle weiteren Vorlesungen auf diesen Gebieten aufbauen, häufig auf beiden zugleich. Zudem spielen Vernetzungen eine Rolle bei der Anwendung und dem Transfer von Wissen (Eli, Mohr-Schroeder und Lee 2013; Drollinger-Vetter 2011). Für Leh-

[18] Beispiel: „Bei der Herleitung des Abstandes auf gekrümmten Flächen, haben wir zunächst Extremstellen der Längen verschiedener möglicher Lösungskurven betrachtet und nach hinreichenden Bedingungen für die tatsächliche Lösungskurve gesucht. Wieder haben wir viel mit Methoden aus der Analysis gearbeitet, wie die Abweichung um ε der verschiedenen Kurven oder generell das Rechnen mit Integralen. Aus der Linearen Algebra haben wir dann die Idee des Gram-Schmidt-Verfahrens ausgenutzt, um tangentiale und normale Anteile der im Skalarprodukt stehenden Vektoren zu trennen, wodurch ein Teil des Terms annulliert werden konnte. Schlussendlich blieb als Bedingung an die Lösungskurve eine Differentialgleichung übrig, wobei wir wieder in der Analysis gelandet sind“ (T3,12-15).

rerInnen und damit auch für StudentInnen des Lehramts sind ein tiefes Verständnis und die Fähigkeit zum Vernetzen mathematischer Inhalte darüber hinaus wichtig, da dies die Gestaltung des Unterrichts und die Leistung der SchülerInnen beeinflusst (z. B. Eli, Mohr-Schroeder und Lee 2013; Tchoshanov 2011). Der *Bildungsplan des Gymnasiums – Mathematik* (2016) fordert ebenfalls eine Vernetzung von Wissen und Inhalten, auch zwischen den Gebieten. Idealerweise findet bei den LehramtsstudentInnen daher schon während des Studiums eine starke Vernetzung der Gebiete Lineare Algebra und Analysis statt.

Erfahrungsgemäß fällt dies StudentInnen jedoch schwer, was sich in Schwierigkeiten mit Übungsaufgaben äußert, die Konzepte aus beiden Bereichen einbeziehen, oder auch bei entsprechenden Fragen in mündlichen Prüfungen.

Mit der vorliegenden Studie wurde in drei Teilstudien untersucht, ob sich die Erfahrung empirisch bestätigen lässt, welche Gründe dabei aus Sicht der StudentInnen eine Rolle spielen und was den StudentInnen beim Vernetzen helfen könnte. Alle drei Teilstudien bestätigen, dass den StudentInnen das Vernetzen schwer fällt. Bei der ersten Teilstudie sollten die StudentInnen Aufgaben lösen, die auf Konzepten sowohl aus der Linearen Algebra als auch aus der Analysis basierten. Ein Großteil der StudentInnen konnte keine der gestellten Aufgaben vollständig lösen. In den schriftlichen Reflexionen aus den anderen beiden Teilstudien bestätigten die TeilnehmerInnen teilweise explizit, dass sie es schwierig finden, Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis zu erkennen. Zudem fiel es den meisten nicht leicht, Beispiele, in denen Lineare Algebra und Analysis zusammentreffen, zu beschreiben. Meist ging die Beschreibung nicht über eine Aufzählung von Objekten aus beiden Bereichen hinaus. Die anfängliche Hypothese wurde also bestätigt.

Einschränkend ist zu beachten, dass die Stichprobe klein war und nur von einem Standort stammte. Sie ist somit nicht repräsentativ. Um zu untersuchen, ob Aufgaben, für die Lineare Algebra und Analysis benötigt werden, den StudentInnen *schwerer* fallen als Aufgaben, für die nur einer der Bereiche benötigt wird, müssten die Lösungsversuche von „objektiv gleich schwierigen“ Aufgaben beider Arten verglichen werden. In der vorliegenden Studie konnten die Vernetzungsaufgaben nur mit Lückentexten verglichen werden. Dabei ist nicht klar, inwieweit Unterschiede in der Lösungshäufigkeit vom Format der Aufgabe beeinflusst wurden. Zukünftige Forschung könnte also entsprechende „gleich schwierige“ Aufgaben gleichen Typs entwickeln und in einer möglichst repräsentativen Studie einsetzen.

Neben den Schwierigkeiten zeigte sich aber auch, dass die StudentInnen durchaus Beispiele zur Vernetzung nennen können, wenn sie danach gefragt werden. Fast alle StudentInnen konnten mindestens ein Beispiel oder zumindest eine Vorlesung nennen, die auf beiden Gebieten aufbaut. Häufig stammten die Beispiele aus der mehrdimensionalen Analysis. Die von den StudentInnen genannten Beispiele könnten als Ausgangspunkt dienen, um Verbindungen in Lehrveranstaltungen deutlicher herauszustellen.

Die StudentInnen konnten zudem mögliche Gründe dafür nennen, warum ihnen das Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis schwer fällt. Der am häufigsten genannte Grund war, dass Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis in Lehrveranstaltungen und auch in der Schule nicht ausreichend thematisiert würden. In manchen Aussagen der StudentInnen deutete sich zudem an, dass sie selbst nicht aktiv nach Zusammenhängen suchten. Hieraus ergibt sich für die zukünftige Forschung die Frage, ob die Schwierigkeiten eher darauf zurückzuführen sind, dass Verbindungen in Lehrveranstaltungen nicht ausreichend thematisiert werden, oder darauf, dass die Art und Weise, wie StudentInnen sich mathematische Konzepte aneignen, zu wenig auf das Vernetzen ausgerichtet ist.

Die StudentInnen beschrieben auch, was ihnen bisher beim Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis geholfen hatte. Mehrfach genannt wurden Probleme, zu deren Lösung sie

Konzepte oder „Tricks“ aus beiden Bereichen einsetzen *mussten*. Außerdem half ihnen das Wiederholen und tiefere Verstehen der Inhalte der Grundvorlesungen sowie das Reflektieren über Zusammenhänge.

Aus diesen Befunden lassen sich einige Vorschläge für die Praxis ableiten, deren Effektivität aber noch durch weitere Forschung überprüft werden muss. Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis sollten in Lehrveranstaltungen der Universität (und auch im Schulunterricht) explizit thematisiert werden, um die Konstruktion eines verbindenden subjektiven Erfahrungsbereiches (Bauersfeld 1983) zu unterstützen. Den StudentInnen sollten Übungsaufgaben gestellt werden, deren Lösung Konzepte aus beiden Bereichen benötigt. Auch hier können die Zusammenhänge wieder expliziert werden. Die StudentInnen sollten dazu angeregt werden, selbst nach Zusammenhängen zu suchen. Dies könnte beispielsweise in einem Kurs zum „richtigen Lernen von Mathematik“ geschehen oder bezogen auf konkrete Beispiele in Übungsaufgaben durch entsprechende Reflexionsfragen (z. B. mittels Concept Maps oder verwandten Maps (Borys und Brinkmann 2013)). Den StudentInnen sollte die Möglichkeit gegeben werden, in Gruppen über Probleme zu diskutieren, die auf Konzepten aus beiden Bereichen aufbauen, da sie sich dabei gegenseitig helfen können, das Problem aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten.

Die Analysen der dritten Teilstudie deuten darauf hin, dass es verschiedene Sichtweisen auf das Vorhandensein von Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis geben könnte. Zukünftige Forschung könnte untersuchen, ob diese Sichtweisen empirisch nachweisbaren „Typen“ entsprechen und welcher spezifischen Hilfen zum Vernetzen die verschiedenen Typen gegebenenfalls bedürfen.

Eine offene Frage ist, ob die Menge oder Güte der Beispiele oder die Leistung bei den Vernetzungsaufgaben im Fragebogen mit der Ausprägung der Überzeugung zur Vernetztheit der Mathematik (zur Überzeugung siehe z. B. Muis 2007) oder der Überzeugung, ob es in Mathematik verschiedene Lösungswege für eine Aufgabe geben kann (z. B. Baumert u. a. 2009), zusammenhängt. In der vorliegenden Dissertation wurden zwar auch Überzeugungen untersucht, jedoch nicht der Zusammenhang zwischen Überzeugungen zur Vernetztheit und explizitem oder implizitem Wissen zu Vernetzungen im konkreten Kontext von Linearer Algebra und Analysis.

Die vorliegende Studie gibt einen ersten Einblick, welche Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis StudentInnen ohne spezifische Hilfen erkennen und was mögliche Gründe für und Hilfen bei Schwierigkeiten beim Vernetzen sein können. Es bleiben jedoch auch einige Fragen offen, etwa welche der vorgeschlagenen Unterstützungsmaßnahmen besonders wirksam sind.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Dissertation wurde ein Mathematikseminar für LehramtsstudentInnen entwickelt und beforscht, mit dem die Selbstwirksamkeitserwartung der StudentInnen und ihre nützlichen Überzeugungen zur Mathematik gestärkt werden sollen. Außerdem soll das Seminar den StudentInnen helfen, Lineare Algebra und Analysis besser zu vernetzen. Das Ziel des Projektes war es, einen leicht in die Praxis integrierbaren Beitrag zu leisten. Darum wurde eine vollständige Lehrveranstaltung entwickelt und untersucht. Dieses Vorgehen bringt einige methodische Schwächen mit sich, da nicht alle Variablen kontrolliert werden konnten (z. B. Dozentenabhängigkeit, Randomisierung). Dem steht nun jedoch ein Seminar mit fortgeschrittener Mathematik gegenüber, welches erprobt und in manchen Aspekten empirisch untersucht ist und welches zudem als Mathematikseminar mit den Modulhandbüchern vieler Mathematikstudiengänge kompatibel ist.

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Begleitforschung sowie Fragen für die zukünftige Forschung dargestellt.

5.1. Ergebnisse der empirischen Untersuchungen und Ideen für weitere Forschung

Ein Bereich, der sich im Laufe des Seminars als interessant herauskristallisierte, sind die verschiedenen Wege, auf denen die StudentInnen die mathematischen Begriffe entwickelten, und die damit verbundenen Grundvorstellungen. Abschnitt 2.5 gibt einen Überblick über die von den StudentInnen gewählten Wege. Diese verschiedenen Wege können als Grundlage für eine Untersuchung der zugehörigen Grundvorstellungen (vom Hofe 1995) dienen. Eine systematische Analyse von Lehrbüchern sowie Interviews mit DozentInnen können die Bestimmung (normativer) Grundvorstellungen vervollständigen. Diese Grundvorstellungen können mit den tatsächlichen Vorstellungen der StudentInnen verglichen werden. Dabei kann auch untersucht werden, ob die StudentInnen im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ und in traditionellen Seminaren und Vorlesungen ähnliche Vorstellungen entwickeln oder nicht. Da in traditionellen Lehrveranstaltungen häufig höchstens eine Grundvorstellung angesprochen wird, im Seminar jedoch meist mehrere, ist zu vermuten, dass die StudentInnen im Seminar mehr und tragfähigere Vorstellungen entwickeln als in einer klassischen Lehrveranstaltung.

5.1.1. Überzeugungen

Es wurde untersucht, ob das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ mit einer Stärkung von nützlichen mathematikbezogenen Überzeugungen einhergeht. Die Experimentalgruppe bestand aus den SeminarteilnehmerInnen. Die Kontrollgruppe setzte sich aus freiwilligen StudentInnen der Geometrievorlesung zusammen. Die Entwicklung der Überzeugungen zeigte ein gemischtes Bild. Zwar stieg die Zustimmung der Experimentalgruppe zur Überzeugung, dass Mathematik ein Prozess ist, an, aber im Vergleich mit der Kontrollgruppe war dieser Effekt nicht signifikant. Eine mögliche Erklärung hierfür könnte ein Deckelungseffekt sein, da die Zustimmung der ProbandInnen zu dieser Überzeugung schon im Vortest hoch war. Die Daten der 14 TeilnehmerInnen aus der Experimentalgruppe, die am Follow-up-Test teilnahmen, deuten darauf hin, dass eine Verschiebung der Zustimmung zur Prozess-Überzeugung stattgefunden hat und anhält, auch nachdem die StudentInnen wieder traditionelle Veranstaltungen besucht haben.

Die Analyse der schriftlichen Reflexionen der SeminarteilnehmerInnen deutet darauf hin, dass die SeminarteilnehmerInnen überwiegend dynamische Überzeugungen zur Mathematik hatten. Beispielsweise finden sich in vierzehn (von sechzehn) Reflexionen Hinweise auf die Überzeugung, dass man in Mathematik vieles selbst herausfinden kann. Dreizehn der TeilnehmerInnen bringen die Überzeugung zum Ausdruck, dass ein mathematisches Problem verschiedene Lösungen oder Lösungswege haben kann.

Die Ergebnisse der vorgestellten Studie deuten auf eine Verbesserung der mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung der SeminarteilnehmerInnen hin. Dieser Effekt könnte auf *mastery*-Erfahrungen (Bandura 1997) zurückzuführen sein, da die SeminarteilnehmerInnen anspruchsvolle mathematische Probleme lösten. Wie groß der Einfluss dieser Quelle im Vergleich zu anderen Quellen von Selbstwirksamkeitserwartung im Seminar und in der Veranstaltung der Kontrollgruppe war, lässt sich aus den erhobenen Daten jedoch nicht ablesen. Zukünftige Forschung könnte dieser Frage nachgehen und auf der Basis der Ergebnisse könnte das Seminar verbessert werden, um die Selbstwirksamkeitserwartung der TeilnehmerInnen noch mehr zu stärken.

Insgesamt deutet die vorliegende Studie darauf hin, dass das Seminar zu einer Stärkung der dynamischen Überzeugungen und der mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung beiträgt. Die Studie unterstützt somit das Resultat von Roscoe und Sriraman (2011), dass Überzeugungen auch mit Interventionen geändert werden können, in denen mathematische Inhalte die zentrale Rolle spielen und nicht heuristische Strategien. Die beschriebene Veranstaltung ist als Seminar mit 2 SWS konzipiert und deckt typische Themen der elementaren Differentialgeometrie ab. Die Veranstaltung braucht daher nicht (viel) zusätzliche Zeit und kann wie jedes andere Mathematikseminar als solches ins Modulhandbuch aufgenommen werden. Die Studie trägt dadurch dazu bei, die Integration von Forschungsergebnissen in die Praxis zu erleichtern.

Aufgrund der kleinen Stichprobe und des Studiendesigns sind die Ergebnisse jedoch nicht generalisierbar und es kann kein kausaler Zusammenhang zwischen dem Seminar und den Änderungen der Überzeugungen nachgewiesen werden. Daher wäre es wünschenswert, das Seminar mit weiteren StudentInnen, anderen DozentInnen und an anderen Standorten durchzuführen, um die Wirksamkeit (oder Nicht-Wirksamkeit) des Seminars genauer bestimmen zu können. Außerdem wären weitere (quasi-)längsschnittliche Studien wie die von Biedermann, Steinmann und Oser (2015) hilfreich, um die Ergebnisse temporär beschränkter Studien wie der vorliegenden besser einordnen zu können: Welche Änderungen der epistemologischen Überzeugungen und der Selbstwirksamkeitserwartung sind im Laufe eines Semesters oder eines Studiums typisch? Des Weiteren erscheint es sinnvoll, ein Instrument wie jenes von Rott und Leuders (2016) zu verwenden, mit dem nicht nur die Orientierung, sondern auch die Ausgereiftheit (*sophistication*) der Überzeugungen der ProbandInnen untersucht wird. Damit könnte analysiert werden, ob das Seminar dazu beiträgt, dass die TeilnehmerInnen ihre Überzeugungen im Anschluss reflektierter begründen können. Die Untersuchung könnte außerdem auf Überzeugungen zum Lehren von Mathematik ausgeweitet werden.

Auf Basis der schriftlichen Reflexionen der SeminarteilnehmerInnen wurde untersucht, welche Zusammenhänge zwischen Überzeugungen und Kernelementen der Veranstaltung bestehen. Aus der Analyse der Reflexionen lassen sich mehrere Hypothesen und Fragen ableiten. Eine Hypothese ist, dass Hands-on-Aktivitäten die Überzeugungen unterstützen, dass Mathematik einen Alltagsbezug hat und dass man in Mathematik viel selbst herausfinden kann. Eine zweite Hypothese ist, dass Gruppenarbeit die Überzeugung unterstützt, dass man in Mathematik viel selbst herausfinden kann. Eine dritte Hypothese ist, dass das Vorstellen verschiedener Lösungswege oder Lösungsansätze eines Problems mittels Vorträgen der StudentInnen die Überzeugung unterstützt, dass Probleme in Mathematik auf verschiedenen Wegen gelöst werden können. Eine offene Frage ist in diesem Kontext, ob die Überzeugung in gleichem Maße unterstützt wird, wenn die TeilnehmerInnen sich zuvor nicht selbst einen Weg überlegen, sondern wenn ihnen nur mehrere Möglichkeiten präsentiert werden.

Die Hypothesen bieten DozentInnen, die einen ähnlichen Kurs zu anderen mathematischen Themen entwickeln möchten, eine gewisse Orientierung. Allerdings ist zur Frage der Zusammenhänge und Kausalitäten zwischen Kernelementen und Überzeugungen weitere Forschung nötig, bevor Designprinzipien abgeleitet werden können.

5.1.2. Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis

Zu einem tiefen Verständnis mathematischer Inhalte gehört das Vernetzen mathematischer Konzepte und Gebiete und verschiedener Repräsentationen (Barmby, Harries, Higgins und Suggate 2007, S. 2/42). Das Vernetzen der Grundvorlesungen Lineare Algebra und Analysis ist dabei besonders wichtig, da diese Vorlesungen die Grundlage für fast alle weiteren Vorlesungen bilden. Zudem sind diese Themen auch im Curriculum der Schule verankert. Vielen StudentInnen fällt diese Vernetzung erfahrungsgemäß jedoch schwer, was sich in Schwierigkeiten mit Übungsaufgaben äußert, die Konzepte aus beiden Bereichen einbeziehen, oder auch bei entsprechenden Fragen in mündlichen Prüfungen.

Mit der vorliegenden Studie wurde in drei Teilstudien untersucht, ob sich die Erfahrung empirisch bestätigen lässt, welche Gründe dabei aus Sicht der StudentInnen eine Rolle spielen und was den StudentInnen beim Vernetzen helfen könnte. Alle drei Teilstudien bestätigen, dass den StudentInnen das Vernetzen schwer fällt. Bei der ersten Teilstudie sollten die StudentInnen Aufgaben lösen, die auf Konzepten sowohl aus der Linearen Algebra als auch aus der Analysis basierten. Ein Großteil der StudentInnen konnte keine der gestellten Aufgaben vollständig lösen. In den schriftlichen Reflexionen aus den anderen beiden Teilstudien bestätigten die TeilnehmerInnen teilweise explizit, dass sie es schwierig finden, Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis zu erkennen. Zudem fiel es den meisten nicht leicht, Beispiele zu beschreiben, in denen Lineare Algebra und Analysis zusammentreffen und die über eine Aufzählung von Objekten aus beiden Bereichen hinausgehen. Die anfängliche Hypothese wurde also bestätigt. Einschränkend ist zu beachten, dass die Stichprobe eher klein und nicht repräsentativ war.

Die StudentInnen konnten auch einige mögliche Gründe dafür nennen, warum ihnen das Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis eher schwer fällt. Der am häufigsten genannte Grund war, dass Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis in Lehrveranstaltungen und auch in der Schule nicht ausreichend thematisiert würden. In manchen Aussagen der StudentInnen deutete sich zudem an, dass sie selbst nicht aktiv nach Zusammenhängen suchten.

Neben den Schwierigkeiten zeigte sich aber auch, dass die StudentInnen Beispiele zur Vernetzung nennen können, wenn sie danach gefragt werden. Fast alle StudentInnen konnten mindestens ein Beispiel oder zumindest eine Vorlesung nennen, die auf beiden Gebieten aufbaut. Häufig stammten die Beispiele aus der mehrdimensionalen Analysis.

Die StudentInnen beschrieben auch, was ihnen bisher beim Vernetzen von Linearer Algebra und Analysis geholfen hatte. Mehrfach genannt wurden Probleme, zu deren Lösung sie Konzepte oder „Tricks“ aus beiden Bereichen einsetzen *mussten*. Außerdem half ihnen das Wiederholen und tiefere Verstehen der Inhalte der Grundvorlesungen sowie das Reflektieren über Zusammenhänge.

Aus diesen Befunden lassen sich einige Vorschläge für die Praxis ableiten, deren Effektivität durch weitere Forschung überprüft werden muss. Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis sollten in Lehrveranstaltungen der Universität (und auch im Schulunterricht) explizit thematisiert werden, um die StudentInnen beim Vernetzen zu unterstützen. Den StudentInnen sollten Übungsaufgaben gestellt werden, deren Lösung Konzepte aus beiden Bereichen benötigt und sie sollten dazu angeregt werden, selbst nach Zusammenhängen zu suchen und in Gruppen darüber zu diskutieren.

Eine offene Frage für zukünftige Forschung ist, welchen Zusammenhang es zwischen dem expliziten Wissen der StudentInnen über Vernetzungen, ihrer Fähigkeit, Vernetzungsaufgaben zu lösen, und ihrer Überzeugung zur (Nicht-)Vernetztheit der Mathematik gibt.

Die vorliegende Studie gibt einen ersten Einblick, welche Zusammenhänge zwischen Linearer Algebra und Analysis StudentInnen ohne spezifische Hilfen erkennen und was mögliche Gründe für und Hilfen bei Schwierigkeiten beim Vernetzen sein können. Offen bleibt die Frage, wie die StudentInnen am besten beim Vernetzen unterstützt werden können: Welche der von den StudentInnen genannten Hilfen oder aus der Literatur bekannten Methoden wie beispielsweise Concept Maps sind für die eher „grobkörnigen“ Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis effektive Vermittler?

5.2. Ideen zur Weiterentwicklung des Seminars

Zur Weiterentwicklung des Seminars oder einzelner Themeneinheiten wäre ein Design-Based-Research-Ansatz geeignet (siehe z. B. Prediger, Gravemeijer und Confrey 2015; Bakker 2018). Mit diesem Ansatz könnte beispielsweise untersucht werden, welche Elemente des Seminars mit welchen Überzeugungen zusammenhängen und wie das Seminar verändert werden muss, um dynamische Überzeugungen noch besser zu unterstützen. Im Rahmen einer Doktorarbeit ist jedoch nicht genug Zeit, um ausreichend viele Zyklen eines semesterlangen Kurses durchzuführen, weshalb der Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht genutzt wurde. Aus den Erfahrungen und den empirischen Untersuchungen der ersten beiden Durchführungen des Seminars lassen sich dennoch einige Ideen zur Weiterentwicklung des Seminars ableiten.

Aus verschiedenen Gründen könnte es nötig oder wünschenswert sein, weitere Themen für das Seminar aufzubereiten. Ein bis zwei weitere Themen könnten im vierten Block des Seminars nötig sein, falls die StudentInnen schon im dritten Block sowohl die mittlere als auch die Gaußkrümmung entwickelten. Falls es erwünscht ist, dass das Seminar „mehr Stoff abdeckt“, könnte ein weiteres Thema in den dritten Block integriert werden, wenn das Thema „Geodäten/Abstände“ nur von einer Gruppe bearbeitet würde. Eventuell könnte außerdem eine weitere (fünfte) Gruppe von vier StudentInnen zum Seminar zugelassen werden. Dann wäre es sinnvoll, im zweiten und dritten Block drei statt zwei Themen zur Auswahl zu stellen und im vierten Block fünf Themen.

Mögliche weitere Themen könnten sein:

- Paralleltransport: Ideen für Hands-on-Aktivitäten können Casey (1996, Kapitel 19) entnommen werden.

- Der Satz von Gauß-Bonnet: Hierzu könnten zunächst die Winkel von Dreiecken vermessen und mit der Krümmung in Verbindung gebracht werden. Siehe Henderson (2013).
- Die Untersuchung globaler Eigenschaften ebener Kurven oder die Untersuchung bestimmter Kurven, siehe z. B. Bär (2010) und Haftendorn (2017).
- Die isoperimetrische Ungleichung
- Das Konzept der Karten und der verschiedenen Beschreibungsmöglichkeiten von Untermannigfaltigkeiten
- Fundamentalformen

Um eine Stärkung dynamischer Überzeugungen noch besser zu unterstützen, könnte dem Seminar eine Komponente systematischer Reflexion hinzugefügt werden (Bernack-Schüler 2018, S. 40 und Abschnitt 3.2.3). In den beiden bisherigen Durchführungen reflektierten die StudentInnen ihren Lernprozess während des ersten Themas, ihr Wissen zu Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis oder Zusammenhänge zwischen dem Seminar und ihrer späteren Arbeit als LehrerInnen. Diese Reflexionen könnten stärker auf mathematikbezogene Überzeugungen ausgerichtet werden, beispielsweise indem die StudentInnen direkt dazu aufgefordert werden, ihre Überzeugungen zu reflektieren. Ideen dazu, zu welchen Themen und wie Reflexionen systematisch angeregt werden können, sind Bernack-Schüler (2018) und der dort angegebenen Literatur zu entnehmen.

Eine weitere Möglichkeit, die StudentInnen verschiedene Themen reflektieren zu lassen, böte eine Verzahnung des Seminars mit einer Fachdidaktikveranstaltung (siehe auch Hilken (2020)). Dadurch könnten die Erfahrungen aus dem Seminar für den späteren Unterricht der LehramtsstudentInnen besser nutzbar gemacht werden. Einen Anknüpfungspunkt für eine fachdidaktische Veranstaltung bieten die Hands-on-Materialien, deren Vor- und Nachteile und Einsatzmöglichkeiten diskutiert werden könnten (siehe Abschnitt 2.2.1). Ebenso bietet sich das Thema der multiplen Lösungswege an (Schukajlow und Blum 2011), denn mehrere StudentInnen stellten es in ihren Reflexionen als bereichernd heraus, die verschiedenen Zugänge der anderen Gruppen gesehen zu haben. Auch die Begriffsbildungspozesse, die die StudentInnen im Seminar durchlaufen (siehe Seite 9 und Büchter und Leuders (2005)), könnten in einer Fachdidaktikveranstaltung reflektiert und in einen allgemeineren, literaturbasierten Kontext eingebettet werden.

Alle diese Themen berühren auch die Überzeugungen zu Mathematik, beispielsweise ob es verschiedene Lösungswege geben kann, wie viel man in Mathematik selbst herausfinden kann und inwieweit es Zusammenhänge zwischen mathematischen Gebieten und Konzepten gibt. Mathematikbezogene Überzeugungen könnten daher ebenfalls thematisiert werden, damit die StudentInnen sich über deren Einfluss auf das Lehren und Lernen bewusst werden. Ihr eigenes Mathematikbild könnten sie auf Basis ihrer Erfahrungen im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ reflektieren und gegebenenfalls revidieren.

Auch inhaltliche Verbindungen zwischen dem Seminar und dem Mathematikunterricht an der Schule könnten genauer untersucht werden. Beispielsweise könnten die StudentInnen analysieren, welche Methoden und Voraussetzungen für welchen Zugänge zur Krümmung ebener Kurven nötig sind. „Manche der Zugänge lassen sich mit Mitteln der Sekundarstufe 2 weitgehend oder sogar vollständig verstehen ([Zugänge A.b und A.c]), andere erfordern fortgeschrittenere Methoden aus den Analysisvorlesungen. So lassen sich die Verbindungen des Themas zu Schulinhalten und auch Unterschiede in Methodik und Zielsetzung an der Universität und in der Schule herausarbeiten.“ (Hilken 2020, S. 33-34)

Ein paar StudentInnen gaben die Rückmeldung, dass es sie interessieren würde, wie sich die von ihnen „nacherfundenen“ Begriffe historisch entwickelt haben. Da im Seminar kaum Zeit für mehr als nur Randbemerkungen zu diesem Thema bleibt, könnte den StudentInnen eine Literaturliste zur Verfügung gestellt werden. Niederschwelliger für die StudentInnen, aber arbeitsintensiver für die DozentInnen wäre vermutlich ein historisches Begleitskript, in dem die Geschichte der behandelten Begriffe kurz aufgearbeitet wird.

Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ wurde für LehramtsstudentInnen entwickelt. Es kann aber genauso mit StudentInnen im B.Sc.-Studiengang durchgeführt werden. Die lehramtsspezifischen Anteile wie die Reflexionen zum Schulbezug und das Gespräch mit einer Lehrerin entfallen dann. Für B.Sc.-StudentInnen könnte das Seminar auch als Proseminar angeboten werden, da diese StudentInnen in den ersten zwei Semestern alle benötigten Vorlesungen (Analysis 1+2 und Lineare Algebra) besuchen.[1]

Im Rückblick zeigt sich das Seminar als eine sehr intensive Zeit sowohl für die StudentInnen als auch für die Dozentinnen. Die StudentInnen waren motiviert und arbeiteten hart, um ihre Ideen zu einem guten Schluss zu bringen. Dabei mussten sie immer wieder frustrierende Phasen des (scheinbaren) Stillstands aushalten, waren später aber um so stolzer auf ihre Ergebnisse. Auch für uns Dozentinnen war dieses Seminar intensiver als ein klassisches Mathematikseminar. Durch die Begleitung der Gruppen auf ihren selbst gewählten Wegen bekamen wir viele einzigartige Einblicke in das mathematische Denken der StudentInnen und lernten selbst viel dazu. Das Seminar hat uns viel Freude bereitet und wir können es zur Nachahmung empfehlen!

[1] Bei LehramtsstudentInnen ist dies nicht immer der Fall. Manche Studienordnungen sehen vier Semester für die Grundvorlesungen vor und manche StudentInnen besuchen von sich aus in den ersten Semestern nur eine Mathematikvorlesung, weil es anders zeitlich Schwierigkeiten gäbe.

Literatur

Ableitinger, Christoph, Jürg Kramer und Susanne Prediger, Hrsg. (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Achmetli, Kay, André Krug und Stanislaw Schukajlow (2015). Multiple Lösungsmöglichkeiten und ihre Nutzung beim mathematischen Modellieren. In: *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht*. Hrsg. von G. Kaiser und H.-W. Henn. Wiesbaden: Springer Fachmedien. DOI: 10.1007/978-3-658-09532-1_2.

Adleff, Ann-Kristin, Natalie Ross und Gabriele Kaiser (2020). Eine Untersuchung von Aufgabenmerkmalen und Unterrichtsqualität im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020*. Hrsg. von Hans-Stefan Siller, Wolfgang Weigel und Jan Franz Wörler. Münster: WTM-Verlag, S. 53–56. DOI: 10.37626/GA9783959871402.0.

Adu-Gyamfi, Kwaku, Michael J. Bossé und Kayla Chandler (2017). Student Connections between Algebraic and Graphical Polynomial Representations in the Context of a Polynomial Relation. In: *International Journal of Science and Mathematics Education* 15, S. 915–938. DOI: 10.1007/s10763-016-9730-1.

Alfieri, Louis u. a. (2011). Does Discovery-Based Instruction Enhance Learning? In: *Journal of Educational Psychology* 103(1), S. 1–18.

Anthony, Glenda und Margaret Walshaw (2009). *Effective pedagogy in mathematics*. Educational Practices Series.

Bakker, Arthur (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers*. Routledge. DOI: 10.4324/9780203701010.

Bandura, Albert (1997). *Self-Efficacy: The Exercise of Control*. New York: W.H. Freeman und Company.

– (1999). Social cognitive theory: An agentic perspective. In: *Asian Journal of Social Psychology* 2(1), S. 21–41.

Bär, Christian (2010). *Elementare Differentialgeometrie*. De Gruyter.

Barger, Rita H. und Ann C. McCoy (2009). Sacred Cows Make the Best Hamburger. In: *Mathematics Teacher* 102(6), S. 414–418.

Barmby, Patrick u. a. (2007). How can we assess mathematical understanding? In: *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hrsg. von J. H. Woo u. a. Bd. 2. Seoul: PME, S. 41–48.

Bartimote-Aufflick, Kathryn u. a. (2016). The study, evaluation, and improvement of university student self-efficacy, Studies in Higher Education. In: *Studies in Higher Education* 41(11), S. 1918–1942. DOI: 10.1080/03075079.2014.999319.

Bauer, Thomas (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Hrsg. von Christoph Ableitinger, Jürg Kramer und Susanne Prediger. Springer-Verlag, S. 39–56.

Bauer, Thomas, Wolfgang Gromes und Ulrich Partheil (2016). Mathematik verstehen von verschiedenen Standpunkten aus – Zugänge zum Krümmungsbegriff. In: *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Springer Spektrum, S. 483–499.

Bauer, Thomas und Ulrich Partheil (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. In: *Mathematische Semesterberichte* 56(1), S. 85–103.

Bauersfeld, Heinrich (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: *Lehren und Lernen von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6.* Hrsg. von Heinrich Bauersfeld u. a. Köln: Aulis Verlag Deubner, S. 1–56.

Baumert, Jürgen u. a. (2009). *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz (COACTIV): Dokumentation der Erhebungsinstrumente.* Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

belcastro, sarah-marie und Carolyn Yackel, Hrsg. (2007). *Making Mathematics with Needlework.* AK Peters/CRC Press.

Belenky, Daniel M. und Timothy J. Nokes (2009). Examining the Role of Manipulatives and Metacognition on Engagement, Learning, and Transfer. In: *The Journal of Problem Solving* 2(2), S. 102–129.

Berkaliev, Zaur und Peter Kloosterman (2009). Undergraduate Engineering Majors' Beliefs About Mathematics. In: *School Science & Mathematics* 109(3), S. 175–182.

Bernack-Schüler, Carola (2018). *Die Entwicklung von Mathematikbildern bei Lehramtsstudierenden.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beswick, Kim (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. In: *Educational Studies in Mathematics* 79(1), S. 127–147. URL: `http://www.jstor.org/stable/41413101`.

Beutelspacher, Albrecht u. a. (2011). *Mathematik neu denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Springer-Verlag.

Biedermann, Horst, Sibylle Steinmann und Fritz Oser (2015). „Glaubensbestände und Glaubenswandel“: Zur Transformation von konstruktions- und transmissionsorientierten Lehr-Lern-Überzeugungen in der Lehrpersonenausbildung. In: *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung* 33(1), S. 46–68.

Bildungsplan des Gymnasiums – Mathematik (2016). Reihe G. URL: `http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_M.pdf`.

Blömeke, Sigrid u. a. (2008). Effectiveness of teacher education. In: *ZDM Mathematics Education* 40, S. 719–734. DOI: `10.1007/s11858-008-0096-x`.

Blum, Werner u. a., Hrsg. (2015). *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II.* Braunschweig: Diesterweg Schroedel Westermann.

Borys, Thomas und Astrid Brinkmann (2013). Strukturiertes und vernetzendes Lehren und Lernen mit Maps. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013.* Münster: WTM-Verlag. DOI: `10.17877/DE290R-13956`.

Bosch, Siegfried (2008). *Lineare Algebra.* 4. Aufl. Berlin: Springer.

– (2014). *Lineare Algebra.* 5. Aufl. Berlin: Springer Spektrum.

Brinkmann, Astrid (2002). Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I. Diss. Duisburg. URL: `https://duepublico2.uni-due.de/servlets/MCRFileNodeServlet/duepublico_derivate_00005386/brinkmanndiss.pdf`.

Brown, Megan C., Nicole M. McNeil und Arthur M. Glenberg (2009). Using Concreteness in Education: Real Problems, Potential Solutions. In: *Child Development Perspectives* 3(3), S. 160–164.

Bruck, Laura B. (2016). A Hands-On Activity to Build Mastery of Intermolecular Forces and Its Impacts on Student Learning. In: *Journal of College Science Teaching* 45(4), S. 22–30.

Bruder, Regina und Anne Prescott (2013). Research evidence on the benefits of IBL. In: *ZDM Mathematics Education* 45, S. 811–822. DOI: `10.1007/s11858-013-0542-2`.

Bruner, Jerome Seymour (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge: Belknap Press.

Buchholtz, Nils und Gabriele Kaiser (2017). Ein Mixed-Methods-Evaluations-Ansatz zur Untersuchung von Makro-Mikro-Interaktionen. In: *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie* 69(2), S. 435–458. DOI: `10.1007/s11577-017-0465-y`.

Buchholtz, Nils, Gabriele Kaiser und Sigrid Blömeke (2013). Die Entwicklung von Beliefs von Lehramtsstudierenden in der Studieneingangsphase – Ergebnisse aus TEDS-Telekom. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. WTM-Verlag.

Büchter, Andreas und Hans-Wolfgang Henn (2013). Kurve, Kreis und Krümmung – ein Beitrag zur Vertiefung und Reflexion des Ableitungsbegriffs. In: *Mathematik verständlich unterrichten.* Hrsg. von Henrike Allmendinger u. a. Wiesbaden: Springer Spektrum. DOI: `10.1007/978-3-658-00992-2_9`.

Büchter, Andreas und Timo Leuders (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln.* Cornelsen Scriptor.

Bungartz, Paul und Alexander Wynands (1998). *Wie beurteilen Referendare ihr Mathematikstudium für das Lehramt Sekundarstufe II?* Zugriff: 24.01.2019. URL: `http://www.math.uni-bonn.de/people/wynands/Referendarbefragung.html`.

Businskas, Aldona Monika (2008). Conversations About Connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. Diss. Simon Fraser University.

Carbonneau, Kira J., Scott C. Marley und James P. Selig (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. English (US). In: *Journal of Educational Psychology* 105(2), S. 380–400. DOI: `10.1037/a0031084`.

Carbonneau, Kira J., Rachel Min Wong und Nataliia Borysenko (2020). The influence of perceptually rich manipulatives and collaboration on mathematic problem-solving and perseverance. In: *Contemporary Educational Psychology* 61.

Casey, James (1996). *Exploring Curvature.* Braunschweig: Vieweg.

Cederbaum, Carla und Lisa Hilken (2021). Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen: ein Hands-on-Seminar für Lehramtsstudierende. In: *Professionsorientierte Fachwissenschaft – Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium.* Hrsg. von Viktor Isaev, Andreas Eichler und Frank Loose.

Charalambous, Charalambos Y., Areti Panaoura und George Philippou (2009). Using the History of Mathematics to Induce Changes in Preservice Teachers' Beliefs and Attitudes: Insights from Evaluating a Teacher Education Program. In: *Educational Studies in Mathematics* 71(2), S. 161–180. URL: `http://www.jstor.org/stable/40284592`.

Clark, Kathleen, Alex James und Clemency Montelle (2014). "We definitely wouldn't be able to solve it all by ourselves, but together...": group synergy in tertiary students' problem-solving practices. In: *Research in Mathematics Education* 16(3), S. 306–323.

Cohen, Elizabeth G. (1994). Restructuring the Classroom: Conditions for Productive Small Groups. In: *Review of Educational Research* 64(1), S. 1–35.

Collins, Allan, John Brown und Susan Newman (1986). *Cognitive Apprenticeship: Teaching the Craft of Reading, Writing and Mathematics.* Techn. Ber. BBN Laboratories Incorporated.

Conner, AnnaMarie u. a. (2011). Impact of a content and methods course sequence on prospective secondary mathematics teachers' beliefs. In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 14, S. 483–504. DOI: `10.1007/s10857-011-9186-8`.

Cooney, Thomas J., Barry E. Shealy und Bridget Arvold (1998). Conceptualizing Belief Structures of Preservice Secondary Mathematics Teachers. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 29(3), S. 306–333. URL: `http://www.jstor.org/stable/749792`.

Coppin, Charles A. u. a. (2009). *The Moore Method: A Pathway to Learner-Centered Instruction.* Washington: MAA.

Cory, Beth L. und Joe Garofalo (2011). Using Dynamic Sketches to Enhance Preservice Secondary Mathematics Teachers' Understanding of Limits of Sequences. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 42(1), S. 65–97. URL: `http://www.jstor.com/stable/10.5951/jresematheduc.42.1.0065`.

Danckwerts, Rainer, Susanne Prediger und Eva Vasarhelyi (2004). Perspektiven der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 12(2), S. 76–77.

Deng, Feng u. a. (2011). Students' views of the nature of science: A critical review of research. In: *Science Education* 95(6), S. 961–999. DOI: `10.1002/sce.20460`.

Depaepe, Fien, Erik De Corte und Lieven Verschaffel (2016). Mathematical epistemological beliefs. In: *Handbook of epistemic cognition.* Hrsg. von Jeffrey Greene, William Sandoval und Ivar Bråten. New York: Routledge. Kap. 10 Mathematical epistemological beliefs, S. 147–164.

Dinther, Mart van, Filip Dochy und Mien Segers (2011). Factors affecting students' self-efficacy in higher education. In: *Educational Research Review* 6, S. 95–108. DOI: `10.1016/j.edurev.2010.10.003`.

Do Carmo, Manfredo (1993). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* Brauschweig: Vieweg+Teubner Verlag.

Drollinger-Vetter, Barbara (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit : fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht.* Münster: Waxmann.

Dubberke, Thamar u. a. (2008). Lerntheoretische Überzeugungen von Mathematiklehrkräften: Einflüsse auf die Unterrichtsgestaltung und den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern. In: *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie* 22(3-4), S. 193–206.

Elby, Andrew, Chris Macrander und David Hammer (2016). Epistemic Cognition in Science. In: *Handbook of epistemic cognition.* Hrsg. von Jeffrey Greene, William Sandoval und Ivar Bråten. Kap. 8 Epistemic Cognition in Science, S. 113–127.

Eli, Jennifer A., Margaret J. Mohr-Schroeder und Carl W. Lee (2013). Mathematical Connections and Their Relationship to Mathematics Knowledge for Teaching Geometry. In: *School Science and Mathematics* 113(3), S. 120–134. DOI: `10.1111/ssm.12009`.

Felbrich, Anja, Gabriele Kaiser und Christiane Schmotz (2012). The cultural dimension of beliefs: an investigation of future primary teachers' epistemological beliefs concerning the nature of mathematics in 15 countries. In: *ZDM* 44(3), S. 355–366. DOI: `10.1007/s11858-012-0418-x`.

Fischer, Astrid (2013). Anregung mathematischer Erkenntnisprozesse in Übungen. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung.* Hrsg. von Christoph Ableitinger, Jürg Kramer und Susanne Prediger. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 95–116.

Fischer, Gerd (2008). *Lineare Algebra.* 16. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

– (2014). *Lineare Algebra.* 18. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Foglia, Lucia und Robert A. Wilson (2013). Embodied Cognition. In: *WIREs Cognitive Science* 4, S. 319–325. DOI: `10.1002/wcs.1226`.

Forster, Otto (2006). *Analysis 2.* 7. Aufl. Wiesbaden: Vieweg.

– (2011). *Analysis 1.* 10. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

– (2016). *Analysis 1.* 12. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.
– (2017). *Analysis 2.* 11. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.
Francis, Krista, Steven Khan und Brent Davis (2016). Enactivism, Spatial Reasoning and Coding. In: *Digital Experiences in Mathematics Education* 2(1), S. 1–20. DOI: `10.1007/s40751-015-0010-4`.
Freudenthal, Hans (1979). Nacherfindung unter Führung. In: *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht.* Hrsg. von Dieter Volk. München: Fink, S. 185–193.
Friedrich, Sarah, Frank Konietschke und Markus Pauly (2018a). URL: `https://CRAN.R-project.org/package=MANOVA.RM`.
– (2018b). Analysis of Multivariate Data and Repeated Measures Designs with the R Package MANOVA.RM. In: *arXiv e-prints*, arXiv:1801.08002.
Fyfe, Emily R., Nicole M. McNeil und Stephanie Borjas (2015). Benefits of "concreteness fading" for children's mathematics understanding. In: *Learning and Instruction* 35, S. 104–120. URL: `http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.10.004`.
Fyfe, Emily R. u. a. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: A Systematic Review. In: *Educational Psychology Review* 26, S. 9–25. DOI: `10.1007/s10648-014-9249-3`.
García-García, Javier und Crisólogo Dolores-Flores (2019). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. In: *Mathematics Education Research Journal.* URL: `https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x`.
Geisler, Sebastian und Katrin Rolka (2018). Affective variables in the transition from school to university mathematics. In: *INDRUM 2018* (University of Agder). INDRUM Network. Kristiansand, Norway. URL: `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849967`.
Geogebra (2020). URL: `https://geogebra.org`.
Gil, Indira, Laura Zamudio-Orozco und Barbara King (2019). After Presenting Multiple Solution Strategies, What's Next? Examining the Mathematical Connections Made by Preservice Teachers. In: *Journal of mathematics education at teachers college* 10(2), S. 9–20.
Gill, Michele G., Patricia T. Ashton und James Algina (2004). Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. In: *Contemporary Educational Psychology* 29(2), S. 164–185.
Goldin, Gerald A. u. a. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education: An Overview of the Field and Future Directions.* Springer International Publishing.
Green, Thomas F. (1971). *The activities of teaching.* New York: McGraw-Hill.
Grieser, Daniel (2015). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studieneingangsphase. In: *Übergänge konstruktiv gestalten.* Springer, S. 87–102.
– (2016). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase. In: *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase.* Springer, S. 661–675.
Grigutsch, Stefan, Ulrich Raatz und Günter Törner (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 19(1), S. 3–45. DOI: `10.1007/BF03338859`.
Gueudet, Ghislaine u. a. (2016). *Transitions in Mathematics Education.* ICME-13 Topical Surveys. Springer International Publishing. DOI: `10.1007/978-3-319-31622-2`.

Hadjiachilleos, Stella, Lucy Avraamidou und Stavros Papastavrou (2013). The Use of Lego Technologies in Elementary Teacher Preparation. In: *Journal of Science Education and Technology* 22(5), S. 614–629. URL: https://www.jstor.org/stable/24019806.

Haftendorn, Dörte (2017). *Kurven erkunden und verstehen*. Wiesbaden: Springer Spektrum. DOI: 10.1007/978-3-658-14749-5.

Halverscheid, Stefan und Nils Müller (2013). Experimentelle Aufgaben als grundvorstellungsorientierte Lernumgebungen für die Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Hrsg. von Christoph Ableitinger, Jürg Kramer und Susanne Prediger. Springer, S. 117–134.

Hattie, John (2009). *Visible Learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.

Hattie, John, Mark Gan und Cameron Brooks (2016). Instruction Based on Feedback. In: *Handbook of Research on Learning and Instruction*. Routledge.

Hausmann, Robert G.M., Michelene T.H. Chi und Marguerite Roy (2004). Learning from collaborative problem solving: An analysis of three hypothesized mechanisms. In: *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* 26, S. 547–552.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Hrsg. von Christoph Ableitinger, Jürg Kramer und Susanne Prediger. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 1–15. DOI: 10.1007/978-3-658-01360-8_1.

Henderson, David (2013). *Differential Geometry: A Geometric Introduction*. DOI: 10.3792/euclid/9781429799843-1. URL: https://projecteuclid.org/euclid.bia/1399917370.

Henderson, David und Daina Taimina (2005). *Experiencing Geometry*. Pearson Prentice Hall.

Higgins, Karen M. (1997). The Effect of Year-Long Instruction in Mathematical Problem Solving on Middle-School Students' Attitudes, Beliefs, and Abilities. In: *The Journal of Experimental Education* 66(1), S. 5–28. DOI: 10.1080/00220979709601392.

Hilken, Lisa (2020). Praktische und mathematische Zugänge zum Krümmungsbegriff. In: *Der Mathematikunterricht* 66(6), S. 28–35.

Holzäpfel, Lars u. a. (2012). Schreiben, forschen und reflektieren in der Mathematiklehrerausbildung: Veränderung mathematikbezogener Überzeugungen. In: *Lehrerprofessionalisierung wissenschaftlich begleiten – Strategien und Methoden*. Hrsg. von Mareike Kobarg u. a. Münster: Waxmann, S. 15–34.

Honicke, Toni und Jaclyn Broadbent (2016). The influence of academic self-efficacy on academic performance: A systematic review. In: *Educational Research Review* 17, S. 63–84. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.edurev.2015.11.002.

Huber, Ludwig (2014). Forschungsbasiertes, Forschungsorientiertes, Forschendes Lernen: Alles dasselbe? In: *Hochschulwesen* 1+2, S. 22–29.

Jänich, Klaus (2008). *Lineare Algebra*. 11. Aufl. Berlin: Springer.

Kaisari, Maria und Tasos Patronis (2010). So we decided to call "straight line" (. . .): Mathematics students' interaction and negotiation of meaning in constructing a model of elliptic geometry. In: *Educational Studies in Mathematics* 75, S. 253–269. DOI: 10.1007/s10649-010-9255-4.

Kaufmann, Hannes (2009). Dynamic Differential Geometry in Education. In: *Journal for Geometry and Graphics* 13(2).

Kienhues, Dorothe, Rainer Bromme und Elmar Stahl (2008). Changing epistemological beliefs: The unexpected impact of a short-term intervention. In: *British Journal of Educational Psychology* 78(4), S. 545–565. DOI: 10.1348/000709907X268589.

Kirschner, Paul A., John Sweller und Richard E. Clark (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. In: *Educational Psychologist* 41(2), S. 75–86. DOI: 10.1207/s15326985ep4102{_}1.

Kirsh, David (2010). Thinking with external representations. In: *AI & SOCIETY* 25(4), S. 441–454. DOI: 10.1007/s00146-010-0272-8.

Klein, Felix (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Bd. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Leipzig: Teubner. URL: openlibrary.org.

Köller, Olaf (2001). Mathematical world views and achievement in advanced mathematics in Germany: findings from TIMSS population 3. In: *Studies in Educational Evaluation* 27(1), S. 65–78.

Kollosche, David (2017). Entdeckendes Lernen: Eine Problematisierung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 38(2), S. 209–237. DOI: 10.1007/s13138-017-0116-x.

Königsberger, Konrad (2004a). *Analysis 1.* 6. Aufl. Berlin: Springer.

– (2004b). *Analysis 2.* 5. Aufl. Berlin: Springer.

Körner, Henning (2015). Mathematik in Schule und Hochschule–welche Mathematik für Lehramtsstudierende? In: *Übergänge konstruktiv gestalten.* Springer, S. 199–209.

Kuckartz, Udo (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* 3. Aufl. Grundlagentexte Methoden. Beltz Juventa.

Kunter, Mareike und Ulrich Trautwein (2013). *Psychologie des Unterrichts.* Paderborn: Schöningh.

Kunz, Saskia, Kerstin Bräuning und Janett Zacher (2020). Welchen Blick haben Studienanfänger*innen des Grundschullehramtesauf Mathematik? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Hrsg. von Hans-Stefan Siller, Wolfgang Weigel und Jan Franz Wörler. Münster: WTM-Verlag, S. 585–588. DOI: 10.37626/GA9783959871402.0.

Kuwert, Ernst (2006). Elementare Differentialgeometrie. Vorlesungsskript SS06 (zuletzt besucht: 25.01.19). URL: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/analysis/Aufgaben/skript06.pdf.

Kwon, Oh Nam, Younggon Bae und Kuk Hwan Oh (2015). Design research on inquiry-based multivariable calculus: focusing on students' argumentation and instructional design. In: *ZDM Mathematics Education* 47, S. 997–1011. DOI: 10.1007/s11858-015-0726-z.

Leatham, Keith R. (2006). Viewing Mathematics Teachers' Beliefs as Sensible Systems. In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 9, S. 91–102. DOI: 10.1007/s10857-006-9006-8.

Leikin, Roza und Anat Levav-Waynberg (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. In: *Educational Studies in Mathematics* 66, S. 349–37. DOI: 10.1007/s10649-006-9071-z.

Levitt, Heidi u. a. (2018). Journal Article Reporting Standards for Qualitative Primary, Qualitative Meta-Analytic, and Mixed Methods Research in Psychology: The APA Publications and Communications Board Task Force Report. In: *American Psychologist* 73(1), S. 26–46.

Liljedahl, Peter (2008). Teachers' Insights into the Relationship between Beliefs and Practice. In: *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results.* Hrsg. von Jürgen Maaß und Wolfgang Schlöglmann. Rotterdam: Sense Publishers, S. 33–44.

Link, Frauke und Jörn Schnieder (2016). Mathematisch forschend lernen in der tertiären Bildung. In: *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2014*. Hrsg. von Walther Paravicini und Jörn Schnieder. Münster: WTM-Verlag, S. 159–176.

Loyens, Sofie und Remy Rikers (2016). Instruction Based on Inquiry. In: *Handbook of Research on Learning and Instruction*. Routledge.

Maher, Richard J. (2005). *Innovative Approaches to Undergraduate Mathematics Courses Beyond Calculus*. Washington: MAA.

Mason, John, Leone Burton und Kaye Stacey (2008). *Mathematisches Denken: Mathematik ist keine Hexerei*. 5. Aufl. München: Oldenbourg.

Mason, Lucia und Luisa Scrivani (2004). Enhancing students' mathematical beliefs: an intervention study. In: *Learning and Instruction* 14(2), S. 153–176. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2004.01.002.

May, David B. und Eugenia Etkina (2002). College physics students' epistemological self-reflection and its relationship to conceptual learning. In: *American Journal of Physics* 70(12), S. 1249–1258. DOI: 10.1119/1.1503377.

Messner, Rudolf (2012). Forschendes Lernen als Element praktischer Lehr-Lernkultur. In: *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität: Festschrift für Gabriele Kaiser*. Hrsg. von Werner Blum, Rita Borromeo Ferri und Katja Maaß. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, S. 334–346. DOI: 10.1007/978-3-8348-2389-2_34.

Mews, Sina und Andreas Pöge (2019). Das Zusammenspiel von Selbstbildern, motivationalen und emotionalen Orientierungen sowie deren Einfluss auf die Mathematikleistung in der PISA-Studie 2012. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 22, S. 899–924. DOI: 10.1007/s11618-019-00898-w.

Mhlolo, Michael Kainose, Hamsa Venkat und Marc Schäfer (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. In: *Pythagoras* 33(1). DOI: 10.4102/pythagoras.v33i1.22.

Mischau, Anina und Andrea Blunck (2006). Mathematikstudierende, ihr Studium und ihr Fach: Einfluss von Studiengang und Geschlecht. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14(1), S. 46–52.

Modulhandbuch für das Lehramt Mathematik (2015). GymPO. Universität Tübingen.

Modulhandbuch. Mathematik. Bachelor of Education. Lehramt Gymnasium (2020). PO 2018. Universität Tübingen.

Morris, David B. und Ellen L. Usher (2011). Developing teaching self-efficacy in research institutions: A study of award-winning professors. In: *Contemporary Educational Psychology* 36, S. 232–245. DOI: 10.1016/j.cedpsych.2010.10.005.

Muis, Krista R. (2004). Personal Epistemology and Mathematics: A Critical Review and Synthesis of Research. In: *Review of Educational Research* 74(3), S. 317–377. URL: http://www.jstor.org/stable/3516027.

– (2007). The Role of Epistemic Beliefs in Self-Regulated Learning. In: *Educational Psychologist* 42(3), S. 173–190. DOI: 10.1080/00461520701416306.

Muis, Krista R. u. a. (2016). Testing the TIDE: Examining the Nature of Students' Epistemic Beliefs Using a Multiple Methods Approach. In: *The Journal of Experimental Education* 84(2), S. 264–288. DOI: 10.1080/00220973.2015.1048843.

Nagel, Kathrin u. a. (2016). Ergänzungen zu den mathematischen Grundvorlesungen für Lehramtsstudierende im Fach Mathematik – ein Praxisbericht. In: *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Springer, S. 339–354.

Neuweg, Georg Hans (2015). *Das Schweigen der Könner: gesammelte Schriften zum impliziten Wissen*. Münster: Waxmann.

Nordheimer, Swetlana (2009). Kapitelübergreifende Rückschau: Unterrichtsmethode zum Vernetzen im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: WTM-Verlag.

Nussbaum, E. Michael (2008). Collaborative discourse, argumentation, and learning: Preface and literature review. In: *Contemporary Educational Psychology* 33, S. 345–359. DOI: 10.1016/j.cedpsych.2008.06.001.

Op't Eynde, Peter, Erik De Corte und Lieven Verschaffel (2002). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. In: *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Hrsg. von Gilah C. Leder, Erkki Pehkonen und Günter Törner. Dordrecht: Springer Netherlands, S. 13–37. DOI: 10.1007/0-306-47958-3_2.

Oprea, John (2007). *Differential Geometry and its Applications*. MAA.

Pieper-Seier, Irene (2002). Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002*. Franzbecker, S. 395–398.

Pietsch, James, Richard Walker und Elaine Chapman (2003). The Relationship Among Self-Concept, Self-Efficacy, and Performance in Mathematics During Secondary School. In: *Journal of Educational Psychology* 95(3), S. 589–603. DOI: 10.1037/0022-0663.95.3.589.

Pintrich, Paul R. und Elisabeth V. De Groot (1990). Motivational and Self-Regulated Learning Components of Classroom Academic Performance. In: *Journal of Educational Psychology* 82(1), S. 33–40.

Pouw, Wim T. J. L., Tamara van Gog und Fred Paas (2014). An Embedded and Embodied Cognition Review of Instructional Manipulatives. In: *Educational Psychology Review* 26, S. 51–72. URL: https://doi.org/10.1007/s10648-014-9255-5.

Prediger, Susanne (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In: *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum. DOI: 10.1007/978-3-658-01360-8_9.

Prediger, Susanne, Koeno Gravemeijer und Jere Confrey (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. In: *ZDM Mathematics Education* 47, S. 877–891. DOI: 10.1007/s11858-015-0722-3.

Ramos, Daniel (2. Jan. 2021a). *Mappae Mundi*. URL: https://imaginary.org/program/mappae-mundi.

– (2. Jan. 2021b). *The Sphere of the Earth*. URL: https://imaginary.org/program/the-sphere-of-the-earth.

Reiss, Kristina und Kathrin Nagel (2017). From high school to university mathematics: The change of norms. In: *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*. Hrsg. von Robin Göller u. a.

Retnowati, Endah, Paul Ayres und John Sweller (2017). Can Collaborative Learning Improve the Effectiveness of Worked Examples in Learning Mathematics? In: *Journal of Educational Psychology* 109(5), S. 666–679.

Roscoe, Matt und Bharath Sriraman (2011). A quantitative study of the effects of informal mathematics activities on the beliefs of preservice elementary school teachers. In: *ZDM* 43(4), S. 601–615. DOI: 10.1007/s11858-011-0332-7.

Rott, Benjamin und Timo Leuders (2016). Inductive and Deductive Justification of Knowledge: Flexible Judgments Underneath Stable Beliefs in Teacher Education. In: *Mathematical Thinking and Learning* 18(4), S. 271–286. DOI: 10.1080/10986065.2016.1219933.

Rouleau, Annette u. a. (2019). Changing Beliefs: The Case of First-Person Vicarious Experiences. In: *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Deve-*

lopment. Hrsg. von Patricio Felmer, Peter Liljedahl und Boris Koichu. Springer Nature. DOI: 10.1007/978-3-030-29215-7_11.

Ryve, Andreas, Per Nilsson und Kerstin Pettersson (2013). Analyzing effective communication in mathematics group work: The role of visual mediators and technical terms. In: *Educational Studies in Mathematics* 82, S. 497–514. DOI: 10.1007/s10649-012-9442-6.

Schneider, Anna-Maria (2021). Krümmung von Raumkurven – Herleitung eines Krümmungsbegriffes anhand von Helices. Zulassungsarbeit für das Staatsexamen. Magisterarb.

Schnell, Madeleine (2020). Flächenkrümmung im $\mathbb{R}^3$. Bestimmung der Mittleren und der Gauß-Krümmung durch das Anschmiegen ausgewählter Quadriken. Zulassungsarbeit für das Staatsexamen. Magisterarb.

Schoenfeld, Alan (2006). Problem Solving from Cradle to Grave. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, S. 41–73.

Schoenfeld, Alan H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 52, S. 1163–1175. DOI: 10.1007/s11858-020-01162-w.

Schoreit, Edgar (2016). *Kompetent und trotzdem ängstlich?* Kassel University Press.

Schukajlow, Stanislaw und Werner Blum (2011). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In: *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung – Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens.* Hrsg. von Katja Eilerts u. a. LIT Verlag, S. 249–267.

Schukajlow, Stanislaw, Dominik Leiss u. a. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. In: *Educational Studies in Mathematics* 79(2), S. 215–237.

Schwarzer, Ralf und Matthias Jerusalem, Hrsg. (1999). *Skalen zur Erfassung von Lehrer- und Schülermerkmalen: Dokumentation der psychometrischen Verfahren im Rahmen der Wissenschaftlichen Begleitung des Modellversuchs Selbstwirksame Schulen.*

Seidl, Ernst, Frank Loose und Edgar Bierende (2018). *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung.* Tübingen: Museum der Universität Tübingen MUT.

Skaalvik, Einar M. und Sidsel Skaalvik (2011). Self-Concept and Self-Efficacy in Mathematics: Relation with Mathematics Motivation and Achievement. In: *Journal of Education Research* 5(3/4), S. 241–264.

Slavin, Robert E. (2016). Instructon Based on Cooperative Learning. In: *Handbook of Research on Learning and Instruction.* Routledge.

Smith, Beverly (2007). Promoting Inquiry-Based Instruction and Collaboration in a Teacher Preparation Program. In: *The Mathematics Teacher* 100(8), S. 559–564.

Stage, Frances K. und Peter Kloosterman (1991). Relationships Between Ability, Belief and Achievement in Remedial College Mathematics Classrooms. In: *Research and Teaching in Developmental Education* 8(1), S. 27–36. URL: http://www.jstor.org/stable/42801817.

Steinberg, Günter (1985). Die Krümmung von Funktionsgraphen – Unterrichtsvorschläge für Leistungs- und Grundkurse. In: *Didaktik der Mathematik* 13, S. 222–236.

Strømskag, Heidi (2017). A methodology for instructional design in mathematics—with the generic and epistemic student at the centre. In: *ZDM Mathematics Education* 49, S. 909–921.

Stull, Andrew T. u. a. (2012). Representational Translation With Concrete Models in Organic Chemistry. In: *Cognition and Instruction* 30(4), S. 404–434. DOI: 10.1080/07370008.2012.719956.

Taimina, Daina (2009). *Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes*. A K Peters.
Tchoshanov, Mourat A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics* 76, S. 141–164. DOI: 10.1007/s10649-010-9269-y.
Tippett, Christine D. (2010). Refutation text in science education: a review of two decades of research. In: *International Journal of Science and Mathematics Education* 8(6), S. 951–970. DOI: 10.1007/s10763-010-9203-x.
Törner, Günter u. a. (2010). Understanding Teacher's Actions in the Classroom by Applying Schoenfeld's Theory *Teaching-In-Context*: Reflecting on Goals and Beliefs. In: *Theories of Mathematics Education*. Hrsg. von Bharath Sriraman und Lyn English. Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-642-00742-2_38.
Trebing, Thomas (2015). Tutorien: Das Prinzip der minimalen Hilfe in der universitären Rechenübung. In: *Neue Wege in der tutoriellen Lehre in der Studieneingangsphase*. Hrsg. von Olga Zitzelsberger u. a. Münster: WTM-Verlag.
Verschaffel, Lieven u. a. (1999). Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment With Fifth Graders. In: *Mathematical Thinking and Learning* 1, S. 195–229. DOI: 10.1207/s15327833mtl0103_2.
vom Hofe, Rudolf (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.
Voss, Thamar u. a. (2013). Mathematics Teachers' Beliefs. In: *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers*. Hrsg. von Mareike Kunter u. a. Springer. Kap. 12, S. 249–271.
Webb, Noreen (2009). The teacher's role in promoting collaborative dialogue in the classroom. In: *British Journal of Educational Psychology* 79, S. 1–28. DOI: 10.1348/000709908X380772.
Weinberg, Suzanne Levin (2001). *Is There a Connection between Fractions and Division? Students' Inconsistent Responses*. 42p.; Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (Seattle, WA, April 10-14, 2001).
Wenzl, Thomas, Andreas Wernet und Imke Kollmer (2018). *Praxisparolen. Dekonstruktionen zum Praxiswunsch von Lehramtsstudierenden*. Wiesbaden: Springer VS. DOI: 10.1007/978-3-658-19461-1.
Wessling, Claudia (2013). „Einfach nur Formeln reinpauken – das bringt nichts". Ulrich Kortenkamp im Gespräch. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 21(3), S. 144–146. DOI: 10.1515/dmvm-2013-0060.
Weygandt, Benedikt und Reinhard Oldenburg (2014). Weltbilder von Lehramtsstudierenden zur genetischen Sicht auf Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. WTM-Verlag, S. 1307–1310.
Wiljes, Jan-Hendrik de, Tanja Hamann und Barbara Schmidt-Thieme (2016). Die Hildesheimer Mathe-Hütte – Ein Angebot zur Einführung in mathematisches Arbeiten im ersten Studienjahr. In: *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Springer, S. 101–113.
Winter, Heinrich (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig: Vieweg.
Wollschläger, Daniel (2017). *Grundlagen der Datenanalyse mit R*. Berlin: Springer Spektrum.
Wunderling, Helmut (2001). Was entstehen kann, wenn Lineare Algebra und Analysis in Klassenstufe 11 nicht getrennt unterrichtet werden. In: *Praxis der Mathematik: Sekundarstufen 1 und 2* 43(3), S. 124–129.

Wußing, Hans (2008). *6000 Jahre Mathematik*. Bd. 1. Berlin: Springer.

Yackel, Erna und Paul Cobb (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 27(4), S. 458–477. URL: http://www.jstor.org/stable/749877.

Yackel, Erna, Chris Rasmussen und Karen King (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. English. In: *Journal of Mathematical Behavior* 19(3), S. 275–287.

You, Ji Won (2018). Testing the three-way interaction effect of academic stress, academic self-efficacy, and task value on persistence in learning among Korean college students. In: *Higher Education* 76, S. 921–935. DOI: 10.1007/s10734-018-0255-0.

Yusof, Yudariah b. M. und David Tall (1999). Changing Attitudes to University Mathematics Through Problem Solving. In: *Educational Studies in Mathematics* 37, S. 67–82. DOI: 10.1023/A:1003456104875.

Zech, Friedrich (1996). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*. 8. Aufl. Weinheim: Beltz.

Zimmerman, Barry J. und Manuel Martinez-Pons (1990). Student Differences in Self-Regulated Learning: Relating Grade, Sex, and Giftedness to Self-Efficacy and Strategy Use. In: *Journal of Educational Psychology* 82(1), S. 51–59.

A. Anhang

A.1. Arbeitsblätter

Die folgenden Seiten enthalten die im Seminar verwendeten Arbeitsblätter.

Stationen zur Krümmung ebener Kurven

City-Roller

Fahrt Slalom um die Stühle.
Wie legt sich der City-Roller bzw. euer Körper in die Kurve?

Wo ist der City-Roller ganz aufrecht? Wo ist der City-Roller ganz ungekrümmt/ungeknickt?
Wie fühlt sich das an?

Ball

Werft euch die Bälle zu und beobachtet die Flugbahn.
Wo ist die Flugbahn am stärksten gekrümmt und warum?

Wo ist sie am wenigsten gekrümmt und warum?

Kreide

Malt draußen mit Kreide verschiedene Kurven auf den Boden. Lauft diese Kurven ab, einen Fuß links und einen rechts des Striches.
Legen beide Füße einen gleich langen Weg zurück? Oder gibt es Kurven, bei denen ein Fuß weiter „laufen" muss als der andere?

Bei welchen Kurven müssen sich beide Füße garantiert gleich weit bewegen?

Gegenstände

Wo tritt eindimensionale Krümmung auf? Sucht Beispiele im Raum oder draußen.

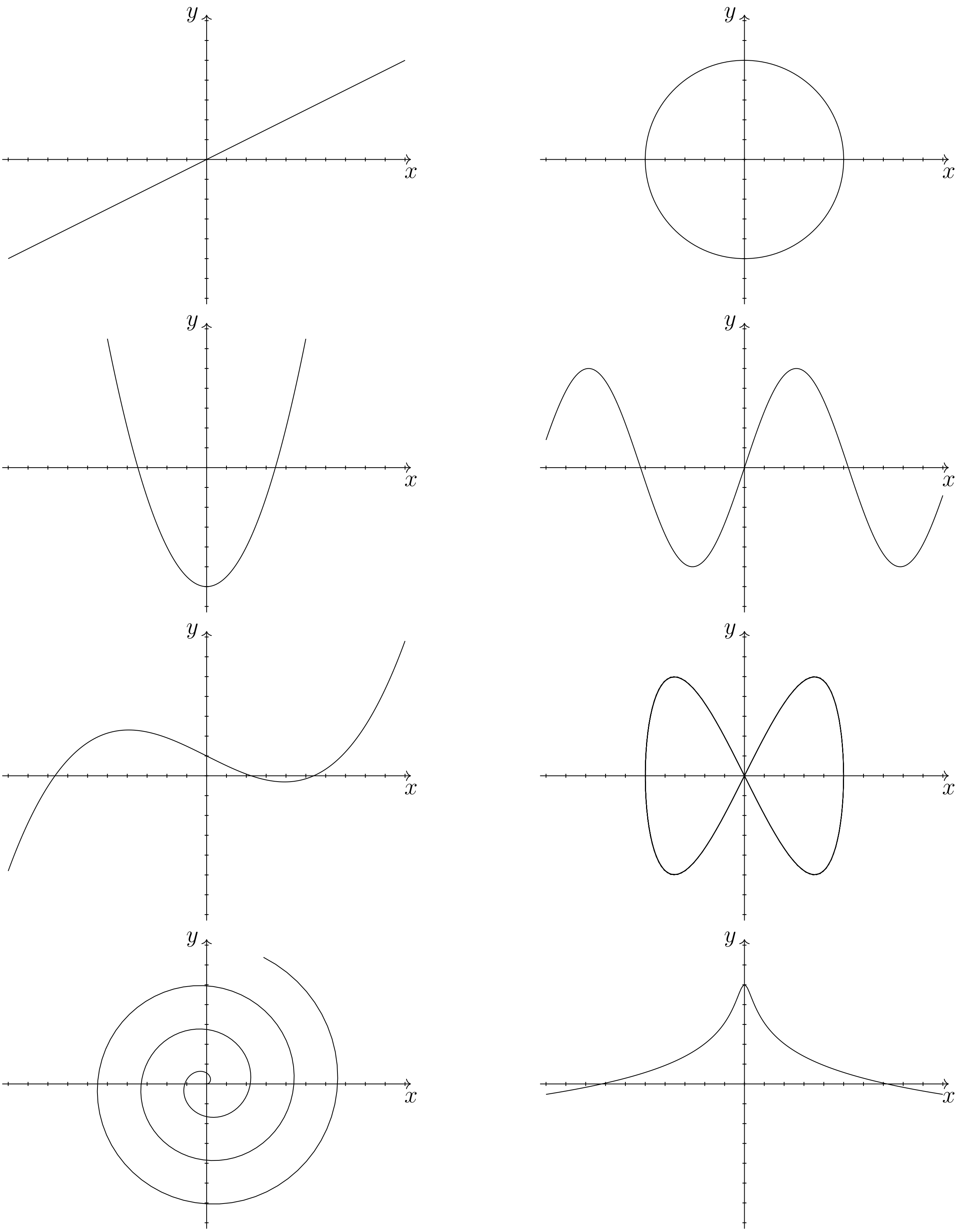
Wo sind die Gegenstände stärker gekrümmt, wo weniger?

Welche Gegenstände sind gleichmäßig gekrümmt? Welche sind nicht gekrümmt?

Definition von Krümmung ebener Kurven

Aufgabe 1

Welche der folgenden Kurven sind gekrümmt? Welche nicht? Was könnt ihr über die „Stärke“ der Krümmung sagen?



Aufgabe 2

An den Stationen und in Aufgabe 1 ist euch sicher aufgefallen, dass Krümmung von der Position auf der Kurve abhängt. Markiert an den Kurven Punkte oder Bereiche, an denen ihr die Krümmung als groß, klein oder null bezeichnen würdet.
Was könnt ihr über das Vorzeichen der Krümmung sagen?
Eine Gerade hat offensichtlich Krümmung 0. Was ist mit Kreisen? Welche Rolle spielt der Radius?

Aufgabe 3

Betrachtet die Kurven, die Graph einer Funktion sind. Wäre es für diese Kurven sinnvoll, die Krümmung als zweite Ableitung der Funktion zu definieren, also $\kappa = \gamma''$?

Aufgabe 4

Sucht nun eine konkrete Formel für die Krümmung von Kurven. Überprüft eure Formel mit Hilfe der in Aufgabe 2 markierten Punkte und Bereiche.

Zusatzfrage
Wie kann man die Länge einer Kurve oder eines Kurvenabschnitts berechnen?

Zusatzfrage
Um Kurven gut miteinander vergleichen zu können, ist es sinnvoll, alle Kurven gleich schnell mit konstanter Geschwindigkeit zu durchlaufen, also am besten mit Geschwindigkeit 1. Eine solche Kurve heißt „nach Bogenlänge parametrisiert". Warum hat man diesen Begriff gewählt? Kann man jede Kurve nach Bogenlänge parametrisieren?

HINWEIS: Die Länge einer Kurve ist gegeben durch $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Zusatzfrage
Auf welche verschiedenen Arten kann man eine Kurve mathematisch beschreiben? Kennen gelernt habt ihr schon die Parametrisierung. Welche fallen euch noch ein?

Zusatzfrage
Wenn man eine Kurve sucht und nur ihre Krümmung an jedem Punkt kennt, ist die Kurve dann schon eindeutig bestimmt?

HINWEISE: Wenn die Krümmung konstant ist, welche Formen kann dann die Kurve annehmen?
Wenn ein Anfangspunkt und ein Vektor (Richtung) vorgeben sind, kann man mit dem Satz von Picard-Lindelöf arbeiten.

Raumkurven

Bei eurem Material ist ein Perlonfaden dabei. Dieser bildet näherungsweise immer einen Kreis und eignet sich deswegen, um Krümmung ebener Kurven zu messen. Kann man damit auch Krümmung von Raumkurven messen? Warum (nicht)? Worauf muss man ggf. achten? Probiert es aus!

Flächen

Welche Flächen sind euch gut bekannt? Wie kann man sie mathematisch beschreiben? Schaut euch beispielsweise die Objekte an, die in der Materialkiste sind.

Bei der Untersuchung von Kurven spielen Tangenten eine Rolle. Gibt es so was wie Tangenten auch bei Flächen?

Wie kann man den Flächeninhalt gekrümmter Flächen berechnen?

Abstände

Wie kann man auf einer gekrümmten Fläche Abstände messen?

Was ist auf einer gekrümmten Fläche eine „Gerade“?

Wenn man sich im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ entlang einer Geraden bewegt, was lässt sich dann über die Beschleunigung sagen?

Krümmung von Flächen

Was könnte man bei Flächen als Krümmung bezeichnen?

Was macht es für die Krümmung für einen Unterschied, ob man die Fläche von außen betrachtet oder ob man sich vorstellt, ein Wesen zu sein, das in dieser Fläche lebt und nicht fliegen kann? Nutzt die Flächen in der Kiste, um euch die verschiedenen Sichtweisen besser vorstellen zu können.

Wie könnte die Krümmung von Kurven, die in der Fläche liegen, mit der Krümmung der Fläche selbst zusammenhängen?

Rotationsflächen

Eine *Rotationsfläche* (auch *Drehfläche* oder *axialsymmetrische Fläche*) ist eine Fläche, die symmetrisch zu einer Achse ist, d. h. sie entsteht durch Rotation einer Kurve um eine Achse. Wie kann man solche Flächen derart parametrisieren, dass die Axialsymmetrie ausgenutzt wird?

Für die Kugeloberfläche (Sphäre) kennen wir schon eine parametrische Beschreibung. Wie kann man den Zylinder parametrisch beschreiben? Wie den Kegel oder den Torus? Zylinder und Kegel könnt ihr euch basteln, ein Torus liegt in der Kiste.

Wie groß ist die Fläche des Mantels einer Rotationsfläche?

Wie sehen die Geodäten auf einer Rotationsfläche aus?

Längen-, Winkel- und Flächentreue

Wer sich in unbekannten Gegenden von A nach B bewegen will, braucht eine Landkarte oder einen Stadtplan. Am besten eine Karte, die stimmt. Was wünscht man sich von so einer Karte? Bei Wanderungen oder Autofahrten ist es gut zu wissen, wie weit die Strecke ist. Die Karte sollte also Längen korrekt wiedergeben. Wenn man hingegen wissen will, wie groß ein Grundstück oder auch ein Staat ist, hätte man gerne eine Karte, bei der die Flächeninhalte korrekt sind. Und wenn man sich für die Form eines Landes interessiert oder Wege mit Hilfe von Winkelangaben finden muss, sollten in der Karte alle Winkel den Originalen gleich sein. Am allerbesten wäre natürlich, wenn man alles gleichzeitig in einer Karte haben könnte. Geht das?
Ihr könnt am Touchscreen im C3 mit verschiedenen Karten experimentieren.

Schaut euch allgemein an, was eine Parametrisierung F einer Fläche erfüllen muss, um

a) längentreu

b) flächentreu

c) winkeltreu

zu sein. Für die Matrix $G := (DF)^T(DF)$ lassen sich die Eigenschaften möglicherweise einfacher ausdrücken als für F selbst. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den drei Eigenschaften? Impliziert eine die andere?

Gibt es eine längentreue Parametrisierung von $\mathbb{S}^2$?

Krümmung von Flächen, Teil 2

In Differentialgeometrie werden klassischerweise zwei symmetrische Bilinearformen verwendet, die sogenannte *erste und zweite Fundamentalform*. Sei $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche und $q \in U$. Dann sind die Fundamentalformen definiert als

$$I_q(u,v) := \langle DF(q)\cdot u, DF(q)\cdot v\rangle$$
$$II_q(u,v) := \langle DF(q)\cdot u, DN(q)\cdot v\rangle$$

für $u, v \in \mathbb{R}^2$. Vorstellen kann man sich u und v als Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $F(q)$.

Man kann zeigen, dass es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, für die gilt:

$$II_q(u,v) = I_q(Au, v).$$

Zeigt, dass $\det(A)$ das Gleiche ist, wie die von euch definierte Krümmung. Diese Krümmung heißt *Gaußkrümmung* und A heißt *Weingartenabbildung*.
Neben der Determinante gibt es eine weitere übliche Funktion, die aus einer Matrix einen Skalar extrahiert, nämlich die Spur. $\mathrm{spur}(A)$ heißt *mittlere Krümmung*.

Was sind diese Krümmungen anschaulich? Berechnet jeweils beide Krümmungen für die Sphäre, den Zylinder und vielleicht den Torus oder Kegel. Zylinder und Kegel könnt ihr aus Papier basteln, Kugeln gibt es genug und ein Torus liegt in der Kiste. Oder ihr besorgt euch einen Donut…

Krümmung von Flächen, Teil 2

Der bisherige Ansatz für die Krümmung von Flächen („mittlere Krümmung“) liefert für einige Flächen Ergebnisse, die man erwarten konnte, für andere aber eher unintuitive. Für die symmetrische Sattelfläche ist die mittlere Krümmung im Sattelpunkt 0, obwohl die Fläche auch in diesem Punkt gekrümmt aussieht. Die mittlere Krümmung scheint also nicht alle Informationen über Krümmung zu enthalten, die man von einem Krümmungsbegriff erwartet. Es stellt sich somit die Frage, was man neben der mittleren Krümmung noch als Krümmung betrachten könnte.

Bei den Kurven war ein Ansatz, Tangentialvektoren (oder äquivalent Normalenvektoren) an nahe beieinander liegenden Punkten zueinander in Beziehung zu setzen. Beim bisherigen Ansatz bei den Flächen wurde nur der Normalenvektor im betrachteten Punkt verwendet. Vielleicht ließe sich also mit verschiedenen Normalenvektoren etwas Sinnvolles basteln?

Krümmung von Flächen, Teil 2

Wir haben nun eine Herleitung für die mittlere Krümmung eines Punktes einer graphisch beschriebenen Fläche gesehen,

$$\text{Fläche} \quad F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix},$$
$$\text{mittlere Krümmung} \quad H(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\operatorname{spur}(D^2 f)(x_0,y_0),$$

wobei $D^2 f$ die Hessematrix von f ist. Hierbei wurde angenommen, dass die Tangentialebene in $F(x_0,y_0)$ parallel zur x-y-Ebene ist. H ist das übliche Zeichen für die mittlere Krümmung.

Schaut euch weitere Beispiele an, um diese Krümmung besser zu verstehen. Als eine geeignete Klasse von Beispielen bieten sich Quadriken an, da sie relativ einfach und doch variantenreich sind. Diese werden von Polynomen zweiten Grades beschrieben, also von Polynomen der Form $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + c = 0$ bzw. in Matrixnotation $x^T A x + 2b^T x + c = 0$. Diese Flächen kann man lokal immer als Graph schreiben.

Wie lassen sich die Punkte, die eine zur x-y-Ebene parallele Tangentialebene haben, klassifizieren und wie hängt diese Klassifikation mit der Krümmung zusammen?

Für die symmetrische Sattelfläche ist die mittlere Krümmung im Sattelpunkt 0, obwohl die Fläche auch in diesem Punkt gekrümmt aussieht. Die mittlere Krümmung scheint also nicht alle Informationen über Krümmung zu enthalten, die man von einem Krümmungsbegriff erwartet. Es stellt sich somit die Frage, was man neben der mittleren Krümmung noch als Krümmung betrachten könnte. Die mittlere Krümmung ist die Spur der Hessematrix. Aus LinA kennen wir noch eine andere Abbildung, die einer Matrix eine Zahl zuordnet: die Determinante. Berechnet $\det D^2 f$ für die Beispiele, bei denen ihr auch die mittlere Krümmung angeschaut habt. Erscheint dabei $\det D^2 f$ als sinnvoller Krümmungsbegriff, insbesondere bei den Flächen, bei denen die mittlere Krümmung etwas „übersieht“? Für welche Flächen ist $\det D^2 f$ positiv, für welche negativ und für welche gleich 0?

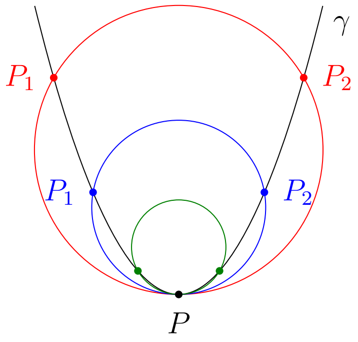


Abbildung A.1.: Krümmungskreis geometrisch bestimmt mit Hilfe von drei Punkten

A.2. Ausarbeitung der mathematischen Herleitungen

Dieses Kapitel enthält eine Ausarbeitung mehrerer in Abschnitt 2.5.1 angedeuteter Zugänge zur Krümmung ebener Kurven. Die Ausarbeitungen basieren, wenn nicht anders angegeben, auf den Skriptbeiträgen der TeilnehmerInnen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, glatte Kurve. γ ist im Folgenden entweder über eine allgemeine Parametrisierung gegeben oder als Graph einer glatten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$. Auf der Kurve sei ein Punkt P gewählt, an dem die Krümmung κ bestimmt werden soll.

A. Zugänge über Krümmungskreise

a) Geometrisch

Sei $P = \gamma(t)$ für ein $t \in I$.

Definition. Die *Krümmung κ eines Kreises* mit Radius r ist definiert als $\kappa = \pm\frac{1}{r}$, wobei die Krümmung positiv ist, wenn der Kreis mathematisch positiv parametrisiert ist, und negativ, wenn der Kreis mathematisch negativ parametrisiert ist.

Idee. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt entspricht der Krümmung des Kreises, der die Kurve in diesem Punkt am besten annähert. Um diesen Kreis zu bestimmen, werden zwei Punkte auf der Kurve gewählt, die nicht kollinear mit P sind. Zusammen bestimmen die drei Punkte einen eindeutigen Kreis. Lässt man die beiden gewählten Punkte gegen P laufen, ergibt sich der Kreis, der die Kurve am besten annähert, der *Schmiegekreis*, siehe Abbildung A.1.

Herleitung. Zur Durchführung des Ansatzes sind zwei Schritte nötig. Zunächst wird der Mittelpunkt des Kreises bestimmt und anschließend sein Radius berechnet.

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := P$. Sei $h \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$$P_1 := \gamma(t-h) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t-h) \\ \gamma_2(t-h) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \gamma[I] \text{ und}$$
$$P_2 := \gamma(t+h) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t+h) \\ \gamma_2(t+h) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \gamma[I]$$

und P, P_1, P_2 nicht kollinear sind.

Durch drei gegebene Punkte P, P_1, P_2 kann ein eindeutig bestimmter Kreis konstruiert werden. Der Kreismittelpunkt M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken PP_1 und PP_2, siehe Abbildung 2.2.

Aufstellen der Geradengleichungen der Mittelsenkrechten g_1 und g_2

Der Mittelpunkt M_i der Strecke PP_i ist gegeben durch

$$M_i = P + \frac{1}{2}(P_i - P) = \frac{1}{2}(P + P_i). \tag{A.1}$$

Die Geradengleichung g_i der Mittelsenkrechten, die orthogonal zur Strecke PP_i ist und durch den Punkt M_i geht, lautet

$$g_i(s_i) = M_i + s_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (P_i - P) = M_i + s_i \begin{pmatrix} y - y_i \\ x_i - x \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

mit $s_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2\}$.

Berechnung des Schnittpunktes von g_1 und g_2

Der Schnittpunkt von g_1 und g_2 ist der gesuchte Kreismittelpunkt $M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
g_1(s_1) &= g_2(s_2) \\
\iff M_1 + s_1 \begin{pmatrix} y - y_1 \\ x_1 - x \end{pmatrix} &= M_2 + s_2 \begin{pmatrix} y - y_2 \\ x_2 - x \end{pmatrix} \\
\iff s_1 \begin{pmatrix} y - y_1 \\ x_1 - x \end{pmatrix} - s_2 \begin{pmatrix} y - y_2 \\ x_2 - x \end{pmatrix} &= M_2 - M_1 \\
&= \frac{1}{2}(P + P_2) - \frac{1}{2}(P + P_1) = \frac{1}{2}(P_2 - P_1) \\
\iff s_1 \begin{pmatrix} y - y_1 \\ x_1 - x \end{pmatrix} - s_2 \begin{pmatrix} y - y_2 \\ x_2 - x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für s_2 ergibt sich daraus

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(y - y_1)(y_2 - y_1) - (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x)(y - y_2) - (y - y_1)(x_2 - x)}.$$

s_2 in g_2 aus (A.2) eingesetzt liefert die Koordinaten des gesuchten Kreismittelpunkts M.

$$M = M_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(y - y_1)(y_2 - y_1) - (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x)(y - y_2) - (y - y_1)(x_2 - x)} \begin{pmatrix} y - y_2 \\ x_2 - x \end{pmatrix}.$$

Mit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t-h) \\ \gamma_2(t-h) \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t+h) \\ \gamma_2(t+h) \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
M = M_2 + &\frac{(\gamma_2(t) - \gamma_2(t-h))(\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t-h)) - (\gamma_1(t-h) - \gamma_1(t))(\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t-h))}{(\gamma_1(t-h) - \gamma_1(t))(\gamma_2(t) - \gamma_2(t+h)) - (\gamma_2(t) - \gamma_2(t-h))(\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t))} \\
&\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_2(t) - \gamma_2(t+h) \\ \gamma_1(t+h) - \gamma_1(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ermittlung des Grenzwertes von M für $h \to 0$

Es gilt

$$\lim_{h\to 0} M_2 = P.$$

Beim zweiten Summanden gehen in beiden Komponenten Zähler und Nenner gegen 0. Falls der Satz von L'Hospital in diesem Fall anwendbar ist, muss er mindestens dreimal angewendet werden, denn in beiden Komponenten enthält der Zähler Produkte von drei Faktoren, die für $h \to 0$ alle gegen 0 gehen. Da beim Ableiten von Produkten jeder entstehende Summand nur einen abgeleiteten Faktor enthält, bleiben in der ersten Ableitung jeweils zwei Faktoren übrig, die für $h \to 0$ gegen 0 gehen. Somit können die Zähler erst einen nicht verschwindenden Beitrag liefern, wenn es einen Summanden gibt, in dem jeder Faktor mindestens einmal abgeleitet wurde. Dies ist bei der dritten Ableitung der Fall. Dieser Summand ist auch der einzige, der im Folgenden betrachtet werden muss, da alle anderen Summanden im Limes verschwinden. Er kommt sechsmal vor.

$$\begin{aligned}
(fgh)''' &= (f'gh + fg'h + fgh')'' \\
&= ((f''gh + f'g'h + f'gh') + (f'g'h + fg''h + fg'h') + (f'gh' + fg'h' + fgh''))' \\
&= (f'''gh + f''g'h + f''gh') + (f''g'h + f'g''h + f'g'h') + (f''gh' + f'g'h' + f'gh'') \\
&+ (f''g'h + f'g''h + f'g'h') + (f'g''h + fg'''h + fg''h') + (f'g'h' + fg''h' + fg'h'') \\
&+ (f''gh' + f'g'h' + f'gh'') + (f'g'h' + fg''h' + fg'h'') + (f'gh'' + fg'h'' + fgh''') \\
&= 6 \cdot f'g'h' + (...).
\end{aligned}$$

Die erste Ableitung des Nenners verschwindet im Limes für $h \to 0$ aus dem gleichen Grund wie der Zähler. Die zweite Ableitung des Nenners verschwindet im Limes für $h \to 0$, da der einzige nicht verschwindende Beitrag von dem Summanden stammt, in dem jeder Faktor einmal abgeleitet wurde. Dieser Summand tritt aber einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auf und hebt sich somit auf. Von der dritten Ableitung des Nenners sind genau die Summanden relevant, bei denen beide Faktoren mindestens einmal abgeleitet wurden, da die übrigen im Limes verschwinden.

Aus diesen Überlegungen und den entsprechenden Rechnungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{(y-y_1)(y_2-y_1)-(x_1-x)(x_2-x_1)}{(x_1-x)(y-y_2)-(y-y_1)(x_2-x)} \begin{pmatrix} y-y_2 \\ x_2-x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - 6\gamma_1''(t)\gamma_2'(t)} \begin{pmatrix} -12 \cdot \gamma_2'(t) \cdot |\gamma'(t)|^2 \\ 12 \cdot \gamma_1'(t) \cdot |\gamma'(t)|^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2|\gamma'(t)|^2}{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))} \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
M &= P + \frac{1}{2} \cdot \frac{2|\gamma'(t)|^2}{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))} \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix} \\
&= P + \frac{|\gamma'(t)|^2}{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))} \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Der Radius des Kreises ist der Abstand von M zu P.

$$\begin{aligned}
r^2 &= \langle M-P, M-P\rangle \\
&= \left\langle \frac{|\gamma'(t)|^2}{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))}\begin{pmatrix}-\gamma_2'(t)\\ \gamma_1'(t)\end{pmatrix}, \frac{|\gamma'(t)|^2}{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))}\begin{pmatrix}-\gamma_2'(t)\\ \gamma_1'(t)\end{pmatrix}\right\rangle \\
&= \frac{|\gamma'(t)|^4}{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))^2}\left\langle \begin{pmatrix}-\gamma_2'(t)\\ \gamma_1'(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\gamma_2'(t)\\ \gamma_1'(t)\end{pmatrix}\right\rangle \\
&= \frac{|\gamma'(t)|^6}{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))^2} \\
\Rightarrow r &= \frac{|\gamma'(t)|^3}{|\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))|} \\
\Rightarrow \kappa(t) &= \frac{\det(\gamma'(t),\ \gamma''(t))}{|\gamma'(t)|^3}.
\end{aligned}$$

Bei der Krümmung entfällt der Betrag, da die Krümmung auch negativ sein kann. So ist die Definition konsistent mit der Definition der Krümmung eines Kreises.

Falls es anders als oben angenommen keine drei nicht kollinearen Punkte gibt, ist die Kurve in einer Umgebung von P eine Gerade. Geraden sollten anschaulich Krümmung 0 haben. Setzt man eine Gerade in die hergeleitete Formel ein, so ergibt sich wie gewünscht 0.

b) Analytisch

Sei γ graphisch parametrisiert, also $\gamma(t) = \begin{pmatrix}t\\ f(t)\end{pmatrix}$. Sei $P = \gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ und $f''(t_0) \neq 0$.

Definition. Die *Krümmung* κ *eines Kreises* mit Radius r ist definiert als $\kappa = \pm\frac{1}{r}$, wobei die Krümmung positiv ist, wenn der Kreis mathematisch positiv parametrisiert ist, und negativ, wenn der Kreis mathematisch negativ parametrisiert ist.

Idee. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt entspricht der Krümmung des Kreises, der die Kurve in diesem Punkt am besten annähert, so wie die Tangente die Gerade ist, die die Kurve am besten annähert. Eine Tangente ist eine Kurve erster Ordnung, ein Kreis von zweiter Ordnung. Es sollen daher die erste und die zweite Ableitung der Kurve und des Kreises in P übereinstimmen. Der Kreis heißt dann *Schmiegekreis*.

Herleitung. Sei $K(t)$ die Funktion, die die obere oder untere Hälfte des Schmiegekreises beschreibt, je nach dem welche sich besser an die Kurve anpasst. Für den Halbkreis K, die Funktion f und den Punkt P soll Folgendes gelten:

1. $f(t_0) = K(t_0)$, d. h. Kurve und Schmiegekreis haben P als gemeinsamen Punkt.
2. $f'(t_0) = K'(t_0)$, d. h. Kurve und Schmiegekreis haben in P die gleiche Steigung.
3. $f''(t_0) = K''(t_0)$, sodass Kurve und Schmiegekreis in P die gleiche Krümmungsrichtung haben.
4. Der Mittelpunkt $M = (x_m, y_m)$ des Kreises liegt auf der Normalen an den Graph der Funktion f im Punkt P.

Der (Halb-)Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r wird beschrieben durch

$$(t - x_m)^2 + (K(t) - y_m)^2 = r^2. \tag{A.3}$$

Diese Gleichung leiten wir zweimal ab, um die obigen Bedingungen 1-3 einsetzen zu können. Erste Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[(t - x_m)^2 + (K(t) - y_m)^2\right] = \frac{d}{dt}r^2 \\
\Rightarrow\quad & 2(t - x_m) + 2K'(t)\,(K(t) - y_m) = 0 \\
\Rightarrow\quad & (t - x_m) + K'(t)\,(K(t) - y_m) = 0.
\end{aligned}$$

Zweite Ableitung in t_0:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}_{|t=t_0}\left[(t - x_m) + K'(t)\,(K(t) - y_m)\right] = 0 \\
\Rightarrow\quad & 1 + K''(t_0)\,(K(t_0) - y_m) + K'(t_0)^2 = 0
\end{aligned}$$

Einsetzen der Bedingungen 1-3 liefert

$$\begin{aligned}
& 1 + f''(t_0)\,(f(t_0) - y_m) + f'(t_0)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & f(t_0) - y_m = -\frac{1 + f'(t_0)^2}{f''(t_0)},
\end{aligned}$$

falls $f''(t_0) \neq 0$ ist. Dadurch ist der zweite Summand der Kreisgleichung (A.3) in Abhängigkeit von f bestimmt. Um auch den ersten Summanden in Abhängigkeit von f darzustellen, bestimmen wir die Normale an die Tangente in P und verwenden Bedingung 4. Die Steigung der Tangente ist $f'(t_0)$. Die Steigung der Normalen N ist also $-\frac{1}{f'(t_0)}$. Die Normalengleichung ist somit

$$N(t) = -\frac{1}{f'(t_0)}(t - t_0) + f(t_0).$$

Nach Bedingung 4 liegt der Mittelpunkt des Schmiegekreises auf dieser Normalen. Es gilt also

$$\begin{aligned}
& y_m = -\frac{1}{f'(t_0)}(x_m - t_0) + f(t_0) \\
\Leftrightarrow\quad & y_m - f(t_0) = -\frac{1}{f'(t_0)}(x_m - t_0).
\end{aligned}$$

Einsetzen des vorigen Ergebnisses liefert

$$\begin{aligned}
& -\frac{1 + f'(t_0)^2}{f''(t_0)} = -\frac{1}{f'(t_0)}(x_m - t_0) \\
\Leftrightarrow\quad & x_m - t_0 = f'(t_0)\frac{1 + f'(t_0)}{f''(t_0)}.
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (A.3) mit $t = t_0$ und Bedingung 1 folgt damit

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(f'(t_0)\frac{1+f'(t_0)^2}{f''(t_0)}\right)^2 + \left(-\frac{1+f'(t_0)^2}{f''(t_0)}\right)^2 \\ &= \frac{(1+f'(t_0)^2)^3}{f''(t_0)^2} \\ \Rightarrow r &= \left|\frac{(1+f'(t_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t_0)|}\right| \\ \Rightarrow \kappa(t_0) &= \frac{f''(t_0)}{(1+f'(t_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Bei der Krümmung entfällt der Betrag, da die Krümmung auch negativ sein kann. So ist die Definition konsistent mit der Definition der Krümmung eines Kreises.

An Wendepunkten ist die Krümmung anschaulich 0 und es gilt $f''(t_0) = 0$. Auch die Formel liefert in diesem Fall 0 als Krümmung.

c) Geometrisch-analytisch 1

Dank an Lea Lange für den Hinweis auf diesen Zugang.

Sei γ graphisch parametrisiert, also $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$. Sei $P = \gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ und $f''(t_0) \neq 0$.

Definition. Die *Krümmung κ eines Kreises* mit Radius r ist definiert als $\kappa = \pm\frac{1}{r}$, wobei die Krümmung positiv ist, wenn der Kreis mathematisch positiv parametrisiert ist, und negativ, wenn der Kreis mathematisch negativ parametrisiert ist.

Idee. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt entspricht der Krümmung des Kreises, der die Kurve in diesem Punkt am besten annähert. Um diesen Kreis zu bestimmen, wählen wir einen Punkt auf der Kurve. Der Schnittpunkt der beiden Normalen in P und im gewählten Punkt soll der Mittelpunkt eines Kreises sein und der Abstand des Mittelpunktes zu P sein Radius, siehe Abbildung 2.3. Lässt man den Punkt gegen P laufen, ergibt sich der Kreis, der die Kurve am besten annähert, der *Schmiegekreis*.

Herleitung. Sei $h \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [t_0, t_0 + h]$. Sei $P_1 = \gamma(t_0 + h)$. Die Gleichungen der Normalen in P bzw. P_1 sind

$$\begin{aligned} N_0(t) &= -\frac{1}{f'(t_0)}(t - t_0) + f(t_0), \\ N_1(t) &= -\frac{1}{f'(t_0+h)}(t - t_0 - h) + f(t_0 + h). \end{aligned}$$

Wir bestimmen den Schnittpunkt der beiden Normalen.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{f'(t_0)}(t - t_0) + f(t_0) = -\frac{1}{f'(t_0+h)}(t - t_0 - h) + f(t_0 + h) \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{f'(t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{f'(t_0+h)}(t - t_0 - h) = f(t_0 + h) - f(t_0) \\ \Rightarrow \quad & \left(-\frac{1}{f'(t_0)} + \frac{1}{f'(t_0+h)}\right)t = f(t_0 + h) - f(t_0) - \frac{t_0}{f'(t_0)} + \frac{t_0 + h}{f'(t_0+h)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad t &= \frac{f(t_0+h) - f(t_0) - \frac{t_0}{f'(t_0)} + \frac{t_0+h}{f'(t_0+h)}}{-\frac{1}{f'(t_0)} + \frac{1}{f'(t_0+h)}} \\
&= \frac{f(t_0+h) - f(t_0) + \frac{t_0(f'(t_0)-f'(t_0+h))+hf'(t_0)}{f'(t_0)f'(t_0+h)}}{\frac{f'(t_0)-f'(t_0+h)}{f'(t_0)f'(t_0+h)}} \\
&= \frac{\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} + \frac{t_0}{f'(t_0)f'(t_0+h)}\frac{f'(t_0)-f'(t_0+h)}{h} + \frac{1}{f'(t_0+h)}}{\frac{1}{f'(t_0)f'(t_0+h)}\frac{f'(t_0)-f'(t_0+h)}{h}} \\
&\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{f'(t_0) - \frac{t_0}{f'(t_0)^2}f''(t_0) + \frac{1}{f'(t_0)}}{-\frac{1}{f'(t_0)^2}f''(t_0)} \\
&= \frac{t_0 f''(t_0) - f'(t_0)^3 - f'(t_0)}{f''(t_0)}
\end{aligned}
$$

Einsetzen in N_0 liefert die zweite Koordinate des Mittelpunktes:

$$
\begin{aligned}
N_0(t) &= -\frac{1}{f'(t_0)}\left(\frac{t_0 f''(t_0) - f'(t_0)^3 - f'(t_0)}{f''(t_0)} - t_0\right) + f(t_0) \\
&= \frac{f'(t_0)^2+1}{f''(t_0)} + f(t_0).
\end{aligned}
$$

Der Radius des Kreises ist der Abstand des Mittelpunktes von P.

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \left|\begin{pmatrix} t \\ N_0(t)\end{pmatrix} - P\right|^2 \\
&= \left(\frac{t_0 f''(t_0) - f'(t_0)^3 - f'(t_0)}{f''(t_0)} - t_0\right)^2 + \left(\frac{f'(t_0)^2+1}{f''(t_0)} + f(t_0) - f(t_0)\right)^2 \\
&= \left(f'(t_0)\frac{f'(t_0)^2+1}{f''(t_0)}\right)^2 + \left(\frac{f'(t_0)^2+1}{f''(t_0)}\right)^2 \\
&= \frac{(f'(t_0)^2+1)^3}{f''(t_0)^2} \\
\Rightarrow r &= \frac{(f'(t_0)^2+1)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t_0)|} \\
\Rightarrow \kappa(t_0) &= \frac{f''(t_0)}{(f'(t_0)^2+1)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Bei der Krümmung entfällt der Betrag, da die Krümmung auch negativ sein kann. So ist die Definition konsistent mit der Definition der Krümmung eines Kreises.

An Wendepunkten ist die Krümmung anschaulich 0 und es gilt $f''(t_0) = 0$. Auch die Formel liefert in diesem Fall 0 als Krümmung.

e) Schmiegeparabel

Sei γ graphisch parametrisiert, also $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t)\end{pmatrix}$. Sei $P = \gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in I$.

Definition. Die *Krümmung κ eines Kreises* mit Radius r ist definiert als $\kappa = \pm\frac{1}{r}$, wobei die

Krümmung positiv ist, wenn der Kreis mathematisch positiv parametrisiert ist, und negativ, wenn der Kreis mathematisch negativ parametrisiert ist.

Idee. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt entspricht der Krümmung des Kreises, der die Kurve in diesem Punkt am besten annähert. Wir berechnen zunächst die Krümmung einer Parabel im Scheitel, indem wir dort einen Kreis anschmiegen. Dann können wir an alle anderen Kurven Parabeln anstelle von Kreisen anschmiegen, um deren Krümmung zu bestimmen. Dafür eignet sich die Taylor-Approximation.

Um die Krümmung der Parabel im Scheitel zu bestimmen, lassen wir einen Kreis in die Parabel fallen, der „stecken bleibt“. Dann schrumpfen wir den Kreis, sodass er weiter nach unten sinkt, bis er den Scheitel berührt.

Herleitung. Sei $g(t) = at^2 + bt + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine Parabel und sei ein Kreis gegeben, der die Parabel in den Punkten $Q := (t_0 + h, g(t_0 + h))$ und $(t_0 - h, g(t_0 - h))$ berührt und dessen Mittelpunkt somit auf der Symmetrieachse der Parabel liegt (siehe Abbildung 2.5).

Der Radius des Kreises entspricht dem Abstand des Kreismittelpunktes zu Q. Um diesen Abstand zu berechnen, wenden wir Pythagoras auf das Dreieck an, das vom Kreismittelpunkt, Q und dem Schnittpunkt S der Tangente mit der Symmetrieachse gebildet wird. Die Tangente T an die Parabel in Q, die auch gleichzeitig eine Tangente an den Kreis ist, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T(s) &= g'(t_0 + h)(s - t_0 - h) + g(t_0 + h) \\ &= (2a(t_0 + h) + b)\,(s - t_0 - h) + a(t_0 + h)^2 + b(t_0 + h) + c. \end{aligned}$$

Der (orientierte) Abstand von S zum Ursprung entspricht

$$T(t_0) = -hg'(t_0 + h) + g(t_0 + h).$$

Mit dem Satz von Pythagoras gilt

$$|S - Q|^2 = h^2 + (g(t_0 + h) - T(t_0))^2.$$

Die Normale N in Q ist gegeben durch

$$N(s) = -\frac{1}{g'(t_0 + h)}(s - t_0 - h) + g(t_0 + h).$$

Der Kreismittelpunkt ist $(t_0, N(t_0))$ mit

$$N(t_0) = \frac{h}{g'(t_0 + h)} + g(t_0 + h).$$

Also ist der Abstand des Kreismittelpunktes von S gegeben durch $|N(t_0) - T(t_0)|$. Also ist der Radius r des Kreises, der dem Abstand von Q zum Kreismittelpunkt entspricht, gegeben durch

$$\begin{aligned} r^2 &= (N(t_0) - T(t_0))^2 - \left(h^2 + (g(t_0 + h) - T(t_0))^2\right) \\ &= N(t_0)^2 - 2N(t_0)T(t_0) - h^2 - g(t_0 + h)^2 + 2g(t_0 + h)T(t_0) \\ &= \frac{h^2}{g'(t_0 + h)^2} + h^2. \end{aligned}$$

Da $g'(t_0) = 0$ ist, kann bei der Grenzwertberechnung der Satz von L'Hospital angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} r^2 &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{g'(t_0+h)^2} + h^2 \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{g'(t_0+h)g''(t_0+h)} + h^2 \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g''(t_0+h)^2 + g'(t_0+h)g'''(t_0+h)} + h^2 \\
&= \frac{1}{g''(t_0)^2} \\
&= \frac{1}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Also ist die Krümmung des Graphen einer Parabel $g(t) = at^2 + bt + c$ im Scheitel $\kappa(t_0) = 2a$.

Bemerkung. Das beschriebene Verfahren zur Bestimmung des Schmiegekreises kann nicht nur für die Parabel angewendet werden, sondern auch für andere Funktionen, wenn die erste Ableitung im betrachteten Punkt verschwindet und die zweite Ableitung nicht.

Die Parabel, die sich an eine Funktion um einen Punkt P herum am besten anschmiegt, ist gerade das Taylorpolynom zweiten Grades. Da wir die Krümmung der Parabel nur im Scheitel kennen, müssen wir den Graphen der Funktion so drehen, dass P mit dem Scheitelpunkt des Taylorpolynoms übereinstimmt. Der Scheitel einer Parabel ist an der Stelle, an der die Tangente waagerecht ist, d. h. $g'(t) = 0$. Also müssen wir den Graphen der Funktion so drehen, dass die Tangente in P waagerecht ist, also um $\alpha = -\arctan(f'(t_0))$. Damit bei der Drehung P das Drehzentrum ist, muss der Graph vorher so verschoben werden, dass P mit dem Ursprung zusammenfällt. Der gedrehte Graph $\widehat{\gamma}$ ist

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} (\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \gamma(t_0) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\arctan(f'(t_0))) & \sin(\arctan(f'(t_0))) \\ -\sin(\arctan(f'(t_0))) & \cos(\arctan(f'(t_0))) \end{pmatrix} (\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \gamma(t_0) \\
&= \frac{1}{(1 + f'(t_0)^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & f'(t_0) \\ -f'(t_0) & 1 \end{pmatrix} (\gamma(t) - \gamma(t_0)) + \gamma(t_0)
\end{aligned}$$

Nach dem Satz über die implizite Funktion ist $\widehat{\gamma}$ in einer Umgebung von P als Graph darstellbar, sodass eine Parabel wie gewünscht angeschmiegt werden kann.

C. Tangenten-/Winkeländerung

b) Winkeländerung

Sei $P = \gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in I$.

Idee. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt ist die momentane Änderung der Tangentenrichtung, denn je stärker sich die Richtung ändert, desto enger ist die Kurve und desto größer ist die Krümmung.

Herleitung. Sei $P_1 = \gamma(t_1)$ für ein $t_1 \in I$, $t_1 \neq t_0$. Die Änderung der Tangentenrichtung von P_1 zu P entspricht dem Winkel φ zwischen $\gamma'(t_1)$ und $\gamma'(t_0)$ (siehe Abbildung 2.7):

$$\cos(\varphi) = \left\langle \frac{\gamma'(t_1)}{|\gamma'(t_1)|}, \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \right\rangle.$$

Im Limes für $t_1 \to t_0$ geht dieser Winkel jedoch gegen 0 und der Kosinus ist um 0 nicht bijektiv, d. h. der Arcuskosinus ist in 0 nicht definiert. Im Gegensatz dazu ist der Sinus in 0 bijektiv, weshalb wir $\sin(\varphi)$ berechnen, was dem Kosinus des Winkels zwischen $\gamma'(t_1)$ und der Normalen $N(t_0) = \frac{1}{|\gamma'(t_0)|}\begin{pmatrix} -\gamma_2'(t_0) \\ \gamma_1'(t_0) \end{pmatrix}$ in P entspricht:

$$\sin(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left\langle \frac{\gamma'(t_1)}{|\gamma'(t_1)|}, N(t_0) \right\rangle.$$

Die Winkeländerung φ setzen wir ins Verhältnis zur Länge L der Kurve zwischen P und P_1,

$$L_\gamma([t_0, t_1]) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt,$$

ähnlich wie bei der Steigung einer Funktion die „Erhebung" zum „Fortgang" ins Verhältnis gesetzt wird, also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Wir definieren also die Krümmung κ als

$$\kappa(t_0) := \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\varphi}{L_\gamma([t_0, t_1])}$$

und berechnen den Grenzwert mit dem Satz von L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\kappa(t_0) &= \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\varphi}{L_\gamma([t_0, t_1])} \\
&= \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\arcsin\left\langle \frac{\gamma'(t_1)}{|\gamma'(t_1)|}, N(t_0) \right\rangle}{\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt} \\
&= \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\left\langle \frac{\gamma''(t_1)}{|\gamma'(t_1)|} - \frac{\gamma'(t_1)\langle\gamma'(t_1), \gamma''(t_2)\rangle}{|\gamma'(t_1)|^3}, N(t_0) \right\rangle}{|\gamma'(t_1)|\sqrt{1 - \left\langle \frac{\gamma'(t_1)}{|\gamma'(t_1)|}, N(t_0) \right\rangle^2}} \\
&= \frac{\left\langle \frac{\gamma''(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}, N(t_0) \right\rangle}{|\gamma'(t_0)|} \\
&= \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))}{|\gamma'(t_0)|^3}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Herleitung kann auf verschiedene Weisen modifiziert werden.

- Für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven ist die Rechnung etwas einfacher. Als Ergebnis erhält man $\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$.

- Anstelle der Kurvenlänge kann auch die Bogenlänge des Kreises verwendet werden, der die Kurve in P und P_1 schneidet und dessen Kreissektor von P bis P_1 den Innenwinkel φ hat.

- Die Idee, sich einen Winkel im Verhältnis zu einer Strecke anzuschauen, kann aus der Betrachtung des Kreises entstehen, da in einem Kreissektor mit Winkel φ und Bogenlänge L gilt: $\frac{\varphi}{L} = \frac{1}{r}$, was der für den Kreis erwarteten Krümmung entspricht. Der Sektorwinkel ist gleich dem Winkel der beiden Tangenten an den Sektorgrenzen, sodass sich der Winkel auf diese Weise auf allgemeine Kurven übertragen lässt.

c) Winkeländerung bei Graphen

Sei γ graphisch parametrisiert, also $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$. Sei $P = \gamma(t)$ für ein $t \in I$ und $f''(t) \neq 0$.

Idee. Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt ist die momentane Änderung des Winkels zwischen Tangente und t-Achse, denn je stärker sich der Winkel ändert, desto enger ist die Kurve und desto größer ist die Krümmung.

Herleitung. Sei $h \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $[t, t+h] \subset I$. Sei $P_1 = \gamma(t+h)$. Der Winkel α zwischen der Tangente in P und der t-Achse ist (siehe Abbildung 2.8)

$$\alpha = \arctan(f'(t)).$$

Die Differenz der Tangentenwinkel bei P und P_1 ist also

$$\alpha_1 - \alpha = \arctan(f'(t+h)) - \arctan(f'(t)).$$

Die Winkeländerung $\alpha_1 - \alpha$ setzen wir ins Verhältnis zur Länge L der Kurve zwischen P und P_1,

$$L_\gamma([t, t+h]) = \int\limits_t^{t+h} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt,$$

ähnlich wie bei der Steigung einer Funktion die „Erhebung“ zum „Fortgang“ ins Verhältnis gesetzt wird, also $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Wir definieren also die Krümmung κ als

$$\kappa(t) := \lim_{h \to 0} \frac{\alpha_1 - \alpha}{L_\gamma([t, t+h])}$$

und berechnen den Grenzwert mit dem Satz von L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &:= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha_1 - \alpha}{L_\gamma([t, t+h])} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\arctan(f'(t+h)) - \arctan(f'(t))}{\int\limits_t^{t+h} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f''(t+h)}{\sqrt{1 + f'(t+h)^2}^3} \\
&= \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Statt den Satz von L'Hospital zu verwenden, kann man den Bruch auch mit $\frac{1}{h}$ erweitern. Dann ist direkt klar, dass sich im Zähler und im Nenner die Ableitung ergibt.

An Wendepunkten ist die Krümmung anschaulich 0 und es gilt $f''(t_0) = 0$. Auch die Formel liefert in diesem Fall 0 als Krümmung.

D. Parallele Kurven

a) Längenvergleich

Sei $P = \gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in I$.

Idee. Zusätzlich zu γ betrachten wir zwei Parallelkurven, die durch Verschiebung entlang der Normalen in jedem Punkt entstehen. Die Krümmung ergibt sich aus dem Verhältnis der Länge eines Kurvenstücks um P herum mit der Differenz der Länge der entsprechenden Kurvenstücke der Parallelkurven.

Herleitung. Sei γ nach Bogenlänge parametrisiert, d. h. $|\gamma'(t)| = 1$ für alle $t \in I$. Sei $h \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $[t_0 - h, t_0 + h] \subset I$. Sei $\vec{n}(t)$ die (normierte) Normale an die Kurve in $\gamma(t)$, also

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \begin{pmatrix} \gamma_2(t) \\ -\gamma_1(t) \end{pmatrix}.$$

Wir definieren Parallelkurven γ_{+h} und γ_{-h} zu γ als

$$\begin{aligned} \gamma_{+h}(t) &:= \gamma(t) + h\vec{n}(t) \\ \gamma_{-h}(t) &:= \gamma(t) - h\vec{n}(t), \end{aligned}$$

siehe auch Abbildung 2.9. Wir betrachten nun die Länge jeder der drei Kurven auf dem Intervall $[t_0 - h, t_0 + h]$ und definieren die Krümmung in P als

$$\kappa(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{L_{\gamma_{+h}} - L_{\gamma_{-h}}}{L_\gamma^2}.$$

Das Quadrat im Nenner basiert auf folgender Überlegung. Bei einem Kreis ist die Krümmung um so kleiner, je größer der Radius ist. Für einen Kreis erscheint also $\frac{1}{r}$ als Krümmung plausibel. Die Einheit der Krümmung nehmen wir deshalb als $\frac{1}{\text{Längeneinheit}}$ an, weshalb in der obigen Definition der Krümmung das Quadrieren des Nenners nötig ist. Für die Krümmung ergibt sich

$$\begin{aligned} \kappa(t_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{L_{\gamma_{+h}} - L_{\gamma_{-h}}}{L_\gamma^2} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_{t_0-h}^{t_0+h} |\gamma'_{+h}(t)| dt - \int_{t_0-h}^{t_0+h} |\gamma'_{-h}(t)| dt}{\left(\int_{t_0-h}^{t_0+h} |\gamma'(t)| dt \right)^2} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_{t_0-h}^{t_0+h} |\gamma'(t) + h\vec{n}'(t)| dt - \int_{t_0-h}^{t_0+h} |\gamma'(t) - h\vec{n}'(t)| dt}{(2h)^2}. \end{aligned}$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner für $h \to 0$ gegen 0 geht, soll an dieser Stelle der Satz von L'Hospital angewendet werden. Die Ableitung des Zählers ergibt sich aus der Leibnizregel für Parameterintegrale:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\ dt = f(x,b(x)) \cdot \frac{d}{dx}b(x) - f(x,a(x)) \cdot \frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx}f(x,t)\,dt.$$

Für den Zähler Z ergibt sich somit als Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh}Z &= \frac{d}{dh}\int_{t_0-h}^{t_0+h} |\gamma'(t) + h\vec{n}'(t)| - |\gamma'(t) - h\vec{n}'(t)|\,dt \\
&= |\gamma'(t_0+h) + h\vec{n}'(t_0+h)| - |\gamma'(t_0+h) - h\vec{n}'(t_0+h)| \\
&= |\gamma'(t_0-h) + h\vec{n}'(t_0-h)| - |\gamma'(t_0-h) - h\vec{n}'(t_0-h)| \\
&\quad + \int_{t_0-h}^{t_0+h} \frac{h|\vec{n}'(t)|^2 + \langle \vec{n}'(t), \gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t) + h\vec{n}'(t)|} - \frac{h|\vec{n}'(t)|^2 - \langle \vec{n}'(t), \gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t) - h\vec{n}'(t)|}\,dt.
\end{aligned}$$

Die Ableitung des Nenners ist $8h$. Somit gehen der neue Zähler und der neue Nenner für $h \to 0$ wieder gegen 0, weshalb wir den Satz von L'Hospital noch einmal anwenden.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dh^2}Z = &\frac{\langle \gamma''(t_0+h) + \vec{n}'(t_0+h) + h\vec{n}''(t_0+h), \gamma'(t_0+h) + h\vec{n}'(t_0+h)\rangle}{|\gamma'(t_0+h) + h\vec{n}'(t_0+h)|} \\
&- \frac{\langle \gamma''(t_0+h) - \vec{n}'(t_0+h) - h\vec{n}''(t_0+h), \gamma'(t_0+h) - h\vec{n}'(t_0+h)\rangle}{|\gamma'(t_0+h) - h\vec{n}'(t_0+h)|} \\
&+ \frac{\langle -\gamma''(t_0-h) + \vec{n}'(t_0-h) - h\vec{n}''(t_0-h), \gamma'(t_0-h) + h\vec{n}'(t_0-h)\rangle}{|\gamma'(t_0-h) + h\vec{n}'(t_0-h)|} \\
&+ \frac{\langle -\gamma''(t_0-h) - \vec{n}'(t_0-h) + h\vec{n}''(t_0-h), \gamma'(t_0-h) - h\vec{n}'(t_0-h)\rangle}{|\gamma'(t_0-h) - h\vec{n}'(t_0-h)|} \\
&+ \frac{h|n'(t_0+h)|^2 + \langle n'(t_0+h), \gamma'(t_0+h)\rangle}{|\gamma'(t_0+h) + hn'(t_0+h)|} - \frac{h|n'(t_0+h)|^2 - \langle n'(t_0+h), \gamma'(t_0+h)\rangle}{|\gamma'(t_0+h) - hn'(t_0+h)|} \\
&+ \frac{h|n'(t_0-h)|^2 + \langle n'(t_0-h), \gamma'(t_0-h)\rangle}{|\gamma'(t_0-h) + hn'(t_0-h)|} - \frac{h|n'(t_0-h)|^2 - \langle n'(t_0-h), \gamma'(t_0-h)\rangle}{|\gamma'(t_0-h) - hn'(t_0-h)|} \\
&+ \int_{t_0-h}^{t_0+h} \frac{d}{dh}\left(\frac{h|n'(t)|^2 + \langle n'(t), \gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t) + hn'(t)|} - \frac{h|n'(t)|^2 - \langle n'(t), \gamma'(t)\rangle}{|\gamma'(t) - hn'(t)|}\right)dt.
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung des Nenners ist 8. Insgesamt ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
\kappa(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{8}\frac{d^2}{dh^2}Z \\
&= \frac{1}{8}\left(4\langle \gamma'(t_0), \vec{n}'(t_0)\rangle + 4\langle \gamma'(t_0), \vec{n}'(t_0)\rangle + 0\right) \\
&= \langle \gamma'(t_0), \vec{n}'(t_0)\rangle \\
&= \det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)).
\end{aligned}$$

b) Maximaler Abstand

Der in diesem Abschnitt beschriebene Zugang basiert auf Wunderling (2001).

Sei γ graphisch parametrisiert, also $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$. Sei $P = \gamma(t)$ für ein $t \in I$ und $f''(t) \neq 0$.

Idee. Lässt man einen Kreis auf einem Funktionsgraphen entlangrollen, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises eine zum Funktionsgraphen parallele Kurve in dem Sinne, dass jeder Punkt den gleichen Abstand von der Kurve hat. Je nach Größe des Kreises kann die Parallelkurve dabei „Fischschwänze" enthalten (nicht-reguläre Punkte). Die Krümmung wird definiert als Kehrwert des Radius' des größten Kreises, der eine Parallelkurve ohne „Fischschwänze" produziert.

Definition. Die *Krümmung κ eines Kreises* mit Radius $|r|$ ist definiert als $\kappa = \frac{1}{r}$, wobei die Krümmung positiv ist, wenn der Kreis mathematisch positiv parametrisiert ist, und negativ, wenn der Kreis mathematisch negativ parametrisiert ist.

Herleitung. Sei $|r|$ der Radius des Kreises. Sei n die Normale an die Kurve, also

$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}} \begin{pmatrix} -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die durch die Bewegung des Mittelpunktes beschriebene Kurve gegeben durch

$$\gamma_r(t) = \gamma(t) + rn(t).$$

Gesucht sind die $t \in I$, für die

$$0 = \gamma_r'(t)$$

gilt, also die nicht-regulären Punkte von γ_r. Die Ableitung von γ_r ist

$$\begin{aligned}
\gamma_r'(t) &= \gamma'(t) + rn'(t) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} - r\frac{f'(t)f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^3} \begin{pmatrix} -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix} + r\frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}} \begin{pmatrix} -f''(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} + r\frac{f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^3} \begin{pmatrix} -1 \\ -f'(t) \end{pmatrix} \\
&= \left(1 - r\frac{f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
& 0 = \gamma_r'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} + r\frac{f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^3} \begin{pmatrix} -1 \\ -f'(t) \end{pmatrix} \\
\iff \quad & 1 = \frac{rf''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^3} \\
\iff \quad & \frac{1}{r} = \frac{f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^3}.
\end{aligned}$$

Also ist die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}^3}.$$

An Wendepunkten ist die Krümmung anschaulich 0 und es gilt $f''(t_0) = 0$. Auch die Formel liefert in diesem Fall 0 als Krümmung.

Bemerkung. Der gleiche Ansatz kann auch für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven durchgeführt werden. Die Parallelkurve ist wie oben gegeben durch

$$\gamma_r = \gamma(t) + rn(t) = \gamma(t) + r \begin{pmatrix} -\gamma_2'(t) \\ \gamma_1'(t) \end{pmatrix},$$

wobei für n der Normierungsfaktor entfällt. Für die Ableitung von n gilt:

$$n'(t) = \begin{pmatrix} -\gamma_2''(t) \\ \gamma_1''(t) \end{pmatrix},$$

d. h. $\Rightarrow |n'| = |\gamma''|$. Da γ'' senkrecht auf γ' steht, ist n' parallel zu γ', also

$$\gamma' = \pm\frac{1}{|\gamma''|}n' \Rightarrow n' = \pm|\gamma''|\gamma'.$$

Damit ergibt sich für nicht-reguläre Punkte:

$$\begin{aligned} & 0 = \gamma_r'(t) = \gamma'(t) + rn'(t) = \gamma'(t) \pm r|\gamma''(t)|\gamma'(t) = \gamma'(t)\left(1 \pm r|\gamma''(t)|\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \pm\, r|\gamma''(t)| = -1 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{r} = \pm|\gamma''(t)|. \end{aligned}$$

Die Krümmung ist also gegeben durch $\kappa(t) = \pm|\gamma''(t)|$.

A.3. Hands-on-Materialien

Die folgende Liste ist eine Aufstellung aller im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ verwendeten Hands-on-Materialien.

- City-Roller/Fahrrad
- Straßenkreide
- kleine Bälle, z. B. Jonglierbälle
- Draht, z. B. Blumendraht
- Pappe, z. B. von Verpackungen
- Knete
- Strohhalme oder Zahnstocher
- Papier
- Torus, z. B. gestrickt, siehe unten
- Wasserball oder andere sphärische Gegenstände, wenn möglich mit Globusaufdruck
- hyperbolische Fläche, z. B. gehäkelt, siehe unten
- Katenoid/Wendelfläche, z. B. gehäkelt, siehe unten
- Luftballons
- Perlonfaden als „Krümmungskreis“
- Faden
- Reepschnur (hält die Form etwas besser als Faden)
- Spielzeugflugzeug
- Klebeband
- Schere

Eine Strickanleitung für einen Torus findet sich in belcastro und Yackel (2007) im Kapitel „Only two knit stitches can create a torus“ von sarah-marie belcastro. Häkelanleitungen für hyperbolische Flächen finden sich in Taimina (2009): Pseudosphäre (S. 81-82), Hyperbolische Ebene (S. 82-84) und Katenoid/Wendelfläche (S. 115-116). Die Pseudosphäre ist von diesen drei am einfachsten herzustellen: Man beginnt mit einem umhäkelten Fadenring oder einem Maschenring mit beispielsweise vier Maschen. Dann häkelt man in Spiralen weiter und verdoppelte jede n-te Masche, wobei n für die gesamte Fläche konstant gewählt wird, beispielsweise $n = 6$. Das Katenoid ist isometrisch zu einem Stück einer Wendelfläche mit einer Drehung. Dies kann man mit dem gehäkelten Modell veranschaulichen, da es sich in beide Formen bringen lässt.

Abbildung A.2.: Katenoid, Wendelfläche, Pseudosphäre, Torus, Möbiusband, Wasserballglobus

Abbildung A.3.: Strohhalme, Perlonfaden, Straßenkreide, Knete, „Krümmungsmesser“, Draht, Pappe, Luftballone, Zahnstocher

A.4. Reflexionsaufgaben

A.4.1. Wintersemester 17/18

Krümmung ebener Kurven in der Schule

Aufgabe: Schreiben Sie zwei Texte. Erklären Sie darin Krümmung ebener Kurven einmal einem Schüler/einer Schülerin der Oberstufe und einmal einem Schüler/einer Schülerin der Unterstufe.
Sie können beispielsweise einen Text schreiben, der für ein Schulbuch geeignet wäre, oder aufschreiben, wie sie das Thema mündlich erläutern würden.
Sie dürfen gerne Zeichnungen hinzufügen, Handlungen mit konkreten Gegenständen beschreiben oder Ihr Vorgehen kommentieren (etwa: „Das sage/mache ich, weil…“).

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, Sie leiten ein Erstsemestertutorium (LinA oder Ana). In Ihre Sprechstunde kommt jemand mit der Frage: „Haben eigentlich LinA und Ana irgendwas miteinander zu tun? Ich sehe da gar keinen Zusammenhang.“
Was würden Sie antworten? Würden Sie einem Studenten/einer Studentin gegen Ende des Grundstudiums (Ende 4. Semester) etwas anderes antworten?

Zusammenhang von elementarer Differentialgeometrie und Mathematik in der Schule

Aufgabe: Wo sehen Sie Anknüpfungspunkte des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ an Themen der Schulmathematik? Welche Fragen könnten im Mathematikunterricht in der Schule auftreten, die Sie nun, nach der Teilnahme am Seminar, besser beantworten können?

A.4.2. Wintersemester 18/19

Reflexion

Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie es gelernt?

Welche Fragen sind noch offen?

Wenn Sie der Dozent/die Dozentin wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

Damit Wissen wirklich nutzbar wird, ist es nötig, verschiedene „Wissensbits“ miteinander zu vernetzen. Dies ist auch in der Arbeit mit SchülerInnen wichtig, da von ihnen erwartet wird, Wissen aus einem Gebiet in einem anderen anwenden zu können. Im Rahmen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ haben Sie selbst die Gelegenheit, dieses Vernetzen von Wissen zu erleben und zu reflektieren.

Haben Sie sich beispielsweise schon einmal gefragt, ob Lineare Algebra und Analysis eigentlich etwas miteinander zu tun haben? In den entsprechenden Vorlesungen wird nicht immer explizit auf Verbindungen hingewiesen. In späteren Vorlesungen braucht man dann aber doch häufig Objekte und Konzepte aus beiden Gebieten gleichzeitig.

Sind Ihnen bei den bisherigen Seminarthemen Stellen aufgefallen, an denen LinA und Ana zusammenkommen?

Hilft Ihnen das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen? Wenn ja, wie? Wenn nein, was würde Ihnen stattdessen möglicherweise helfen?

A.5. Fragebogen: Vorstellungen von Studierenden über Mathematik

Vielen Dank, dass Sie an dieser Befragung teilnehmen.

Ihr persönlicher Code: ______________________

Was Mathematik ausmacht

In diesem Teil des Fragebogens finden Sie Feststellungen über das Wesen von Mathematik, die man in Lehrbüchern finden kann oder die in Interviews mit MathematikerInnen oder Mathematiklehrkräften genannt wurden. Inwieweit treffen die folgenden Aussagen auf Sie zu?
Es geht hierbei um Ihre persönliche Meinung. Wählen Sie bei jeder Frage die Antwort aus, die am besten auf Sie zutrifft. Es gibt keine richtigen oder falschen Antworten, denn es geht um Ihre persönliche Einstellung. Halten Sie sich bitte nicht an einer einzelnen Frage auf, sondern gehen Sie einfach nach Ihrem spontanen ersten Eindruck. Der Fragebogen enthält aus methodischen Gründen teilweise ähnliche Frageformulierungen. Wir bitten Sie, trotzdem jede Frage separat zu beantworten und danken für Ihr Verständnis und Ihre Geduld.

	trifft nicht zu			trifft voll zu
Mathematik besteht aus Lernen, Erinnern und Anwenden.	☐	☐	☐	☐
Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.	☐	☐	☐	☐
Wenn man eine Mathematikaufgabe lösen soll, muss man das richtige Verfahren kennen, sonst ist man verloren.	☐	☐	☐	☐
Mathematik ist das Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Verfahren.	☐	☐	☐	☐
Fast alle mathematischen Probleme können durch direkte Anwendung von bekannten Regeln, Formeln und Verfahren gelöst werden.	☐	☐	☐	☐
In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.	☐	☐	☐	☐
Mathematik lebt von Einfällen und neuen Ideen.	☐	☐	☐	☐
Mathematische Aufgaben und Probleme können auf verschiedenen Wegen richtig gelöst werden.	☐	☐	☐	☐
Wenn man sich mit mathematischen Problemen auseinandersetzt, kann man oft Neues (Zusammenhänge, Regeln, Begriffe) entdecken.	☐	☐	☐	☐
Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben von Schüler/innen wichtig.	☐	☐	☐	☐
Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.	☐	☐	☐	☐
Viele Teile der Mathematik haben einen praktischen Nutzen oder einen direkten Anwendungsbezug.	☐	☐	☐	☐
Mit ihrer Anwendbarkeit und Problemlösekapazität besitzt die Mathematik eine hohe gesellschaftliche Relevanz.	☐	☐	☐	☐

Studium und Beruf

Hier geht es um Ihre persönlichen Einschätzungen und Gefühle. Bitte kreuzen Sie jeweils das Kästchen an, das am ehesten auf Sie persönlich zutrifft.

	trifft nicht zu			trifft voll zu
Auch wenn ich im Mathematikstudium eine schwierige Aufgabe lösen soll, glaube ich, dass ich es schaffen werde.	☐	☐	☐	☐
Was ich mir im Mathematikstudium vornehme, schaffe ich auch.	☐	☐	☐	☐
Ich kann im Mathematikstudium auch die schwierigen Aufgaben lösen, wenn ich mich anstrenge.	☐	☐	☐	☐
Ich gebe mein Bestes im Mathematikstudium.	☐	☐	☐	☐
Ich gebe mir im Mathematikstudium Mühe.	☐	☐	☐	☐
Im Mathematikstudium strenge ich mich an, auch wenn es mir manchmal schwer fällt.	☐	☐	☐	☐
Im Mathematikstudium strenge ich mich auch dann an, wenn ich eine Aufgabe zunächst nicht gleich verstehe.	☐	☐	☐	☐

Für wie wichtig halten Sie die **Inhalte** der folgenden Veranstaltungen für Ihre spätere berufliche Tätigkeit, z. B. als Lehrer oder Lehrerin oder in Industrie oder Wirtschaft? Falls Sie eine dieser Veranstaltungen noch nicht besucht haben, lassen Sie die Zeile einfach frei.

	völlig unwichtig			sehr wichtig
Lineare Algebra 1	☐	☐	☐	☐
Analysis 1	☐	☐	☐	☐
Numerik	☐	☐	☐	☐
Stochastik	☐	☐	☐	☐
Geometrie	☐	☐	☐	☐
Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“	☐	☐	☐	☐

	völlig unwichtig			sehr wichtig
Für wie wichtig halten Sie Ihr Mathematikstudium insgesamt für Ihre spätere berufliche Tätigkeit?	☐	☐	☐	☐

Welche Inhalte/Begriffe aus den Vorlesungen Lineare Algebra und Analysis lassen sich welchen Themen aus der Schulmathematik zuordnen? Nennen Sie alle, die Ihnen spontan einfallen.

Beispiel: Schule: Stetigkeit von Funktionen als „ohne abzusetzen zeichenbar"; Uni: Formalisierung der Anschauung, was zu einem allgemeineren Verständnis von Stetigkeit führt

Mathematisches Grundwissen

Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ eine beliebige Matrix. Sei $\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung.
Ist α bei jedem $x \in \mathbb{R}^k$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Sei $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$, d.h. D bildet beliebig oft differenzierbare Funktionen auf ihre erste Ableitung ab. D ist linear.

Nennen Sie einen Eigenvektor von D (nicht die Null-Abbildung). ____________________

Zu welchem Eigenwert gehört dieser Eigenvektor? ____________________

Nennen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert π. ____________________

Platz für Notizen:

Aufgabe 3

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sei $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenige lineare Abbildung, die f in $x_0 \in \mathbb{R}$ am besten approximiert.
Wie lässt sich L in Abhängigkeit von f berechnen? Zeichnen Sie auch eine illustrierende Skizze.

Aufgabe 4

Seien $f_1, f_2, f_3 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$ und $f_3(x) = \cos x$. Zeigen Sie, dass diese drei Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ linear unabhängig sind.

Ergänzen Sie die folgenden Lückentexte, sodass sich ein vollständiger und korrekter Beweis der jeweils vorausgehenden Behauptung ergibt.

Aufgabe 5

Behauptung. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $a \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist folgenstetig in a.konvergieren die Bilder der Folgenglieder unter f gegen $f(a)$.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei ______ > 0. Sei (x_n) eine Folge in ______ mit Grenzwert ______. Wähle ______ > 0 so, dass (ii) gilt. Zu diesem ______ gibt es einen Index n_0 derart, dass für alle $n > n_0$ gilt, dass $|x_n - a| < \delta$, da ____.

Nach Voraussetzung gilt $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle __________. Also gilt lim__________ =__________.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei f folgenstetig. Angenommen, (ii) gilt nicht, d.h. es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ mit der Eigenschaft, dass für jedes ______ > 0 ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, für welches zwar ____________________ gilt, aber nicht ____________________. Insbesondere gibt es also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit __________________ $< \frac{1}{n}$ und

__________________ $\geq \varepsilon_0$. Daraus folgt $x_n \to a$ und $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(a)$. Dies ist ein Widerspruch zu (i).

$\square$

Aufgabe 6

Behauptung. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A (möglicherweise mehrfach genannt). Dann gilt:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Beweis. Sei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Da A diagonalisierbar ist, gibt es eine invertierbare Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$

so, dass $D =$ ____________________.

$$\Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\underline{\qquad\quad}) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = (\star).$$

Wegen $\det(U^{-1}) =$__________ folgt $(\star) =$ ____.

□

Aufgabe 7

Behauptung. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \mod p.$$

Beweis. Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = x^p + y^p + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Es ist $\binom{p}{k} =$ ______________ und $\binom{p}{k} \in$ ____. Beh.: p teilt $\binom{p}{k}$ für gewisse $k \in \{0, \dots, p\}$.
p teilt $p!$, aber für $k \in \mathbb{N}$ nicht $k!$, wenn k____ p. Also teilt p den __________________, aber nicht den __________________ von $\binom{p}{k}$, wenn ____ $\leq k \leq$ ____. Somit ist $\binom{p}{k} \equiv$ ____ $\mod p$ für ____ $\leq k \leq$ ____.
Also gilt $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \mod p$.

□

Persönliche Daten

Zuletzt bitten wir Sie um einige Angaben zu Ihrer Person.

Ihr Studiengang:

☐ Mathematik auf Lehramt
☐ Mathematik für Bachelor/Master of Science
☐ Sonstige

Ihr derzeitiges Fachsemester in Mathematik:

☐ 1	☐ 5	☐ 9
☐ 2	☐ 6	☐ 10
☐ 3	☐ 7	☐ 11
☐ 4	☐ 8	☐ 12 oder mehr

Ihr Geschlecht:

☐ männlich
☐ weiblich

Ihre Hochschulzugangsberechtigung:

☐ allgemeine Hochschulreife
☐ fachgebundene Hochschulreife
☐ Fachhochschulreife
☐ andere

Ihre Abiturnote: ____________________

Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“

☐ habe ich in einem früheren Semester besucht.
☐ besuche ich gerade.
☐ hätte ich gerne besucht.
☐ Keine der obigen Antwortmöglichkeiten trifft zu.

Die Vorlesung Geometrie

☐ habe ich in einem früheren Semester besucht.
☐ besuche ich gerade.
☐ habe ich weder in einem früheren Semester besucht noch besuche ich es dieses Semester.

A.6. R-Code

A.6.1. R-Code für die Auswertung des Fragebogens zu Überzeugungen

Die Bezeichnungen der Item zu Überzeugungen über Mathematik stammen aus Baumert u. a. (2009):
Mathe als Toolbox: iie, iik, iip, iiv, iiaa
Mathe als Prozess: iid, iij, iio, iiu
Relevanz der Mathematik: iic, iih, iin, iis
Alles, was auf „1“ oder „_1“ endet, bezieht sich auf den Vortest, alles mit 2 statt 1 auf den Nachtest. Was auf S endet, gehört zu den Seminar-TN, was auf K endet zur Kontrollgruppe.

```
library(tidyr) # für gather
library(MANOVA.RM)

# Daten einlesen
gesamtdaten <- read.csv2...

# unbrauchbare Werte auf NA setzen, vgl. Codierleitfaden
gesamtdaten[gesamtdaten >89]<- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "ka"] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "unb"] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == ""] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "90"] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "91"] <- NA

# Datensatz der SEMINAR-TN
SeminarTN <- subset(gesamtdaten,
   gesamtdaten$Das.Seminar..Elementare.Differentialgeometrie.zum.Anfassen.
                == "gerade")

# Datensatz KONTROLLGRUPPE. Sind Lehrämtler und besuchen nicht das Seminar
Kontrollgr <- subset(gesamtdaten,
   gesamtdaten$Das.Seminar..Elementare.Differentialgeometrie.zum.Anfassen.
                == "nicht" |
   gesamtdaten$Das.Seminar..Elementare.Differentialgeometrie.zum.Anfassen.
                == "haette")
Kontrollgr <- subset(Kontrollgr, Kontrollgr$Studiengang == "lehr" |
   Kontrollgr$Studiengang == "lehrbms" |
   Kontrollgr$Studiengang == "lehrsonst")
# die TN auslesen, die Prä UND Post haben, gemessen am ersten Item
KontrollgrPP <- Kontrollgr[!is.na(Kontrollgr$iie_1),]
KontrollgrPP <- KontrollgrPP[!is.na(KontrollgrPP$iie_2),]
```

Konfirmatorische Faktorenanalyse

R-Eingabe:

```
  modell <- 'ft =~ iie1+iik1+iiv1+iiaa1
fp =~ iid1+iij1+iio1+iiu1
fn =~ iic1+iih1+iin1+iis1 '
fit <- cfa(modell, data = gesamtdaten[,c(iie1,iik1,iiv1,iiaa1,iid1,iij1,iio1,
    iiu1,iic1,iih1,iin1,iis1)])
summary(fit, fit.measures = TRUE, modindices = TRUE)
```

R-Ausgabe:

lavaan 0.6-5 ended normally after 48 iterations

Estimator ML Optimization method NLMINB Number of free parameters 27

Used Total Number of observations 101 132

Model Test User Model:

Test statistic 65.346 Degrees of freedom 51 P-value (Chi-square) 0.085

Model Test Baseline Model:

Test statistic 283.837 Degrees of freedom 66 P-value 0.000

User Model versus Baseline Model:

Comparative Fit Index (CFI) 0.934 Tucker-Lewis Index (TLI) 0.915

Loglikelihood and Information Criteria:

Loglikelihood user model (H0) -1240.051 Loglikelihood unrestricted model (H1) -1207.378

Akaike (AIC) 2534.102 Bayesian (BIC) 2604.710 Sample-size adjusted Bayesian (BIC) 2519.432

Root Mean Square Error of Approximation:

RMSEA 0.053 90 Percent confidence interval - lower 0.000 90 Percent confidence interval - upper 0.087 P-value RMSEA $<=$ 0.05 0.428

Standardized Root Mean Square Residual:

SRMR 0.070

Parameter Estimates:

Information Expected Information saturated (h1) model Structured Standard errors Standard

Abiturnote

```
# Daten der Gruppen in einem dataframe zusammenfassen
> SeminarTN$Gruppe <- "treatment group"
> KontrollgrPP$Gruppe <- "control group"
> SuK <- rbind( SeminarTN[,c("TN.Code","Abiturnote","Gruppe")],
                KontrollgrPP[,c("TN.Code","Abiturnote","Gruppe")])
> SuK$Gruppe <- as.factor(SuK$Gruppe)
# Abinote in Zahlen umwandeln
> SuK$Abiturnote <- as.numeric(levels(SuK$Abiturnote))[SuK$Abiturnote]
> SuK <- na.omit(SuK)
# Permutationstest (Fisher-Pitman)
> oneway_test(Abiturnote~Gruppe, data = SuK, distribution="exact")
```

R-Ausgabe:
Exact Two-Sample Fisher-Pitman Permutation Test

data: Abiturnote by Gruppe (control group, treatment group)
Z = 1.1002, p-value = 0.2849
alternative hypothesis: true mu is not equal to 0

Anstrengungsbereitschaft

```
# Spalten, die für Anstrengungsbereitschaft stehen; nur SEMINAR-TN
anstrS <- SeminarTN[,c("TN.Code", "Anstr1_1","Anstr2_1","Anstr3_1",
                         "Anstr4_1")]
# Durchschnitt pro Proband im Vortest
anstrS$meanAnstr1 <-
     rowMeans(anstrS[,c("Anstr1_1","Anstr2_1","Anstr3_1","Anstr4_1")])

# Spalten, die für Anstrengungsbereitschaft stehen; nur KONTROLLGRUPPE
anstrK <- KontrollgrPP[,c("TN.Code", "Anstr1_1","Anstr2_1","Anstr3_1",
                         "Anstr4_1")]
# Durchschnitt pro Proband im Vortest
anstrK$meanAnstr1 <-
     rowMeans(anstrK[,c("Anstr1_1","Anstr2_1","Anstr3_1","Anstr4_1")])

anstrK$Gruppe <- "Kontroll"
anstrS$Gruppe <- "Seminar"
SuK <- rbind(anstrS, anstrK)
SuK$Gruppe <- as.factor(SuK$Gruppe)
SuK <- na.omit(SuK)
oneway_test(meanAnstr1~Gruppe, data = SuK, distribution="exact")
```

R-Ausgabe:
Exact Two-Sample Fisher-Pitman Permutation Test
data: meanAnstr1 by Gruppe (Kontroll, Seminar)
Z = 0.61755, p-value = 0.5537
alternative hypothesis: true mu is not equal to 0

Lückentexte

```
# SEMINAR-TN
# Ana
LueckeAnaS <- SeminarTN[c("TN.Code", paste0("lana0",1:9, "_1" ),
                                     paste0("lana",10:14,"_1"))]

# Kodierungen 2-5 in 0 oder 1 umwandeln
# Betrag fehlt --> falsch (0)
spalte="lana14_1"
for (i in 1:length(LueckeAnaS$lana14_1)){
  if( LueckeAnaS[i,spalte] == 4 & !is.na(LueckeAnaS[i,spalte]))
    LueckeAnaS[i,spalte] <- 0
}
# x statt xi oder > statt \geq --> richtig (1)
LueckeAnaS[LueckeAnaS == 2 | LueckeAnaS == 4] <- 1
# Index bei xi oder epsilon zu viel/fehlt --> richtig
for (spalte in c("lana11_1","lana12_1")){
 for (i in 1:length(LueckeAnaS$lana11_1)){
  if( LueckeAnaS[i,spalte] == 3 & !is.na(LueckeAnaS[i,spalte]))
```

```
    LueckeAnaS[i,spalte] <- 1
} }
# Index am x fehlt --> falsch (0)
LueckeAnaS[LueckeAnaS > 1] <- 0

# Gesamtpunktzahl jedes TN
LueckeAnaS$sum1 <- rowSums(LueckeAnaS[,c(paste0("lana0",1:9,"_1" ),
               paste0("lana",10:14,"_1"))], na.rm = TRUE)

# LinA
LueckeLinAS <- SeminarTN[c("TN.Code", paste0("llina0",1:6,"_1" ))]
LueckeLinAS$sum1 <-
     rowSums(LueckeLinAS[,c(paste0("llina0",1:6, "_1" ))],na.rm = TRUE)

# Zahlentheorie
LueckeZTS <- SeminarTN[c("TN.Code",paste0("lzt0",1:9, "_1" ),
                       paste0("lzt",10:12,"_1"))]
# Kodierung 2 in 1 umwandeln
LueckeZTS[LueckeZTS == 2] <- 1
# Gesamtpunktzahl jedes Teilnehmers
LueckeZTS$sum1 <- rowSums(LueckeZTS[,c(paste0("lzt0",1:9, "_1" ),
                       paste0("lzt",10:12,"_1"))], na.rm = TRUE)

# die Punkte aller Aufgaben in einem dataframe zusammenfassen
ZsfgS <- data.frame(cbind(LueckeAnaS$sum1,LueckeLinAS$sum1,LueckeZTS$sum1))
names(ZsfgS) <- c("Ana","LinA","ZT")


# KONTROLLGRUPPE
# Ana
LueckeAnaK <- KontrollgrPP[c("TN.Code", paste0("lana0",1:9, "_1" ),
                                        paste0("lana",10:14,"_1"))]

# Kodierungen 2-5 in 0 oder 1 umwandeln
# Betrag fehlt --> falsch
for (i in 1:length(LueckeAnaK$lana14_1)){
    if( LueckeAnaK[i,"lana14_1"] == 4 & !is.na(LueckeAnaK[i,"lana14_1"]))
      LueckeAnaK[i,"lana14_1"] <- 0
}
# x statt xi oder > statt \geq --> richtig
LueckeAnaK[LueckeAnaK == 2 | LueckeAnaK == 4] <- 1
# Index bei xi oder epsilon zu viel/fehlt --> richtig
for (spalte in c("lana11_1","lana12_1")){
  for (i in 1:length(LueckeAnaK$lana11_1)){
    if( LueckeAnaK[i,spalte] == 3 & !is.na(LueckeAnaK[i,spalte]))
      LueckeAnaK[i,spalte] <- 1
} }
# Index am x fehlt --> falsch
```

```
LueckeAnaK[LueckeAnaK > 1] <- 0

# Gesamtpunktzahl jedes TN
LueckeAnaK$sum1 <- rowSums(LueckeAnaK[,c(paste0("lana0",1:9, "_1" ),
                    paste0("lana",10:14,"_1"))], na.rm = TRUE)

# LinA
LueckeLinAK <- KontrollgrPP[c("TN.Code", paste0("llina0",1:6, "_1" ))]
LueckeLinAK$sum1 <-
            rowSums(LueckeLinAK[,c(paste0("llina0",1:6,"_1" ))],na.rm = TRUE)

# Zahlentheorie
LueckeZTK <- KontrollgrPP[c("TN.Code", paste0("lzt0",1:9, "_1" ),
                    paste0("lzt",10:12,"_1"))]
# Kodierung 2 in 1 umwandeln
LueckeZTK[LueckeZTK == 2] <- 1
# Gesamtpunktzahl jedes Teilnehmers
LueckeZTK$sum1 <- rowSums(LueckeZTK[,c(paste0("lzt0",1:9, "_1" ),
                    paste0("lzt",10:12,"_1"))], na.rm = TRUE)

# die Punkte aller Aufgaben in einem dataframe zusammenfassen
ZsfgK <- data.frame(cbind(LueckeAnaK$sum1,LueckeLinAK$sum1,LueckeZTK$sum1))
names(ZsfgK) <- c("Ana","LinA","ZT")

# Gesamtpunkte berechnen
ZsfgK$Gesamt <- rowSums(ZsfgK[,c("Ana","LinA","ZT")], na.rm=TRUE)
ZsfgS$Gesamt <- rowSums(ZsfgS[,c("Ana","LinA","ZT")], na.rm=TRUE)

# beide Gruppen in einem dataframe zusammenfassen
ZsfgK$Gruppe <- "Kontroll"
ZsfgS$Gruppe <- "Seminar"
Zsfg <- rbind(ZsfgS, ZsfgK)
Zsfg$Gruppe <- as.factor(Zsfg$Gruppe)
Zsfg <- na.omit(Zsfg)

# Permutationstest
oneway_test(Gesamt~Gruppe, data = Zsfg, distribution="exact")
```

R-Ausgabe:
Exact Two-Sample Fisher-Pitman Permutation Test
data: Gesamt by Gruppe (Kontroll, Seminar)
Z = -0.54568, p-value = 0.6021
alternative hypothesis: true mu is not equal to 0

Toolbox

```
# Daten der SEMINAR-TN
# Spalten, die für Toolbox-Einstellung stehen; nur SeminarTN
toolboxS <- SeminarTN[,c("TN.Code", "iie_1","iik_1","iiv_1","iiaa_1",
```

```
                                    "iie_2","iik_2","iiv_2","iiaa_2",
                                    "iie_3","iik_3","iiv_3","iiaa_3")]
  # Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
toolboxS$t1 <- rowMeans(toolboxS[,c("iie_1","iik_1","iiv_1","iiaa_1")])
toolboxS$t2 <- rowMeans(toolboxS[,c("iie_2","iik_2","iiv_2","iiaa_2")])
toolboxS$t3 <- rowMeans(toolboxS[,c("iie_3","iik_3","iiv_3","iiaa_3")])
  # Daten der KONTROLLGRUPPE
# Spalten, die für Toolbox-Einstellung stehen
toolboxK <- KontrollgrPP[,c("TN.Code", "iie_1","iik_1","iiv_1","iiaa_1",
                                       "iie_2","iik_2","iiv_2","iiaa_2")]
  # Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
toolboxK$t1 <- rowMeans(toolboxK[,c("iie_1","iik_1","iiv_1","iiaa_1")])
toolboxK$t2 <- rowMeans(toolboxK[,c("iie_2","iik_2","iiv_2","iiaa_2")])
  # MANOVA
# Daten ins richtige Format bringen
toolboxS$Gruppe <- "treatment group"
toolboxK$Gruppe <- "control group"
SuK <- rbind( toolboxS[,c("TN.Code","t1","t2","Gruppe")],
              toolboxK[,c("TN.Code","t1","t2","Gruppe")])
SuK$Gruppe <- as.factor(SuK$Gruppe)
SuK <- na.omit(SuK)
SuK_long <- gather(SuK, Zeitpunkt, ScoreToolbox, t1:t2, factor_key = TRUE)
# rechnen
RM <- RM(ScoreToolbox ~ Gruppe * Zeitpunkt, data = SuK_long,
         subject = "TN.Code", iter = 1000)
summary(RM)
```

R-Ausgabe:
Call:
ScoreToolbox ∼ Gruppe * Zeitpunkt
A repeated measures analysis with 1 within-subject and 1 between-subject factors.

Descriptive:

Gruppe	Zeitpunkt	n	Means	Lower 95% CI	Upper 95% CI
control group	t1	16	2.531	2.127	2.936
control group	t2	16	2.484	2.155	2.814
treatment group	t1	29	2.509	2.280	2.738
treatment group	t2	29	2.474	2.198	2.750

Wald-Type Statistic (WTS):

	Test statistic	df	p-value
Gruppe	"0.017"	"1"	"0.898"
Zeitpunkt	"0.381"	"1"	"0.537"
Gruppe:Zeitpunkt	"0.009"	"1"	"0.925"

ANOVA-Type Statistic (ATS):

	Test statistic	df1	df2	p-value
Gruppe	"0.017"	"1"	"53.89"	"0.898"
Zeitpunkt	"0.381"	"1"	"Inf"	"0.537"
Gruppe:Zeitpunkt	"0.009"	"1"	"Inf"	"0.925"

p-values resampling:

	Perm (WTS)
Gruppe	"0.911"
Zeitpunkt	"0.52"
Gruppe:Zeitpunkt	"0.921"

Prozess

```
# Daten der SEMINAR-TN
# Spalten, die für Prozess-Einstellung stehen; nur SeminarTN
prozessS <- SeminarTN[,c("TN.Code", "iid_1","iij_1","iio_1","iiu_1",
                                    "iid_2","iij_2","iio_2","iiu_2",
                                     "iid_3","iij_3","iio_3","iiu_3")]
# Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
prozessS$t1 <- rowMeans(prozessS[,c("iid_1","iij_1","iio_1","iiu_1")])
prozessS$t2 <- rowMeans(prozessS[,c("iid_2","iij_2","iio_2","iiu_2")])
prozessS$t3 <- rowMeans(prozessS[,c("iid_3","iij_3","iio_3","iiu_3")])
  # Daten der KONTROLLGRUPPE
# Spalten, die für Prozess-Einstellung stehen
prozessK <- KontrollgrPP[,c("TN.Code", "iid_1","iij_1","iio_1","iiu_1",
                                       "iid_2","iij_2","iio_2","iiu_2")]
# Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
prozessK$t1 <- rowMeans(prozessK[,c("iid_1","iij_1","iio_1","iiu_1")])
prozessK$t2 <- rowMeans(prozessK[,c("iid_2","iij_2","iio_2","iiu_2")])
  # MANOVA
# Daten ins richtige Format bringen
prozessS$Gruppe <- "treatment group"
prozessK$Gruppe <- "control group"
SuK <- rbind( prozessS[,c("TN.Code","t1","t2","Gruppe")],
             prozessK[,c("TN.Code","t1","t2","Gruppe")])
SuK$Gruppe <- as.factor(SuK$Gruppe)
SuK <- na.omit(SuK)
SuK_long <- gather(SuK, Zeitpunkt, ScoreProzess, t1:t2, factor_key = TRUE)
SuK_long <- gather(SuK, Zeitpunkt, ScoreProzess, t1:t2, factor_key = TRUE)
# rechnen
RM <- RM(ScoreProzess ~ Gruppe * Zeitpunkt, data = SuK_long,
         subject = "TN.Code", iter = 1000)
summary(RM)
```

R-Ausgabe:
Call:
ScoreProcess ∼ Gruppe * Zeitpunkt
A repeated measures analysis with 1 within-subject and 1 between-subject factors.
Descriptive:

Gruppe	Zeitpunkt	n	Means	Lower 95% CI	Upper 95% CI
control group	t1	16	3.250	2.774	3.726
control group	t2	16	3.453	3.021	3.886
treatment group	t1	31	3.298	3.059	3.537
treatment group	t2	31	3.685	3.562	3.809

Wald-Type Statistic (WTS):

	Test statistic	df	p-value
Gruppe	"1.165"	"1"	"0.281"
Zeitpunkt	"19.351"	"1"	"<0.001"
Gruppe:Zeitpunkt	"1.88"	"1"	"0.17"

ANOVA-Type Statistic (ATS):

	Test statistic	df1	df2	p-value
Gruppe	"1.165"	"1"	"92.525"	"0.283"
Zeitpunkt	"19.351"	"1"	"Inf"	"<0.001"
Gruppe:Zeitpunkt	"1.88"	"1"	"Inf"	"0.17"

p-values resampling:

	Perm (WTS)
Gruppe	"0.285"
Zeitpunkt	"<0.001"
Gruppe:Zeitpunkt	"0.183"

Relevanz

```
# Spalten, die für Nutzen-Einstellung stehen; nur SEMINAR-TN
nutzenS <- SeminarTN[,c("TN.Code", "iic_1","iih_1","iin_1","iis_1",
                                   "iic_2","iih_2","iin_2","iis_2",
                                   "iic_3","iih_3","iin_3","iis_3")]
# Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
nutzenS$t1 <- rowMeans(nutzenS[,c("iic_1","iih_1","iin_1","iis_1")])
nutzenS$t2 <- rowMeans(nutzenS[,c("iic_2","iih_2","iin_2","iis_2")])
nutzenS$t3 <- rowMeans(nutzenS[,c("iic_3","iih_3","iin_3","iis_3")])

# Spalten, die für Nutzen-Einstellung stehen; nur KONTROLLGRUPPE
nutzenK <- KontrollgrPP[,c("TN.Code", "iic_1","iih_1","iin_1","iis_1",
                                      "iic_2","iih_2","iin_2","iis_2")]
# Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
nutzenK$t1 <- rowMeans(nutzenK[,c("iic_1","iih_1","iin_1","iis_1")])
nutzenK$t2 <- rowMeans(nutzenK[,c("iic_2","iih_2","iin_2","iis_2")])

# MANOVA
# Daten ins richtige Format bringen
nutzenS$Gruppe <- "treatment group"
nutzenK$Gruppe <- "control group"
SuK <- rbind(nutzenS[,c("TN.Code","t1","t2","Gruppe")],
             nutzenK[,c("TN.Code","t1","t2","Gruppe")])
SuK$Gruppe <- as.factor(SuK$Gruppe)
SuK <- na.omit(SuK)
SuK_long <- gather(SuK, Zeitpunkt, ScoreNutzen, t1:t2, factor_key = TRUE)
# rechnen
RM <- RM(ScoreNutzen ~ Gruppe * Zeitpunkt, data = SuK_long,
                  subject = "TN.Code", iter = 1000)
summary(RM)
```

Call:

ScoreNutzen $\sim$ Gruppe * Zeitpunkt

A repeated measures analysis with 1 within-subject and 1 between-subject factors.

Descriptive:

Gruppe	Zeitpunkt	n	Means	Lower 95% CI	Upper 95% CI
control group	t1	16	3.203	2.840	3.567
control group	t2	16	2.953	2.366	3.541
treatment group	t1	31	3.016	2.783	3.249
treatment group	t2	31	3.121	2.957	3.285

Wald-Type Statistic (WTS):

	Test statistic	df	p-value
Gruppe	0.005	1	0.942
Zeitpunkt	0.756	1	0.385
Gruppe:Zeitpunkt	4.517	1	0.034

ANOVA-Type Statistic (ATS):

	Test statistic	df1	df2	p-value
Gruppe	0.005	1	78.752	0.943
Zeitpunkt	0.756	1	Inf	0.385
Gruppe:Zeitpunkt	4.517	1	Inf	0.034

p-values resampling:

	Perm (WTS)
Gruppe	0.95
Zeitpunkt	0.374
Gruppe:Zeitpunkt	0.03

Effektstärke:

```
# Berechnung von Hedges g (hedges = TRUE) oder Cohens d
nutzenS$diff <- nutzenS$t2 - nutzenS$t1
nutzenK$diff <- nutzenK$t2 - nutzenK$t1

effsize::cohen.d(nutzenS$diff, nutzenK$diff,
       paired=FALSE, hedges = FALSE, na.rm=TRUE)
```

Cohen's d

d estimate: 0.7355753 (medium)

95 percent confidence interval:

lower upper

0.09702463 1.37412589

```
effsize::cohen.d(nutzenS$diff, nutzenK$diff,
      paired=FALSE, hedges = TRUE, na.rm=TRUE)
```

Hedges's g

g estimate: 0.7232472 (medium)

95 percent confidence interval:

lower upper

0.08530457 1.36118980

Selbstwirksamkeitserwartung

```
# Spalten, die für Selbstwirksamkeit stehen; nur SeminarTN
SewiS <- SeminarTN[,c("TN.Code", "Sewi1_1","Sewi2_1","Sewi3_1",
                                 "Sewi1_2","Sewi2_2","Sewi3_2")]
# Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
```

```
SewiS$t1 <- rowMeans(SewiS[,c("Sewi1_1","Sewi2_1","Sewi3_1")])
SewiS$t2 <- rowMeans(SewiS[,c("Sewi1_2","Sewi2_2","Sewi3_2")])

# Spalten, die für Selbstwirksamkeit stehen; nur Kontrollgruppe
SewiK <- KontrollgrPP[,c("TN.Code", "Sewi1_1","Sewi2_1","Sewi3_1",
                                   "Sewi1_2","Sewi2_2","Sewi3_2")]
# Durchschnitt pro Proband im Vor- und Nachtest
SewiK$t1 <- rowMeans(SewiK[,c("Sewi1_1","Sewi2_1","Sewi3_1")])
SewiK$t2 <- rowMeans(SewiK[,c("Sewi1_2","Sewi2_2","Sewi3_2")])
```

Call:
ScoreSewi ~ Gruppe * Zeitpunkt
A repeated measures analysis with 1 within-subject and 1 between-subject factors.

Descriptive:

Gruppe	Zeitpunkt	n	Means	Lower 95% CI	Upper 95% CI
control group	t1	16	2.292	1.750	2.833
control group	t2	16	2.229	1.777	2.681
treatment group	t1	26	2.154	1.875	2.432
treatment group	t2	26	2.487	2.192	2.782

Wald-Type Statistic (WTS):

	Test statistic	df	p-value
Gruppe	0.126	1	0.723
Zeitpunkt	4.115	1	0.042
Gruppe:Zeitpunkt	8.791	1	0.003

ANOVA-Type Statistic (ATS):

	Test statistic	df1	df2	p-value
Gruppe	0.12	1	108.001	0.723
Zeitpunkt	4.115	1	Inf	0.042
Gruppe:Zeitpunkt	8.791	1	Inf	0.003

p-values resampling:

	Perm (WTS)
Gruppe	0.725
Zeitpunkt	0.049
Gruppe:Zeitpunkt	0.007

Effektstärke:

```
# Berechnung von Hedges g (hedges = TRUE) oder Cohens d
SewiS$diff <- SewiS$t2 - SewiS$t1
SewiK$diff <- SewiK$t2 - SewiK$t1

{effsize::cohen.d(SewiS$diff, SewiK$diff, paired=FALSE, hedges = FALSE,
    na.rm = TRUE)
```

Cohen's d
d estimate: 0.8078161 (large)
95 percent confidence interval:

lower	upper
0.1413814	1.4742508

```
effsize::cohen.d(SewiS$diff, SewiK$diff, paired=FALSE, hedges = TRUE,
    na.rm = TRUE)
```

Hedges's g
g estimate: 0.7925743 (medium)
95 percent confidence interval:
lower upper
0.1270302 1.4581185

A.6.2. R-Code für die Auswertung der Aufgaben zur Vernetzung von Analysis und Linearer Algebra

```
# Daten einlesen
gesamtdaten <- read.csv2...

# unbrauchbare Werte auf NA setzen, vgl. Codierleitfaden
gesamtdaten[gesamtdaten >89]<- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "ka"] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "unb"] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == ""] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "90"] <- NA
gesamtdaten[gesamtdaten == "91"] <- NA

# alle, die im Vortest da waren
# nur Lehrämtler; Seminar-TN nicht doppelt gezählt
alleT1 <- gesamtdaten[!is.na(gesamtdaten$iie_1),]
alleT1 <- subset(alleT1, alleT1$Studiengang == "lehr" |
          alleT1$Studiengang == "lehrbms" | alleT1$Studiengang == "lehrsonst")
alleT1 <- subset(alleT1,
  alleT1$Das.Seminar.Elementare.Differentialgeometrie.zum.Anfassen =="nicht" |
  alleT1$Das.Seminar.Elementare.Differentialgeometrie.zum.Anfassen =="haette"|
  alleT1$Das.Seminar.Elementare.Differentialgeometrie.zum.Anfassen =="gerade")

# Datensatz der SEMINAR-TN
SeminarTN <- subset(gesamtdaten,
   gesamtdaten$Das.Seminar.Elementare.Differentialgeometrie.zum.Anfassen
           =="gerade")

# Gesamtdaten LinA-Ana-Aufgaben
alleLinAna <- alleT1[,c("TN.Code", "linear_1","ev1_1","ev2_1","ev3_1",
                "tang_1","sincos_1")]

# Punkte bei Aufg. 2 addieren
alleLinAna$ev1 <- rowSums(alleLinAna[,c("ev1_1","ev2_1","ev3_1")],
                 na.rm = TRUE)
alleLinAna$ev1[rowSums(is.na(alleLinAna[,c("ev1_1","ev2_1","ev3_1")]))
                 == 3] <- NA
```

```
# Gesamtpunktzahl berechnen
alleLinAna$sum <- rowSums(alleLinAna[,c("linear_1","ev1","tang_1",
                                  "sincos_1")], na.rm = TRUE)


# Seminar-TN
LinAnaS <- SeminarTN[,c("TN.Code", "linear_1","ev1_1","ev2_1","ev3_1",
   "tang_1","sincos_1","linear_2","ev1_2","ev2_2","ev3_2",
   "tang_2","sincos_2")]

# Punkte bei Aufg. 2 addieren
LinAnaS$ev1 <- rowSums(LinAnaS[,c("ev1_1","ev2_1","ev3_1")],na.rm = TRUE)
LinAnaS$ev1[rowSums(is.na(LinAnaS[,c("ev1_1","ev2_1","ev3_1")])) == 3] <- NA
LinAnaS$ev2 <- rowSums(LinAnaS[,c("ev1_2","ev2_2","ev3_2")],na.rm = TRUE)
LinAnaS$ev2[rowSums(is.na(LinAnaS[,c("ev1_2","ev2_2","ev3_2")])) == 3] <- NA

# Gesamtpunktzahl berechnen
LinAnaS$sum1 <- rowSums(LinAnaS[,c("linear_1","ev1","tang_1","sincos_1")],
                    na.rm = TRUE)
LinAnaS$sum2 <- rowSums(LinAnaS[,c("linear_2","ev2","tang_2","sincos_2")],
                    na.rm = TRUE)

# Berechnung der Interrater-Reliabilität
# Lisa1LA... enthalten die vergebenen Codierungen
> cohen.kappa(x=cbind(Lisa1LA,Hiwi1LA))
> cohen.kappa(x=cbind(Lisa2LA,Hiwi2LA))
> cohen.kappa(x=cbind(Lisa1Lue,Hiwi1Lue))
> cohen.kappa(x=cbind(Lisa2Lue,Hiwi2Lue))

> m <- rbind(Lisa2Lue,Hiwi2Lue)
> kripp.alpha(m, method = "nominal")

> m <- rbind(Lisa1Lue,Hiwi1Lue)
> kripp.alpha(m, method = "nominal")

> m <- rbind(Lisa1LA,Hiwi1LA)
> kripp.alpha(m, method = "nominal")

> m <- rbind(Lisa2LA,Hiwi2LA)
> kripp.alpha(m, method = "nominal")
```

A.7. Codebuch zum Fragebogen „Vorstellungen von Lehramtsstudierenden über Mathematik“

Mathematisches Weltbild

13 Items, vierstufige Likertskala

Item	Itemvariable	Skalenvariable
Mathematik besteht aus Lernen, Erinnern und Anwenden.	iie_1/iie_2	metoo_1/_2
Mathematik ist eine Sammlung von Verfahren und Regeln, die genau angeben, wie man Aufgaben löst.	iik_1/iik_2	metoo_1/_2
Wenn man eine Mathematikaufgabe lösen soll, muss man das richtige Verfahren kennen, sonst ist man verloren.	iip_1/iip_2	metoo_1/_2
Mathematik ist das Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Verfahren.	iiv_1/iiv_2	metoo_1/_2
Fast alle mathematischen Probleme können durch direkte Anwendung von bekannten Regeln, Formeln und Verfahren gelöst werden.	iiaa_1/iiaa_2	metoo_1/_2
In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren.	iid_1/iid_2	mepro_1/_2
Mathematik lebt von Einfällen und neuen Ideen.	iij_1/iij_2	mepro_1/_2
Mathematische Aufgaben und Probleme können auf verschiedenen Wegen richtig gelöst werden.	iio_1/iio_2	mepro_1/_2
Wenn man sich mit mathematischen Problemen auseinandersetzt, kann man oft Neues (Zusammenhänge, Regeln, Begriffe) entdecken.	iiu_1/iiu_2	mepro_1/_2
Kenntnisse in Mathematik sind für das spätere Leben von Schüler/innen wichtig.	iic_1/iic_2	mepra_1/_2
Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.	iih_1/iih_2	mepra_1/_2
Viele Teile der Mathematik haben einen praktischen Nutzen oder einen direkten Anwendungsbezug.	iin_1/iin_2	mepra_1/_2
Mit ihrer Anwendbarkeit und Problemlösekapazität besitzt die Mathematik eine hohe gesellschaftliche Relevanz.	iis_1/iis_2	mepra_1/_2

Kodierung

1	*trifft nicht zu*, erstes Kästchen
2	zweites Kästchen
3	drittes Kästchen
4	*trifft voll zu*, viertes Kästchen
90	nicht bearbeitet
91	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)

Selbstwirksamkeit, Anstrengungsbereitschaft

Item	Itemvariable	Skalenvariable
Auch wenn ich im Mathematikstudium eine schwierige Aufgabe lösen soll, glaube ich, dass ich es schaffen werde.	Sewi1_1/_2	sewi_1/_2
Was ich mir im Mathematikstudium vornehme, schaffe ich auch.	Sewi2_1/_1	sewi_1/_2
Ich kann im Mathematikstudium auch die schwierigen Aufgaben lösen, wenn ich mich anstrenge.	Sewi3_1/_2	sewi_1/_2
Ich gebe mein Bestes im Mathematikstudium.	Anstr1_1/_2	anstr_1/_2
Ich gebe mir im Mathematikstudium Mühe.	Anstr2_1/_2	anstr_1/_2
Im Mathematikstudium strenge ich mich an, auch wenn es mir manchmal schwer fällt.	Anstr3_1/_2	anstr_1/_2
Im Mathematikstudium strenge ich mich auch dann an, wenn ich eine Aufgabe zunächst nicht gleich verstehe.	Anstr4_1/_2	anstr_1/_2

Kodierung

Code	Beschreibung
1	*trifft nicht zu*, erstes Kästchen
2	zweites Kästchen
3	drittes Kästchen
4	*trifft voll zu*, viertes Kästchen
90	nicht bearbeitet
91	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)

Vernetzung Schule – Hochschule

Item	Itemvariable
Lineare Algebra 1	LinA_1/_2
Analysis 1	Ana_1/_2
Numerik	Num_1/_2
Stochastik	Stoch_1/_2
Geometrie	Geo_1/_2
Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“	Sem_1/_2
Für wie wichtig halten Sie Ihr Mathematikstudium insgesamt für Ihre spätere Tätigkeit als Lehrerin oder Lehrer?	Stud_1/_2

Code	Beschreibung
1	*trifft nicht zu*, erstes Kästchen
2	zweites Kästchen
3	drittes Kästchen
4	*trifft voll zu*, viertes Kästchen
90	nicht bearbeitet
91	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)

Mathematisches Grundwissen

Vernetzung Lineare Algebra – Analysis

Für alle folgenden Variablen gilt:

Code	**Beschreibung**
90	nicht bearbeitet
91	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. durchgestrichen, unleserlich, Kommentare)

Aufgabe 1

Variable: linear_1/_2

Code	**Definition**	**Beschreibung**	**Beispiel**
0	negative Antwort	Die gestellte Frage wird verneint oder nur teilweise positiv beantwortet. Es wird nicht zwischen Antworten mit und ohne Begründung unterschieden.	„Nein“, „Ja, außer in 0.“
1	positive Antwort, keine/falsche Begründung	Die gestellte Frage wird positiv beantwortet, aber die Begründung fehlt oder ist falsch.	„Ja“
2	zu knappe Begründung	Die gestellte Frage wird positiv beantwortet und die Antwort begründet. Allerdings ist die Begründung zu knapp oder unpräzise, um sicher sein zu können, dass etwas Richtiges gemeint ist.	„Ja, da α linear ist.“, „Ja, Matrix als ‚Faktor‘ $\to$ stetig.“ „Ja, da es nur eine Komposition von stetigen Abbildungen ist.“
3	korrekte Begründung	Die gestellte Frage wird positiv beantwortet und die Antwort offensichtlich korrekt begründet.	„Ja, denn die Abbildung ist linear und beschränkt.“, „Ja, lineare Abbildungen sind differenzierbar und aus diffbar folgt stetig.“, „Ja, Ax ist in jeder Zeile ein Polynom und Polynome sind stetig.“

Aufgabe 2

Variable	**Code**	**Beschreibung**
ev1_1/_2	0	falsch, z.B. x
	1	richtig: jedes e^{ax} mit $a \in \mathbb{R}$
ev2_1/_2	0	falsch in Bezug auf erste Lücke *oder* erste Lücke ist falsch
	1	richtig: das a, das im vorigen Item verwendet wurde
ev3_1/_2	0	falsch
	1	richtig: $e^{\pi x}$

Aufgabe 3

Variable: tang_1/_2

Code	**Definition**	**Beschreibung**	**Beispiel**
0	falsche Antwort	Die Antwort ist falsch.	
1	Taylor genannt oder unspezifisches Polynom ersten Grades	Die Taylorreihe wird namentlich genannt oder notiert, aber nicht nach der ersten Ordnung abgebrochen, *oder* Anleitung zur Berechnung von L ist angegeben, aber nicht ausgeführt.	„Man kann L über die Taylor-Entwicklung von f berechnen.“ „Taylor-Polynom n-ten Grades im Pkt x_0“ „Tangente von f im Punkt x_0“
2	korrekte Formel oder Zeichnung	Es ist das Taylorpolynom ersten Grades mit oder ohne Konstante angegeben *oder* es ist eine korrekte Zeichnung mit Achsenkreuz, Funktion, Tangente oder Ursprungsgerade gleicher Steigung und Beschriftung x_0 angegeben. Außerdem ist L oder f in der Zeichnung beschriftet.	„$L(x) = f'(x_0)(x - x_0)$“, „$L(x) = f'(x_0)x$“, „$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$“
3	korrekte Formel und Zeichnung	Es ist das Taylorpolynom ersten Grades mit oder ohne Konstante angegeben *und* es ist eine korrekte Zeichnung mit Achsenkreuz, Funktion, Tangente oder Ursprungsgerade gleicher Steigung und Beschriftung x_0 angegeben. Außerdem ist L oder f in der Zeichnung beschriftet.	„$L(x) = f'(x_0)(x - x_0)$“, „$L(x) = f'(x_0)x$“, „$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$“

Aufgabe 4
Variable: sincos_1/_2

Code	Definition	Beschreibung	Beispiel
0	falsche Antwort	Die Antwort ist schon im Ansatz falsch.	z.B. paarweise lineare Unabhängigkeit, π und $-\pi$ eingesetzt
1	Gleichung für lin. (Un)Abh. aufgestellt oder passende Punkte gewählt	Eine Gleichung der Form $0 = \lambda_1 + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x)$ wurde aufgestellt *oder* es wurden drei Punkte zum einsetzen gewählt, die drei nicht redundante Gleichungen liefern.	„$0 = \lambda_1 + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x)$", „$0 = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)$" *oder:* gültig: z.B. $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$, nicht gültig: z.B. $\{0, \pi, -\pi\}$
2	Gleichung für lin. (Un)Abh. aufgestellt und passende Punkte gewählt	Eine Gleichung der Form $0 = \lambda_1 + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x)$ wurde aufgestellt *und* es wurden drei Punkte zum einsetzen gewählt, die drei nicht redundante Gleichungen liefern.	„$0 = \lambda_1 + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x)$", „$0 = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)$" *und:* gültig: z.B. $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$, $\{0, \pm\frac{\pi}{2}\}$ nicht gültig: z.B. $\{0, \pi, -\pi\}$
3	komplett gelöst	Die Punkte wurden korrekt eingesetzt und die Gleichungen korrekt gelöst oder eine Matrix aufgestellt und deren Determinante korrekt als $\neq 0$ erkannt *oder* es werden zwei Punkte eingesetzt, mittels gefolgert wird, dass zwei Koeffizienten 0 sind und dann folgt, dass auch der dritte 0 ist.	Bsp. Gleichungen $x = 0 : 0 = \lambda_1 + \lambda_3$, $x = \frac{\pi}{2} : 0 = \lambda_1 + \lambda_2$, $x = \pi : 0 = \lambda_1 - \lambda_3$ $\Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$ Bsp. Matrix $\det(f_i(x_j))_{ij} = -2 \neq 0$ $\Rightarrow$ Spalten lin. unabh. $\Rightarrow$ Funktionen lin. unabh.

Lückentext Analysis

Für alle folgenden Variablen gilt:

Code	Beschreibung
0	falsch
1	richtig
90	nicht bearbeitet
91	bearbeitet, aber nicht brauchbar (z.B. unleserlich, durchgestrichen)

Lückennr	Variable	Code	Beschreibung
1	lana01_1/_2	0	falsch, z.B. δ, ξ, a
		1	richtig: ε
2	lana02_1/_2	0	falsch, z.B. X
		1	richtig: $\mathbb{R}$
3	lana03_1/_2	0	falsch, z.B. 0
		1	richtig: ξ bzw. a
		2	x statt ξ
4	lana04_1/_2	0	falsch, z.B. ε
		1	richtig: δ
5	lana05_1/_2	0	falsch, z.B. ε
		1	richtig: δ
6	lana06_1/_2	0	falsch, z.B. „$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert“
		1	richtig: mit Konvergenz von x_n argumentiert, z.B. $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ $x_n \to \xi$, „x_n gegen ξ konvergiert“, bzw. a statt ξ,
		2	x statt ξ/a
7	lana07_1/_2	0	falsch, z.B. $x \in \mathbb{R}$
		1	richtig: $n > n_0$
		4	$n \geq n_0$ statt $n > n_0$
8	lana08_1/_2	0	falsch, z.B. x_n
		1	richtig: $f(x_n)$; oder $\lvert f(x_n) - f(\xi)\rvert$, wenn in lana09 dann 0 steht
		2	x statt ξ/a
		3	Index fehlt: $f(x)$ statt $f(x_n)$
9	lana09_1/_2	0	falsch, z.B. ξ, x
		1	richtig: $f(\xi)$ bzw. $f(a)$; oder $f(\lim x_n)$; oder 0, wenn lana08 wie oben
		2	$f(x)$ statt $f(\xi)$ bzw. $f(a)$
10	lana10_1/_2	0	falsch, z.B. ε, x, n
		1	richtig: δ
11	lana11_1/_2	0	falsch, z.B. $\lvert f(x) - f(\xi)\rvert < \varepsilon_0$, $\lvert x - \xi\rvert < \varepsilon$
		1	richtig: $\lvert x - \xi\rvert < \delta$ bzw. $\lvert x - a\rvert < \delta$
		3	Index zu viel: z.B. $\lvert x - \xi_0\rvert < \delta$

Lückennr	**Variable**	**Code**	**Beschreibung**
12	lana12_1/_2	0	falsch, z.B. $\lvert x-\xi\rvert < \delta$
		1	richtig: $\lvert f(x)-f(\xi)\rvert < \varepsilon_0$ bzw. $\lvert f(x)-f(a)\rvert < \varepsilon_0$
		3	Index fehlt: ε statt ε_0
13	lana13_1/_2	0	falsch
		1	richtig: $\lvert x_n-\xi\rvert$ bzw. $\lvert x_n-a\rvert$
		2	x statt ξ/a
		3	Index fehlt: x statt x_n
14	lana14_1/_2	0	falsch
		1	richtig: $\lvert f(x_n)-f(\xi)\rvert$ bzw. $\lvert f(x_n)-f(a)\rvert$
		2	x statt ξ/a
		3	Index fehlt: $f(x)$ statt $f(x_n)$
		4	Betrag fehlt: $f(x_n)-f(\xi)$ bzw. $f(x_n)-f(a)$
		5	Index und Betrag fehlen

Lückentext Lineare Algebra

Für alle folgenden Variablen gilt:

Code	**Beschreibung**
0	falsch
1	richtig
90	nicht bearbeitet
91	bearbeitet, aber nicht brauchbar (z.B. unleserlich, durchgestrichen)

Lückennr	**Variable**	**Code**	**Beschreibung**
1	llina01_1/_2	0	falsch, z.B. AU^{-1}
		1	richtig: $U^{-1}AU$ oder U und U^{-1} vertauscht oder T statt -1
2	llina02_1/_2	0	falsch, z.B. A
		1	richtig: D, $U^{-1}AU$ oder U und U^{-1} vertauscht oder T statt -1
3	llina03_1/_2	0	falsch
		1	richtig: $\det(U^{-1}AU)$, $\det(U^{-1})\det(A)\det(U)$ oder U und U^{-1} vertauscht oder T statt -1
4	llina04_1/_2	0	falsch
		1	richtig: $\det(U^{-1})\det(A)\det(U)$ oder U und U^{-1} vertauscht oder T statt -1; oder leer, wenn in llina02 $U^{-1}AU$ oder UAU^{-1} steht
5	llina05_1/_2	0	falsch, z.B. 1
		1	richtig: $\det(U)^{-1}$ oder ± 1
6	lana06_1/_2	0	falsch, z.B.
		1	richtig: $\det(A)$ oder $\det(U)^{-1}\det(A)\det(U) = \det(A)$ oder $\det(D) = \det(A)$

Lückentext Zahlentheorie

Für alle folgenden Variablen gilt:

Code	Beschreibung
0	falsch
1	richtig
90	nicht bearbeitet
91	bearbeitet, aber nicht brauchbar (z.B. unleserlich, durchgestrichen)

Lückennr	Variable	Code	Beschreibung
1	lzt01_1/_2	0	falsch
		1	richtig: $\binom{p}{k}x^k y^{p-k}$, x und y können vertauscht sein
		2	n statt p, aber sonst richtig
2	lzt02_1/_2	0	falsch
		1	richtig: $\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}x^k y^{p-k}$, x und y können vertauscht sein
		2	n statt p, aber sonst richtig
3	lzt03_1/_2	0	falsch
		1	richtig: $\frac{p!}{k!(p-k)!}$
4	lana04_1/_2	0	falsch, z.B. $\mathbb{R}$
		1	richtig: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$
5	lzt05_1/_2	0	falsch, z.B. $\leq$
		1	richtig: $<$
6	lzt06_1/_2	0	falsch
		1	richtig: „Zähler“
7	lzt07_1/_2	0	falsch
		1	richtig: „Nenner“
8	lzt08_1/_2	0	falsch, z.B. 0
		1	richtig: 1
9	lzt09_1/_2	0	falsch, z.B. p
		1	richtig: $p-1$
10	lzt10_1/_2	0	falsch
		1	richtig: 0
11	lzt11_1/_2	0	falsch, z.B. 0
		1	richtig: 1
12	lzt12_1/_2	0	falsch, z.B. p
		1	richtig: $p-1$

Persönliche Daten

werden nur im Vortest abgefragt

Item	**Variable**
Ihr Studiengang	stg
Ihr derzeitiges Fachsemester in Mathematik	fachs
Ihr Geschlecht	geschl
Ihre Hochschulzugangsberechtigung	hzb
Ihre Abiturnote	abi
Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“	sem
Die Vorlesung Geometrie	geo

Kodierung

Item	Code	Beschreibung
stg	lehr	*Lehramt*, erstes Kästchen
	bms	*Bachelor/Master of Science*, zweites Kästchen
	sonst	*Sonstige*, drittes Kästchen
	lehrbms	*Lehramt* und *Bachelor/Master of Science*, erstes und zweites Kästchen
	lehrsonst	*Lehramt* und *Sonstige*, erstes und drittes Kästchen
	bmssonst	*Bachelor/Master of Science* und *Sonstige*, zweites und drittes Kästchen
	ka	nicht bearbeitet, keine Angabe
	unb	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. durchgestrichen)
fachs	1...12	entsprechende Zahl ist angekreuzt
	ka	nicht bearbeitet, keine Angabe
	unb	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)
geschl	m	*männlich*, erstes Kästchen
	w	*weiblich*, zweites Kästchen
	ka	nicht bearbeitet, keine Angabe
	unb	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)
hzb	allg	*allgemeine Hochschulreife*, erstes Kästchen
	fachg	*fachgebundene Hochschulreife*, zweites Kästchen
	fachh	*Fachhochschulreife*, drittes Kästchen
	and	*andere*, viertes Kästchen
	ka	nicht bearbeitet, keine Angabe
	unb	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)
abi	1,0 ... 4,0	in Zehntelschritten
	ka	nicht bearbeitet, keine Angabe
	unb	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. unleserlich, durchgestrichen)
sem	frueher	*habe ich in einem früheren Semester besucht.*, erstes Kästchen
	gerade	*besuche ich gerade.*, zweites Kästchen
	haette	*hätte ich gerne besucht.*, drittes Kästchen
	nicht	*Keine der obigen Antwortmöglichkeiten trifft zu.*, viertes Kästchen
	ka	nicht bearbeitet, keine Angabe
	unb	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)
geo	frueher	*habe ich in einem früheren Semester besucht.*, erstes Kästchen
	gerade	*besuche ich gerade.*, zweites Kästchen
	nicht	*habe ich weder in einem früheren Semester besucht noch besuche ich es dieses Semester.*, drittes Kästchen
	fruehergerade	*habe ich in einem früheren Semester besucht.* und *besuche ich gerade.*, erstes und zweites Kästchen
	ka	nicht bearbeitet, keine Angabe
	unb	bearbeitet, aber unbrauchbar (z.B. zwei Kreuze, durchgestrichen)

A.8. Kodierleitfaden zu Überzeugungen im Text „Was und wie habe ich gelernt?“

Kontext: Die Autorinnen und Autoren der Texte nahmen am Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ teil. Nach der ersten Einheit, welche die Krümmung ebener Kurven behandelte, bekamen sie die Aufgabe, ihren Lernprozess zu reflektieren. Dazu sollten sie schriftlich die folgenden Fragen beantworten:

- Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie es gelernt?
- Welche Fragen sind noch offen?
- Wenn Sie der Dozent/die Dozentin wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?

Die Seminareinheit zur Krümmung ebener Kurven begann mit einer kleinen Einführung in ebene Kurven an der Tafel durch die Dozentinnen. Anschließend teilten sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in Vierergruppen ein. Sie durchliefen einen praktischen Lernzirkel, bei dem sie beispielsweise mit einem City-Roller fahren konnten, und entwickelten dann eine Definition/Formel für die Krümmung ebener Kurven. Schließlich stellte ein Gruppenmitglied die Ergebnisse der gesamten Seminargruppe in einem Vortrag vor und jede Gruppe schrieb ihre Ergebnisse als Skript auf, welches im Weiteren allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zur Verfügung stand.

Was habe ich gelernt?

Alles, was in eine der folgenden Kategorien eingeordnet wird, muss eine Antwort auf die Frage „Was habe ich gelernt?“ sein. Gelerntes, was keine mathematischen Inhalte oder mathematikbezogenen Fähigkeiten betrifft, gehört zu „Sonstiges“.

Codename	**Beschreibung**	Beispiel
Mathematische Fakten	Die Studentin notiert mathematische Aussagen, Formeln, Sätze… ohne Herleitung oder behauptet, dass sie/ihre Gruppe diese gelernt hat. Sie geht dabei nicht auf deren Bedeutung ein.	„Dazu zählen L'Hospital, Formel für Kurvenlänge und Pascalsches Dreieck.“ (T6,14)
Mathematische Fähigkeiten	Die Studentin schreibt, dass sie/ihre Gruppe Problemlöse- oder Forschungsmethoden gelernt hat oder Fähigkeiten erworben/verbessert hat, mit Objekten oder Verfahren umgehen zu können.	„Prozessbezogene Kompetenzen, die ich hoffentlich mitnehmen kann, sind also, wie man Überlegungen anhand von Beispielen oder Spezial- bzw. Extremfällen überprüfen kann […]“ (T10,18)

Konzepte	Die Studentin notiert qualitative Beschreibungen von Konzepten, Ideen, Zusammenhängen oder Einschränkungen von diesen, z. B. Formulierungen mathematischer Gegebenheiten in eigenen Worten, oder sie behauptet, dass sie/ihre Gruppe ein Konzept gelernt hat, ohne das Konzept inhaltlich darzulegen.	„Insbesondere habe ich natürlich ein generelles Verständnis für die Bedeutung des Begriffs „Krümmung (von ebenen Kurven)“ entwickelt.“ (T10,6)
Sonstiges	Alles, was die Frage „Wie habe ich gelernt?“ beantwortet, aber nicht einer der anderen Kategorien zugeordnet werden kann. Dabei kann es sich beispielsweise um Erkenntnisse über Mathematik im Allgemeinen handeln oder um LaTeX-Kenntnisse.	„Dabei haben wir feststellen können, dass viele Dinge auf Konventionen beruhen und wir uns diese Dinge selbst festlegen dürfen.“ (T7,9)

Wie habe ich gelernt?

Alles, was in eine der folgenden Kategorien eingeordnet wird, muss eine Antwort auf die Frage „Wie habe ich gelernt?“ sein.

Codename	**Beschreibung**	Beispiel
Wie/Sonstiges	Alles, was die Frage „Wie habe ich gelernt?“ beantwortet, aber nicht bei Sichtstruktur oder wissenschaftlichen Methoden reinpasst.	„Insgesamt habe ich somit das Prinzip kennen gelernt, dass zuerst das Konzept (sozusagen die Vorstellung von dem, was Krümmung denn sein soll) erarbeitet werden muss und erst im zweiten Schritt die mathematische Ausformulierung“ (T16,13)

Sichtstruktur

Codename	**Beschreibung**	Beispiel
hands-on	Die Studentin berichtet, dass die praktischen Aufgaben (oder eine davon) ihr/ihrer Gruppe dabei geholfen haben, ein Gefühl für die Krümmung ebener Kurven zu bekommen, oder dass die Studentin/ihre Gruppe durch die Aufgaben auf nützliche Ideen für die Lösung des Ausgangsproblems kam oder dass die Aufgaben eine Verbindung der Mathematik zum Alltag aufgezeigt haben.	„Die spielerischen Einstiege, mittels City-Roller, Kreide... fand ich sehr spannend. Vor allem da sie uns auf Ideen brachten zur Erarbeitung des Themas.“ (T11,8-9)

Arbeitsblatt	Die Studentin berichtet, dass die Fragen oder Beispielkurven auf dem Arbeitsblatt ihr/ihrer Gruppe bei der Erarbeitung des Themas geholfen haben.	„Zu Beginn habe ich im Austausch mit der Gruppe gelernt, wobei der Impuls zum Nachdenken durch die Arbeitsblätte bzw. die Fragen gestaltet war.“ (T16,15)
Skript, Vortrag	Die Studentin berichtet, dass sie beim Schreiben des Skriptes oder beim Vorbereiten des Vortrags etwas (zum Thema) gelernt hat, z. B. dass sie ein tieferes Verständnis bekommen hat.	„Da ich unseren Zugang zum Thema am Ende auch vorgestellt habe, habe ich schließlich noch einmal allein gelernt, indem ich die Idee und die Rechenschritte nachvollzogen habe.“ (T16,17)
Instruktion	Die Studentin berichtet, dass sie durch die Vorträge der Kommilitoninnen, die Einführung in der ersten Stunde oder das Lesen des Skriptes etwas zum Thema oder über Mathematik gelernt hat.	„Außerdem habe ich vier verschiedene Herangehensweisen [...] kennengelernt. [...] wurden am Ende vier vollkommen unterschiedliche Wege präsentiert“ (T10,7-9)
Gruppenarbeit	Die Studentin berichtet, dass sie durch den Austausch in der Gruppe etwas gelernt hat oder dass durch den Austausch die Erarbeitung des Themas vorangetrieben oder überhaupt möglich wurde.	„Innerhalb unserer Gruppe herrschte bzw. herrscht auch eine super Arbeitsatmosphäre, da jede Frage, egal wie „dämlich“ sie ist, gestellt werden kann und wir uns mit unseren mathematischen Grundkenntnissen gut ergänzen. So schaffen wir es, gemeinsam einen Lösungsweg zu erarbeiten.“ (T11,11-12)
Coaching	Die Studentin berichtet, dass die Hinweise der Dozentinnen bei den Gruppenarbeiten bei der Erarbeitung des Themas hilfreich waren.	„Was ich als äußerst hilfreich empfand, war, dass die Gruppe mit ihren Überlegungen nicht allein gelassen wurde, sondern dass immer jemand herumging, sich abwechselnd zu den verschiedenen Gruppen gesellte, sich die Überlegungen anhörte und eventuell Tipps gab.“ (T7,12)

Mathematische Arbeitsweisen

Codename	**Beschreibung**	Beispiel
überprüfen	Die Studentin vergleicht Hypothesen oder Ergebnisse mit vorherigen Überlegungen oder testet sie an Beispielen auf Plausibilität oder berichtet von einer solchen Tätigkeit (alleine oder in der Gruppe).	„[...] wie solch alltagsnahe Beispiele in der Erarbeitungsphase immer wieder herangezogen werden konnten, um einen bestimmten Punkt klarzumachen oder die Vorgehensweise damit zu überprüfen.“ (T10,16)
Beobachtung	Die Studentin berichtet, dass sie/ihre Gruppe bei den praktischen Aufgaben ein Phänomen beobachtet hat und eventuell darauf eine Hypothese aufgebaut oder daraus eine Schlussfolgerung gezogen hat.	„Beim Rollerfahren wird der Lenker und die Neigung des Körpers beim Fahren eines Kreises z. B. aufrechterhalten und der Radius des Kreises hat direkten Einfluss auf die Stärke der Krümmung.“ (T14,9)
Wiederholung, Anwendung	Die Studentin berichtet, dass sie/ihre Gruppe etwas aus früheren Semestern gelernt hat, weil sie es für die Lösung der Aufgabe brauchte, d. h. sie hat es wiederholt oder auf das vorliegende Problem angewendet und dabei besser verstanden.	„Um so besser war es also, dass wir diesen Stoff wiederholten und diesen insbesondere auch angewendet haben.“ (T11,7)
Spezialfall verallgemeinern	Die Studentin berichtet, dass sie/ihre Gruppe einen Spezialfall gelöst und das verwendete Verfahren auf den allgemeinen Fall angepasst hat.	„Im Fall ebener Kurven war es für unsere Gruppe hilfreich, zunächst ausführlich den Spezialfall Kreis zu betrachten und davon ausgehend dann auf die allgemeine Formel zu schließen.“ (T10,17)
mathematisieren	Die Studentin berichtet, dass sie/ihre Gruppe anschauliche oder alltagssprachlich formulierte Sachverhalte präzise mathematisch gefasst/formuliert hat oder dies versucht hat.	„Es war nicht immer leicht, diese Ideen mathematisch auszudrücken“ (T11,10)
Irrwege	Die Studentin berichtet, dass sie/ihre Gruppe auf dem Weg zum Ziel auch nicht-zielführende Ansätze durchdacht hat. Dies kann sich auch implizit in Wörtern wie „ausprobieren“ zeigen.	„Denn wir hatten uns des Öfteren verrannt und mussten auf diese Weise feststellen, dass nicht jede Idee zum Ziel führt.“ (T11,14)

Überzeugungen

Eine Textstelle wird einer der folgenden Kategorien zugeordnet, wenn die entsprechende Überzeugung aus dem Text deutlich wird oder wenn eine Erfahrung beschrieben wird, die die Überzeugung unterstützt.

Codename	**Beschreibung bzw. Item**	Beispiel
Zusammenhänge (groß)	Es gibt viele Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Themen oder Objekten aus verschiedenen Bereichen. Die Studentin schreibt, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Themen oder Objekten erkannt zu haben. Oder: Es wird deutlich, dass die Studentin einen Zusammenhang nicht erkannt hat und nicht danach sucht.	„Umso besser, dass wir diese dabei wiederholt und vor allem angewendet haben, denn so habe ich oftmals Themen verknüpft und viel besser verstanden.“ (T3,8)
Zusammenhänge (mittel)	Es gibt viele Verbindungen innerhalb eines Themengebietes, etwa verschiedene Charakterisierungen eines Objektes oder Konzeptes. Zusammenhänge in noch kleinerem Rahmen wie etwa der Zusammenhang zwischen Radius eines Kreises und seiner Krümmung gehören nicht in diese Kategorie. Die Studentin schreibt, Zusammenhänge innerhalb eines Gebietes erkannt zu haben. Oder: Es wird deutlich, dass die Studentin einen Zusammenhang nicht erkannt hat und nicht danach sucht.	„Eine naheliegende Frage zur Überprüfung, ob der Stoff verstanden wurde, ist natürlich die Frage nach den Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Herleitungsmöglichkeiten.“ (T10,30)
verschiedene Wege	COACTIV: Mathematische Aufgaben und Probleme können auf verschiedenen Wegen richtig gelöst werden. Die Studentin schreibt, dass es verschiedene Wege zur Lösung eines Problems gebe. Oder: Es wird deutlich, dass die Studentin erwartet, dass die Lösung eindeutig ist.	„Außerdem habe ich vier verschiedene Herangehensweisen bzw. Herleitungsmöglichkeiten hinsichtlich der Krümmung ebener Kurven kennengelernt. Diese Tatsache ist meiner Meinung nach besonders hervorzuheben.“ (T10,7-8)

selber finden	COACTIV: In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren. Die Studentin schreibt, selbst (oder mit ihrer Gruppe) etwas Mathematisches entdeckt/erfunden zu haben, oder beschreibt, was sie entdeckt/erfunden hat. Oder: Es wird deutlich, dass die Studentin meint, dass Wissen von Autoritäten weitergegeben werden müsse.	„Um zur Krümmung der Kurve zu gelangen, haben wir zunächst eine Formel für die Länge einer Kurve aufgestellt." (T11,3) „Vor allem da sie uns auf Ideen brachten zur Erarbeitung des Themas." (T11,9)
alltagsbezogen	Mathematik hat Verbindungen zu realen Gegenständen oder alltäglichen Phänomenen. Die Studentin schreibt, dass sie eine Verbindung zwischen Mathematik und realen Gegenständen oder alltäglichen Phänomenen sieht. Oder: Es wird deutlich, dass die Studentin keine Verbindungen zum Alltag sieht und auch nicht sucht.	„Durch die kleinen „Experimente" mit Cityroller, Bällen, Kreide und Alltagsgegenständen wurde das Thema Kurve mit vielen Sinnen erlebt." (T9,5)
zeitaufwendige Probleme	Barkaliev, Kloosterman: I can solve time-consuming mathematics problems. Die Studentin schreibt, dass sie/ihre Gruppe lange gebraucht hat, um ein Problem zu lösen, es aber letztendlich geschafft hat. Oder: Es wird deutlich, dass die Studentin meint, dass man mathematische Probleme/Aufgaben schnell lösen können muss.	„So werde ich mir in Zukunft hoffentlich weniger schnell Formeln oder Antworten auf konkret aufgetretene Fragen „ergoogeln", sondern zuerst einmal selbst überlegen." (T10,13)

A.9. Kodierleitfaden zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis, WS17/18

Analysis

Definition: In der Textstelle wird Analysis beschrieben/charakterisiert oder es werden Objekte/Themen aus der Analysis aufgezählt; „Analysis“ muss nicht genannt werden.

Ankerbeispiele:

- Die Analysis beschäftigt sich mit Funktionen und untersucht z.B. Stetigkeit, Grenzwerte, Integrale, Steigung und Krümmung. Hier werden also aktuelle Veränderungen einer Funktion beschrieben. (T9,16-17)

- Hier fallen mir z.B. Folgen, Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit,... ein. (T6,16)

Lineare Algebra

Definition: In der Textstelle wird Lineare Algebra beschrieben/charakterisiert oder es werden Objekte/Themen aus der Linearen Algebra aufgezählt; „Lineare Algebra“ muss nicht genannt werden.

Ankerbeispiele:

- Lineare Algebra ist dabei ein Teilgebiet der Algebra. (T2,8)

- Die lineare Algebra beschäftigt sich mit Vektorräumen und lineare Abbildunge zwischen diesen. Insbesondere werden hier lineare Gleichungssysteme gelöst. (T4,10)

- Auch die Körper- und Gruppentheorie die in LinA behandelt wird, (T6,11)

KommentarZshg

Definition: Die Textstelle enthält einen Kommentar dazu, ob Lineare Algebra und Analysis zusammenhängen.

Ankerbeispiele:

- Letztlich lässt sich zusammenfassend sagen, auch wenn Lineare Algebra und Analysis auf den ersten Blick nicht viel miteinander zu haben, bedingen sie sich trotzdem. (T5,25)

- Die Vorlesungen werden im Studium in der Regel getrennt voneinander gehalten und als Student sind Zusammenhänge beider Vorlesungen nur schwer erkennbar. (T11,9)

- Zwischen LinA und Ana gibt es auf jeden Fall einen Zusammenhang. (T11,11)

Thematisch

AnaInLinAAllg

Definition: Die Textstelle enthält die allgemeine Behauptung, dass Analysis benötigt wird, um in Linearer Algebra arbeiten/beweisen zu können.

Abgrenzung: Es wird kein konkretes Beispiel und kein konkretes Thema angeführt.

Ankerbeispiele:

- Die beiden Teilbereiche können jedoch nicht unabhängig voneinander existieren, da sie jeweils die Kenntnisse der anderen benötigt, um bestimmte Phänomene zu erklären. T2,19
- Du hast in Analysis 2 gelernt, dass die Theorie der mehrdimensionalen Analysis fundamental auf den Methoden der Linearen Algebra beruht. (T10,17)

AnaInLinAKonkret

Definition: Die Textstelle enthält ein Beispiel dafür, dass Objekte/Strukturen/Sätze aus Analysis in Linearer Algebra verwendet werden.

Abgrenzung: Es wird nur codiert, wenn die Objekte/Strukturen/Sätze tatsächlich Analysis bzw. Linearer Algebra mathematisch-inhaltlich zuzuordnen sind, nicht wenn es sich um inhaltlich andere Bereiche aus den Vorlesungen handelt.
Es wird ein konkretes Thema oder Beispiel angeführt.

Ankerbeispiele:

- Ein weiterer Zusammenhang stellt der Fundamentalsatz der Algebra dar. Dieser wird in der linearen Algebra bewiesen, allerdings geht es bei diesem um die Nullstellen eines Polynoms, was eher zur Analysis gehört. Man kann diesen Satz also sowohl in der Lineare Algebra „algebraisch“ beweisen und in der Analysis „analytisch“beweisen. (T5,18-20)
- Andererseits kann durch Techniken der Analysis die Bestimmung der Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms erfolgen (T10,21)
- Matrix-Exponentialfunktion (T11,16)

LinAInAnaAllg

Definition: Die Textstelle enthält die allgemeine Behauptung, dass Lineare Algebra benötigt wird, um in Analysis arbeiten/beweisen zu können.

Abgrenzung: Es wird kein konkretes Beispiel und kein konkretes Thema angeführt.

Ankerbeispiele:

- Die beiden Teilbereiche können jedoch nicht unabhängig voneinander existieren, da sie jeweils die Kenntnisse der anderen benötigt, um bestimmte Phänomene zu erklären. (T2,19)

- In wie fern wir die in der LinA bewiesenen Sätze für Anwendungen in der Ana brauchen, wirst du aber erst später sehen. (T4,18)

LinAInAnaKonkret

Definition: Die Textstelle enthält ein Beispiel dafür, dass Objekte/Strukturen/Sätze aus der Lineare Algebra in Analysis verwendet werden.

Abgrenzung: Es wird nur codiert, wenn die Objekte/Strukturen/Sätze tatsächlich Linearer Algebra bzw. Analysis mathematisch-inhaltlich zuzuordnen sind, nicht wenn es sich um inhaltlich andere Bereiche aus den Vorlesungen handelt.
Es wird ein konkretes Thema oder Beispiel angeführt.

Ankerbeispiele:

- In Analysis 2 werden dir beispielsweise Matrizen begegnen und bei Integralen kann durchaus die Berechnung einer Determinanten erforderlich sein. (T1,7)

- Themengebiete bei denen sich Lineare Algebra und Analysis überschneiden sind zum Beispiel Matrizen. Diese werden in Linearer Algebra eingeführt aber werden dennoch in Analysis in wichtigen Sätzen oder Definition benötigt. Zum Beispiel bei der Jacobi-Matrix oder Hesse-Matrix. (T5,14-16)

- Das Thema Normen wird in Linearer Algebra einführt, aber in der Analysis verwendet und gebraucht. (T05,17)

- Auch grundlegende Fertigkeiten wie Matrizenrechnung sind sowohl in der Analysis als auch in der linearen Algebra wichtig. (T6,10)

- Möchte man Extremstellen klassifizieren, benötigt man das Konzept der Definitheit einer Matrix und Techniken, um diese zu bestimmen. Diese liefert die Lineare Algebra, Beispiel: Determinante der Hesse-Matrix < 0 negativ definit, Determinante > 0 positiv definit. (T10,19-20)

inAnderemBereich

Definition: Die Textstelle enthält die Behauptung, dass Lineare Algebra und Analysis beide benötigt werden, um ein anderes (mathematisches) Gebiet zu beschreiben/untersuchen. Sowohl konkrete Beispiele als auch Themennennungen werden codiert.

Ankerbeispiele:

- Ein weiterer großer Zusammenhang ist in den Vorlesungen Stochastik und vorallem auch in der Geometrie zu sehen. (T1,8)

- Will man nun die Krümmung einer solchen Raumkurve berechnen, muss man sozusagen sein Koordinatensystem an die richtige Stelle verschieben, was einem Basiswechsel entspricht. Auch hier werden also Analysis und Lineare Algebra zusammen angewandt. (T1,19-20)

- Zunächst einmal bilden Ana und LinA die Grundlagen für das Mathematikstudium. (T3,7)

- Physiker arbeiten häufig mit Vektoren um z.B. die Bewegung eines Körpers darzustellen. Nur die Richtung der Bewegung reicht aber häufig nicht, um genauere Aussagen treffen zu können. Hier kommt dann die Analysis ins Spiel. Denn auch für Vektoren gibt es Ableitungsvektoren, die mit den Hilfsmitteln der Analysis bestimmt werden können und Auskunft über die Geschwindigkeit oder Beschleunigung des bewegten Körpers zu geben. (T8,13-16)

gemeinsameGrundlagen

Definition: In der Textstelle werden Grundlagen, die in Linearer Algebra und Analysis benötigt werden genannt, deren Untersuchung aber weder zu Linearer Algebra noch zu Analysis gehört, wie Mengenlehre oder Logik.

Abgrenzung: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden als Grundlagen betrachtet, nicht als Gegenstand der Analysis.

Ankerbeispiele:

- Beide Teilgebiete haben die Mengenlehre als Grundlage. (T2,9)

- Im Zusammenhang mit linearen Abbildungen werden auch Begriffe wie injektiv, surjektiv, bijektiv, Bild, Urbild, Umkehrabbildung, etc besprochen. Dies sind Grundbegriffe die sowohl in der linearen Algebra als auch in der Analysis gebraucht werden. (T6,9)

- Außer diesen relativ grundlegenden Begriffen die man für beide Bereiche braucht lernt man natürlich auch Beweise zu führen und mathematische Argumente richtig zu gebrauchen. (T7,12)

- Die Vektorräume, in denen diese Funktionen liegen, sind in der Analysis eigentlich immer $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. (T9,19)

gemeinsameFragestellung

Definition: Die Textstelle enthält die Behauptung, dass es Fragen gibt, die in beiden Gebieten auftauchen, die sich aber auf unterschiedliche Objekte beziehen und unterschiedliche Lösungsmethoden haben, z. B. Lösbarkeit von Gleichungen.

Ankerbeispiel:

- Auch befasst man sich in der Algebra allgemein mit der Lösbarkeit von Gleichungen, was natürlich auch in der Analysis vorkommen kann. (T7,19)

unterschiedlicheHerangehensweisen

Definition: Die Textstelle enthält die Behauptung, dass es in Analysis und Linearer Algebra unterschiedliche Herangehensweisen an Probleme gibt und dass diese unterschiedlichen Herangehensweisen zusammen helfen können, weitere Probleme zu lösen.

Ankerbeispiele:

- Wenn eine Funktion betrachtet wird, wird sie algebraisch auf ihre Nullstellen untersucht. Analytisch hingegen wird sie auf ihr Verhalten in der Nähe einer Polstelle bzw. ihr Verhalten für x gegen Unendlich betrachtet. Ebenso fällt darunter eine Untersuchung der Steigung oder der Krümmung der Funktion. (T2,16-18)
- Dabei kann man Probleme analytisch (Ana) und algebraisch (LinA) lösen. (T3,8)
- Je weiter man jedoch mit dem Studium voranschreitet, desto detaillierter beschäftigt man sich mit den verschiedensten mathematischen Themen und ist vielleicht überrascht, wie oft Überschneidungen zwischen analytischen und algebraischen Methoden verlangt sind, um Beweise zu führen oder neue Formeln zu entwickeln. (T8,23)

Art des Beispiels

falschesBeispiel

Definition: Das in der Textstelle genannte Beispiel hat nichts mit Analysis oder Linearer Algebra zu tun, z. B. analytische Geometrie, oder es wird etwas inhaltlich falsch zugeordnet, z. B. Mengenlehre zu Linearer Algebra, oder das Beispiel ist mathematisch falsch oder sehr unverständlich.

Abgrenzung: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ zählen als oberflächliches Beispiel.

Ankerbeispiele:

- Denn betrachtet man beispielsweise Funktionen in der Analysis sind diese im Prinzip nur lineare Abbildungen in der Linearen Algebra. (T3,12) (Begründung: Unverständlich, was gemeint ist.)
- Um Funktionen untersuchen zu können, benötigen wir die Grundlagen aus der Algebra und somit auch aus der lineare Algebra. (T4,17)(Begründung: Für eine Kurvendiskussion wird keine LinA benötigt. Der Schluss ist falsch.)
- Auch die Körper- und Gruppentheorie die in LinA behandelt wird, ist in AnA wichtig. (T6,11)
- Ein kleines Beispiel wäre die Definition der Abzählbarkeit einer Menge. Ich lernte diese Definition zuerst im Rahmen der Analysis kennen, sie bedient sich aber des Begriffes der Bijektion, der mir aus der linearen Algebra bekannt war. (T7,29-30) (Begründung: Das ist Mengentheorie, nicht LinA oder Ana)

oberflBeispiel

Definition: Das in der Textstelle genannte Beispiel ist oberflächlich oder oberflächlich beschrieben. Es werden entweder nur grobe Themen genannt oder es werden Objekte genannt, die eher kalkulatorisch genutzt zu werden scheinen und es wird kein Transfer von Theorie/Sätzen angedeutet. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ werden hier codiert.

Ankerbeispiele:

- In Analysis 2 werden dir beispielsweise Matrizen begegnen und bei Integralen kann durchaus die Berechnung einer Determinanten erforderlich sein. (T1,7)
- Die beiden Teilbereiche können jedoch nicht unabhängig voneinander existieren, da sie jeweils die Kenntnisse der anderen benötigt, um bestimmte Phänomene zu erklären. (T2,19)
- Denn auch hier beschäftigt man sich vor allem mit den Körpern der reellen und komplexen Zahlen. (T6,12)
- Du hast in Analysis 2 gelernt, dass die Theorie der mehrdimensionalen Analysis fundamental auf den Methoden der Linearen Algebra beruht. (T10,17)

TheorUnklarBeispiel

Definition: Das in der Textstelle genannte Beispiel ist oberflächlich beschrieben. Es werden aber Objekte angeführt, die über eine kalkulatorische Nutzung eher hinausgehen oder für eine solche nicht geeignet sind. Es wird aus dem Text jedoch nicht deutlich, ob der Transfer von Theorie/Sätzen eingeschlossen wird.

Ankerbeispiele:

- Wenn eine Funktion betrachtet wird, wird sie algebraisch auf ihre Nullstellen untersucht. Analytisch hingegen wird sie auf ihr Verhalten in der Nähe einer Polstelle bzw. ihr Verhalten für x gegen Unendlich betrachtet. Ebenso fällt darunter eine Untersuchung der Steigung oder der Krümmung der Funktion. (T2,16-18)
- Oder schaut man sich mehrdimensionale Funktionen und deren Ableitungen (Stichwort: Jacobi Matrix) oder Gradienten an, so lässt sich dies mit Matrizen erklären. Matrizen werden aber in der LinA gelehrt. (T3,13)
- Gerade bei physikalischen Fragen wird besonders deutlich, wie analytische und algebraische Fragen oft Hand in Hand gehen können. Physiker arbeiten häufig mit Vektoren um z.B. die Bewegung eines Körpers darzustellen. Nur die Richtung der Bewegung reicht aber häufig nicht, um genauere Aussagen treffen zu können. Hier kommt dann die Analysis ins Spiel. Denn auch für Vektoren gibt es Ableitungsvektoren, die mit den Hilfsmitteln der Analysis bestimmt werden können und Auskunft über die Geschwindigkeit oder Beschleunigung des bewegten Körpers zu geben. (T8,12-16)
- Grenzwertberechnungen von Matrizen (T11,15)

tiefgehendesBeispiel

Definition: Im in der Textstelle genannte Beispiel werden nicht nur Objekte angeführt, sondern die Theorie des einen Gebietes wird in das andere transferiert oder die Notwendigkeit des Transfers angesprochen.

Ankerbeispiele:

- Auch werden Basiswechselmatrizen in der Differentialgeometrie benötigt. Hierbei werden z.B. Raumkurven betrachtet, du kannst dir dazu eine Helix vorstellen. Eine solche Kurve kann auch durch eine Parametrisierung beschrieben werden. Will man nun die Krümmung einer solchen Raumkurve berechnen, muss man sozusagen sein Koordinatensystem an die richtige Stelle verschieben, was einem Basiswechsel entspricht. Auch hier werden also Analysis und Lineare Algebra zusammen angewandt. (T1,16-20)

- In wie fern wir die in der LinA bewiesenen Sätze für Anwendungen in der Ana brauchen, wirst du aber erst später sehen. (T4,18)

- Ein weiterer Zusammenhang stellt der Fundamentalsatz der Algebra dar. Dieser wird in der linearen Algebra bewiesen, allerdings geht es bei diesem um die Nullstellen eines Polynoms, was eher zur Analysis gehört. Man kann diesen Satz also sowohl in der Lineare Algebra „algebraisch" beweisen und in der Analysis „analytisch" beweisen. (T5,18-20)

- Beispielsweise werden mehrdimensionale Funktionen in Vektorschreibweise definiert und deren Ableitung ist eine Matrix. Möchte man Extremstellen klassifizieren, benötigt man das Konzept der Definitheit einer Matrix und Techniken, um diese zu bestimmen. Diese liefert die Lineare Algebra, Beispiel: Determinante der Hesse-Matrix <0 negativ definit, Determinante >0 positiv definit. (T10,18-20)

A.10. Kodierleitfaden zur Vernetzung von Linearer Algebra und Analysis, WS18/19

Kontext: Die Autorinnen und Autoren der Texte nahmen am Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ teil. Mit Beginn der vierten Einheit mussten sie ihre Erfahrungen zu Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis reflektieren. Dazu sollten sie schriftlich die folgenden Fragen beantworten:

> Damit Wissen wirklich nutzbar wird, ist es nötig, verschiedene „Wissensbits“ miteinander zu vernetzen. Dies ist auch in der Arbeit mit SchülerInnen wichtig, da von ihnen erwartet wird, Wissen aus einem Gebiet in einem anderen anwenden zu können. Im Rahmen des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ haben Sie selbst die Gelegenheit, dieses Vernetzen von Wissen zu erleben und zu reflektieren.
>
> Haben Sie sich beispielsweise schon einmal gefragt, ob Lineare Algebra und Analysis eigentlich etwas miteinander zu tun haben? In den entsprechenden Vorlesungen wird nicht immer explizit auf Verbindungen hingewiesen. In späteren Vorlesungen braucht man dann aber doch häufig Objekte und Konzepte aus beiden Gebieten gleichzeitig.
>
> Sind Ihnen bei den bisherigen Seminarthemen Stellen aufgefallen, an denen LinA und Ana zusammenkommen?
>
> Hilft Ihnen das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen? Wenn ja, wie? Wenn nein, was würde Ihnen stattdessen möglicherweise helfen?

Themen, bei denen eine Verbindung zwischen Linearer Algebra und Analysis erkannt wird

Codiert werden Themen, die als Beispiel für eine Verbindung genannt werden oder als Beispiel für ein Thema, das auf beiden Vorlesungen aufbaut. Beispiele für Flächeninhalt, Flächenkrümmung, Abstände und Rotationsflächen sind analog zu denen bei Kurvenkrümmung und Raumkurven.

Codename	Beschreibung	Beispiel
Kurven-krümmung	Die Studentin spricht das Thema „Krümmung ebener Kurven“ an oder zumindest ebene Kurven.	„Hierbei erinnere ich mich nämlich sehr gut daran, dass wir bei der Krümmungsthematik durchaus über Vektorgeometrie und anschließend über die Interpretation von Vektoren im Sinne einer Ableitung gesprochen haben (Beschleunigung, Geschwindigkeit etc.).“ (T8,12)
Raumkurven	Die Studentin spricht das Thema „Krümmung von Raumkurven“ an oder zumindest Raumkurven.	„Bei unserem Ansatz zur Herleitung der Formel für die Krümmung einer Raumkurve kamen wir an den Punkt, an dem wir eine Schmiegebene bestimmen sollten. [...]“ (T7,11)

Flächeninhalt	Die Studentin spricht das Thema "Flächeninhalt gekrümmter Flächen„ an oder die Beschreibung von gekrümmten Flächen.	
Flächenkrümmung	Die Studentin spricht das Thema „Krümmung von Flächen" an.	
Abstände	Die Studentin spricht das Thema „Abstände auf gekrümmten Flächen" an.	
Rotationsflächen	Die Studentin spricht das Thema „Rotationsflächen" an.	
themenübergreifend	Die Studentin nennt Beispiele für Objekte, Konzepte oder Verfahren aus LinA und Ana, die im Seminar verwendet wurden, ohne sie einem Thema zuzuordnen.	„An erster Stelle fällt mir auf, dass für die Bearbeitung der bisherigen Themen oft Kenntnisse aus den beiden Teilgebieten nötig waren. Aus der Analysis der Satz von l'Hospital und die Taylor-Entwicklung von Funktionen, sowie aus der Linearen Algebra das Skalarprodukt und das Gram-Schmidt-Verfahren, um ein paar Beispiele zu nennen." (T2,8-9)
andere Bereiche	Die Studentin nennt andere Bereiche als das Seminar, in denen sie Verbindung zwischen LinA und Ana erkannt hat. Es können konkrete Beispiele sein oder generelle Erwähnungen von bestimmten Vorlesungen.	„Im Seminar Differentialgeometrie zum Angreifen, sowie andere Vorlesungen (Stochastik, mathemaitques discrètes und DGL) habe ich oft gemerkt, dass auf Vorwissen von Analysis und Linearer Algebra zusammen zurückgegriffen wurde, auch wenn manchmal der Zusammenhang nicht immer deutlich ersichtlich war, sondern eher etwas intuitiver verwendet. " (T5,5)

Gründe für und Hilfen bei Schwierigkeiten beim Erkennen von Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis

Textstellen, die zum Thema „Gründe und Hilfen" passen, aber keiner der folgenden Kategorien zugeordnet werden können, werden mit der Oberkategorie „Gründe und Hilfen" als Restkategorie codiert.

Codename	Beschreibung	Beispiel
Gründe für Schwierigkeiten	Die Studentin benennt einen Grund, weshalb ihr oder anderen das Erkennen von Verbindungen zwischen LinA und Ana schwer fiel/fällt/fallen könnte.	„Im Studium scheint es so, als ob die mathematischen Teilgebiete Lineare Algebra und Analysis nichts miteinander zu tun haben, was ja auch schon allein durch die Tatsache verstärkt wird, dass die beiden Vorlesungen LinA und Ana jeweils unabhängig voneinander gehört werden können.“ (T7,3) „Zum anderen meine ich mich zu erinnern, dass selbst eine Vorlesung, die nicht Lineare Algebra oder Analysis behandelt hat immer nur auf einer der Bereiche Bezug nahm und hierbei nichts vermischt wurde.“ (T8,10)
beides in einer Veranstaltung	Die Studentin schreibt, dass sie in einer Veranstaltung, die nicht LinA oder Ana (1 oder 2) war, bemerkt hat, dass LinA und Ana verwendet wurden. Oder die Studentin schreibt, dass eine Veranstaltung, die nicht LinA oder Ana (1 oder 2) war, LinA und Ana voraussetzt.	„Der mathematische Bereich der Differentialgeometrie vereint also offensichtlich Objekte und Konzepte sowohl aus Analysis als auch aus Linearer Algebra, die gemeinsam auftreten und ineinander übergreifen.“ (T4,16) „In dem Seminar ‚Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen‘ konnten wir allerdings erfahren, dass dies nicht unbedingt der Fall sein muss. Die lineare Algebra kann sehr wohl mit der Analysis zusammengebracht werden.“ (T7,4-5)
Ana 2 braucht LinA	Die Studentin schreibt, dass ihr in Ana 2 auffiel, dass dort Inhalte aus LinA verwendet werden.	„Als in Ana II dann auf einmal Matrizen an der Tafel standen, vom Charakteristischen Polynom die Rede war und Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet wurden, viel mir diese erste Verbindung vermutlich deutlicher auf, als den meisten anderen Studenten, die mit LinA oder mit beiden Vorlesungen gleichzeitig begonnen haben.“ (T3,2-3) „Spätestens aber mit Ana II wurden mir die engeren Verbindungen klar, als wir nämlich in der mehrdimensionalen Welt angelangt waren. Da kamen dann Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Vektorrechung usw. vor und das waren alles die Dinge, die ich 2 Semester zuvor in LinA kennengelernt hatte und hier auch nutzen konnte.“ (T14,13-14)

Codename	Beschreibung	Beispiel
Problemlösung	Die Studentin schreibt, dass zur Lösung eines Problems Konzepte oder Verfahren aus LinA und Ana nötig waren. Dies kommt beispielsweise in Wörtern wie „nötig“ oder „brauchen“ zum Ausdruck, im Gegensatz zur Kategorie „beides in einer Veranstaltung“, wo eher von „zusammenkommen“ o. Ä. geredet wird und wo nicht über das Lösen von Problemen gesprochen wird. Unter „Problemlösen“ fallen nur expliziten Aussagen, keine Beschreibungen konkreter Beispiele, in denen LinA und Ana verwendet wurden.	„Natürlich hilft das Seminar dabei zu sehen, wie Themen aus der Linearen Algebra und der Analysis gleichzeitig angewandt werden müssen, um eine Problemstellung aus dem Seminar lösen zu können.“ (T10,28)
Rückblick	Die Studentin schreibt, dass sie im Rückblick oder bei Überlegungen auf einer Metaebene Verbindungen zwischen LinA und Ana erkannt hat, beispielsweise beim Schreiben des Reflexionstextes oder eines Skriptbeitrags.	„Rückblickend wurde der Zusammenhang auch bei der Berechnung des Flächeninhalts von gekrümmten Flächen deutlich sichtbar.“ (T6,22) „Rückblickend wurde der Zusammenhang auch bei der Berechnung des Flächeninhalts von gekrümmten Flächen deutlich sichtbar. “ (T5,10-11)
Widerholen	Die Studentin schreibt, dass das Wiederholen und vertiefte Verstehen von Inhalten früherer Veranstaltungen (z. B. LinA und Ana) dazu beiträgt, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu erkennen.	„Das Seminar hilft mir insofern Verbindungen zwischen Lineare Algebra und Analysis herzustellen, da man sich genauer und tiefgründiger mit den Themen auseinandersetzt. Und man sich während der Erarbeitungsphase mit einigen Themen aus den Grundvorlesungen nochmals beschäftigt und so dann z.T. auch Verbindungen erkennen kann.“ (T11,9-10)
Hinweise	Die Studentin schreibt, durch Hinweise von DozentInnen oder KommilitonInnen auf Verbindungen zwischen LinA und Ana aufmerksam geworden zu sein.	„Allerdings gab es auch Phasen, wo wir gewisse Verbindungen nicht gesehen und beharrlich in einem Bereich bleiben wollten (z.B in der Analsyis). In solchen Fällen haben oftmals die Tipps der Dozenten bzw. der Mitstudierenden geholfen, denn oft kann man durch Anwendung von Techniken aus der LinA oder der Ana, Dinge einschränken oder vereinfachen und so auf relativ einfache Lösungen schier unmöglich geglaubter Aufgaben zu kommen.“ (T14,40)

Codename	**Beschreibung**	**Beispiel**
gleiche Grundlagen	Die Studentin sieht in gleichen Grundlagen wie Mengenlehre, Logik u.a. eine Verbindung zwischen LinA und Ana.	„Auch beginnen beide Vorlesungen mit den gleichen Grundlagen wie z. B. der Mengenlehre oder der Gruppen- bzw. Körpertheorie, was auch vermuten lässt, dass beide Bereiche irgendwie etwas miteinander zu tun haben müssen.“ (T4,5)
Vorschlag	Die Studentin macht einen Vorschlag, wie das Erkennen von Verbindungen im Seminar in Zukunft erleichtert werden könnte. Solche expliziten Vorschläge werden nur mit dieser Kategorie codiert und nicht zusätzlich als „Hinweise“ oder anderes, um Erfahrungen, was nützt, von Ideen, was nützen könnte, zu unterscheiden.	„Es könnte aber noch besser gelingen, wenn man den Studenten im Vorfeld es zu Aufgabe macht, bei den Vorträgen darauf zu achten Bezüge zu den jeweiligen Vorlesungen herzustellen.“ (T9,12)

A.11. Textmaterial der StudienteilnehmerInnen

A.11.1. Überzeugungen, WS 18/19

Studentin 1

1 Reflexion Seminar Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen zum Thema 1
2 In der Erarbeitungsphase des ersten Themas, der Formel für die Krümmung, habe ich gelernt, wie Spezialfälle (in diesem Fall der Kreis) helfen können auf eine Verallgemeinerung der Formel zu kommen.
3 Das heißt ich habe gelernt von bereits Bekanntem auf Unbekanntes zu schließen.
4 Die Materialien, unter anderem der City-Roller und die Kreide, haben geholfen sich die Krümmung zu veranschaulichen.
5 Das Ablaufen der Kurven mit den Füßen hat dabei geholfen ein Gefühl für die Abhängigkeit der Krümmung eines Kreises vom Radius zu bekommen.
6 Man konnte also als Beobachtung formulieren, dass je größer der Radius des Kreises ist, desto schwächer die Krümmung sein muss.
7 Die Überprüfung der Ergebnisse anhand der durch die Materialien, Arbeitsblätter und Nachlaufen der Kurven gefundenen Beobachtungen stellte sich als sehr vorteilhaft heraus.
8 So war es beispielsweise am Kreis möglich zu überprüfen, ob die Formel für jeden beliebigen Punkt dasselbe Ergebnis liefert.
9 Die auf dem Arbeitsblatt gegebenen Veranschaulichung der Krümmungen verschiedener Kurven und die dazu gestellten Fragen ermöglichten es, die Gedanken über die Stärke der Krümmung zu intensivieren.
10 Besonders wichtig bei der Erarbeitung der Formel war meiner Meinung nach die Veranschaulichung durch Skizzen, darunter auch die auf dem Arbeitsblatt dargestellten Graphen.
11 Des Weiteren war es sehr gut, dass Zwischenstände mit den Dozentinnen abgesprochen wurden, um größere Irrwege zu vermeiden, da es sonst in dem doch recht knapp bemessenen Zeitraum schwierig gewesen wäre sein Ergebnis fertigzustellen.
12 Die im Anschluss an die Erarbeitungsphase kommende Sortierung und Strukturierung der eigenen Gedanken, um sie anderen Personen vorstellen zu können, war eine große Hilfe um nochmals das erarbeitete Thema zu durchdenken und die Logik der eigenen Gedanken und Ansätze zu überprüfen.
13 Im Seminar habe ich zudem durch die Vorträge der unterschiedlichen Gruppen verschiedene Ansätze zur Erarbeitung des Themas und Herangehensweisen kennengelernt.
14 Als noch offene Frage stellt sich mir, ob es eventuell noch andere, einfachere Methoden gibt, um auf die Formel für die Krümmung zu kommen, als nur die im Seminar genannten.
15 Welche Alltagsprobleme lassen sich durch das Wissen über die Stärke der Krümmung lösen?
16 Wenn ich der Dozent/ die Dozentin wäre, würde ich folgende Fragen stellen, um den Stoff zu überprüfen:
17 - Welche Ansätze wurden im Seminar angesprochen, um auf die Formel für die Krümmung zu kommen?
18 - Welche Möglichkeiten gibt es die Krümmung zu berechnen? (Parametrisierung nach Bogenlänge oder reguläre Parametrisierung)
19 - Sind die Formeln für die Parametrisierung nach Bogenlänge bzw. reguläre Parametrisierung äquivalent?

Studentin 2

1 Reflexion
2 *Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie es gelernt?*
3 Die Idee unseres Ansatzes zur Bestimmung der Krümmung, nämlich mittels Schmiegekreis basiert auf der spielerische Herangehensweise mit dem Cityroller.
4 Je kleiner der abgefahrene Kreis war, desto schräger war die Kurvenlage und desto größer war die Krümmung.
5 Auf dem Weg zum Ziel habe ich auf mathematischer Ebene verschiedene Themen wiederholt, über die wir auf dem Weg zu unserem Ziel „gestolpert“ sind.

6 Dazu unter anderem geometrische Inhalte, wie die Konstruktion und Berechnung des Umkreismittelpunkts eines Dreiecks, das Skalarprodukt und die Anwendung von l'Hospital.

7 Beeindruckt war ich davon, dass wir die Aufgabe tatsächlich mit sehr elementarem Wissen erfolgreich bearbeiten konnten und (vielleicht abgesehen von l'Hospital) keine größeren Sätze aus dem Mathematikstudium benötigt haben.

8 *Welche Fragen sind noch offen?*

9 Was wir im Laufe der Bearbeitung vernachlässigt haben ist das Vorzeichen, das die Krümmung besitzt.

10 In diesem Punkt haben wir uns darauf geeinigt, dass das im Bezug auf ebene Kurven eine Definitionssache ist, je nachdem ob die Kurve eine Links- oder Rechtskurve macht. Trotzdem bezieht sich unsere Krümmungsformel nur auf den Betrag der Krümmung und nicht auf das Vorzeichen.

11 *Wenn Sie der Dozent/ die Dozentin wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?*

12 1. Wie hängt der sogenannte Schmiegekreis in einem Punkt auf einer Kurve mit der Krümmung der Kurve in diesem Punkt zusammen?

13 2. Was sind die unterschiedlichen Herangehensweisen eine Formel zur Bestimmung der Krümmung einer ebenen Kurve zu ermitteln und wie lassen sich die unterschiedlichen Formeln ineinander überführen?

Studentin 3

1 Reflexion

2 Bei der Erarbeitung des ersten Themas „Krümmung ebener Kurven“ habe ich zunächst einmal gelernt, mit parametrisierten Kurven zu arbeiten.

3 Wir haben eine Formel für die Länge eines Funktionsgraphen, bzw. einer Kurve aufgestellt, mit welcher wir weiterarbeiten konnten, um zur Krümmung einer Kurve zu gelangen.

4 Dabei habe ich nicht nur gelernt, wie man diese berechnet, sondern vielmehr, wie ich mich selbst mathematischen Problemen nähere.

5 Die spielerischen Hinführungen, bei denen wir zu Beginn mit Kreide, Bällen und Cityrollern experimentierten, blieben uns beim Erarbeiten immer im Gedächtnis und brachten uns auf Ideen.

6 Unsere Schwierigkeit war jedoch, dies dann auch formal aufs Blatt zu bringen, um tatsächlich auf eine Formel zu kommen.

7 Oft wurden unsere mathematischen Grundkenntnisse auf die Probe gestellt, nicht immer hatten wir den Stoff von Analysis und Linearer Algebra noch präsent.

8 Umso besser, dass wir diese dabei wiederholt und vor allem angewendet haben, denn so habe ich oftmals Themen verknüpft und viel besser verstanden.

9 Auch Herleitungen und Beweise von uns bereits bekannten Inhalten gaben uns Anstöße oder halfen uns die anschauliche und formale Ebene zu verknüpfen.

10 Zeitweise sind wir nicht besonders gut vorangekommen und wir haben uns dumm und dämlich gerechnet, ohne auf ein sinnvolles Ergebnis zu kommen.

11 Dabei habe ich gelernt, nicht aufzugeben, wenn es nicht auf Anhieb funktioniert, sondern an dem Ansatz weiterzuarbeiten, auch wenn man feststeckt.

12 Außerdem bin ich oft sehr unsicher, was meine mathematischen Kenntnisse anbetrifft, wobei ich oft viel mehr schaffen würde, als ich mir zutraue.

13 Auch hierfür ist das Seminar super und ich bin dankbar für meine Gruppe, in der wir alle eine gute Beziehung zueinander haben und ohne Druck oder Angst einfach ausprobieren können und auch mal Quatsch erzählen können.

14 Beim Skript schreiben habe ich gelernt, mit Latex umzugehen, denn ich hatte das Programm zuvor nur einmal verwendet.

15 Außerdem haben wir uns Gedanken gemacht, wie man das Erarbeitete für andere verständlich erklärt und strukturiert, was nicht immer ganz einfach ist, da man ständig aufpassen muss, nichts vorauszusetzen, was man nicht definiert hat.

16 Außerdem muss man sich in die Adressaten versetzen und sich deren Wissensstand anpassen.

17 Insgesamt bin ich mir sicher, dass uns die Inhalte, die wir erarbeitet haben, viel länger im Kopf bleiben, weil wir uns viel intensiver damit beschäftigt haben, als mit Vorlesungsinhalten.

18 Außerdem fand ich es total interessant, dass wir so unterschiedliche Ansätze hatten, ein und dasselbe Problem zu lösen.

19 Schwer fällt mir immer noch das Arbeiten mit parametrisierten Kurven, da diese in den bisherigen Vorlesungen kaum behandelt wurden.
20 Weshalb kann man die Krümmungsformel nur für glatte, reguläre Kurven anwenden?
21 In welchem Zusammenhang steht die Krümmungsformel mit der zweiten Ableitung?
22 Weshalb durchläuft man die Kurve mit Geschwindigkeit 1?

Studentin 4

1 18.11.18
2 Reflexion 1
3 Es gibt einige Dinge, die ich bei unserer Auseinandersetzung mit dem Thema „Krümmung ebener Kurven“ gelernt habe bzw. einige Fakten, die mir besonders im Gedächtnis geblieben sind.
4 Wichtige Vorüberlegungen, um sich eine Formel für die Krümmung herzuleiten sind z. B., dass Geraden keine Krümmung haben, also ihre Krümmung sozusagen 0 beträgt, und die Krümmung von Kreisen wiederrum an jedem Punkt gleich ist.
5 Gleichzeitig hängt die Krümmung eines Kreises mit seinem Radius zusammen, verhält sich zu diesem sogar antiproportional.
6 Das ist sehr gut vorzustellen, denn wenn wir im Kreis laufen, spüren wir die Krümmung umso stärker, je kleiner der Kreis ist.
7 Das heißt, würden wir sozusagen genau auf dem Äquator entlang laufen, dann hätten wir das Gefühl geradeaus zu gehen, obwohl wir ja eigentlich einen riesigen Kreis laufen.
8 Gleichzeitig weiß ich noch, dass das Vorzeichen einer Krümmung, also ob man diese als negativ oder positiv bezeichnet, letztendlich auf einer Konvention beruht, weswegen wir uns in unserer Krümmungsformel auf den Betrag, also die Intensität der Krümmung in einem Punkt, beschränkt haben.
9 Außerdem habe ich gelernt, dass es viele verschiedene Methoden gibt, um sich eine schlüssige Formel für die Krümmung herzuleiten, da in unserem Seminar vier verschiedene vorgestellt wurden.
10 Am besten ist mir natürlich unsere eigene Methode zur Herleitung einer Krümmungsformel im Gedächtnis geblieben, bei der wir uns genau diese oben erläuterten Gesetzmäßigkeiten am Kreis zu Nutzen gemacht haben.
11 So haben wir festgestellt, dass man an jeden Punkt einen Schmiegekreis anlegen kann, der die Krümmung in einer bestimmten Umgebung des Punktes am besten annähert.
12 Umso kleiner die Umgebung, umso besser die Annäherung durch den Kreis.
13 Also haben wir uns einen allgemeinen Punkt P auf der Kurve, sowie einen Punkt Q davor, und einen Punkt W danach gewählt, durch die wir einen Kreis legen wollten.
14 Dann haben wir die beiden Mittelsenkrechten von PQ und PW, geschnitten und somit dann den Mittelpunkt M des Schmiegekreises bestimmt.
15 Für diesen Mittelpunkt haben wir dann den Grenzwert bestimmt, um den Kreis bestmöglich an unsere Kurve anzunähern.
16 Die Länge der Strecke MP gab uns dann unseren Radius an, welchen wir zum Abschluss in unsere aufgrund der Antiproportionalität vermuteten Formel für den Betrag der Krümmung K in einem Punkt $|K|=\frac{1}{R}$ eingesetzt haben, und somit auf eine Formel für die Krümmung gekommen sind.
17 Ich fand die Art und Weise wie ich das alles gelernt bzw. wie wir auf unsere Formel gekommen sind, eine sehr gute Erfahrung, da das alles wirklich nur über Ausprobieren, Modelle und Skizzen betrachten, seine Vorstellungskraft verwenden und Gespräche mit den Kommilitoninnen lief.
18 Es waren keinerlei Quellen bzw. Fachliteratur notwendig, um am Ende auf eine schlüssige Formel für die Krümmung zu kommen.
19 Und dadurch, dass man sich das alles wirklich selbst überlegt hat, bleiben das Verfahren und die Überlegungen viel besser im Gedächtnis.
20 Um unsere Formel auf Kurven anwenden zu können, müssen diese regulär parametrisiert und glatt sein.
21 Außerdem haben wir uns im Seminar kurz damit beschäftigt, was „nach Bogenlänge parametrisierte Kurven“ sind.
22 Und zwar werden so Kurven bezeichnet, die mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen werden, deren Länge also genau der Länge des Intervalls entspricht, auf der man diese betrachtet.
23 Eine Frage, die sich mir jetzt noch stellt, ist wie sich die Tatsache, ob eine Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist oder nicht, auf die Krümmung auswirkt, bzw. ob diese Tatsache überhaupt eine Auswirkung hat.

24 Fragen, die der Dozent/die Dozentin stellen könnte, um herauszufinden, ob die Studierenden den Stoff verstanden haben, wären z. B. ob man, wenn man die Krümmung einer Kurve an jedem Punkt kennt, den Graph der Kurve zeichnen könnte.
25 Diese Frage erscheint mir sinnvoll, weil sie voraussetzt, dass man sich hinter der Zahl „Krümmung“ grob etwas vorstellen kann.
26 Also z. B. weiß wie Kreise aussehen, wie Geraden aussehen etc., was es bedeutet, wenn die Krümmung zu oder abnimmt.
27 Die Antwort wäre nein, da man durch die Krümmung höchstens sagen kann, welche Form der Graph ungefähr annehmen muss, jedoch nichts über seine genaue Lage im Koordinatensystem weiß.
28 So hat jede Gerade die gleiche Krümmung, aber bestimmt nicht dieselbe Steigung bzw. denselben Schnittpunkt mit der y-Achse.
29 Außerdem muss man auch vorsichtig sein, ob man bei einer Krümmung nur den Betrag, sondern auch wirklich das Vorzeichen berechnet, denn wenn es nur der Betrag ist, dann weiß man nicht einmal, wo eine Links- und wo eine Rechtskurve vorliegt.
30 Außerdem könnte man nach der groben Erläuterung des Vorgehens der Bestimmungsformel fragen, da hier alle möglichen Gesetzmäßigkeiten, die für die Krümmung gelten müssen, einfließen.
31 Und nur wenn man grundsätzlich verstanden hat, was es mit Krümmung auf sich hat, kann man erklären, wie man eine Formel findet, um diese zu berechnen.

Studentin 5

1 Reflexion
2 Während der Erarbeitung zum Thema „Krümmung ebener Kurven“ habe ich erstmals etwas von parametrisierten Kurven gehört und gelernt mit ihnen umzugehen.
3 Im weiteren Verlauf haben wir mit Hilfe der ersten Stationen: City-Roller, Kreide,... weitergearbeitet und unsere Idee des Ablaufens der Kurven mit Füßen weiterverfolgt.
4 Hierauf haben wir im späteren Verlauf immer wieder zurückgegriffen.
5 So sind wir auch auf die Idee gekommen, was die Länge einer Kurve denn überhaupt ist und haben eine Formel dazu aufgestellt.
6 Damit konnten wir dann weiterarbeiten und haben die Krümmungsformel mit Hilfe von Längenvergleichen bestimmt.
7 Ich habe eindrucksvoll gelernt, dass die Schuldefinition der zweiten Ableitung nicht ausreichend etwas zum Krümmungsverhalten der Funktion aussagt (Siehe $f(x) = x^2$).
8 Des Weiteren habe ich gelernt, wie man an ein mathematisches Problem herangeht und selbst eine Formel entwickelt.
9 Dies hätte ich mir so vor dem Seminar niemals zugetraut.
10 Auch wenn die Ideen da waren, fiel es mir sehr schwer, diese mathematisch umzusetzen und korrekt zu formulieren.
11 Oft hingen wir an einem Problem fest, dass das Wissen aus den Grundvorlesungen erfordert.
12 Da diese aber schon sehr lange her sind musste man sich erst wieder ausführlicher damit beschäftigen, was den Vorteil hatte, dass der Stoff gleich wiederholt wurde.
13 So habe ich unter anderem gelernt, dass der Limes über die Summe das Integral ist.
14 Auch weitere Themen wurden wiederholt und ich habe neue Zusammenhänge erkennen können.
15 Wir mussten auf die harte Tour lernen, dass nicht jede Idee zu einem Erfolg führt.
16 So haben wir uns des Öfteren unterwegs verrannt und verrechnet, bis wir am Ende doch noch an ein Ziel gekommen sind.
17 Das führt dazu, dass ich unterwegs die Motivation verloren habe, aber trotzdem wollte man nicht aufgeben und hat es am Ende doch noch geschafft und war dann umso stolzer auf seine Leistung.
18 Innerhalb meiner Gruppe konnte ich mich austauschen, ohne mir wirklich dumm vorzukommen.
19 Wir ergänzen uns gegenseitig mit mathematischem Wissen und Vorschlägen zu einer Lösungsfindung.
20 Beim Schreiben des Skripts habe ich gemerkt, dass ich unsere Herangehensweise nochmals vertieft durchdacht habe.
21 Dabei sind mir Fragen gekommen, die ich davor noch nicht hatte.
22 Diese haben wir dann gemeinsam gelöst.
23 Trotzdem war es wirklich schwer die ganzen Gedanken, die man sich für die Herleitung gemacht hat auch nochmal geordnet aufzuschreiben.

24 Ich denke, dass mir die Inhalte noch lange im Gedächtnis bleiben werden, da ich auch immer wieder auf die Idee des City-Rollers oder die Kreide zurückgreifen kann.

25 Bei den Vorträgen der anderen zuzuhören fand ich sehr interessant, da doch alle unterschiedlichen Herangehensweisen hatten und alle zu dem gleichen Ergebnis gekommen sind.

26 Das hat mir einmal wieder gezeigt, dass es in Mathe nicht nur den einen Weg gibt ans Ziel zu kommen.

27 Ich habe immer noch Probleme mit parametrisierten Kurven, da sie mir aus den anderen Vorlesungen nicht vertraut sind.

28 Was genau ändert sich, wenn man die parametrisierte Kurve mit einer anderen Geschwindigkeit durchläuft?

29 Wie genau hängt die Krümmungsformel mit der zweiten Ableitung zusammen?

30 In wie weit könnte man so einen Einstieg in der Schule anwenden?

Studentin 6

1 Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen 20.11.2018

2 Reflexion 1

3 *Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie das gelernt?*

4 Neben den fachlichen Inhalten und dem Endergebnis der Formel durfte ich extrem viel Verständnis dafür bekommen wie Forschung funktionieren kann und dass ich tatsächlich zu mehr mathematischer Leistung fähig bin als ich erwartet hatte.

5 Oft lernt man Formeln und sieht womöglich auch ihren Beweis und fragt sich wer denn wie auf sowas kommt.

6 Dies jetzt selbst zu entdecken, in zunächst wagen Vermutungen bestärkt zu werden und am Ende mit etwas Aufwand tatsächlich ans Ziel zu kommen, war eine ganz neue Erfahrung.

7 Spannend fand ich es auch zu sehen, wie wichtig und wertvoll die Arbeit in einer Gruppe ist.

8 Erst das Zusammenspiel von vielen kleinen Ideen und Erkenntnissen führt zum Ziel.

9 Auch inhaltlich durfte ich sehr viel lernen.

10 In erster Linie natürlich die Formel der Krümmung, die ich durch die selbst erstellte Herleitung nahezu vollständig durchdringen konnte.

11 Natürlich ist der Stoffumfang (Anzahl an behandelten Definitionen und Sätzen) deutlich geringer als bei anderen Seminaren, jedoch vermute ich, dass die Nachhaltigkeit des Gelernten deutlich weitreichender ist.

12 Bei der Herleitung der Krümmungsformel wurde auch einiges aus dem bisherigen Studium wieder aufgegriffen und effizient wiederholt.

13 Ich denke durch die mir schlüssige und nötige Anwendung im eigenen Beweis, konnte ich diese Grundlagen ganz neu verwenden, verinnerlichen und behalten.

14 Dazu zählen L'Hospital, Formel für Kurvenlänge und Pascalsches Dreieck.

15 Durch unsere Vorüberlegungen und unsere Beweisführung hatten wir folgende Erkenntnisse:

16 Geraden haben keine Krümmung (im Sinn von: kein Punkt hat eine Krümmung) und Kreise haben an jedem Punkt die gleiche Krümmung, diese hängt vom Radius ab (allerdings negativ linear).

17 Diese Erkenntnis konnten wir für die allgemeine Krümmung verwenden, da jeder Punkt einer ebenen Kurve einen Schmiegekreis hat, der die Kurve in diesem Punkt annähernd bestimmt.

18 Dessen Radius kann für die Krümmungsbestimmung verwendet werden.

19 Außerdem ist klar, dass drei nicht kollineare Punkte einen eindeutigen Kreis festlegen, wodurch mit dem Limes der Schmiegekreis-Mittelpunkt ermittelt werden konnte.

20 *Welche Fragen sind noch offen?*

21 Mir ist noch unklar, was eine Bogenlängenparametrisierung mit einer Kurve macht. Wie ändern sich Verlauf und Krümmung, ändern sie sich überhaupt?

22 Rechnerisch ist mir klar was mit ihrer Länge passiert, jedoch nicht was das für Auswirkungen auf das geometrische Bild hat.

23 *Wenn Sie der Dozent/ die Dozentin wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?*

24 * Ist die Definition der Krümmung eindeutig? Warum, warum nicht?

25 * Ist die Formel zur Berechnung der Krümmung eindeutig/ die gleiche, trotz unterschiedlicher Darstellungsweise? Warum sind sie wenn dann gleich oder worin unterscheiden sie sich?

26 Diese beiden Fragen erachte ich als sehr aussagekräftig, inwiefern die Studierenden den Stoff verstanden haben.
27 Sie schließen die Erkenntnis, dass es sehr unterschiedliche Wege gibt und die Erkenntnis, dass es bis auf unterschiedliche Voraussetzungen (wie nach Bogenlänge parametrisiert oder nicht) doch irgendwie die gleichen Endergebnisse sind (teilw. vielleicht um einen Vorfaktor o.Ä. verschieden), ein.

Studentin 7

1 Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“
2 -Reflexion-
3 Zu Beginn möchte ich sagen, dass mir das Seminar schon einen großartigen Einblick darin gegeben hat, wie Mathematik konkret und anschaulich im Alltag aussehen kann.
4 Sie muss nicht immer abstrakt bleiben (wie es oftmals an der Universität ist), sondern kann auf alltägliche Probleme/Fragen Bezug nehmen.
5 Die erste Aufgabe, die wir als Gruppe bekommen hatten, war die Herleitung einer Formel für die Krümmung von ebenen Kurven.
6 Bevor wir damit anfangen konnten, mussten wir uns als Gruppe zunächst überlegen, was ebene Kurven überhaupt sind, wo sie auftauchen und was „Krümmung“ an ebenen Kurven bedeutet.
7 Dieser erste Zugang zu diesem Thema verlief auf ganz kreative Art und Weise (City-Roller, Straßenkreide, Ballwurf . . .)
8 Wir mussten uns anfangs erst einmal definieren, was für uns eine ebene Kurve ist.
9 Dabei haben wir feststellen können, dass viele Dinge auf Konventionen berufen und wir uns diese Dinge selbst festlegen dürfen.
10 Ein Beispiel hierfür ist die Frage nach dem Vorzeichen der Krümmung.
11 Gibt es eine positive und eine negative Krümmung? Und wenn ja, was ist der Unterschied zwischen ihnen?
12 Was ich als äußerst hilfreich empfand, war, dass die Gruppe mit ihren Überlegungen nicht allein gelassen wurde, sondern dass immer jemand herumging, sich abwechselnd zu den verschiedenen Gruppen gesellte, sich die Überlegungen anhörte und eventuell Tipps gab.
13 Ein weiterer spannender Punkt war die Tatsache, dass in der Gruppe immer wieder verschiedene Ideen aufkamen.
14 Zunächst tauchte in unserer Gruppe z.B. die Frage auf, ob man die Krümmung ebener Kurven nicht über Winkel bestimmen könnte.
15 Wir verfolgten diesen Ansatz eine Zeit lang, mussten ihn dann aber doch wieder verwerfen, da er nicht zielführend zu sein schien.
16 So kamen wir dann nach einiger Zeit auf unseren Ansatz, die Krümmung ebener Kurven mit einem Schmiegekreis zu bestimmen.
17 Dieser Ansatz war zwar sehr „rechenlastig“, dafür aber anschaulich und zielführend.
18 Außerdem konnten wir in unserer zweiten Aufgabe auf diesen Ansatz zurückgreifen (, was wir damals aber natürlich noch nicht wissen konnten).
19 Es war interessant zu sehen, dass die meisten Gruppen einen anderen Ansatz gewählt haben, was mir persönlich gezeigt hat, dass es eben nicht nur DIE eine Möglichkeit gibt, sondern mehrere.
20 Zwei Gruppen haben sich z.B. in ihren Überlegungen mit der Änderung des Tangentialwinkels beschäftigt, eine andere mit der Länge einer Kurve.
21 Wenn ich die Dozentin wäre, würde ich die Studierenden die verschiedenen Ansätze vergleichen lassen.
22 Oftmals gibt es nämlich bei den verschiedenen Ansätzen irgendwelche Gemeinsamkeiten.
23 Diese Gemeinsamkeiten sind zwar vielleicht auf den ersten Blick gar nicht offensichtlich.
24 Es ist sogar gut möglich, dass eine andere Formel herauszukommen scheint.
25 Bei genauerem Hinsehen allerdings lässt sich erkennen, dass es sich dabei um dieselbe Formel handelt (und z.B. nur eine andere (einschränkende) Annahme getroffen wurde).
26 So hatten wir z.B. eine Gruppe, die von einer nach Bogenlänge parametrisierten Raumkurve ausgegangen ist.
27 Ich glaube, dass es äußerst hilfreich und aufschlussreich sein kann, nicht nur seinen eigenen Ansatz zu kennen, sondern auch die anderen Ergebnisse nachvollziehen zu können.

Studentin 8

1 Reflexion – Krümmung ebener Kurven
2 Die Herangehensweise an die Aufgaben sah wie folgt aus:
3 Zuerst wurden uns die Fragen mit ganz alltäglichen Gegenständen (auf der Straße, im Raum, mit der Kreide, Cityroller) nahegebracht und dadurch angeregt, sich die Dinge mit mathematischem Wissen zu analysieren.
4 Nachdem nun vier Köpfe mitgedacht und jegliche Gegenstände und Aktionen durchgeführt wurden kam man recht schnell und selbstständig ohne die Hilfe einer mathematisch definierten Aussage darauf, dass Kurven unterschiedliche Krümmungen haben.
5 Um das Maß dieser Krümmung zu finden haben wir in der Gruppe verschiedene Herangehensweisen probiert und die Betrachtungen letztlich von einem Allgemeinfall (Kreis) auf jegliche ebenen Kurven übertragen.
6 Wir haben den Ansatz gewählt, den Winkel ins Verhältnis mit dem Kreisbogen zu stellen.
7 Hierbei sind wir auf eine uns alle einleuchtende Methode gestoßen und waren uns am Ende einig, da wir auch mittels Überprüfungen am Kreis gemerkt haben, dass es funktioniert.
8 Die Frage, ob das nun die tatsächlich „richtige“ Methode ist oder EINE von vielen Methoden bleibt in meinen Augen noch offen, da es zwar Anhand des Beispiels geklappt hat, jedoch die Definitionen und Begründungen letztlich von uns Studenten stammen und nicht „abgesegnet“ sind.
9 Dennoch habe ich die Vermutung, dass es Einwände gäbe, wenn die Ansätze nicht gestimmt hätten.
10 Insofern stehen keine weiteren Fragen für mich offen.
11 Als Dozentin würde ich die Studenten am Ende nochmals fragen, welche Methoden es gibt um an die Krümmung von Kurven zu gelangen und welche sich denn aus welchem Grund anbietet.
12 Außerdem würde ich unbedingt nochmals fragen, ob die Parametrisierung nach Bogenlänge angekommen ist und wie sich die geschickte Parametrisierung auf unsere Rechenschritte auswirkt.
13 Hier würde ich vielleicht sogar während einer Präsentation an einem bestimmten Beispiel bzw. bei einem bestimmten Rechenschritt nochmals auf die Parametrisierung eingehen und fragen, wo diese den Schritt erleichtert.

Studentin 9

1 Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen
2 Reflexion (1. Thema)
3 *Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie es gelernt?*
4 Die Krümmung ebener Kurven wurde sehr anschaulich eingeführt.
5 Durch die kleinen „Experimente“ mit Cityroller, Bällen, Kreide und Alltagsgegenständen wurde das Thema Kurve mit vielen Sinnen erlebt.
6 Diese einführenden Hilfestellungen haben unserer Gruppe bei der Übertragung auf eine mathematische Formel sehr geholfen.
7 In Gesprächen in der Gruppe sind wir immer wieder auf die durchgeführten Übungen zu sprechen gekommen.
8 Diese Übungen haben aber nicht nur als Einstiegshilfe gedient, sondern haben es uns erleichtert mathematische Vorgänge zu verbalisieren.
9 Bei der Erarbeitung der Formel, haben wir uns über den Spezialfall Kreis der Herleitung der Formel genähert.
10 Da wir in der ersten Bearbeitungsphase die Eigenschaften der Krümmung von Kreisen besprochen haben, konnten wir unsere erarbeitete Formel am Kreis überprüfen.
11 Als wir die Formel für den Kreis bekommen haben, mussten wir diese für jegliche Art von gekrümmten Kurven verallgemeinern.
12 Allgemein kann man sagen, dass wir die Erarbeitung der Formel forschend, besonders auch über Misserfolg, erarbeitet haben.
13 Besonders die Irrwege waren bei der Bearbeitung dieser Aufgabe entscheidend.
14 Denn diese gaben ein tieferes Verständnis des Themas und der erarbeiteten Formel.
15 Das Wissen, warum eine bestimmt Methode nicht einsetzbar ist gibt einem ein tieferes Verstehen des Themas.
16 Ich bin der Meinung, dass sich dieses erarbeitete Thema viel besser mit bereits gelernten Wissen verknüpft, wenn man erklären kann warum etwas nicht funktioniert hat, als wenn man sofort die richtige Herangehensweise kennt.

17 *Welche Fragen sind offen?*
18 Nachdem alle Gruppen ihre Herleitungen vorgestellt haben, hätte ich mir gewünscht zu erfahren welche Mathematiker sich in der Vergangenheit mit demselben Thema beschäftigt haben und wie diese vorgegangen sind.
19 Mich hätte es sehr interessiert zu wissen, ob es noch weitere Möglichkeiten gibt, diese Formel herzuleiten und ob wir es ähnlich gelöst haben wie Mathematiker.
20 *Wenn Sie der Dozent / die Dozentin wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?*
21 Sind die nach Bogenlänge parametrisierten Formeln identisch mit der allgemeinen regulär parametrisieren Formel bzw. sind deren Ergebnisse gleich?
22 Welche Herangehensweisen wurden in den anderen Gruppen verwendet, um an die Formel zu kommen?
23 Könnten Sie die Formel für nach Bogenlänge parametrisierte Formel an einem Beispiel anwenden?

Studentin 10

1 Reflexion I
2 Ich habe während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) einiges gelernt:
3 Zunächst einmal sind hier natürlich fachliche bzw. spezifisch thematische Aspekte zu nennen.
4 Dazu gehört zunächst ganz allgemein eine Vorstellung davon, was unter einer Kurve bzw. deren Parametrisierung zu verstehen ist und welche „Forderungen“ man an solche stellt, um Kurven besser untersuchen zu können (z.B. regulär oder nach Bogenlänge parametrisiert).
5 Des Weiteren habe ich verschiedene Möglichkeiten kennengelernt, wie sich Kurven mathematisch beschreiben lassen.
6 Insbesondere habe ich natürlich ein generelles Verständnis für die Bedeutung des Begriffs „Krümmung (von ebenen Kurven)“ entwickelt.
7 Außerdem habe ich vier verschiedene Herangehensweisen bzw. Herleitungsmöglichkeiten hinsichtlich der Krümmung ebener Kurven kennengelernt.
8 Diese Tatsache ist meiner Meinung nach besonders hervorzuheben:
9 Obwohl alle vier Gruppen die gleichen Ausgangsvoraussetzungen (Anschauungsmaterialien und die ersten Aufgabenstellungen) hatten, wurden am Ende vier vollkommen unterschiedliche Wege präsentiert, wie das gemeinsame Ziel, eine Krümmungsformel für ebene Kurven zu finden, erreicht werden kann.
10 Wichtiger als die spezifisch themenbezogene Wissen („*was* haben Sie gelernt?“) erscheint mir jedoch der Prozess des Wissenserwerbs, also die Frage „*wie* haben Sie es gelernt?“.
11 Die Antwort auf diese Frage lautet für mich ganz klar: „learning by doing“.
12 Schon jetzt kann ich sagen, dass ich gerade in dieser Hinsicht sehr von dem Seminar profitieren kann.
13 So werde ich mir in Zukunft hoffentlich weniger schnell Formeln oder Antworten auf konkret aufgetretene Fragen „ergoogeln“, sondern zuerst einmal selbst überlegen.
14 Im Seminar habe ich zunächst verschiedene Möglichkeiten kennengelernt, wie man sich einem Thema zunächst „unmathematisch“ nähern kann, sei es das Betrachten gekrümmter (oder eben nicht gekrümmter) Gegenstände, das Ablaufen/-fahren von vorgezeichneten Strecken oder das Beobachten der Flugbahn eines Balles.
15 Der Knackpunkt war dann natürlich das „Mathematisieren“ der dabei gemachten Beobachtungen.
16 Dennoch war es sehr interessant zu beobachten, wie solch alltagsnahe Beispiele in der Erarbeitungsphase immer wieder herangezogen werden konnten, um einen bestimmten Punkt klarzumachen oder die Vorgehensweise damit zu überprüfen.
17 Im Fall ebener Kurven war es für unsere Gruppe sehr hilfreich, zunächst ausführlich den Spezialfall Kreis zu betrachten und davon ausgehend dann auf die allgemeine Formel zu schließen.
18 Prozessbezogene Kompetenzen, die ich hoffentlich mitnehmen kann, sind also, wie man Überlegungen anhand von Beispielen oder Spezial- bzw. Extremfällen überprüfen kann, wie man sich Sachverhalte klarmachen und veranschaulichen kann und wie man so letztendlich durch ständiges Ausprobieren, Testen und immer wieder neu Überlegen eine Lösung für die Fragestellung/das Problem finden kann.
19 Manche Fragen können im Seminar aus Zeitgründen leider nicht geklärt werden.
20 So stellen sich mir noch folgende Fragen:
21 Gibt es noch zusätzliche Herangehensweisen bzw. Berechnungsmöglichkeiten für die Krümmung ebener Kurven?

22 Mit dem Fach Geschichte als zweites Fach interessiert mich natürlich auch, in welchem Zusammenhang zum ersten Mal eine Krümmungsformel gesucht wurde.

23 Also wer hat unter welcher leitenden Fragestellung erstmalig darüber nachgedacht und wie ist diese Person dabei vorgegangen?

24 Daran anknüpfend stellt sich mir die Frage, welche Anwendungsmöglichkeiten es generell gibt.

25 Im Seminar haben wir natürlich alltagsnahe Beispiele kennengelernt (Flugbahn eines Balles, Straßenverlauf etc.).

26 Aber in welchen (wissenschaftlichen) Themenbereichen bzw. Kontexten, welche vielleicht nicht so offensichtlich sind, spielt der Verlauf ebener Kurven noch eine Rolle?

27 Hinsichtlich des prozessbezogenen Aspektes bin ich neugierig geworden, wie mathematische Forschung abläuft.

28 Kann man da auch bei anderen (vergleichsweise wahrscheinlich deutlich komplexeren) Fragestellungen ähnlich vorgehen?

29 Gibt es „Tricks“, die man sich im Laufe der Zeit aneignet bzw. an welchen Stellen, gibt es eben keine allgemeingültigen Vorgehensweisen?

30 Eine naheliegende Frage zur Überprüfung, ob der Stoff verstanden wurde, ist natürlich die Frage nach den Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Herleitungsmöglichkeiten.

31 Das ist natürlich eine besonders herausfordernde Fragestellung, nachdem die Studierenden bei den Gedankengängen der anderen Gruppen nicht beteiligt waren. Möchte man also das Verständnis innerhalb einer Gruppe überprüfen, so sind besonders die bei der Erarbeitung aufgetretenen Probleme interessant.

32 Wenn jemand erklären kann, warum eine bestimmte Überlegung nicht funktioniert hat und wie man dieses Problem umgehen konnte, so zeugt dies in jedem Fall von einem Verständnis für den entsprechenden Sachverhalt.

33 Ebenso verhält es sich, wenn eine Person zusammenfassend die wichtigsten Aspekte einer Herleitungsmöglichkeit hervorheben kann; also erläutern kann, was daran besonders wichtig, vorteilhaft oder auch problembehaftet/einschränkend etc. ist und wo gegebenenfalls Zusammenhänge zu anderen Themen bestehen.

Studentin 11

1 Reflexion:

2 Erarbeitung des ersten Themas „Krümmung ebener Kurven“:

3 Um zur Krümmung der Kurve zu gelangen, haben wir zunächst eine Formel für die Länge einer Kurve aufgestellt.

4 Hierbei merkte ich, dass das parametrisieren von Kurven recht hilfreich, bzw. hier bei uns zwingend notwendig war.

5 Die Parametrisierung von Kurven erinnerte mich dunkel an meine Analysis II Vorlesung.

6 Jedoch musste ich mir schnell eingestehen, dass dieser Stoff kaum mehr präsent war...

7 Umso besser war es also, dass wir diesen Stoff wiederholten und diesen insbesondere auch angewendet haben.

8 Die spielerischen Einstiege, mittels City-Roller, Kreide,... fande ich sehr spannend.

9 Vor allem da sie uns auf Ideen brachten zur Erarbeitung des Themas.

10 Es war nicht immer leicht diese Ideen mathematisch auszudrücken und diejenigen dann „auszusieben“ welche unserer Zielführung nicht unbedingt beisteuerten (vgl. nächster Abschnitt).

11 Innerhalb unserer Gruppe herrschte bzw. herrscht auch eine super Arbeitsatmosphäre, da jede Frage egal wie „dämlich“ sie ist, gestellt werden kann und wir uns mit mathematischen Grundkenntnissen gut ergänzen.

12 So schaffen wir es gemeinsam einen Lösungsweg zu erarbeiten.

13 Auch wenn dies nicht immer so leicht war/ist.

14 Denn wir hatten uns des Öfteren verannt und mussten auf diese Weise feststellen, dass nicht jede Idee zum Ziel führt.

15 Interessant fände ich noch zu wissen, inwiefern die Krümmungsformel mit der 2. Ableitung zusammenhängt!?

Student 12

1 *Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie es gelernt?*
2 Vor Beginn des Seminars konnte ich mir nicht vorstellen, wie Forschung in der Mathematik aussieht.
3 Man hat eine offene Frage und überlegt „ohne Grenzen“ darauf los.
4 Ich habe gelernt, dass es oftmals einfacher ist, zuerst einen Spezialfall zu betrachten und danach das in den allgemeinen Fall zu überführen.
5 Speziell beim ersten Thema: Zuerst das Problem graphisch betrachten und danach in die allgemeine Parametrisierung übergehen.
6 Außerdem habe ich gelernt, dass es wichtig ist auf jede „Kleinigkeit“ zu achten und lieber zweimal hinsehen, bevor man weitermacht: Stichwort Leibniz-Integral-Regel.
7 Diese verbindet das Ableiten eines Integrals nach der einen Variable, während das Integral über eine andere Variable integriert.
8 Außerdem habe ich gelernt/wiederholt/vertieft, wie man seeeehr lange Terme ableitet und auf Vorzeichen achtet.
9 Hierbei war es sehr von Vorteil, dass man zu zweit oder mehrt war, da man doch schnell etwas vergisst, übersieht oder einfach falsch abschreibt.
10 Generell ist ein Team zu haben deutlich besser, als wenn man alleine an einem Problem arbeitet.
11 Oft kann man es selber nicht in Worte fassen, versucht etwas auszudrücken, dass dann dem anderen leichter fällt.
12 Außerdem habe ich gelernt, dass man seine Formel, die man raushat, immer „kurz“ anhand Spezialfälle überprüft, ob dann immer noch das richtige Ergebnis rauskommt.
13 *Welche Fragen sind noch offen?*
14 Zu diesem Zeitpunkt war noch offen, wie es sich im Raum von Krümmung von Kurven verhält. Dies wurde dann aber als nächstes Thema behandelt.
15 *Wenn Sie der Dozent/die Dozentin wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?*
16 Ich würde fragen, wie es sich denn mit Spezialfällen verhält, passt die Formel dann noch oder kommt etwas falsches dabei heraus ?
17 Ich würde außerdem fragen ob die unterschiedlichen Formeln gleich sind ?

Student 13

1 Reflexion des ersten Kapitels „Krümmung ebener Kurven“
2 Ich habe gelernt, in welchen alltäglichen Situationen Krümmung eine Rolle spielt, ob es sich nun um Kurven im Straßenverkehr oder die Flugkurve eines Balls handelt.
3 Dabei habe ich festgestellt, dass sich Krümmung beispielsweise in der Lenkerausrichtung eines Fahrzeuges manifestiert, oder aber in der Schrittbewegung bei Durchlaufen einer gekrümmten Kurve.
4 Diese Manifestierungen ließen sich durchweg mathematisch formulieren, was ich besonders bemerkenswert fand, da dies in mathematischen Veranstaltungen nur sehr selten zum Ausdruck kommt.
5 Die Vorstellung, die sich bei mir im Laufe des Studiums verfestigt hat, dass insbesondere Mathematik in der Hochschule mit dem Alltag kaum oder gar nicht in Verbindung steht, ließ sich durch Ausprobieren der unterschiedlichen Darstellungsmethoden von Krümmung widerlegen.
6 Des Weiteren habe ich gelernt, wie parametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^2$ beschrieben werden und Funktionen als Kurven dargestellt werden können.
7 Dies geschah durch Ausprobieren mittels verschiedener Beispiele.
8 Bezüglich der Krümmung sind mir unsere Gruppenergebnisse noch sehr präsent.
9 Wir haben Krümmung als die Veränderung des eingeschlossenen Winkels zwischen x-Achsen-Parallele und Tangente pro zurückgelegte Strecke verstanden, wobei wir uns zum besseren Verständnis ausschließlich mit Funktionen beschäftigt haben.
10 Hierbei konnte die Ableitung an einem bestimmten Punkt mithilfe des Tangens mit dem gesuchten Winkel in Zusammenhang gebracht werden.
11 Es wurden zwei Punkte gewählt, dessen Winkel bestimmt, die Differenz aufgestellt, durch die Längenformel geteilt (die gegeben war als Integral eines Intervalls über den Betrag der Ableitung der Kurve) und dann der Grenzwert gebildet, der die beiden Punkte aufeinander laufen lässt.
12 Dabei wurde l´Hospital angewendet und es entstand eine Formel für die Krümmung: $\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

13 Außerdem haben wir geklärt, dass mit der Kenntnis der Krümmung an jedem Punkt nur die Form der Kurve eindeutig ist, jedoch nicht die Lage und Richtung.
14 Erst diese beiden weiteren Informationen machen nach dem Satz von Picard-Lindelöf die Kurve dann eindeutig. Zur Herleitung dieser Formel haben mir auch die sehr geeigneten Beispielkurven und Fragen auf dem AB geholfen.
15 Die weiteren Ergebnisse der anderen Gruppen sind insofern im Gedächtnis geblieben, als dass ich die Ideen und Herangehensweisen verstanden habe:
16 Eine Gruppe hat eine allgemein parametrisierte Kurve als Ausgangspunkt genommen und die Krümmung der Kurve mithilfe eines Schmiegekreises hergeleitet.
17 Hierbei wurden drei geordnete Punkte a,b,c auf der Kurve gewählt, die ein Dreieck gebildet haben.
18 Die Mittelpunkte der Teilstrecken ab und bc wurden mathematisch berechnet und der Schnittpunkt der dort angelegten Mittelsenkrechten berechnet, der dann als Mittelpunkt des Schmiegekreises verstanden wurde.
19 Dann wurde der Grenzwert gebildet, der Punkt a und c auf b laufen ließ und nach längerer mathematischer Berechnung die Krümmungsformel hergeleitet: $\kappa(t) = \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_1''(t)\gamma_2'(t)}{\gamma'(t)^3}$
20 Außerdem wurde dabei die Krümmung eines Kreises angenommen mit 1/R mit R Radius.
21 Eine andere Gruppe hat das Entlanglaufen einer Kurve als Idee genommen, um damit mathematisch auf die Krümmungsformel zu kommen.
22 Dabei wurde ein -Schlauch um die Kurve gelegt, wo an beiden Rändern jeweils zwei weitere Kurven gezeichnet wurden.
23 Das Verhältnis der Länge dieser beiden neuen Kurven sollte dann zur Krümmungsformel führen, wenn man den -Schlauch immer kleiner wählt.
24 Es wurde dabei angenommen, dass die Kurve auf Bogenlänge parametrisiert ist, das heißt, dass in einem Parameterintervall [a,b] die Länge der Kurve genau der Differenz b-a entspricht.
25 Jede parametrisierte Kurve lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren.
26 Die vierte Gruppe hat sich genau diese nach Bogenlänge parametrisierten Kurven angeschaut, jedoch sind mir nähere Details leider entfallen.
27 All diese Gruppenergebnisse habe ich durch die Vorträge und dem anschließenden Durchblättern des Skriptes verstanden.
28 Ich habe keine offenen Fragen.
29 Als Dozent würde ich die Studierenden fragen, ob Ihnen die Herleitungen präsent und verständlich sind und ob sie eine der Herleitungen alleine durchführen können, um auf die Krümmungsformel zu kommen.
30 Ebenfalls für wichtig erachte ich, dass der Begriff der Krümmung klar geworden ist (Krümmung an einem Punkt, Vergleich zum Kreis, etc.).

Student 14

1 Relexion 1
2 *Frage 1: Was haben Sie während des ersten Themas (Krümmung ebener Kurven) gelernt und wie haben Sie es gelernt?*
3 In der ersten Aufgabe, die wir als Gruppe gestellt bekommen haben, ging es letztendlich darum, eine Formel zur Bestimmung des Krümmungsmaßes einer Kurve herauszufinden.
4 Bevor wir richtig loslegen durften, haben wir noch eine Definition einer parametrisierten (ebenen) regulären Kurve im Tafelvortrag bekommen und einige Beispiele für diese und nicht reguläre/nicht glatte Kurven kennengelernt.
5 Diese Definition einer Kurve habe ich bereits aus einer der Einführungsmathematik-Vorlesungen gekannt, aber es war wichtig, diese noch einmal ins Gedächtnis zu rufen.
6 Danach ging es sehr praxisnah und explorativ weiter.
7 Dies hat mir sehr gefallen, da man sonst im Mathematikstudium kaum etwas „Praxisnahes“ macht.
8 Wir haben anhand verschiedener Objekte wie City-Roller und Bällen im Seminarraum und auch draußen verschiedene Kurven erforscht und mehr über das „Wesen der Krümmung“ herausgefunden.
9 Dabei haben wir intuitives oder implizites Wissen explizit gemacht und z.B. gelernt, dass Kurven konstanter Krümmung (Kreis) gewisse Eigenschaften haben: Beim Rollerfahren wird der Lenker und die Neigung des Körpers beim Fahren eines Kreises z.B. aufrechterhalten und der Radius des Kreises hat direkten Einfluss auf die Stärke der Krümmung.

10 Auch für meine spätere Zukunft als Lehrer habe ich die Erkenntnis gewonnen, dass solche explorativen Methoden durchaus auch im Matheunterricht sinnvoll sind, da sie motivierend sind und sich gut als Einstieg in ein neues Thema eignen.
11 Es ist förderlich, die Schüler auch mal selbst ausprobieren zu lassen, ohne sie ständig direkt mit der Lösung eines mathematischen Problems zu konfrontiren, welche dann meistens nicht verstanden wird.
12 Nachdem wir unsere ersten Beobachtungen gemacht und verstanden haben, haben wir uns eigene mathematische Lösungen zur Fragestellung erarbeitet.
13 Dabei haben wir gut im Team funktioniert und jeder hat zur Lösung beigetragen und von dem Wissen der anderen profitiert.
14 Beispielsweise habe ich das erste Mal in diesem Seminar verstanden, wie man genau den Funktionsgraphen einer Kurve parametrisieren kann und welche Darstellungsmethoden es überhaupt gibt.
15 In den Vorlesungen habe ich dies nie ganz verstanden, sondern nur Defintionen auswendig gelernt, ohne den Sinn dahinter zu begreifen.
16 Weiterhin habe ich gelernt, wie man die Länge einer parametrisierten Kurve berechnet und wie man darauf kommt.
17 Dabei haben wir auch Tipps von der Dozentin bekommen, die uns sehr geholfen haben.
18 Beim Schreiben des Skripts und Erarbeiten der ersten Präsentation habe ich das „Mathematisieren“ von Aussagen geübt.
19 Dabei ist mir aufgefallen, dass dies nicht leicht ist und man viele Dinge beachten muss (Einschränkungen usw.).
20 Weiterhin habe ich persönlich gelernt, besser mit LaTeX umzugehen.
21 Ich habe bisher nur einmal Kontakt zu diesem Programm gehabt, nämlich im ersten Proseminar in Mathe, aber hier auch nur halbherzig, da ich nur eine kurzes Handout erstellen musste und mir eine Freund dabei geholfen hat.
22 Diesmal habe ich jedoch eigenständig einen längeren Skriptbeitrag verfasst und es hat mir wirklich Spaß gemacht, da man mit diesem Programm so viel machen kann und es einfach gut aussieht.
23 *Frage 2: Welche Fragen sind noch offen?*
24 Meinerseits sind keine Fragen offen, die direkt das Thema Krümmung von Kurven betreffen.
25 Nur zu unserem Skriptbeitrag gab es eine Anmerkung, die ich nicht verstanden habe. Dabei ging es um die Fragestellung, wie man eine parametrisierte Kurve lokal in Funktionsgraphen umschreiben kann.
26 Dabei haben wir anhand des Beispiels des Einheitskreises zwei Funktionen genannt, nämlich $f_1(x) = \sqrt{(1-x^2)}$ und $f_2(x) = -\sqrt{(1-x^2)}$ die den oberen bzw. den unteren Halbkreis beschreiben.
27 Die Anmerkung lautete: „wobei man für die beiden Punkte des Kreises auf der x-Achse noch zwei weitere Funktionen braucht, vgl. Skript..“.
28 Wenn ich aber bei meiner ersten Funktion das geschlossene Intervall $[-1, 1]$ und in meiner zweiten das offene Intervall $(-1, 1)$ wähle, dann müsste es doch auch so gehen oder?
29 Bzw. was wären das für zwei Funktionen?
30 *Frage 3: Wenn Sie der Dozent wären, welche Fragen würden Sie stellen, um herauszufinden, ob Ihre Studierenden den Stoff verstanden haben?*
31 - Gebe eine Parametrisierung des Funktionsgraphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 \cdot x^3 + 5$ an und bestimme die Länge der Kurve von $P_1 = (-3, f(-3))$ bis $P_2 = (2, f(2))$.
32 - Sei f eine Funktion. An welchen Stellen hat f die Krümmung $\kappa = 0$? Welche Art von Funktion hat konstant die Krümmung Null bzw. die Krümmung $\kappa = a$ für ein $a \neq 0$.
33 - Bestimme die Krümmung der Funktion f mit $f(x) = 2e^{3x-5}$ and der Stelle $x_0 = \frac{3}{2}$.
34 - Beweise folgende Aussage: Sei f eine glatte reellwertige Funktion. Dann ist für ein $x_0 \in D_f$ $\kappa(x_0) < 0$ genau dann, wenn der Funktionsgraph von f an der Stelle x_0 rechtsgekrümmt ist.
35 - Gegeben sei eine Funktion f und folgendes AWP: $f''(x) = \kappa(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}$, $f(2) = 4$ und $f'(2) = 1$. Besitzt dieses AWP eine Lösung (Begründung)? falls ja, bestimme f.

Student 15

1 Reflexion
2 In dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ konnte ich trotz des nun schon fortgeschrittenen Mathematikstudiums noch einiges lernen und außerdem Altbekanntes in Erinnerung rufen.
3 Es war spannend zu sehen, wie „aus dem Nichts“ eine mathematische Formel entsteht.

4 Nach der Erinnerung durch die Einführung zum Thema Parametrisierung ebener (regulärer) Kurven, wurde zum ersten Mal in meinem Mathematikstudium wirklich praxisbezogen gearbeitet.
5 Durch die ersten Aufgabe des Seminars (Kurven mit Kreide malen, mit dem City-Roller abfahren, Bälle zuwerfen,. . .) ist mir erst wirklich ins Bewusstsein gekommen, wo man im Alltag überall Mathematik entdecken kann.
6 Auch, wenn man sich die meisten Sachverhalte auch gut vorstellen könnte, hilft es sie in der „Wirklichkeit" betrachten zu können.
7 Es liefert auch eine direkte Anschauung die oft in mathematischen Veranstaltung fehlt.
8 Dies bringt mich zu einem ersten Vorsatz, dass ich mir auch in anderen Veranstaltung öfter einen Bezug in die Alltagswelt bewusst machen will.
9 In der Schule wird dies von einem Lehrer erwartet, jedoch oftmals nicht umgesetzt.
10 Im Mathematikstudium tritt dieser Aspekt meist vollkommen in den Hintergrund, obwohl es, wie in diesem Seminar erlebbar, sehr hilfreich sein kann.
11 Es wird für mich also deutlich, dass diese Erwartung an der Lehrer berechtigt und sinnvoll ist.
12 Ich möchte diese gerne erfüllen.
13 Durch gezielt vorbereitete Arbeitsfragen wurde uns die Möglichkeit gegeben eigene Ideen zur Herleitung zu finden.
14 Dies hat den Vorteil, dass man durch das Erfolgserlebnis, die eigens entdeckte Formel und auch besondere Stellen der Herleitung nicht sofort wieder vergisst.
15 Alles selbst erarbeitete wird wirklich verstanden und somit tiefer Verarbeitet, als einfach auswendig gelerntes.
16 Die Idee, die man entwickelt, um das Problem zu lösen, steht in der ersten Arbeitsphase klar im Mittelpunkt und wird durch die mathematische Formalisierung ergänzt.
17 Dieses „korrekte" mathematische Aufschreiben in der Gruppe hat mir nochmal sehr geholfen, da mich das bisher auch an anderen Stellen vor Probleme stellte und stellt.
18 Die Arbeitsform in vierer Gruppen hilft dabei, nicht vorhandenes oder nicht präsentes Wissen auszugleichen.
19 Das Problem kann dann gemeinsam gelöst werden.
20 Offene Fragen stelle ich mir zu diesem Zeitpunkt keine.
21 Jedoch ist es häufig der Fall, dass von anderen (auch während des Seminars) Fragen gestellt wurden, über die man selber noch keine Gedanken gemacht hatte.
22 Dies regt zum Nachdenken an und ist sehr hilfreich.
23 Als Dozent könnte ich mir vorstellen folgende Fragen an die Studierenden zu stellen: Kann man die Formel für die Krümmung von parametrisierten Kurven auch auf Funktionen anwenden? Wenn ja, wie? Ist dies auch umgekehrten Fall möglich, wenn man eine Formel für die Krümmung eines Funktionsgraphen hat? Gebe wenn möglich je ein Beispiel an und berechne die Länge des Graphen in einem Intervall, sowie auch die Krümmung an einem bestimmten Punkt.
24 Eine weitere Frage wäre: Gib an was man unter ungekrümmt und gleichmäßig gekrümmt versteht und gebe je mindestens ein Beispiel an (Gerade, Kreis).

Student 16

1 Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfasen"
2 Reflexion zur ersten Thematik (Krümmung ebener Kurven)
3 Am 20.11.2018
4 *1) Was habe ich während des ersten Themas gelernt und wie habe ich es gelernt?*
5 Was ich gelernt habe, möchte ich in drei Ebenen ordnen:
6 Auf der inhaltlichen Ebene habe ich das Konzept der Krümmung kennengelernt.
7 Da hierbei einige Vorkenntnisse etwa aus Analysis II benötigt wurden, kam ich nicht umhin, Dinge wie parametrisierte Kurven, Grenzwertprozesse und (für unsere Zusatzfrage) den Satz von Picard-Lindelöf „wieder" zu lernen.
8 Bezüglich der Methoden des Lernens gab es einen anderen Einstieg als gewohnt:
9 Das Konzept Krümmung wurde nicht definiert oder erklärt, sondern es wurde eingeladen, sich diesem selbst durch alltägliche Phänomene (Roller fahren etc.) zu nähern.
10 Somit wurde den TeilnehmerInnen die Entscheidung überlassen, was genau sie untersuchen wollen.
11 Der Beginn und die Umstellung auf eine Arbeit, deren Ergebnis und Richtung nicht sofort klar sind, waren nicht ganz einfach.

12 Auch habe ich den Eindruck, dass wir in der Gruppe üben (bzw. lernen) mussten, unsere Ideen verständlich zu vermitteln und zwischen den Ideen der TeilnehmerInnen zu vermitteln.
13 Insgesamt habe ich somit das Prinzip kennen gelernt, dass zuerst das Konzept (sozusagen die Vorstellung, von dem, was Krümmung denn sein soll) erarbeitet werden muss und erst im zweiten Schritt die mathematische Ausformulierung bzw. die mathematische Umsetzung.
14 Wie wurde gelernt?
15 Zu Beginn habe ich im Austausch mit der Gruppe gelernt, wobei der Impuls zum Nachdenken durch die Arbeitsblätter bzw. die Fragen gestaltet war.
16 Anschließend gab es eine Phase, in der ein Gruppenmitglied die Idee hatte, die schließlich „unsere" Idee wurde und somit habe ich hier von jemand anderem gelernt.
17 Da ich unseren Zugang zum Thema am Ende auch vorgestellt habe, habe ich schließlich noch einmal allein gelernt, in dem ich die Idee und die Rechenschritte nachvollzogen habe.
18 Im Vergleich zu anderen Mathematikveranstaltungen würde ich schätzen, dass die Rechnungen mehr als Ausdruck der eigenen Ideen fungierten, sodass uns wirklich klar war, warum wir das so machen und nicht anders.
19 Spannend war dann auf jeden Fall auch die letzte Phase:
20 Anhand der Vorträge der anderen Gruppen durfte ich noch andere Zugänge und Ideen lernen.
21 Es war sehr interessant zu sehen, wie andere Grundgedanken und andere Voraussetzungen zu anderen Rechenwegen führen.
22 Ich habe das als bereichernd empfunden, anderen Ideen zu folgen und schließlich die Ergebnisse zu vergleichen.
23 Das war dann wenig richtiges Lernen als Mitverfolgen und Vergleichen, aber dennoch hilfreich.
24 Somit war auch ein Ergebnis der ersten Einheit, dass viele Ideen, viele Ansätze zum Ziel führen können, aber der Weg dorthin sehr unterschiedlich schwer sein kann.
25 Zudem wurde durch die Vielfalt die Nähe zu sehr unterschiedlichen Bereichen des Vorwissens (Schulwissen, Analysis) deutlich.
26 *2) Welche Fragen sind noch offen?*
27 Hhmm, keine? =)
28 *3) Wenn ich der Dozent wäre, welche Fragen würde ich stellen, um herauszufinden, ob meine Studierenden den Stoff verstanden haben?*
29 Warum funktioniert die Definition der Krümmung eben nur bei glatten Kurven?
30 Eine „Anwendungsfrage" im Sinne von: Welchen Bedeutungen entspricht die Krümmung in der Physik (das Abfahren von Kurven o.Ä.) und warum ist klar, dass es sich um die Krümmung handelt?
31 Wie kann man die auf den ersten Blick unterschiedlichen Ergebnisse (Krümmung von Graphen, von auf Länge eins parametrisierten Kurven etc.) zusammenführen?

A.11.2. Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis, WS 17/18

Studentin 1

Lerntagebuch zum Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

1 Antwort für einen Erstsemesterstudierenden

Ich kann gut verstehen, dass es zunächst einmal so aussieht, als ob diese zwei Gebiete der Mathematik überhaupt nichts miteinander zu tun haben. Jedoch kann ich dir sagen, dass du schon im nächsten Semester einen Zusammenhang sehen wirst. In Analysis 2 werden dir beispielsweise Matrizen begegnen und bei Integralen kann durchaus die Berechnung einer Determinanten erforderlich sein. Ein weiterer großer Zusammenhang ist in den Vorlesungen Stochastik und vorallem auch in der Geometrie zu sehen. Eventuell habt ihr in der Vorlesung Lineare Algebra die ein oder andere geometrische Anwendung gesehen. Wenn du dich einmal an die Schule zurück erinnerst, an Aufgaben aus der Analytischen Geometrie. Für die Beschreibung einer Ebene gibt es verschiedene Formen, beispielsweise die Parameterform oder die Koordinatengleichung. Für letztere wurde über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren aus der Parameterform der Normalenvektor berechnet. An Graphen im $\mathbb{R}^3$, das sind z.B. Flächen, kann eine Tangentialebene, analog zur Tangente an einen Graph einer Funktion im $\mathbb{R}^2$, angelegt werden. Der Normalenvektor dieser Tangentialebene lässt sich durch den Gradienten berechnen. Ein Gradient ist sozusagen eine mehrdimensionale Ableitung, was du im nächsten Semester in Analysis 2 lernen wirst. Auch werden Basiswechselmatrizen in der Differentialgeometrie benötigt. Hierbei werden z.B. Raumkurven betrachtet, du kannst dir dazu eine Helix vorstellen. Eine solche Kurve kann auch durch eine Parametrisierung beschrieben werden. Will man nun die Krümmung einer solchen Raumkurve berechnen, muss man sozusagen sein Koordinatensystem an die richtige Stelle verschieben, was einem Basiswechsel entspricht. Auch hier werden also Analysis und Lineare Algebra zusammen angewandt.

2 Antwort für einen Studierenden im vierten Semester

Einem Studierenden im vierten Semester würde ich prinzipiell ähnlich antworten, bzw. hat dieser viele der oben genannten Themen bereits kennengelernt. Daher würde ich ihn an diese Aspekte erinnern und eventuell einen davon noch einmal genauer mit ihm betrachten und gemeinsam überlegen, wo hier ein Zusammenhang von Analysis und Linearer Algebra besteht.

Studentin 2

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, Sie leiten ein Erstsemestertutorium (LinA oder Ana). In Ihre Sprechstunde kommt jemand mit der Frage: „Haben eigentlich LinA und Ana irgendwas miteinander zu tun? Ich sehe da gar keinen Zusammenhang.“

Was würden Sie antworten? Würden Sie einem Studenten/einer Studentin gegen Ende des Grundstudiums (Ende 4. Semester) etwas anderes antworten?

Antwort: Das Mathematikstudium beginnt mit den beiden Vorlesungen Lineare Algebra und Analysis als Grundvorlesungen. Lineare Algebra ist dabei ein Teilgebiet der Algebra. Beide Teilgebiete haben die Mengenlehre als Grundlage. Die Algebra beschäftigt sich hauptsächlich mit Umformungen, die durch Addition und Multiplikation gelöst werden kann. Auch das Wurzelziehen gehört hierbei dazu. In der Algebra wird demnach unter anderem die Frage gestellt, wie man eine Gleichung umformen muss, damit sie bzw. ob sie überhaupt gelöst werden kann. Generell fällt hier der Fokus auf Gleichungen und selten auf Ungleichungen. Die lineare Algebra ist eine Teildisziplin der Algebra wobei alle beteiligten Größen einer Gleichung maximal erste Potenz besitzen. Die Analysis hingegen beschäftigt sich mit der Stetigkeit von Funktionen. Mit ihren Grenzwerten, mit der Differenzial- und Integralrechnung. Wenn eine Funktion betrachtet wird, wird sie algebraisch auf ihre Nullstellen untersucht. Analytisch hingegen wird sie auf ihr Verhalten in der Nähe einer Polstelle bzw. ihr Verhalten für x gegen Unendlich betrachtet. Ebenso fällt darunter eine Untersuchung der Steigung oder der Krümmung der Funktion. Die beiden Teilbereiche können jedoch nicht unabhängig voneinander existieren, da sie jeweils die Kenntnisse der anderen benötigt, um bestimmte Phänomene zu erklären.

Einem Studenten/einer Studentin gegen Ende des Grundstudiums (Ende 4. Semester) würde ich im groben nichts anderes antworten. Vielleicht kann man mit ein paar Beispiele die Argumentation schmücken. Aber im Großen und Ganzen finde ich die Argumentation sowohl für einen Studenten/eine Studentin im ersten Semester als auch am Ende des Grundstudiums sinnvoll.

Student 3

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, Sie leiten ein Erstsemestertutorium (LinA oder Ana). In Ihre Sprechstunde kommt jemand mit der Frage: „Haben eigentlich LinA und Ana irgendwas miteinander zu tun? Ich sehe da gar keinen Zusammenhang.“

Was würden Sie antworten? Würden Sie einer Studentin/einem Studenten gegen Ende des Grundstudiums (Ende 4. Semester) etwas anderes antworten?

Antwort: Zunächst einmal bilden Ana und LinA die Grundlagen für das Mathematikstudium. Dabei kann man Probleme analytisch (Ana) und algebraisch (LinA) lösen. Was auf den ersten Blick nicht gleich verwandt miteinander zu sein scheint, macht es bei späteren Vorlesungen durchaus Sinn diese Grundüberlegungen miteinander zu verknüpfen.

Aber auch bereits bei den Vorlesungen selbst kann man Zusammenhänge erkennen. Denn betrachtet man beispielsweise Funktionen in der Analysis sind diese im Prinzip nur lineare Abbildungen in der Linearen Algebra. Oder schaut man sich mehrdimensionale Funktionen und deren Ableitungen (Stichwort: Jacobi Matrix) oder Gradienten an, so lässt sich dies mit Matrizen erklären. Matrizen werden aber in der LinA gelehrt.

Betrachtet man einmal die Vorlesung „Numerik 1“: Hier müssen unter anderem auch Programmieraufgaben bearbeitet werden. Matlab, das Programm dazu, rechnet mit Matrizen, so wie es die meisten solcher Programme tun. Nichtsdestotrotz kann man mit Hilfe dieses Programms auch wunderbar Funktionen darstellen und diese ganz analytisch (bzw. numerisch) ableiten und diskutieren.

In unserem Seminar haben wir auch 3D Kurven betrachtet. Dies und davon die Krümmung zu bestimmen würde man wohl eher dem Feld der Analysis zuordnen. Die dafür (in unserer Lösung) notwendige Koordinatentransformation und der Basiswechsel sind aber im Bereich der Linearen Algebra angesiedelt.

Studentin 4

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

Frage Erstsemesterstudent/in: „Haben LinA und Ana irgendetwas miteinander zu tun?“

Antwort: „Im Moment kommt es dir wahrscheinlich so vor, als hätten diese beiden Vorlesungen überhaupt nichts miteinander zu tun.

Elementare Algebra hast du schon in der Schule behandelt. Dazu gehören die Rechenregeln der natürlichen, ganzen, gebrochenen und reellen Zahlen, aber auch das Umformen und berechnen von mathematischen Ausdrücken, die Variablen enthalten. Die lineare Algebra beschäftigt sich mit Vektorräumen und lineare Abbildunge zwischen diesen. Insbesondere werden hier lineare Gleichungssysteme gelöst. Ganz allgemein ist eine Algebra eine Art Zahlenraum, vergleichbar mit den rationalen oder reellen Zahlen, wobei in der lineare Algebra nur Größen in erster Potenz vorkommen.

Auch die Analysis kennst du bereits aus der Schule. Das bilden von Integralen und auch Ableitungen gehört hierzu. Außerdem werden Grenzwerte bestimmt und im Allgemeinen Funktionen untersucht.

Um Funktionen untersuchen zu können, benötigen wir die Grundlagen aus der Algebra und somit auch aus der lineare Algebra. In wie fern wir die in der LinA bewiesenen Sätze für Anwendungen in der Ana brauchen, wirst du aber erst später sehen. Im Moment kannst du Analysis auch ohen Lineare Algebra verstehen und umgekehrt. Eine Vernetzung ist zwar da, jedoch nicht direkt offensichtlich.“

Frage Student/in am Ende des Grundstudiums: „Haben LinA und Ana irgendetwas miteinander zu tun?“

Antwort zusätzlich zur Antwort oben: „Ja haben sie. Ohne das eine Teilgebiet der Mathematik kann das andere nicht existieren. Ohne in der LinA (Bzw allgemeinder der Algebra) definierte Abbildungen können Funktionen in der Ana zum Beispiel nicht untersucht werden.“

Studentin 5

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

„Am Anfang meines Studiums habe ich das auch gedacht. Allerdings fiel mir relativ schnell auf, dass das nicht stimmt. Da ich Lineare Algebra 1 und Analysis 1 nicht gleichzeitig gehört habe, sondern zunächst Lineare Algebra 1 und 2 und dann quasi erst ein Jahr später Analysis 1 und 2, kam es oft dazu, dass Teile von Analysis 1 in Linearer Algebra 1 schon vorausgesetzt wurden. Vor allem in der ersten Zeit können sich Themen der beiden Vorlesungen überschneiden, da man diese für beide Vorlesungen braucht. Das sind hauptsächlich Grundlagen, wie Mengenlehre, Beweistechniken usw.

Beide Vorlesungen bzw. Vorlesungsreihen sind die absoluten Grundlagen für das weitere Mathematikstudium. Man benötigt Beides für das weitere Verständnis der Mathematik.

Um zurück auf den eigentlichen Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis zu kommen, ist mir aufgefallen, dass vor allem in Beweisen manchmal das andere gebraucht wurden, das heißt in Beweisen zu Sätze der Linearen Algebra wurde Analysis verwendet und umgekehrt.

Themengebiete bei denen sich Lineare Algebra und Analysis überschneiden sind zum Beispiel Matrizen. Diese werden in Linearer Algebra eingeführt aber werden dennoch in Analysis in wichtigen Sätzen oder Definition benötigt. Zum Beispiel bei der Jacobi-Matrix oder Hesse-Matrix. Das Thema Normen wird in Linearer Algebra einführt, aber in der Analysis verwendet und gebraucht. Ein weiterer Zusammenhang stellt der Fundamentalsatz der Algebra dar. Dieser wird in der linearen Algebra bewiesen, allerdings geht es bei diesem um die Nullstellen eines Polynoms, was eher zur Analysis gehört. Man kann diesen Satz also sowohl in der Lineare Algebra „algebraisch“ beweisen und in der Analysis „analytisch“ beweisen. Dennoch sind meiner Meinung nach die meisten der beiden Themengebiete unabhängig voneinander zu verstehen, nicht völlig aber größtenteils schon, denn das mathematisches Denken im Bereich Linearer Algebra ist ein anderes als das Denken der Analysis, dennoch brauchen sie sich gegenseitig. Beispielsweise bezeichnen sich Mathematiker auch meist entweder als Algebraiker oder als Analytiker. Damit ist auch das unterschiedliche mathematische Denken und auch die unterschiedliche mathematische Vorgehensweise bzw. Herangehensweise an ein mathematisches Problem gemeint.

Letztlich lässt sich zusammenfassend sagen, auch wenn Lineare Algebra und Analysis auf den ersten Blick nicht viel miteinander zu haben, bedingen sie sich trotzdem. Sie sind beide als absolute Grundlage der Mathematiker zu betrachten und sind sehr wichtig für das nachfolgende Studium bzw. die nachfolgenden

Vorlesungen, da beide ein gewisses mathematisches Denken auslösen, wenn auch beide auf ihre Art und Weise.“

Dies würde ich eher einem Studenten gegen Ende des Grundstudiums sagen. Bei einem Studenten am Anfang vom Studium würde eher das Allgemeine sagen, dass man es für Beweise der jeweiligen anderen Vorlesungen brauchen kann und, dass es beide Grundlagen sind und diese für das weitere Studium sehr wichtig sind bzw. Voraussetzung dafür sind.

Studentin 6

Zusammenhang Lineare Algebra und Analysis

Stellen Sie sich vor, Sie leiten ein Erstsemestertutorium (LinA oder Ana). In Ihre Sprechstunde kommt jemand mit der Frage: „Haben eigentlich LinA und Ana irgendwas miteinander zu tun? Ich sehe da gar keinen Zusammenhang.“ Was würden Sie antworten? Würden Sie einem Studenten/einer Studentin gegen Ende des Grundstudiums (Ende 4.Semester) etwas anderes antworten?

In der linearen Algebra beschäftigt man sich mit Vektorräumen und linearen Abbildungen zwischen diesen. Dazu gehört auch die Matrizenrechnung und das Lösen von linearen Gleichungssystemen. Im Zusammenhang mit linearen Abbildungen werden auch Begriffe wie injektiv, surjektiv, bijektiv, Bild, Urbild, Umkehrabbildung, etc besprochen. Dies sind Grundbegriffe die sowohl in der linearen Algebra als auch in der Analysis gebraucht werden. Auch grundlegende Fertigkeiten wie Matrizenrechnung sind sowohl in der Analysis als auch in der linearen Algebra wichtig. Auch die Körper- und Gruppentheorie die in LinA behandelt wird, ist in AnA wichtig. Denn auch hier beschäftigt man sich vor allem mit den Körpern der reellen und komplexen Zahlen. Dabei ist es für dich (Erstsemesterstudent) als angehender Mathematiker wichtig was allgemein ein Körper ist, welche Eigenschaften er hat und welche Axiome gelten, damit du verstehen kannst was hinter diesen Körpern der reellen und komplexen Zahlen noch alles steckt, außer dem was dir bisher in der Schule begegnet ist.

Ich gebe dir recht, dass es bestimmt auch einige Themen gibt wo (auch mir) nicht auf Anhieb ersichtlich ist welchen Zusammenhand die beiden Gebiete der Mathematik haben. Hier fallen mir z.B. Folgen, Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit,... ein.

Die gleiche Antwort würde ich auch einem Student/in gegen Ende des Grundstudiums geben, da mir bisher auch noch kein anderer Zusammenhang bewusst ist und ich mich am Ende meines gesamten Studiums befinde.

Student 7

Zusammenhang von Lineare Algebra und Analysis

Frage: Wie kann man einem Erstsemester erklären wie lineare Algebra und Analysis zusammenhängen?

Zunächst einmal gibt es Grundlagen die man für beide Themenbereiche braucht. So lernt man sowohl in lineare Algebra wie auch in Analysis Grundlagen der Aussagenlogik und Mengenlehre kennen. Auch den Begriff der Abbildung braucht man in beiden Gebieten recht bald. In der linearen Algebra befasst man sich mit Abbildungen auf Mengen, Gruppen usw. und auch Abbildungen zwischen zwei Mengen, Gruppen, Körpern usw. In Analysis taucht der Begriff der Abbildung beispielsweise dann auf, wenn Folgen eingeführt werden. Der Begriff Folge kann über eine Abbildung von den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen definiert werden. Auch Polynome sind für beide Teilgebiete der Mathematik sehr wichtig und es gibt noch weitere Begriffe und Objekte die sowohl in der linearen Algebra als auch in der Analysis auftauchen. Außer diesen relativ grundlegenden Begriffen die man für beide Bereiche braucht lernt man natürlich auch Beweise zu führen und mathematische Argumente richtig zu gebrauchen.

Auf den ersten Blick gibt es sonst nicht viele Zusammenhänge zwischen linearer Algebra und Analysis. Allerdings täuscht dieser Eindruck etwas. In der linearen Algebra befassen wir uns zum Beispiel mit Körpern und Vektorräumen. Doch das sind gerade die Räume auf denen wir typischerweise Analysis betreiben. Wenn uns also die lineare Algebra ein besseres Verständnis von $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ geben kann, so hilft uns das, wenn wir in Analysis Folgen oder Funktionen in diesen Räumen betrachten. Auch befasst man sich in der Algebra allgemein mit der Lösbarkeit von Gleichungen, was natürlich auch in der Analysis vorkommen kann. Wenn die Analysis sich dann später mit mehrdimensionalen Funktionen befasst hilft es einem enorm, wenn man aus der linearen Algebra sicher im Umgang mit Basen, Vektoren und Matrizen ist.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass beide Teilgebiete von ähnlichen Grundlagen ausgehen, thematische Überschneidungen haben und einem das Wissen aus einem Teilgebiet für das Verständnis des anderen sehr helfen kann.

Frage: Würde ich einem Studenten im 4. Semester etwas anderes antworten?

Je nachdem zu welchem Zeitpunkt der Erstsemester fragt sind einige der oben auftauchenden Begriffe ein Vorgriff auf das was noch behandelt wird. Im Gespräch mit einem Studenten im 4. Semester kann man entsprechend mehr auf fachliche Zusammenhänge eingehen. Ein kleines Beispiel wäre die Definition der Abzählbarkeit einer Menge. Ich lernte diese Definition zuerst im Rahmen der Analysis kennen, sie bedient sich aber des Begriffes der Bijektion, der mir aus der linearen Algebra bekannt war.

Da der Student natürlich mehr Wissen mitbringt könnte man weitere Beispiele geben. So sind Umkehrfunktion bzw. Umkehrabbildung wichtig für beide Teilgebiete und wie oben bereits erwähnt, ist ein sicherer Umgang mit Matrizen sehr hilfreich wenn es beispielsweise um die Hessematrix geht.

Studentin 8

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

Ja, LinA und Ana haben tatsächlich etwas miteinander zu tun, auch wenn dies auf den ersten Blick nicht so aussehen mag. Zunächst einmal sind beide Teilgebiete der Mathematik immens wichtig als Grundlagen für die komplette mathematische Theorie, deshalb habt ihr LinA und Ana auch bereits so früh. In diesen Vorlesungen werden die Grundsteine dafür gelegt, dass ihr später komplexere Theorien verstehen könnt. Die Lineare Algebra behandelt zu Beginn eures Studiums vor allem Vektorräume und lineare Abbildungen. Wichtig für Algebraiker sind auch Fragen nach der Lösung verschiedener Gleichungssysteme.

Die Analysis dagegen hat mehr analytische Funktion. Sie versucht, Funktionen zu beschreiben und ihre Eigenschaften mathematisch zu berechnen um damit evtl. sogar Vorhersagen treffen zu können. Bekannte Instrumente dafür sind Ableitungen, Integrale oder charakteristische Stellen von Funktionen wie Nullstellen, Wendestellen uvm.

Gerade bei physikalischen Fragen wird besonders deutlich, wie analytische und algebraische Fragen oft Hand in Hand gehen können. Physiker arbeiten häufig mit Vektoren um z.B. die Bewegung eines Körpers darzustellen. Nur die Richtung der Bewegung reicht aber häufig nicht, um genauere Aussagen treffen zu können. Hier kommt dann die Analysis ins Spiel. Denn auch für Vektoren gibt es Ableitungsvektoren, die mit den Hilfsmitteln der Analysis bestimmt werden können und Auskunft über die Geschwindigkeit oder Beschleunigung des bewegten Körpers zu geben.

Auch in der Geometrie werden beide Grundpfeiler der Mathematik benötigt. Beschrieben werden Zustände häufig mit Hilfe algebraischer Methoden, also durch Abbildungen oder Vektoren oder Ähnliches. Besonders gerne werden aber auch Veränderungen betrachtet, sei es beispielsweise von Schmiegeebenen oder Tangentialvektoren. Um diese Veränderungen dann mathematisch auszudrücken, werden Ableitungen benötigt, also ein analytisches Hilfsmittel. Zu Beginn des Studiums fällt es vielleicht noch schwer, die Zusammenhänge zu begreifen, da die Vorlesungen Analysis und Lineare Algebra doch zunächst stark getrennt ablaufen. Je weiter man jedoch mit dem Studium voranschreitet, desto detaillierter beschäftigt man sich mit den verschiedensten mathematischen Themen und ist vielleicht überrascht, wie oft Überschneidungen zwischen analytischen und algebraischen Methoden verlangt sind, um Beweise zu führen oder neue Formeln zu entwickeln.

Generell würde ich keinen Unterschied in meiner Antwort machen, wenn ich mit einem Studenten im ersten Semester oder im vierten Semester darüber spreche. Dem Erstsemestler sind eventuell viele Begrifflichkeiten noch nicht geläufig, da muss anschaulicher gearbeitet werden und es kann viel Interesse und Motivation für die kommenden Semester geweckt werden. Der Viertsemestler dagegen beschäftigt sich schon länger mit mathematischen Inhalten und ist eventuell schon in die fortgeschrittenen Theorien eingestiegen, hier können schon konkrete Beispiele z.B. aus der Numerik gebracht werden. Der inhaltliche Aspekt, dass Lineare Algebra und Analysis durchaus zusammenhängen und in weiten Teilen gar nicht separat gedacht werden können, bleibt aber in beiden Antworten gleich.

Studentin 9

Zusammenhang Lineare Algebra und Analysis

Es stimmt schon, dass es nicht so einfach ist, einen Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis zu sehen. Bei mir hat das auch sehr lange gedauert, bis ich das verstanden habe. Und es ist auch wichtig, dass du immer weißt, dass es überhaupt nicht schlimm ist, wenn man nicht immer alles sofort versteht!

Ich versuche mal, es dir zu erklären:

Es ist sehr wichtig, dass du siehst, dass beide Themen, die Lineare Algebra und die Analysis, die Mengenlehre als ihren Grundstein haben. Dann gehen die beiden Themen ein bisschen auseinander: Die Lineare Algebra beschäftigt sich hauptsächlich mit Umformungen von Gleichungen. Das Grundprinzip sind Moduln, die einfachsten Moduln sind Vektorräume, also Moduln über Körpern. Die einfachsten Vektorräume die wir kennen sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Diese zwei Vektorräume spielen nun in der Analysis wieder eine sehr große Rolle.

Die Analysis beschäftigt sich mit Funktionen und untersucht z.B. Stetigkeit, Grenzwerte, Integrale, Steigung und Krümmung. Hier werden also aktuelle Veränderungen einer Funktion beschrieben.

Die Vektorräume, in denen diese Funktionen liegen, sind in der Analysis eigentlich immer $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Die Analysis untersucht also (meist) differenzierbare Abbildungen zwischen topologischen Räumen, während die Lineare Algebra sich mit Vektorräumen und linearen Abbildungen zwischen diesen Vektorräumen beschäftigt, also hauptsächlich mit Vektoren und Matrizen. Aber beide bewegen sich in genau denselben Räumen und man braucht die Lineare Algebra, um zu wissen, wie sich Funktionen in diesen Räumen verhalten. Ansonsten wüssten wir nicht, wie wir mit den Funktionen der Analysis umgehen müssen. Die Lineare Algebra legt die Grundstrukturen der Räume fest.

Falls mich ein Student nach dem Grundstudium nach diesem Zusammenhang fragt, würde ich ihn erstmal fragen, was er denn alles schon zu den einzelnen Themen weiß. Eventuell findet er schon selbst einen Zusammenhang und war bisher nur nicht in der Lage, diesen konkret zu benennen. Ansonsten würde ich es ihm ziemlich ähnlich erklären, wie ich es auch einem Erstsemester-Studenten erklären würde. Eventuell nur nicht mehr ganz so ausführlich, da der Student schon wissen müsste, dass es sich bei $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ um Vektorräume handelt und dass diese die Grundräume der Analysis sind.

Studentin 10

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

An den Studenten im ersten Semester: Auf den ersten Blick sind beide zentrale Teilgebiete der Mathematik und unterscheiden sich durch ihre Fragestellungen und Herangehensweisen. In der Linearen Algebra betrachtet man lineare Abbildungen zwischen endlichen Vektorräumen, dies bezieht vor allem die linearen Gleichungssysteme und die Matrixschreibweise mit ein. Von hier kommt die Idee, lineare Abbildungen in Matrizen darzustellen und damit umzugehen. Durch die sehr allgemeine Betrachtungsweise ist es möglich, sehr allgemeine und tiefliegende Resultate zu zeigen. Ein Beispiel ist hierfür der Fundamentalsatz der Algebra. Darüber hinaus lernt man aus der Linearen Algebra das Konzept von Normen, welche grundlegend für die Analysis sind. In der Analysis betrachtet man nicht nur lineare Funktionen, sondern allgemeinere. Zentraler Punkt der Analysis sind die Grenzwertbetrachtungen, wie Stetigkeit, Integral und Differenzierbarkeit. Dies ist eine ganz andere Technik, welche die Analysis deutlich von der Linearen Algebra abgrenzt. Dennoch wirst du später feststellen, wenn es um Extremwertproblemen im Mehrdimensionalen geht, dass man an zentralen Stellen auf Resultate der Linearen Algebra angewiesen ist.

An den Studenten im vierten Semester: Bestimmt hast du im Laufe der letzten Semester gemerkt, dass sich die Lineare Algebra und die Analysis in zentralen Punkten ergänzen und aufeinander angewiesen sind. Du hast in Analysis 2 gelernt, dass die Theorie der mehrdimensionalen Analysis fundamental auf den Methoden der Linearen Algebra beruht. Beispielsweise werden mehrdimensionale Funktionen in Vektorschreibweise definiert und deren Ableitung ist eine Matrix. Möchte man Extremstellen klassifizieren, benötigt man das Konzept der Definitheit einer Matrix und Techniken, um diese zu bestimmen. Diese liefert die Lineare Algebra, Beispiel: Determinante der Hesse-Matrix < 0 negativ definit, Determinante > 0 positiv definit. Andererseits kann durch Techniken der Analysis die Bestimmung der Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms erfolgen. Während man in der Linearen Algebra mit rationalen Funktionen / rationale Zahlen auskommt, führen die Grenzwertbetrachtungen in der Analysis zu allgemeineren Definitionen von irrationalen Zahlen, wie e und pi.

Studentin 11

Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

Aufgabe: Stellen Sie sich vor, Sie leiten ein Erstsemestertutorium (LinA oder Ana). In Ihre Sprechstunde kommt jemand mit der Frage: „Haben eigentlich LinA und Ana irgendwas miteinander zu tun? Ich sehe da gar keinen Zusammenhang.“
Was würden Sie antworten? Würden Sie einem Studenten/einer Studentin gegen Ende des Grundstudiums (Ende 4. Semester) etwas anderes antworten?

Ehrlich gesagt finde ich das eine sehr gute Frage, welche für mich nicht einfach zu beantworten ist. Die Vorlesungen werden im Studium in der Regel getrennt voneinander gehalten und als Student sind Zusammenhänge beider Vorlesungen nur schwer erkennbar. Mein Versuch eine Antwort auf die Frage zu geben, wäre: Zwischen LinA und Ana gibt es auf jeden Fall einen Zusammenhang. Sie beginnen beide mit der Mengenlehre, bilden die Grundlage für jedes naturwissenschaftliche und mathematische Studium und bedingen sich gegenseitig. In weiteren Vorlesungen des Mathestudiums wird sowohl auf Inhalte aus Linearer Algebra

und Analysis zurückgegriffen. Als Beispiele, bei denen sowohl Inhalte aus LinA und Ana aufgegriffen werden, könnten genannt werden:
- Grenzwertberechnungen von Matrizen
- Matrix-Exponentialfunktion
Allgemein finde ich es jedoch schwierig konkrete Beispiele zu nennen, da mir selbst der genaue Zusammenhang nicht klar ist. Daher könnte ich einem Student des 4. Semesters auch keine differenziertere Antwort auf die Frage geben als einem Erstsemesterstudent.

A.11.3. Verbindungen zwischen Linearer Algebra und Analysis, WS 18/19

Studentin 1

1 Reflexion 2: Seminar Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen
2 - Zusammenhang von Lineare Algebra und Analysis
3 Im Studiengang Mathematik an der Universität Tübingen wurden zuletzt die Vorlesungen Analysis und Lineare Algebra getrennt voneinander gelehrt und zu dem Zeitpunkt an dem ich die Vorlesungen besuchte wurde nur sporadisch auf die jeweils andere Vorlesung verwiesen.
4 Jedoch bildete der Beginn der beiden Vorlesungen nämlich die Mengenlehre einen gemeinsamen Bezugspunkt am Anfang des Studiums.
5 Bereits im Proseminar Zahlentheorie, das ich besuchte, wurde klar, dass man Analysis und Lineare Algebra nicht immer getrennt voneinander betrachten kann und zum Beispiel für Beweise beide Teilgebiete der Mathematik von Nöten sein können.
6 Auch in der Geometrie Vorlesung, die ich dieses Semester besuche und in der auch auf die Grundlagen der Analysis bzw. Linearen Algebra zurückgegriffen wird, wurden beide Teilbereiche der Mathematik verwendet.
7 Im Seminar Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen konnte sich dieser Eindruck, dass Objekte und Konzepte aus beiden Gebieten gebraucht werden, verstärken.
8 So zum Beispiel benötigte man im Seminar beim Thema Abstände auf gekrümmten Flächen die Taylorentwicklung und Differentialrechnung (u.a.: Differenzierbarkeit, Produktregel, Linearität, Kettenregel, lokale Extrema) oder das Fundamentallemma der Variationsrechnung, die aus der Analysis bekannt sind, während man zudem das Skalarprodukt benötigte, das Gegenstand der Linearen Algebra ist.
9 Im Thema 1, Krümmung einer Kurve, dagegen nutzte man die Definition der Länge einer Kurve, aus der Analysis 4 oder der Regel von de l'Hospital aus der Analysis 1 und nutzte die Kenntnisse der Matrizenrechnung und des Skalarprodukts, die überwiegend in der Linearen Algebra eingeführt wurden, um nur ein paar Beispiele zu nennen.
10 In Thema 2 finden sich ebenfalls Matrizenrechnungen und das Skalarprodukt aus der Linearen Algebra und die Differentialrechnungen aus der Analysis.
11 Besonders auffällig wurden diese Zusammenhänge im Seminar anhand der Erstellung des Skriptbeitrages, da wir für diesen explizit die Regeln beziehungsweise Sätze in den Vorlesungsskripten der Analysis beziehungsweise Linearen Algebra suchten und uns nochmals darüber Gedanken machten, woher wir diese Regeln bzw. Sätze kennen.
12 Teilweise wurden wir auch im Gespräch oder an Stellen an denen wir in der Gruppe nicht weiterkamen auf gewisse Sätze, Lemmata oder Regeln aus der Analysis oder Linearen Algebra aufmerksam gemacht und gingen diesen Hinweisen nach, indem wir uns die Skripte der jeweiligen Vorlesung nochmals anschauten.
13 Somit lässt sich durchaus sagen, dass bei Beweisen beide Teilgebiete der Mathematik nötig sein können.

Studentin 2

1 Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen
2 Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis
3 *Haben Sie sich schon einmal gefragt, ob Lineare Algebra und Analysis eigentlich etwas miteinander zu tun haben?*

4 Zunächst einmal werden in der Linearen Algebra und in der Analysis unterschiedliche Grundlagenthemen bearbeitet, sodass einen Zusammenhang nur schwer vorzustellen scheint.

5 In der Analysis IV lernt man dann den Fundamentalsatz der Algebra und damit eine Überlappung der beiden Teilgebiete kennen.

6 Im Allgemeinen finde ich es spannend und sinnvoll dieser Frage nachzugehen.

7 *Sind Ihnen bei den bisherigen Seminarthemen Stellen aufgefallen, an denen LinA und Ana zusammenkommen?*

8 An erster Stelle fällt mir auf, dass für die Bearbeitung der bisherigen Themen oft Kenntnisse aus den beiden Teilgebieten nötig waren.

9 Aus der Analysis der Satz von l'Hospital und die Taylor-Entwicklung von Funktionen, sowie aus der Linearen Algebra das Skalarprodukt und das Gram-Schmidt-Verfahren, um ein paar Beispiele zu nennen.

10 Eigentlich muss man auch gar nicht tiefer in die Ausarbeitungen eintauchen.

11 Schon ein Blick auf die Formel zur Berechnung der Krümmung von Raumkurven lässt Elemente, die ich der Linearen Algebra zuordnen würde (Skalarprodukt) und solche der Analysis (Ableitungen) erkennen.

12 $|K(t)| = \frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$

13 *Hilft Ihnen das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen?*

14 In erster Linie hilft mir das Seminar einige der Themen aus LinA und Ana zu wiederholen.

15 Für mich sind die Grundlagen aus LinA und Ana mehr wie das „Handwerkszeug“um Differentialgeometrie zu betreiben.

16 Daher sehe ich in unserem Hauptseminar die beiden Teilgebiete mehr als „Mittel zum Zweck“.

17 Ich finde es beeindruckend, wie sie in gewissen Formeln und Themen der Differentialgeometrie miteinander “verschmelzen„, eine Verbindung der beiden Gebiete kann ich durch das Bearbeiteten der Themen allerdings nicht unbedingt erkennen.

18 Um die Verbindungen klarer zu sehen kann es helfen, an Schlüsselstellen explizit darauf hinzuweisen.

Studentin 3

1 Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

2 Dass Lineare Algebra und Analysis mehr miteinander zu tun haben, als man im ersten Moment sieht, habe ich im Studium schon relativ früh zu spüren bekommen, da ich nicht mit beiden Vorlesungen gleichzeitig angefangen habe, sondern nur mit Analysis.

3 Als in Ana II dann auf einmal Matrizen an der Tafel standen, vom Charakteristischen Polynom die Rede war und Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet wurden, viel mir diese erste Verbindung vermutlich deutlicher auf, als den meisten anderen Studenten, die mit LinA oder mit beiden Vorlesungen gleichzeitig begonnen haben.

4 Auch in der Vorlesung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen wurden oft Konzepte aus beiden Gebieten gleichzeitig verwendet.

5 Beim ersten Thema haben wir das Krümmungsmaß einer Kurve überwiegend mit unserem Wissen aus der Analysis hergeleitet, wobei wir bei der Konstruktion der beiden Hilfskurven mit Vektoren gearbeitet haben und somit vektorwertige Funktionen erhalten haben.

6 Beim Flächeninhalt gekrümmter Flächen war für mich der Zusammenhang zwischen Analysis und Linearer Algebra noch offensichtlicher.

7 Hier trafen sich Integrale, Determinanten, partielle Ableitungen, Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Norm in einer einzigen Formel.

8 Dies scheint, wenn man die Formel im Nachhinein betrachtet, ganz schön durcheiandergewürfelt, was Elemente der Linearen Algebra bzw. Analysis betrifft, doch beim Erarbeiten ist mir dies gar nicht so sehr aufgefallen.

9 Die Grenzen zwischen den beiden Bereichen verschwimmen für mich häufig, vielleicht gerade auch durch andere Vorlesungen, in denen die Verbindungen offensichtlich wurden.

10 Bei der Herleitung des Flächeninhaltes haben wir die geometrische Interpretation der Determinante ausgenutzt und haben mit den Richtungsvektoren der Tangentialebene in einem Punkt gearbeitet.

11 Danach kam aber auch die Analysis nicht zu kurz, wie die Herleitung des Integrals über den Limes der Summe.

12 Bei der Herleitung des Abstandes auf gekrümmten Flächen, haben wir zunächst Extremstellen der Längen verschiedener möglicher Lösungskurven betrachtet und nach hinreichenden Bedingungen für die tatsächliche Lösungskurve gesucht.
13 Wieder haben wir viel mit Methoden aus der Analysis gearbeitet, wie die Abweichung um ε der verschiedenen Kurven oder generell das Rechnen mit Integralen.
14 Aus der Linearen Algebra haben wir dann die Idee des Gram-Schmidt-Verfahrens ausgenutzt, um tangentiale und normale Anteile der im Skalarprodukt stehenden Vektoren zu trennen, wodurch ein Teil des Terms annulliert werden konnte.
15 Schlussendlich blieb als Bedingung an die Lösungskurve eine Differentialgleichung übrig, wobei wir wieder in der Analysis gelandet sind.
16 Alles in allem waren die Verbindungen zwischen Analysis und Linearer Algebra im Seminar sehr deutlich ersichtlich.
17 Durch das Erarbeiten der verschiedenen Themen haben wir uns mit vielen Themen und Erkenntnissen unserer Grundvorlesungen erneut beschäftigt und konnten so auch immer wieder die Verbindungen erkennen.

Studentin 4

1 Reflexion 2
2 So wirklich mit der Frage auseinandergesetzt, ob Lineare Algebra und Analysis etwas miteinander zu tun haben, habe ich mich ehrlich gesagt vorher noch nicht.
3 Da LinA und Ana zu Beginn des Studiums bekanntlich als zwei getrennte Vorlesungen gehört und somit kennengelernt werden, oftmals hört man diese sogar nicht einmal gleichzeitig, sondern hintereinander, neigt man wirklich dazu, sie im ersten Moment getrennt zu betrachten.
4 Da aber LinA und Ana zusammen die beiden Grundvorlesungen darstellen, auf die dann alle anderen Vorlesungen aufbauen, ist es eigentlich logisch, dass es Überlappungen geben muss bzw. vor allem Bereiche in der Mathematik, in denen beide gemeinsam eine Rolle spielen.
5 Auch beginnen beide Vorlesungen mit den gleichen Grundlagen wie z. B. der Mengenlehre oder der Gruppen- bzw. Körpertheorie, was auch vermuten lässt, dass beide Bereiche irgendwie etwas miteinander zu tun haben müssen.
6 Deswegen würde ich nach ersten kurzen Überlegungen sagen, dass hier wahrscheinlich eher das „wie“ als das „ob“ in Frage steht.
7 Tatsächlich sind wir bei der Bearbeitung unserer Themen oftmals auf Stellen gestoßen, an denen wir auf Konzepte aus LinA und Ana zurückgreifen mussten.
8 Das waren z. B. aus dem Bereich der Linearen Algebra das Rechnen mit Vektoren im Allgemeinen oder das Verwenden des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens um eine Orthonormalbasis zu erzeugen.
9 Aus dem Bereich der Analysis mussten wir z. B. oft die Regeln von de l’Hospital zum Ableiten verwenden, auf die Taylorentwicklung zurückgreifen oder auch im Mehrdimensionalen ableiten, wodurch wir dann auf die Jacobi-Matrix und auf die Hesse-Matrix stießen.
10 Daher, dass das Seminar zum Thema „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ und somit ausgesprochen anschaulich ist, hilft es sowieso sehr dabei, den Stoff, den man behandelt und sich Großteils sogar selbst überlegt, wirklich zu durchdringen.
11 Das ist die Voraussetzung um überhaupt erst in die Position zu gelangen, sich übergeordnete Gedanken zu den jeweiligen Themen machen zu können, und schon bereits Gelerntes anzuwenden.
12 Somit bekommt man überhaupt erst die Möglichkeit, zu erkennen, was genau aus den Bereichen Analysis und Linearer Algebra, was schon bekannt ist, bei der Bearbeitung eines Themas nützlich sein kann, um zum Ziel zu gelangen.
13 Und erst mit diesem Verständnis und dem gezielten Anwenden des Bekannten kann man sich Gedanken dazu machen, auf welche mathematischen Teilbereiche man jetzt wo zurückgegriffen hat, und wie diese Teilbereiche genau zusammenhängen könnten.
14 Da wie bereits beschrieben einige Objekte und Konzepte aus LinA und Ana auftreten und angewendet werden, hilft es also auf jeden Fall, sich über eine Verbindung bzw. einen Zusammenhang der beiden klar zu werden, da sie ja offensichtlich auch gemeinsam auftreten und verwendet werden.

15 So wird mir persönlich z. B. vor allem klar, dass einige Konzepte aus der Analysis wie z. B. die Taylorentwicklung oder die Regeln von de l'Hospital auch auf Objekte aus der Linearen Algebra wie z. B. Vektoren im Allgemeinen angewendet werden können, was mir vorher nicht so wirklich bewusst war.

16 Der mathematische Bereich der Differentialgeometrie vereint also offensichtlich Objekte und Konzepte sowohl aus Analysis als auch aus Linearer Algebra, die gemeinsam auftreten und ineinander übergreifen.

17 Somit hilft das Seminar mit seinem besonderen Konzept, sich Themen selbst zu erarbeiten und somit selbst ein bisschen zu forschen, auf jeden Fall dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen.

Studentin 5

1 Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

2 Schon von Beginn meines Studiums an wurde ich darauf hingewiesen, dass Lineare Algebra etwas mit Analysis zu tun haben muss.

3 Ich habe in meinen ersten beiden Semestern mit Analysis begonnen und nicht wie üblich mit Linearer Algebra.

4 Dies führte dazu, dass ich dann in meinem dritten Semester in Linearer Algebra 1 immer wieder auf schon bekanntes wie Matrizen, charakteristisches Polynom,... gestoßen bin.

5 Im Seminar Differentialgeometrie zum Angreifen, sowie andere Vorlesungen (Stochastik, mathemaitques discrètes und DGL) habe ich oft gemerkt, dass auf Vorwissen von Analysis und Linearer Algebra zusammen zurückgegriffen wurde, auch wenn manchmal der Zusammenhang nicht immer deutlich ersichtlich war, sondern eher etwas intuitiver verwendet.

6 Bei unserem ersten Thema zur Herleitung eines Krümmungsmaßes haben wir überwiegend mit unserem Wissen aus der Analysis gearbeitet, indem wir einen Längenvergleich angestellt haben und dann mit Vektoren vektorwertige Funktionen erhalten haben.

7 Um auf die Formel zur Berechnung der Länge einer Kurve zu gelangen, haben wir das Wissen aus der Analysis genutzt, dass der Limes über die Summe das Integral definiert.

8 Beim zweiten Thema dem Flächeninhalt gekrümmter Flächen, habe ich bisher am deutlichsten den Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis bemerkt.

9 Hier haben wir viel mit Integralen, Determinanten, dem Skalarprodukt und Kreuzprodukt gerechnet.

10 Während der Erarbeitung war mir gar nicht bewusst, dass man so vieles aus beiden Teilgebieten verwendet hat.

11 Erst wenn man sich es aufschreibt bemerkt man dies.

12 Oft überlegen wir uns zuerst die geometrische Anschauung und überlegen dann, wie man es mathematisch aufschreiben kann.

13 Hierbei bedienen wir uns einfach aus unserem Vorwissen von beiden Vorlesungen, weshalb der Übergang oft fließend ist.

14 Auch beim dritten Thema, dem Abstand auf gekrümmten Flächen, haben wir uns ordentlich aus beiden Teilgebieten bedient.

15 Wir haben zu Beginn versucht über unser Schulwissen, die minimale Länge der Abstandskurve zu bestimmen, also den Extrempunkt.

16 Hierzu mussten wir dann noch die hinreichenden Bedingungen testen und aufstellen.

17 Hierbei haben wir viel mit Integralen und partiellen Ableitungen gerechnet.

18 Um zum Schluss noch durch das Gram-Schmidt Verfahren auch noch die Lineare Algebra mit einzubauen.

19 Dies haben wir benötigt, um den tangentialen Anteil vom normalen Anteil im Skalarprodukt zu trennen und darüber dann Aussagen treffen zu können.

20 Am Ende haben wir jedoch wieder die Analysis verwendet, in dem wir schlussendlich eine Differentialgleichung gelöst haben.

21 Als Fazit kann ich sagen, dass das Seminar mir verdeutlicht hat, dass die Analysis keineswegs getrennt von der Lienearen Algebra zu betrachten ist, sondern die Grenzen eher fließend sind.

Studentin 6

1 Reflexion 2 – Zusammenhang von LinA und Ana

2 *Haben Sie sich schon einmal gefragt, ob Lineare Algebra und Analysis eigentlich etwas miteinander zu tun haben?*
3 Ehrlich gesagt habe ich mir da bisher noch nicht viele Gedanken darüber gemacht.
4 Dass sie Grundlagen für weitere Vorlesungen des Mathematikstudiums sind, zeigt sich einem oft.
5 Zudem wird empfohlen beide Veranstaltungen parallel zu besuchen, was mindestens zu Beginn ganz hilfreich ist, wenn es um Aussagenlogik, Mengenlehre etc. geht, da das zum einen verschieden und zum anderen unterschiedlich detailliert behandelt und eingeführt werden kann.
6 Darüber hinaus konnte ich zu diesem Zeitpunkt keine weiteren Parallelen erkennen.
7 Auch in später folgenden Veranstaltungen stellt man häufig fest, dass auf bereits Bekanntes zurückgegriffen wird und an Grundlegendes angeknüpft wird.
8 Dabei hatte ich nie erkannt, dass es auch um Verknüpfungen der beiden Themenbereiche geht.
9 Mir war nicht bewusst, wie sehr die Analysis für die Lineare Algebra von Bedeutung sein kann.
10 Der umgekehrte Fall begegnet einem expliziter, sobald es um die mehrdimensionale und komplexe Analysis geht.
11 *Sind Ihnen bei den bisherigen Seminarthemen Stellen aufgefallen, an denen LinA und Ana zusammenkommen?*
12 Bei der Krümmung von ebenen Kurven, Raumkurven und Flächen ist mir erstmals bewusst die Verwendung der Analysis in der Algebra aufgefallen.
13 Durch das Anlegen von Tangenten (wie es andere Gruppen gemacht haben), Schmiegekreisen und Tangentialebenen, konnte das Problem vom Verständnis sehr naheliegend an die Ableitung einer Abbildung angelehnt und weiterentwickelt werden.
14 Bei Herleitungen wurden zusätzlich der Satz von l'Hospital und die Taylorentwicklung verwendet.
15 Bei der Parametrisierung der Kurve wurde wiederholt die Relevanz der Analysis in der Linearen Algebra deutlich.
16 Rückblickend wurde der Zusammenhang auch bei der Berechnung des Flächeninhalts von gekrümmten Flächen deutlich sichtbar.
17 Durch die Zerstückelung, Summierung und somit durch die Integralbildung wurde ein zunächst algebraisches Problem mit Hilfe der Analysis gelöst.
18 *Hilft Ihnen das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen? Wenn ja, wie? Wenn nein, was würde Ihnen stattdessen möglicherweise helfen?*
19 Definitiv!
20 Nicht nur die allgemeine Verwendung beider Bereiche, sondern die kleinschrittig verwobene Benutzung von LinA und Ana lassen den großen Zusammenhang hervorheben.
21 Die Motivation ein zunächst linear algebraisches Problem auch mit analytischem Vorwissen zu betrachten und wirklich mal „alles Wissen in einen Topf zu schmeißen“ und dann zu schauen, was einem bei einer Lösung behilflich sein könnte, zeigt ganz klar die bislang eher unbewusste Verbindung.
22 Auch diese Reflexion hilft natürlich sehr, sich darüber wirklich Gedanken zu machen und umgeht so die Gefahr, wieder LinA und Ana gemeinsam und doch unbewusst zu verwenden.

Studentin 7

1 Schreibaufgabe – Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen:
2 Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis
3 Im Studium scheint es so, als ob die mathematischen Teilgebiete Lineare Algebra und Analysis nichts miteinander zu tun haben, was ja auch schon allein durch die Tatsache verstärkt wird, dass die beiden Vorlesungen LinA und Ana jeweils unabhängig voneinander gehört werden können.
4 In dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ konnten wir allerdings erfahren, dass dies nicht unbedingt der Fall sein muss.
5 Die lineare Algebra kann sehr wohl mit der Analysis zusammengebracht werden.
6 In den letzten Wochen haben wir uns intensiv mit der Krümmung ebener Kurven, Raumkurven und der Krümmung an einem bestimmten Punkt in einer Fläche beschäftigt.
7 Dabei haben wir bei unseren Überlegungen und Lösungsansätzen auf verschiedene Bereiche der Mathematik zurückgreifen können: auf die Lineare Algebra, die Analysis und teilweise sogar auf die Geometrie.
8 Im Folgenden möchte ich nun auf das Zusammentreffen von LinA und Ana eingehen:
9 Das Ausgangsproblem, die Krümmung einer ebenen Kurve/Raumkurve oder die Krümmung in einem bestimmen Flächenpunkt zu bestimmen, kann dem Bereich der Analysis zugeordnet werden.

10 Auch die Tatsache, dass wir für unsere parametrisierte Raumkurve eine stetige Abbildung, die beliebig oft differenzierbar sein soll, voraussetzen, zeigt, dass wir hier auf eine Eigenschaft, die in der Analysis untersucht wird, zurückgreifen, da Stetigkeit und Differenzierbarkeit wesentliche Untersuchungsgegenstände der Analysis sind.

11 Bei unserem Ansatz zur Herleitung der Formel für die Krümmung einer Raumkurve kamen wir an den Punkt, an dem wir eine Schmiegebene bestimmen sollten.

12 Dafür mussten wir den Grenzwert unseres Normalenvektors (der Normalenebene) bestimmen.

13 Hierzu versuchten wir zwei verschiedene Verfahren der Analysis: Zunächst die Grenzwertbestimmung mithilfe des De l'Hospital und schließlich, da dies sehr aufwändig war, mithilfe der Taylorschen Reihenentwicklung.

14 Wir lernten also an dieser Stelle, dass man innerhalb desselben Teilbereiches der Mathematik (hier: in die Analysis) verschiedene zielführende Wege finden kann, wobei es eben möglich ist, dass sich der eine Weg als deutlich leichter herausstellt.

15 Bei unserer Bestimmung der Krümmungsformel addieren und subtrahieren wir Vektoren miteinander und multiplizieren sie mit einem Vielfachen. Wir beschreiben also den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$ rechnerisch und fassen beide als Vektorraum auf.

16 Vektorräume sind allerdings ein großes Teilgebiet der Linearen Algebra.

17 Des Weiteren stellen wir in unseren Rechnungen Ebenen (z.B. die Tangentialebene oder die Normalenebene) und Geraden in Form von Gleichungen auf.

18 Wir erhalten also auch an verschiedenen Stellen Gleichungssysteme, die anschließend gelöst werden müssen.

19 Dies geschieht vor allem dann, wenn wir Ebenen oder Geraden miteinander schneiden lassen.

20 Als Lösung erhalten wir dann die Schnittgerade bzw. den Schnittpunkt.

21 Auch auf Matrizen sind wir bei unseren Lösungsansätzen gestoßen, welche auch in den Bereich der Linearen Algebra fallen.

22 Bei der Krümmungsformel für gekrümmte Flächen z.B. haben wir eine Hessematrix aufgestellt, über deren Spur wir anschließend die mittlere Krümmung bestimmen konnten.

23 D.h. auch an dieser Stelle konnten wir unser analytisches Ausgangsproblem, die Krümmung in einem Flächenpunkt zu bestimmen, mit Kenntnissen aus der Linearen Algebra lösen.

24 In der Vorlesung Geometrie haben wir dieses Semester auch die Affine Geometrie (ein Teilbereich der Linearen Algebra!) behandelt.

25 Letztendlich haben wir in dem Seminar alles, was zur Affinen Geometrie gehört, benutzt, indem wir z.B. Ebenen ((affine) Untervektorräume) verschoben haben oder uns eine passende Basis für unsere Berechnungen gewählt haben.

26 Während unserer Erarbeitung der Krümmungsformel habe ich, ehrlich gesagt, gar nicht überlegt, ob es sich bei den einzelnen Schritten, Überlegungen und Verfahren um Bereiche aus der Linearen Algebra oder der Analysis handelt.

27 Wir haben lediglich versucht, das anzuwenden, was man in dem Moment als zielführend angesehen hat.

28 Erst im Nachhinein kann ich das Zusammentreffen beider Bereiche erkennen.

29 In dieser Hinsicht unterscheidet sich das Seminar auch von anderen mathematischen Veranstaltungen, bei denen eigentlich relativ klar ist, mit welchen mathematischen Hilfsmitteln (Lineare Algebra ODER Analysis) gearbeitet werden soll.

Studentin 8

1 Reflexion – Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

2 Die Verbindung zwischen Linearer Algebra und Analysis ist mir persönlich im Seminar zum ersten Mal klar geworden, als es darum ging für unser Thema die Differentialgleichung anzuwenden und gleichzeitig über Vektoren nachzudenken.

3 Das ist uns passiert, als es anfangs um Krümmungen und Krümmungsstärke ging.

4 Verwunderlich war für mich, dass ich plötzlich auf der Ebene der Linearen Algebra mit analytischen Methoden weiterrechnen „durfte".

5 Beim Reflektieren fällt mir nun auf, dass sich eigentlich erst jetzt der Kreis zu schließen scheint und Vorlesungen (selbst wenn sie aus dem anderen Themengebiet sind) aufeinander aufbauen können.

6 Dass diese Methodik, Analysis in der Linearen Algebra anzuwenden, in der Forschungsphase hilfreich ist habe ich an der Stelle gemerkt, als sogar Längen bzw. Abstände zwischen zwei Punkten, die mithilfe der Linearen Algebra schlichtweg aus der bspw. Euklidischen Norm berechnet werden können, nun erst man angenähert werden musste.

7 Um auf die endgültige Lösung zu kommen hat man schon fast über Kurvendiskussion nachgedacht und das Verhalten der sich annähernden Kurven betrachtet.

8 Zu der Frage ob ich mich schon zuvor damit auseinandergesetzt habe oder gar mir Gedanken über den Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis gemacht habe kann ich ganz klar mit einem „Nein“ antworten.

9 Das hat folgende Gründe: Zum einen hat es an der Universität einen Anschein, dass diese Themengebiete ganz strikt voneinander getrennt werden „müssen“, da die Vorlesungen nie (so erinnere ich mich daran) aufeinander verwiesen haben.

10 Zum anderen meine ich mich zu erinnern, dass selbst eine Vorlesung, die nicht Lineare Algebra oder Analysis behandelt hat immer nur auf einer der Bereiche Bezug nahm und hierbei nichts vermischt wurde.

11 Aus den letzten Stunden nehme ich aber guten Gewissens mit, dass ich durchaus bei einer (Er)Forschung mit beiden Bereichen arbeiten kann, wenn nicht sogar muss.

12 Hierbei erinnere ich mich nämlich sehr gut daran, dass wir bei der Krümmungsthematik durchaus über Vektorgeometrie und anschließend über die Interpretation von Vektoren im Sinne einer Ableitung gesprochen haben (Beschleunigung, Geschwindigkeit etc.).

13 Wünschenswert wäre noch, dass der Zusammenhang im Skript hervorgehoben wird oder zumindest kenntlich gemacht wird, wenn in die Lineare Algebra die Analysis oder eben andersrum ein Einfluss herrscht.

14 Dies könnte gerne durch farbliche oder formatbezogene Hervorhebungen stattfinden.

Studentin 9

1 Reflexion – Zusammenhang von Lineare Algebra und Analysis

2 Vor diesem Seminar habe ich bisher ausschließlich die Vorlesungen Lineare Algebra und Analysis besucht.

3 Diese Vorlesungen habe ich bisher immer als unterschiedliche Bereiche der Mathematik angesehen und mir über die möglichen Zusammenhänge keine Gedanken gemacht.

4 In weiterführenden Vorlesungen wird dies vermutlich besser deutlich, da man nun auf das Wissen dieser beiden Grundvorlesungen aufbaut und dieses mit neuen Bereichen verbindet.

5 Bei der Bearbeitung der einzelnen Themen, habe ich mir die Frage noch nicht gestellt, welche Informationen ich aus Lineare Algebra oder aus Analysis anbringe.

6 Für mich war das Lösen der Aufgabe im Vordergrund und habe unsere Erarbeitungen noch nicht von einem analytischen Blickwinkel betrachtet.

7 Ich hatte bisher das Gefühl hauptsächlich das Wissen aus der Analysis Vorlesung zu verwenden.

8 Das einzige Beispiel aus den Vorträgen, bei dem mir sofort klar war, dass hier sowohl Lineare Algebra als auch Analysis bei der Herleitung in Gebrauch war, ist das Thema Krümmung von ebenen Kurven und Raumkurven.

9 Der Begriff Determinante hat sich für mich stark im Bereich Lineare Algebra abgespeichert, weshalb mir die Themen, die die Rechnung mithilfe der Determinante gewählt haben jetzt in der Nachbetrachtung sofort in den Sinn gekommen sind.

10 Allerdings ist dies auch das einzige Beispiel, bei der es mir sofort aufgefallen ist, dass beide Bereiche miteinander verknüpft wurden.

11 Ich bin der Meinung dass dieses Seminar in dieser Hinsicht helfen kann diese Bereiche der Mathematik inhaltlich zu vernetzen.

12 Es könnte aber noch besser gelingen, wenn man den Studenten im Vorfeld es zu Aufgabe macht, bei den Vorträgen darauf zu achten Bezüge zu den jeweiligen Vorlesungen herzustellen.

13 Bei den Vorträgen habe ich mich doch oft schwergetan den Gedankengängen der Kommilitonen sofort folgen zu können und habe über einzelne Schritte der Herleitung hinweggesehen müssen, um dem weiteren Vortrag folgen zu können.

14 Ein Verweis auf die jeweilige Vorlesung, die den einzelnen Schritten zugrunde liegt, könnte dabei helfen die Herangehensweise der anderen Gruppen besser mit dem Wissen aus den Grundvorlesungen zu verknüpfen.

Studentin 10

1 Reflexion II

2 Lineare Algebra und Analysis sind *die* Grundlagenveranstaltungen, die jede(r) Mathematikstudierende zu Beginn des Studiums besuchen muss.

3 Würde ich nach meiner Erfahrung gefragt werden, ob Verbindungen zwischen diesen beiden Vorlesungen aufgezeigt wurden oder ob ich solche erkannt habe, so müsste ich leider verneinen.

4 Ich habe diese beiden Vorlesungen zwar beide in einem Semester, also parallel zueinander, gehört, aber für mich standen diese viel mehr nebeneinander als dass ich diese beiden Veranstaltungen als ‚großes Ganzes' aufgefasst habe.

5 Für die meisten (oder sogar für alle?) weiterführenden Veranstaltungen wird jedoch der Besuch *beider* Grundlagenveranstaltungen vorausgesetzt.

6 Das ist ein erster Hinweis, dass sich doch zahlreiche Verbindungen finden lassen und diese Veranstaltungen nicht unverbunden nebeneinander stehen sollten (auch wenn die meisten MathematikerInnen später dann doch meist einer ‚Seite' stärker zugeneigt sind als der anderen).

7 In den Seminarthemen finden sich natürlich laufend Einflüsse aus beiden Veranstaltungen, dennoch könnte ich nicht auf den ersten Blick eindeutig entscheiden, ob diese wirklich verbunden sind, oder ob diese zwar mehr oder weniger gleichzeitig benötigt werden, aber dennoch eigentlich mehr nebeneinander stehen.

8 So möchte ich nun zunächst Einflüsse aufzeigen, an welchen Stellen mir Elemente/Methoden etc. aus der Linearen Algebra und/oder der Analysis aufgefallen sind und an diesen Beispielen dann die eben genannte Frage diskutieren.

9 Die Einflüsse der Analysis sind in diesem Seminar besonders offenkundig.

10 Schließlich weißt bereits der Titel der Veranstaltung hierauf hin: Elementare *Differential*geometrie zum Anfassen.

11 So sind auch bei der Erarbeitung ausnahmslos aller Themen Methoden der Differential- und Integralrechnung ständig gefragt und vonnöten.

12 Stetigkeit und Differenzierbarkeit (zentrale Grundbegriffe der Analysis) der im Seminar betrachteten Kurven wurden zu Beginn des Seminars sozusagen als gegeben vorausgesetzt (indem vereinbart wurde, hier nur glatte, d.h. stetig differenzierbare, Kurven zu betrachten), sind aber dennoch nicht zu vernachlässigen und deshalb durchaus eine Erwähnung wert.

13 Ein weiterer Aspekt aus der Analysis (wenn auch aus der fortgeschrittenen Analysisveranstaltung Analysis IV), welcher sich zumindest bei unserer Gruppe durch alle Themen hindurch gezogen hat, ist die Formel zur Berechnung der Länge einer Kurve.

14 Einflüsse der Linearen Algebra ziehen sich jedoch ebenfalls durch die verschiedenen Themen hindurch.

15 Dies ist insbesondere dadurch bedingt, dass die betrachteten Elemente als Vektoren aufgefasst bzw. durch Vektoren beschrieben werden können/müssen, da diese sich im Raum bzw. mindestens in der Ebene befinden (siehe die Eingangsbeispiele für parametrisierte Kurven, deren Ableitungen sind zudem dementsprechend wieder Vektoren).

16 So haben wir stets Methoden Vektorrechnung benötigt, besonders häufig war das Skalarprodukt oder eben das Vektor- bzw. Kreuzprodukt vonnöten. Auch nach dem Betrag bzw. der Länge eines Vektors war oft gefragt.

17 Dies ist ein erster deutlicher Anhaltspunkt für die Verflechtung von Linearer Algebra und Analysis, da die Komponenten der Vektoren keineswegs linear sind, sondern vom Verlauf der Kurven bzw. deren Ableitungen an einer bestimmten Stelle abhängen/bestimmt werden.

18 Teilweise lassen sich auch Übergänge in die Matrizenrechnung beobachten.

19 Auch an dieser Stelle lässt sich meiner Meinung nach die Verflechtung der beiden Teilbereiche gut beobachten, da hier schließlich die (ersten zwei bzw. drei) Ableitungsvektoren in einer Matrix ‚gesammelt' wurden.

20 So kam dann letztlich bei der Berechnung der Krümmung ebener Kurven via Schmiegkreise oder bei der Torsion auch noch die Determinante einer solchen Matrix ins Spiel.

21 Ein weiterer Aspekt der ebenfalls klar der Linearen Algebra zuzuordnen ist, ist das Finden/Erstellen einer geeigneten Orthonormalbasis mithilfe des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens bei der Krümmung von Raumkurven via Schmiegebenen.

22 Auch hier ist analog zu den anderen Beispielen wieder die Verknüpfung der beiden Teilbereiche erkennbar.

23 Durch diese Ausführungen sollte nun deutlich geworden sein, dass in dem Seminar Lineare Algebra und Analysis verknüpft werden (müssen/sollten). Schließlich sind die betrachteten Vektoren und Matrizen alles andere als ‚linear'.
24 Aber auch wenn die Analysis vielleicht ‚grundlegender' für das Seminar ist (schwingt sie doch bereits im Seminartitel mit), so stößt man bei der Bearbeitung der Problemstellungen, doch relativ schnell an einen Punkt, wo man Methoden der Linearen Algebra berücksichtigen/einbeziehen muss und mit rein analytischen Methoden an die Grenze stoßen würde.
25 Meine Unsicherheit bei der Beantwortung der Frage, ob die Teilbereiche wirklich verknüpft werden oder nicht vielleicht doch eher nebeneinander stehen (auch wenn sie natürlich gleichzeitig benötigt werden) lässt sich jedoch auch ein Stück weit dadurch erklären, dass schließlich auch in der mehrdimensionalen Analysis Vektoren und Matrizen eine große Rolle spielen.
26 Ist das dann bereits eine entsprechende Verknüpfung?
27 Oder ist das dann trotzdem ‚nur' Analysis (nur eben im Mehrdimensionalen)?
28 Natürlich hilft das Seminar dabei zu sehen, wie Themen aus der Linearen Algebra und der Analysis gleichzeitig angewandt werden müssen, um eine Problemstellung aus dem Seminar lösen zu können.
29 Ich wüsste ehrlich gesagt spontan auch kein sinnvolleres Konzept für die Verdeutlichung von Zusammenhängen, denn wenn man solche selbst erkennt bzw. erkennt, wie man die verschiedenen Teilbereiche verknüpfen kann/muss, um zu einer Lösung zu kommen, bleibt das (so denke und hoffe ich zumindest auch für mich persönlich auf lange Sicht) deutlich besser im Kopf als wenn jemand versuchen würde, diese Zusammenhänge – wenn auch an (Anwendungs-)Beispielen – zu demonstrieren.
30 In diesem Zusammenhang trifft wahrscheinlich der Sinnspruch „Probieren geht über Studieren" ganz gut zu und dieser ist im Seminar meiner Meinung nach wirklich umgesetzt.
31 Einschränkend ist vielleicht zu erwähnen, dass diese Zusammenhänge (zum Beispiel mir) nicht unbedingt offensichtlich sind bzw. direkt erkannt werden.
32 Wenn es wirklich darum ginge, diese Zusammenhänge offenzulegen, so müsste dies durch entsprechende Nachfragen (das könnte natürlich auch, wie mir eben auffällt, eine Intention hinter dieser Reflexionsfrage sein) oder durch Erklärungen begleitet und dadurch untermauert werden.

Studentin 11

1 Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis
2 In meinen ersten Semestern dachte ich, dass bei den Vorlesungen Lineare Algebra und Analysis nur die Voraussetzungen (insb. Logik und Mengenlehre) gleich sind und es ansonsten komplett unterschiedliche „Mathematik-Richtungen" sind.
3 Im Laufe des Studiums entdeckte ich aber immer wieder ein paar Verknüpfungen.
4 Beispielsweise wenn man sich eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ anschaut, ist es nach Linearer Algebra klar was der Bildraum, der Urbildraum und in welcher Dimension diese sein müssen.
5 Sowie wenn die Determinante einer Jacobi-Matrix gesucht ist; weiß man nach Linearer Algebra wie eine Determinante bestimmt werden kann.
6 Bei den bisherigen Seminarthemen ist es mir vor allem aufgefallen bei:
7 - Abstände auf gekrümmten Flächen
8 $\Rightarrow$ z.B. ei der Berechnung des Minimums und Bedingungen an die Kurve stellen. Denn hier wurde unter anderem das Gram-Schmidt-Verfahren, Skalarprodukt (Lineare Algebra), Vertauschen von Grenzwerten, Integrale und Partielle Integration (Analysis) benötigt um zu dem gewünschten Ergebnis zu kommen (vgl. unserem letztes Skript).
9 Das Seminar hilft mir insofern Verbindungen zwischen Lineare Algebra und Analysis herzustellen, da man sich genauer und tiefgründiger mit den Themen auseinandersetzt.
10 Und man sich während der Erarbeitungsphase mit einigen Themen aus den Grundvorlesungen nochmals beschäftigt und so dann z.T. auch Verbindungen erkennen kann.

Student 12

1 2. Reflexion
2 *Sind Ihnen bei den bisherigen Seminarthemen Stellen aufgefallen, an denen LinA und Ana zusammenkommen?*

3 Schon beim ersten Thema hat man gemerkt, dass man Bereiche aus LinA und Ana braucht, um besser/schneller/korrekter eine Lösung bzw. eine Formel für das jeweilige Problem zu bekommen.

4 Bei dem Thema Krümmung einer Kurve haben wir einen Epsilonschlauch um die zu untersuchende Kurve gelegt.

5 Wie wir jedoch von der ursprünglichen Kurve auf die „neue“ Kurve mit Abstand Epsilon gekommen sind, hat mir LinA viel geholfen, was jetzt genau eine Normale/Tangente bewirkt bzw. wie ich die Kurvengleichung verändere um auf die neue Kurve zu gelangen.

6 Die ganzen Parameter kamen für mich aus der Analysis, aber zum Verständnis hat die lineare Algebra bei mir den größeren Teil beigetragen.

7 Beim zweiten Thema wurde die Determinante und das Integral das Bindeglied zwischen Ana und LinA für mich.

8 Gesucht war der Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche. Diese hat man in unendlich viele kleine Parallelogramme unterteilt.

9 Den Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms hat man dann über die Determinante berechnet.

10 Dazu war wichtig die geometrische Interpretation der Determinante zu kennen.

11 (Diese habe ich dann jetzt natürlich verstanden und werde ich auch nie wieder vergessen. Vorher war mir das nie so richtig bewusst, dass die Determinante ein Volumen wiedergibt.)

12 Dieser Aspekt kam aus der LinA.

13 Der Aspekt aus Ana war die Umformung der Summe über die Flächeninhalte der Parallelogramme in das Integral.

14 Nur durch die Verbindung beider Aspekte sind wir auf die Lösung gekommen.

15 Allgemein muss man in dem Seminar viel mit Abbildungen und Parametrisierungen arbeiten.

16 Für mich tragen dazu bei der ersten Vorstellung wie diese Funktion aussehen muss beide Vorlesungen viel bei, LinA trägt mir hier bei, was wie abgebildet werden muss bzw. die Räume in welchem die Abbildung sich befindet.

17 Um ein Bild von dieser Abbildung vor Augen zu haben, habe ich im ersten Moment mehr die Verknüpfung mit Ana, da ich in Ana viel mit Bildern gearbeitet habe.

18 Bei genauerem Überlegen merke ich aber, dass ich auch in LinA viel mit Bildern gearbeitet habe, wo ich wieder eine Schnittstelle sehe.

19 Sowohl Ana als auch LinA haben mir dabei geholfen eine solche Funktion aufzustellen, was für Bedingungen an die Funktion gelten müssen (mehr Ana) und was für Eigenschaften sich dann für die Funktion herauskristallisieren (mehr LinA).

20 *Hilft Ihnen das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen?*

21 Durch das Seminar muss man bzw. wiederholt man automatisch viele Bereiche von LinA und Ana.

22 Durch dieses Wiederholen bzw. durch das unter Umständen etwas anders erklärte versteht man diese Bereiche zuerst einmal noch mal besser – für mich z.B. die Determinante.

23 Dann wenn man es besser verstanden hat, finde ich sieht bzw. erkennt man auch nochmal schneller/deutlicher Zusammenhänge zwischen Ana und LinA.

24 Hat man ein Thema komplett erarbeitet, also gemeint ist, wenn man dann am Ende z.B. eine Formel für die Krümmung einer Kurve hat und alles noch einmal durchgeht – oder das Skript schreibt. Merkt man dieser Teil kommt aus der Ana, diese Definition bzw. Quelle ist ein Ana Skript und diese kommt aus der LinA.

25 Dann stellt man fest, ohne das Eine bzw. das Andere wäre man nicht auf das Ergebnis gekommen.

26 Beide Bereiche müssen zusammenspielen um auf ein Ergebnis zu kommen.

Student 13

1 Reflexion zum Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

2 Die Fragestellung, inwieweit es Verbindungen zwischen Linearer Algebra (LINA) und Analysis (ANA) gibt, stellte ich mir ab Mitte meines Studiums.

3 Eine Verbindung, die ich gesehen habe, ist die der Vektorräume wie dem $\mathbb{R}^n$, in denen auch die Funktionen beheimatet sind.

4 Genauso, wie ich einen Zusammenhang zwischen Funktionen und Matrizen sah.

5 In die Tiefe bin ich bei diesen Überlegungen jedoch nie gegangen.

6 In unserem Seminar führte schon zu Beginn das Thema der ebenen Kurven bei mir zu einer Verknüpfung beider Themengebiete.

7 So ist die Darstellung einer parametrisierten, ebenen Kurve zwar eine Funktion $\gamma(t)$, jedoch zeigt beispielsweise die Kreisdarstellung als Kurve, dass bei Werten von t von 0 bis 2π Vektoren herauskommen, die den Kreis beschreiben.

8 Hier wird jedem t ein eindeutiger Vektor zugeordnet, was einer Funktion per Definition entspricht, die Darstellung im selbst jedoch bei üblicher Vorstellung von x- (hier t) und y- (hier: $\gamma(t)$) Achse dem der Funktion widerspricht (im Bild wird einem x-Wert bis zu zwei y-Werte zugeordnet).

9 Ich habe verstanden, dass die Definitionsmenge im Bild nicht unbedingt dargestellt sein muss und man damit der Fehlvorstellung von „ein x-Wert, zwei y-Werte" entgeht.

10 Würde man die Definitionsmenge von t mit darstellen, so entsteht eine Raumkurve, die sich um die x-Achse schlängelt.

11 Der Kreis lässt sich jedoch auch im typischen Sinne als Funktion darstellen, indem jeweils zwei Halbkreise beschrieben werden.

12 Es handelt sich hier um unterschiedliche Darstellungstypen von ebenen Kurven, in denen Funktionen (ANA) und Vektoren (LINA) eine Rolle spielen.

13 Diese Typen lassen sich wiederum nach einem gelernten Satz lokal ineinander überführen, sodass z.B. $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

14 Ebenfalls bei dem Thema der Krümmung von ebenen Kurven zeigte sich, dass bei der Herleitung ebendieser die Ableitung der Kurve $\gamma(t)$ (ANA) wichtig ist, die den Geschwindigkeitsvektoren an der abgeleiteten Stelle t_0 entspricht.

15 Diese wiederum sind die Tangentialvektoren an der Kurve (LINA).

16 Später wurden diese Vektoren, also Ableitungen einer Funktion $\gamma(t)$, mit dem Skalarprodukt (LINA) etc. weiterverarbeitet.

17 In diesem Sinne zeigte sich auch bei den Raumkurven, dass z.B. die Krümmung von nach Bogenlänge parametrisierten Raumkurven gleich der Norm der zweiten Ableitung der Kurve ist.

18 Ableitungen spielen also bei dieser vektoriellen Betrachtung von Kurven eine große Rolle.

19 Eine Fläche $F(u,v) = \begin{pmatrix} F_1(u,v) \\ F_2(u,v) \\ F_3(u,v) \end{pmatrix}$ wird durch dreidimensionale Vektoren dargestellt (LINA), wobei u und v aus einem Intervall U entstammen.

20 Diese Fläche lässt sich (lokal) so umparametrisieren, sodass gilt: $F(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$ mit $f(u,v)$ eine Funktion, also eine graphische Darstellung der Fläche (ANA).

21 Später verwendeten wir zur Bestimmung des Flächeninhalts einer solchen Fläche Tangentialebenen, die durch die partiellen Ableitungen (ANA) an einem bestimmten Punkt P in Richtung u und v bestimmt waren, bzw. genauer: Die partiellen Ableitungen der Fläche F am Punkt P jeweils nach u und v sind die Richtungsvektoren dieser Tangentialebene (LINA).

22 Die Idee war dann im Folgenden, dass die gesamte Fläche F in Teilflächen unterteilt wird, die dann durch Tangentialebenen approximiert wurden, und die Fläche dieser Teilflächen bestimmt wurde.

23 Hierbei wurde das Vektorprodukt (LINA) verwendet.

24 Die Teilflächen wurden dann stets verkleinert, was dann zu einem doppelten Limes einer Doppelsumme (Summe aller Flächen in u- und v-Richtung) und schließlich zu einem Doppelintegral führte (ANA).

25 Hier wurden also wieder Themen der Analysis mit denen der Linearen Algebra verwendet.

26 Des Weiteren fiel mir im Thema „Krümmung von Flächen" auf, dass bei der Herleitung (Schnitt von Normalenebenen mit der Fläche) die Hessematrix relevant war und später auch mit dem Vertauschungssatz von Schwarz gearbeitet wurde (ANA).

27 Insgesamt lässt sich also sagen, dass das Seminar es geschafft hat, viele Verbindungen der beiden Fachgebiete zu veranschaulichen.

28 Dies geschah in erster Linie mit der Setzung der Seminarthemen, denn die Geometrie bietet sich meines Erachtens dafür exzellent an.

29 Ansonsten hilft diese Reflexion sehr, sich darüber vertieft Gedanken zu machen.

30 Bis jetzt liefen die Konzepte der Linearen Algebra und Analysis beiläufig mit, ohne dass es mir direkt aufgefallen wäre.

31 Um beide Themengebiete noch besser im Seminar an den passenden Stellen zu betonen, würde es sich eventuell anbieten, dass im Skript und in den Vorträgen (als Vorgabe) extra darauf hingewiesen wird, z.B. wenn Sätze zitiert werden, die eindeutig einem der beiden Themenbereiche entspringen (farblich, oder Ähnliches).

Student 14

1 Relexion 2: Zusammenhang von Linearer Algebra und Analysis

2 *Frage 1: Haben Sie sich schon einmal gefragt, ob Lineare Algebra und Analysis eigentlich etwas miteinander zu tun haben?*

3 *In den entsprechenden Vorlesungen wird nicht immer explizit auf Verbindungen hingewiesen. In späteren Vorlesungen braucht man dann aber doch häufig Objekte und Konzepte aus beiden Gebieten gleichzeitig.*

4 Zu Studienbeginn waren mir die Verbindungen zwischen der Linearen Algebra und Analysis tatsächlich nicht klar.

5 Natürlich ist es in der Mathematik nie so, dass es völlig separate Bereiche gibt, da man überall z.B. immer die Grundrechenarten benötigt.

6 Ich hatte aber den Eindruck, dass man nur eines von beiden gleichzeitig ernsthaft betreiben kann: LinA oder Ana.

7 Zu dieser Einstellung bin ich womöglich deshalb gelangt, weil bereits in der Schule beide Bereiche strikt voneinander als „verschiedene Kapitel“ getrennt wurden und weil mir im ersten Semester empfohlen wurde, nicht beide Vorlesungen gleichzeitig zu hören, da dies doppelte Arbeit bedeute und man ohnehin nichts von dem einen für das andere nutzen kann.

8 So fing ich also im ersten Semester mit Lineare Algebra an, hörte im 2. LinA 2 und erst im 3. Analysis I.

9 Ich merkte aber bereits während LinA, dass mir irgendwas fehlt und der Professor ging auch davon aus, dass man gleichzeitig Ana hörte und setzte deshalb auch verschiedene Dinge voraus, die „man ja aus Ana kennt“.

10 Dazu zählen z.B. Beweistechniken wie die vollständige Induktion, die wir nie in LinA behandelt haben, da sie eher für die Analysis (Folgen/Reihen) verwendet wird.

11 Als ich im 3. Semester mit Ana anfing, war ich erst mal erstaunt, dass in den ersten Wochen genau der gleiche Stoff behandelt wurde wie in LinA (Logik/Aussagen/Mengenlehre, selbst Gruppen/Körper).

12 Dies zeigte mir, dass man auf jeden Fall schon mal gleiche Grundkenntnisse/Basiswissen in beiden Disziplinen benötigt.

13 Spätestens aber mit Ana II wurden mir die engeren Verbindungen klar, als wir nämlich in der mehrdimensionalen Welt angelangt waren.

14 Da kamen dann Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Vektorrechung usw. vor und das waren alles die Dinge, die ich 2 Semester zuvor in LinA kennengelernt hatte und hier auch nutzen konnte.

15 Die Verbindungen von LinA und Ana wurden dann noch klarer in den darauffolgenden weiterführenden Vorlesungen und Seminaren.

16 *Frage 2: Sind Ihnen bei den bisherigen Seminarthemen Stellen aufgefallen, an denen LinA und Ana zusammenkommen?*

17 Bei unserem ersten Thema (Krümmung ebener Kurven) hatte ich das Gefühl, dass hauptsächlich Analysis betrieben wurde.

18 Dies liegt aber auch daran, dass wir hier den eindimensionalen Fall betrachtet und die Kurven als Graphen von Funktionen angesehen haben.

19 Wir haben uns Tangenten angeschaut, differenziert, Differenzialquotienten angeschaut usw.

20 Allerdings gab es hier bereits Stellen, an denen Grundkenntnisse aus LinA benötigt wurden.

21 Ein Beispiel dafur findet sich in der Herleitung der Krümmungsformel.

22 Wir betrachteten einen Differenzialquotienten, wo man im Nenner die Länge der Kurve berechnen musste.

23 Dies haben wir gelöst, indem wir die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert haben (hier hatten wir bereits Vektoren - LinA), dann differenziert (Ana), dann die Norm davon genommen haben (LinA) und letzendlich das Ergebnis von a bis b integriert haben (Ana).

24 In der zweiten und dritten Aufgabe, wo es um Flächen ging, kam schon auf jeden Fall mehr Lineare Algebra ins Spiel.

25 Wir betrachteteten auch hier Tangenten bzw. Tangentialebenen, integrierten und differenzierten, aber hier suchte man beispielsweise einen geeigneten mehrdimensionalen (Vektor-)Raum, in dem man schön rechnen kann und kam nicht drumherum, eine ON-Basis zu konstruieren.

26 So brauchte man z.B. das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um die Aufspannvektoren von Tangentialebenen zu normieren und orthogonalisieren.

27 Auch beim Differenzieren kam man auf einmal mit Analysis alleine nicht mehr weiter.

28 Es kamen hier z.B. Jacobi und Hesse-Matrizen vor (und bei einer verworfenen Idee auch mehrdimensionale Tensoren), für die man einige Kniffe aus LinA anwenden musste, um weiterzurechnen. Beim Berechnen des Oberflächeninhalts brauchten wir neben einem Doppelintegral gleichzeitig das Kreuzprodukt zweier Vektoren.
29 Weiterhin haben wir auch Ebenen im Raum gedreht, um Schnittkurven mit der Fläche zu kontruieren und zu untersuchen.
30 Dabei mussten wir auch wieder LinA anwenden (Vektorrechung und Matrizenanwendung).
31 Auch bei unserer jetzigen Aufgabe (Axialsymmetrische Flächen) sieht man deutliche Verbindungen von LinA und Ana, denn wir gehen hier von einer Kurve im Ebenen aus, und lassen diese um eine Achse rotieren, wo wieder LinA ins Spiel kommt.
32 Ich habe im Übrigen auch bei den anderen Gruppen während der Präsentationen Verbindungen zwischen Ana und Lina gesehen.
33 Beispielsweise wurde bei der Berechnung der Krümmung von Raumkurven und Flächen die Determinante und die Spur von Matrizen verwendet.
34 *Frage 3: Hilft Ihnen das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen? Wenn ja, wie? Wenn nein, was wurde Ihnen stattdessen möglicherweise helfen?*
35 Definitiv ja!
36 Gerade das freie Erforschen ohne strikte Vorgaben hat dazu beigetragen, sich Gedanken zu machen, wie man eine bestimmte Aufgabe lösen kann.
37 Dabei habe ich oft auch in meinen alten Unterlagen gestöbert und interessante Sätze und Techniken sowohl aus der LinA und Ana wiederentdeckt und angewandt.
38 Dass man bei einer Aufgabe wirklich Kniffe aus beiden Bereichen benötigt hat mir gezeigt, dass enge Verbindungen bestehen.
39 Dies ist auch eine exzellente Vorbereitung für das Staatsexamen.
40 Allerdings gab es auch Phasen, wo wir gewisse Verbindungen nicht gesehen und beharrlich in einem Bereich bleiben wollten (z.B in der Analsyis). In solchen Fällen haben oftmals die Tipps der Dozenten bzw. der Mitstudierenden geholfen, denn oft kann man durch Anwendung von Techniken aus der LinA oder der Ana, Dinge einschränken oder vereinfachen und so auf relativ einfache Lösungen schier unmöglich geglaubter Aufgaben zu kommen.

Student 15

1 Reflexion 2
2 In der Schule werden Themen der Linearen Algebra und Analysis strikt getrennt, so hatte ich in der Oberstufe in der Schule sogar drei verschiedene Mathematikbücher (noch eines für Stochastik/Statistik).
3 Diese drei Themenbereiche waren demnach für mich auch vollkommen voneinander unabhängige Welten, auch wenn man bereits Bekanntes aus anderen Themen und für alle Themenbereiche gleichermaßen geltende Grundlagen genutzt hat.
4 Später an der Universität hat sich daran zunächst nicht viel geändert.
5 Im ersten Semester habe ich die Vorlesungen zur Linearen Algebra 1 und Analysis 1 parallel gehört.
6 Der Einstieg der beiden Vorlesungen über die Mengenlehre verlief ähnlich, dennoch hatte ich das Gefühl mit zwei vollkommen unterschiedlichen Welten konfrontiert worden zu sein.
7 Auch wenn die für mich strikte Trennung spätestens mit Analysis 2 einige Risse bekam hält dieses Gefühl zu großen Teilen auch bis heute noch an. In Analysis 2 wurden Dinge angewendet, die in meiner Vorstellung absolut in Lineare Algebra gehörten, dazu zählten vor allem Vektoren und Matrizen (z.B. Hesse-Matrix).
8 Einen fließenden Übergang der beiden Themenbereiche ineinander wurde bisher nur durch Hinweise der Dozenten erkannt und beispielsweise kurz wahrgenommen, aber nicht wirklich tiefergehend verarbeitet, was für die Aufhebung der Trennung der beiden „Welten“ nicht förderlich ist.
9 Im Seminar denke ich häufig nur isoliert an Analysis oder eben Lineare Algebra.
10 Es wurde mir deutlich, dass die Trennung in meinem Kopf sehr stark verankert ist.
11 Es hat mich z.B. im ersten Moment gestört und gewundert, dass im Taylerpolynom eine mehrdimensionale Matrix vorkommt.
12 Erst nach der genaueren Betrachtung erschien es mir dann als logisch und verständlich.
13 Wir haben in unseren Herleitungen häufig differenziert und auch oft Ideen gehabt, die wir über ein Integral lösen wollten oder mussten.

14 Wir haben auch den Algorithmus des Gram-Schmidt-Verfahrens aus der Linearen Algebra verwendet, um eine Orthonormalbasis zu erhalten und unsere Rechnungen zu vereinfachen, die wiederum wieder Bestandteile aus der Analysis enthielten.
15 Insgesamt hilft mir das Seminar sehr dabei weitere Verbindungen zu „entdecken“.
16 Ich denke häufig nur „geradeaus“ und übersehe schnell weitere mögliche Verbindungen und Betrachtungsweisen.
17 Hier kommt mir vor allem die Arbeitsform in Kleingruppen entgegen, da hier immer wieder die Ideen der anderen Gruppenmitglieder zum tragen kommen und die Verbindung zwischen Linearer Algebra und Analysis nicht nur aufgezeigt, sondern durch den eigenen Gedankengang nachvollzogen wird, was nützlich für weitere Aufgaben und mathematischen Probleme ist und den eigenen Horizont erweitert.
18 Das Verschwinden der Mauer zwischen den „Welten“ nimmt mit jedem neuen Erkennen seinen weiteren Fortschritt, ist jedoch bisher noch nicht vollständige eingetroffen.

Student 16

1 Reflexion zur zweiten Thematik (Zusammenhang von LinA und Ana)
2 1) Sind mir während des Seminars Stellen aufgefallen, an denen Lineare Algebra und Analysis zusammenkommen?
3 Ja, vielleicht nicht als Gedanke, „oh das ist jetzt LinA + Ana!“, aber es sind schon Konzepte aus unterschiedlichen Gebieten aufgetaucht.
4 Etwa möchte man eine Tangentialebene darstellen und braucht dazu u.U. das Gram-Schmitt-Verfahren, um benötigte orthogonale Vektoren zu bekommen.
5 Und drum herum passiert eigentlich typisches Ana2, z.B. Ableiten im Mehrdimensionalen.
6 Wenn ich das noch richtig weiß, ist eine Idee wie Orthogonalität sowieso in beiden Bereichen, Ana und LinA, aufgetaucht im Zuge der wichtigen Idee des Skalarprodukts.
7 Ein anderes Beispiel für fächerübergreifende Momente =) fällt mir allerdings nicht ein, vielmehr würde ich sagen:
8 Zu Frage 2) Hilft mir das Seminar dabei, Verbindungen zwischen LinA und Ana zu sehen?
9 Durch die freiere Form des Nachdenkens und durch die Art des Stoffs, der womöglich ein bisschen an der Schnittstelle von Ana und LinA liegt, würde ich sagen, dass es weniger wichtig geworden ist, aus welchem Bereich der Mathematik die Lösungsansätze kommen.
10 Das Seminar fordert eher das, was für die Fragestellung „gerade gebraucht wird“ und ob das jetzt Ana ist oder LinA steht nicht im Vordergrund.

A.12. Teilnehmerinformationen

Die folgenden Seiten enthalten die Teilnehmerinformationsblätter zum Fragebogen und zu den schriftlichen Reflexionen.

Universität Tübingen
JProf. Dr. Carla Cederbaum
Universität Tübingen
FB Mathematik
Ansprechpartner für eventuelle Rückfragen:
Lisa Hilken
Telefon: 07071/29-78569
hilken@math.uni-tuebingen.de

Allgemeine Teilnehmerinformation über die Untersuchung

Vernetzung verschiedener mathematischer Gebiete

Herzlich willkommen bei unserer Studie "Vernetzung verschiedener mathematischer Gebiete"!

Wir untersuchen mit dieser Studie die Wirkung des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen". Dabei interessiert uns, ob das Seminar den Teilnehmerinnen und Teilnehmern dabei hilft, Lineare Algebra und Analysis zu vernetzen und inwieweit das Seminar speziell für die Ausbildung von Lehramtsstudierenden geeignet ist.

Ablauf der Studie

Die Studie besteht aus mehreren Aufgaben, zu denen Sie jeweils einen Text schreiben. Diese Aufgaben sind gleichzeitig Bestandteil des Seminars. Sie werden diese Aufgaben also unabhängig davon, ob Sie an der Studie teilnehmen oder nicht, zu bearbeiten haben. Die Verwendung Ihrer Texte für die wissenschaftliche Forschung ist jedoch freiwillig.

In den Texten werden Sie mathematische Sachverhalte beschreiben oder reflektieren, was Sie im Seminar gelernt haben.

Sollten Sie noch Fragen zum Studienablauf oder den Aufgaben haben, wenden Sie sich damit bitte an die Versuchsleiterin.

Freiwilligkeit und Anonymität

Die Teilnahme an der Studie ist freiwillig. Teilnehmen können nur Studierende, die mindestens 18 Jahre alt sind. Sie können jederzeit und ohne Angabe von Gründen die Teilnahme an dieser Studie beenden, ohne dass Ihnen daraus Nachteile entstehen.

Die im Rahmen dieser Studie erhobenen, oben beschriebenen Daten und persönlichen Mitteilungen werden vertraulich behandelt. So unterliegen diejenigen ProjektmitarbeiterInnen, die durch direkten Kontakt mit Ihnen über personenbezogene Daten verfügen, der Schweigepflicht bzw. dem Datengeheimnis. Des Weiteren wird die Veröffentlichung der Ergebnisse der Studie in anonymisierter Form erfolgen, d. h. ohne dass Ihre Daten Ihrer Person zugeordnet werden können. Die Texte werden im Rahmen des Seminars von JProf. Dr. Carla Cederbaum begutachtet und im Rahmen der Forschung von Lisa Hilken und ggf. anderen MitarbeiterInnen, die nicht mit dem Seminar in Verbindung stehen, ausgewertet. Außerdem beginnt die wissenschaftliche Auswertung erst, wenn die Noten im Seminar vergeben sind.

Datenschutz

Für die Forschung möchten wir Ihre verschiedenen Texte miteinander und mit dem Fragebogen in Verbindung bringen können. Gleichzeitig möchten wir gewährleisten, dass Ihre Antworten im Fragebogen Ihre Note im Seminar weder positiv noch negativ beeinflussen können. Deshalb geben Sie die Texte in zweifacher Ausfertigung ab: einmal mit Ihrem Namen im Seminar und einmal mit Ihrem Code (ohne Namen) im Sekretariat der Arbeitsgruppe. Erst wenn das Seminar beendet und die Notenvergabe abgeschlossen ist, wird die Versuchsleitung die mit dem Code beschrifteten Texte im Sekretariat abholen. Auf diese Weise wird der Code nicht mit Ihrem Namen in Verbindung gebracht.

Die anonymisierten, da nur mit einem Code beschrifteten Texte werden zehn Jahre lang in einem Archiv des Mathematischen Instituts der Universität Tübingen aufbewahrt. Sie können allerdings, wenn immer Sie dies möchten bis zum 30.09.2018 die Vernichtung der von Ihnen erhobenen Daten verlangen (hilken@math.uni-tuebingen.de). Dazu müssen Sie uns nicht Ihren Namen verraten, sondern nur Ihr Codewort. Sie könnten also beispielsweise eine E-Mail-Adresse verwenden, die keinen Rückschluss auf ihre Person zulässt oder Sie hinterlegen im Sekretariat des Arbeitsbereiches Ihren Code. Die Sekretärin leitet dann den Code ohne Namen oder sonstige Angaben an die Versuchsleitung weiter.

Für die Erstellung Ihres Codeworts erhalten Sie die Anleitung „Wie erstellen Sie Ihr persönliches Codewort?" Dieses Blatt verbleibt bei Ihnen. Bewahren Sie es bitte sorgfältig auf, damit Sie ggf. später die Löschung Ihrer Daten verlangen können.

Vielen Dank für Ihr Interesse und die Teilnahme an dieser Studie.

Universität Tübingen
JProf. Dr. Carla Cederbaum
Ansprechpartner für eventuelle Rückfragen:
Lisa Hilken
Telefon: 07071/29-78569
hilken@math.uni-tuebingen.de

Einwilligungserklärung

Vernetzung verschiedener mathematischer Gebiete

Ich (Name des Teilnehmers /der Teilnehmerin in Blockschrift)

____

bin mündlich und schriftlich über die Studie und den Versuchsablauf aufgeklärt worden. Ich willige ein, an der o.g. Studie teilzunehmen. Sofern ich Fragen zu dieser vorgesehenen Studie hatte, wurden sie von Herrn/Frau ________________________ vollständig und zu meiner Zufriedenheit beantwortet.

> *Mit der beschriebenen Erhebung und Verarbeitung meiner Texte zu einigen Aufgaben aus dem Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen" bin ich einverstanden. Die Auswertung der Daten erfolgt anonymisiert im Mathematischen Institut der Universität Tübingen, d. h. unter Verwendung eines persönlichen Codewortes, das ich selbst erstellt habe und das nur ich kenne. Das heißt, es ist niemandem möglich, meine Daten mit meinem Namen in Verbindung zu bringen. Das Blatt, auf dem ich dieses Codewort erstellt habe, befindet sich in meinem Besitz. Mir ist bekannt, dass ich mein Einverständnis zur Aufbewahrung bzw. Speicherung meiner Daten widerrufen kann, ohne dass mir daraus Nachteile entstehen. Ich bin darüber informiert worden, dass ich jederzeit bis zum* 30.09.2018 *eine Löschung all meiner Daten verlangen kann. Ich bin einverstanden, dass meine anonymisierten Daten zu Forschungszwecken weiter verwendet werden können und mindestens 10 Jahre gespeichert bleiben.*

Ich hatte genügend Zeit für eine Entscheidung und bin bereit, an der o.g. Studie teilzunehmen. Ich weiß, dass die Teilnahme an der Studie freiwillig ist und ich die Teilnahme jederzeit ohne Angabe von Gründen beenden kann.

Eine Ausfertigung der Teilnehmerinformation über die Untersuchung und eine Ausfertigung der Einwilligungserklärung habe ich erhalten. Die Teilnehmerinformation ist Teil dieser Einwilligungserklärung.

Ort, Datum & Unterschrift des Teilnehmers: Name des Teilnehmers in Druckschrift:

___________________________________ ___________________________________

Universität Tübingen
JProf. Dr. Carla Cederbaum
Universität Tübingen
FB Mathematik
Ansprechpartner für eventuelle Rückfragen:
Lisa Hilken
Telefon: 07071/29-78569
hilken@math.uni-tuebingen.de

Allgemeine Teilnehmerinformation über die Untersuchung

Vorstellungen von Studierenden über Mathematik

Herzlich willkommen bei unserer Studie „Vorstellungen von Studierenden über Mathematik“!
Wir untersuchen mit dieser Studie die Wirkung des Seminars „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“. Dabei interessiert uns, ob sich bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Seminars das Bild von der Mathematik im Laufe des Semesters anders ändert als bei Studierenden, die das Seminar nicht besuchen. Außerdem möchten wir herausfinden, ob das Seminar Auswirkungen auf die Sicht auf das Mathematikstudium im Hinblick auf das spätere Berufsleben hat.

Ablauf der Studie

Die Studie besteht aus einem Fragebogen. Das Ausfüllen des Fragebogens wird etwa 30 Minuten dauern.
Im Fragebogen erheben wir folgende personenbezogene Daten: Studiengang, Fachsemester, Hochschulzugangsberechtigung, Geschlecht und Abiturnote. Des Weiteren enthält der Fragebogen Fragen zu Ihrer Meinung über Mathematik und einige mathematische Aufgaben.
Bei den Fragen zu Ihrer Meinung über Mathematik und das Mathematikstudium gibt es keine richtigen oder falschen Antworten. Antworten Sie bei der Bearbeitung dieser Fragen so, wie es Ihrer Meinung am ehesten entspricht.
Die mathematischen Aufgaben beziehen sich nur auf Inhalte aus den Grundvorlesungen. Lesen Sie sich die Aufgabenstellung jeweils in Ruhe durch und notieren Sie dann Ihre Lösung. Ein Teil der Aufgaben sind offene Aufgaben, wie Sie sie von Übungsblättern her kennen (aber kürzer). Ein anderer Teil sind Lückentexte.
Sollten Sie noch Fragen zum Studienablauf oder Fragebogen haben, wenden Sie sich damit bitte an den/die VersuchsleiterIn.

Freiwilligkeit und Anonymität

Die Teilnahme an der Studie ist freiwillig. Teilnehmen können nur Studierende, die mindestens 18 Jahre alt sind. Sie können jederzeit und ohne Angabe von Gründen die Teilnahme an dieser Studie beenden, ohne dass Ihnen daraus Nachteile entstehen.
Die Erhebung Ihrer oben beschriebenen persönlichen Daten erfolgt vollständig anonymisiert (siehe „Datenschutz“). Alle Daten und persönlichen Mitteilungen werden vertraulich behandelt. So unterliegen diejenigen ProjektmitarbeiterInnen, die durch direkten Kontakt mit Ihnen über personenbezogene Daten verfügen, der Schweigepflicht bzw. dem Datengeheimnis. Des Weiteren wird die Veröffentlichung der Ergebnisse der Studie in anonymisierter Form erfolgen, d. h. ohne dass Ihre Daten Ihrer Person zugeordnet werden können.
Die Fragebögen werden nicht direkt im Anschluss an die Befragung ausgewertet, sondern in einem verschlossenen Umschlag verwahrt, bis die Noten im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ vergeben sind.
Um die Wirkung des oben genannten Seminars herausfinden zu können, benötigen wir als Vergleich auch Daten vom Ende des Semesters. Darum werden wir am Ende des Semesters mit Ihnen Kontakt aufnehmen und Sie bitten, den Fragebogen noch einmal auszufüllen. Dazu werden wir Sie im Seminar oder Tutorium direkt ansprechen oder Ihnen eine E-Mail schreiben. Mit der Einwilligungserklärung stimmen Sie zu, dass wir zu diesem Zwecke Ihre E-Mail-Adresse notieren und verwenden dürfen. Die E-Mail-Adresse wird getrennt von Ihren Daten aufbewahrt und kann nicht mit Ihren Daten in Verbindung gebracht werden.

Datenschutz

Die Erhebung Ihrer oben beschriebenen persönlichen Daten erfolgt vollständig anonymisiert, d. h. an keiner Stelle wird Ihr Name erfragt. Schreiben Sie Ihren Namen nicht auf den Fragebogen! Ihre Antworten und Ergebnisse werden unter einem persönlichen Codewort gespeichert, das Sie selbst anhand einer Regel erstellt haben und das außer Ihnen niemand kennt. Das heißt, es ist niemandem möglich, Ihre Daten mit Ihrem Namen in Verbindung zu bringen. Die anonymisierten Daten werden mindestens 10 Jahre auf Servern der Universität Tübingen gespeichert.
Sie können allerdings, wenn immer Sie dies möchten, bis zum 30.09.2019 die Löschung der von Ihnen erhobenen Daten verlangen (hilken@math.uni-tuebingen.de). Dazu müssen Sie uns nicht Ihren Namen verraten, sondern nur Ihr Codewort. Sie könnten also beispielsweise eine E-Mail-Adresse verwenden, die keinen Rückschluss auf ihre Person zulässt oder Sie hinterlegen im Sekretariat des Arbeitsbereiches Ihren Code. Die Sekretärin leitet dann den Code ohne Namen oder sonstige persönliche Angaben an die Versuchsleitung weiter.
Für die Erstellung Ihres Codeworts erhalten Sie die Anleitung „Wie erstellen Sie Ihr persönliches Codewort?“. Dieses Blatt verbleibt bei Ihnen. Bewahren Sie es bitte sorgfältig auf, damit Sie ggf. später die Löschung Ihrer Daten verlangen können.

Vielen Dank für Ihr Interesse und die Teilnahme an dieser Studie.

Universität Tübingen

JProf. Dr. Carla Cederbaum

Ansprechpartner für eventuelle Rückfragen:

Lisa Hilken

Telefon: 07071/29-78569

hilken@math.uni-tuebingen.de

Einwilligungserklärung

Titel der Studie: ***Vorstellungen von Studierenden über Mathematik***

Ich (Name des Teilnehmers /der Teilnehmerin in Blockschrift)

____

bin mündlich und schriftlich über die Studie und den Versuchsablauf aufgeklärt worden. Ich willige ein, an der o.g. Studie teilzunehmen. Sofern ich Fragen zu dieser vorgesehenen Studie hatte, wurden sie von Herrn/Frau ________________________ vollständig und zu meiner Zufriedenheit beantwortet.

> *Mit der beschriebenen Erhebung und Verarbeitung der personenbezogenen Daten (Studiengang, Fachsemester, Hochschulzugangsberechtigung, Geschlecht und Abiturnote) sowie meiner Meinung über Mathematik und meiner Lösung zu einigen mathematischen Aufgaben bin ich einverstanden. Die Aufzeichnung und Auswertung der Daten erfolgt anonymisiert im Mathematischen Institut der Universität Tübingen, d. h. unter Verwendung eines persönlichen Codewortes, das ich selbst erstellt habe und das nur ich kenne. Das heißt, es ist niemandem möglich, meine Daten mit meinem Namen in Verbindung zu bringen. Das Blatt, auf dem ich dieses Codewort erstellt habe, befindet sich in meinem Besitz. Mir ist bekannt, dass ich mein Einverständnis zur Aufbewahrung bzw. Speicherung meiner Daten widerrufen kann, ohne dass mir daraus Nachteile entstehen. Ich bin darüber informiert worden, dass ich jederzeit bis zum* 30.09.2019 *eine Löschung all meiner Daten verlangen kann. Ich bin einverstanden, dass meine anonymisierten Daten zu Forschungszwecken weiter verwendet werden können und mindestens 10 Jahre gespeichert bleiben.*

Ich hatte genügend Zeit für eine Entscheidung und bin bereit, an der o.g. Studie teilzunehmen. Ich weiß, dass die Teilnahme an der Studie freiwillig ist und ich die Teilnahme jederzeit ohne Angaben von Gründen beenden kann.

Eine Ausfertigung der Teilnehmerinformation über die Untersuchung und eine Ausfertigung der Einwilligungserklärung habe ich erhalten. Die Teilnehmerinformation ist Teil dieser Einwilligungserklärung.

Ort, Datum & Unterschrift des Teilnehmers: Name des Teilnehmers in Druckschrift:

__________________________________ __________________________________